Eletromagnetismo

4300372

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano (monitor)

guilherme.germano@usp.br

edisciplinas.if.usp.br

Plano do Curso

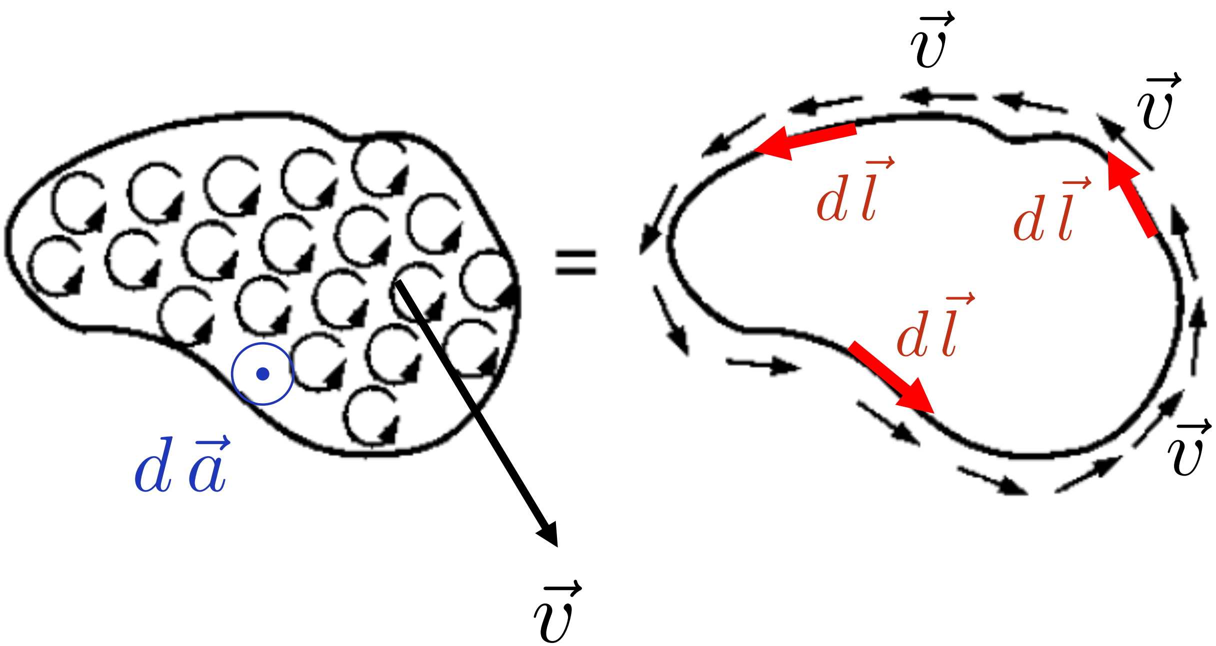
16/08	13/09	11/10	08/11
19/08	16/09	14/10	11/11
23/08	20/09 P1	18/10	15/11
26/08	23/09	21/10 P2	18/11
30/08	27/09	25/10	22/11
02/09	30/09	28/10	25/11
06/09	04/10	01/11	29/11 P3
09/09	07/10	04/11	02/12 ex
			06/12 Sub

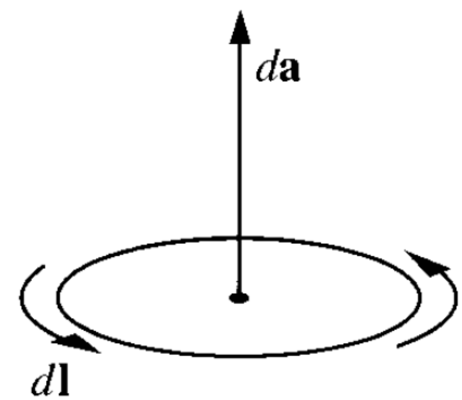
Aula 5

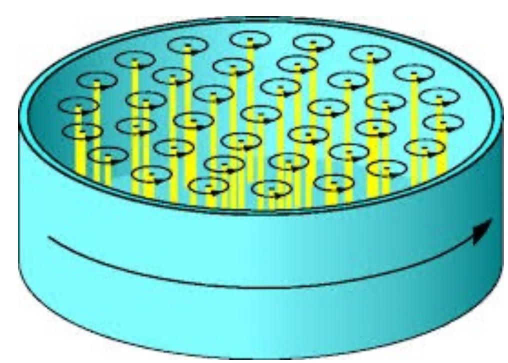
O potencial eletrostático

Teorema de Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

