Exemplo de Solução Numérica

Considerando funções quaisquer em um campo tridimensional e não estacionário

$$\frac{d}{dt}f(x,y,z,t) = g(x,y,z,t)$$

Essa equação pode ser resolvida numericamente por uma integração Euler no tempo

$$f(x,y,z,t+\Delta t) = f(x,y,z,t) + \frac{d}{dt}f(x,y,z,t)\Delta t$$

ou

$$f(x,y,z,t+\Delta t) = f(x,y,z,t) + g(x,y,z,t)\Delta t$$

Considerando a equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

Expandindo

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\rho w) = 0$$

Uma maneira de resolver é usar uma aproximação algébrica para as derivadas. Essa aproximação pode ser obtida usando uma série de Taylor

$$h(t+\Delta t) = h(t) + \frac{d}{dt}h(t)\Delta t + \frac{d^2}{dt^2}h(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{d^3}{dt^3}h(t)\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots$$

Resolvendo para a derivada

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} - \frac{d^2}{dt^2}h(t)\frac{\Delta t}{2!} - \frac{d^3}{dt^3}h(t)\frac{\Delta t^2}{3!} - \cdots$$

Desprezando os termos de ordem mais alta

$$\frac{d}{dt}h(t) \cong \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

Em forma indicial

$$\frac{d}{dt}h^{n+1} \cong \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t}$$

Usando essa aproximação na equação da continuidade, onde i, j e k são os índices para as direções x, y e z, respectivamente,

$$\frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{i+1,j,k}^{n} - (\rho u)_{i,j,k}^{n}}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_{i,j+1,k}^{n} - (\rho v)_{i,j,k}^{n}}{\Delta y} + \frac{(\rho w)_{i,j,k+1}^{n} - (\rho w)_{i,j,k}^{n}}{\Delta z} = 0$$

Colocando na forma da solução por Euler

$$\rho_{i,j,k}^{n+1} = \rho_{i,j,k}^{n} + \left[\frac{(\rho u)_{i+1,j,k}^{n} - (\rho u)_{i,j,k}^{n}}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_{i,j+1,k}^{n} - (\rho v)_{i,j,k}^{n}}{\Delta y} + \frac{(\rho w)_{i,j,k+1}^{n} - (\rho w)_{i,j,k}^{n}}{\Delta z}\right]\Delta t$$

As demais equações também precisam ser discretizadas para que, além de ρ, sejam obtidas soluções para todas as outras variáveis como u, v e w, por exemplo, para cada passo Δt. O processo de solução parte de uma condição inicial, em que todas as variáveis são conhecidas, e avança no tempo resolvendo todas as equações. Nesse processo de solução, o tempo e o espaço são discretizados com Δt, Δx, Δy e Δz. E geram o que é chamado de malha computacional no domínio (volume de controle) a ser estudado. As figuras abaixo mostram exemplos de malha computacional.

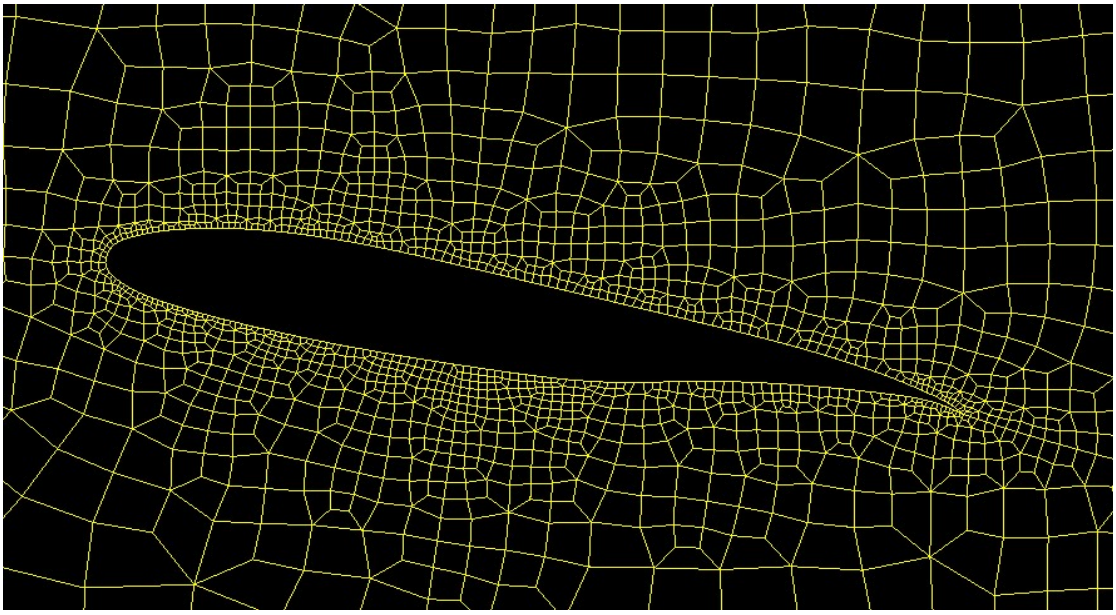

Figura 1: Exemplo de discretização espacial bidimensional para o estudo aerodinâmico de uma seção de aerofólio.

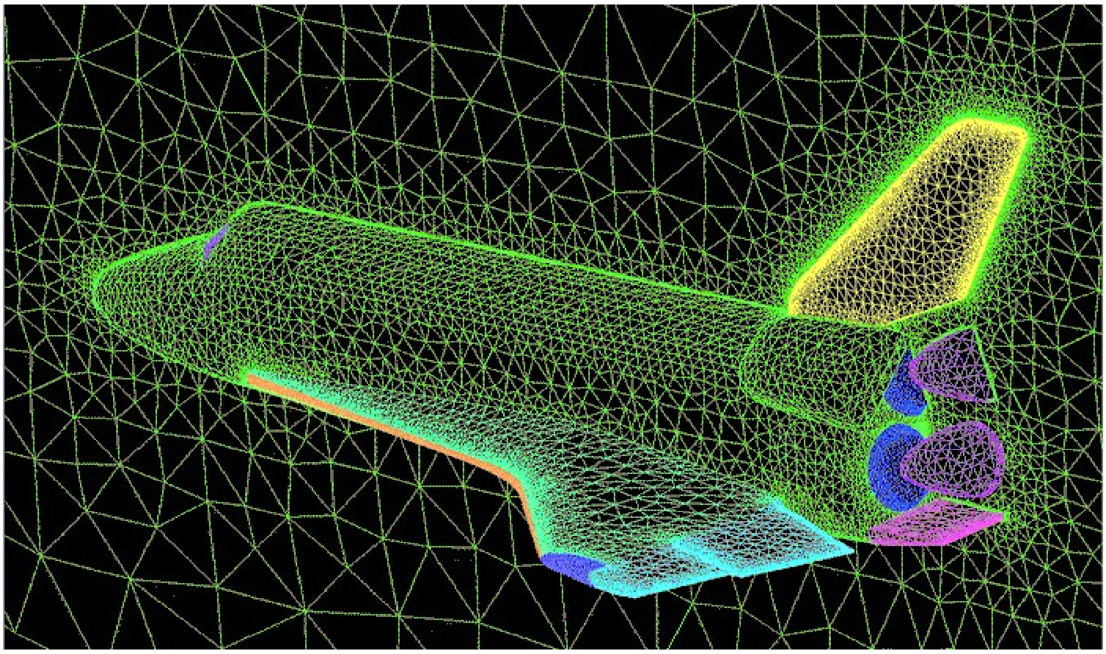

Figura 2: Exemplo de discretização espacial tridimensional para o estudo aerodinâmico do ônibus espacial. Só aparece a malha nas superfícies mas a malha computacional ocupa todo o volume do domínio com elementos tetrahédricos.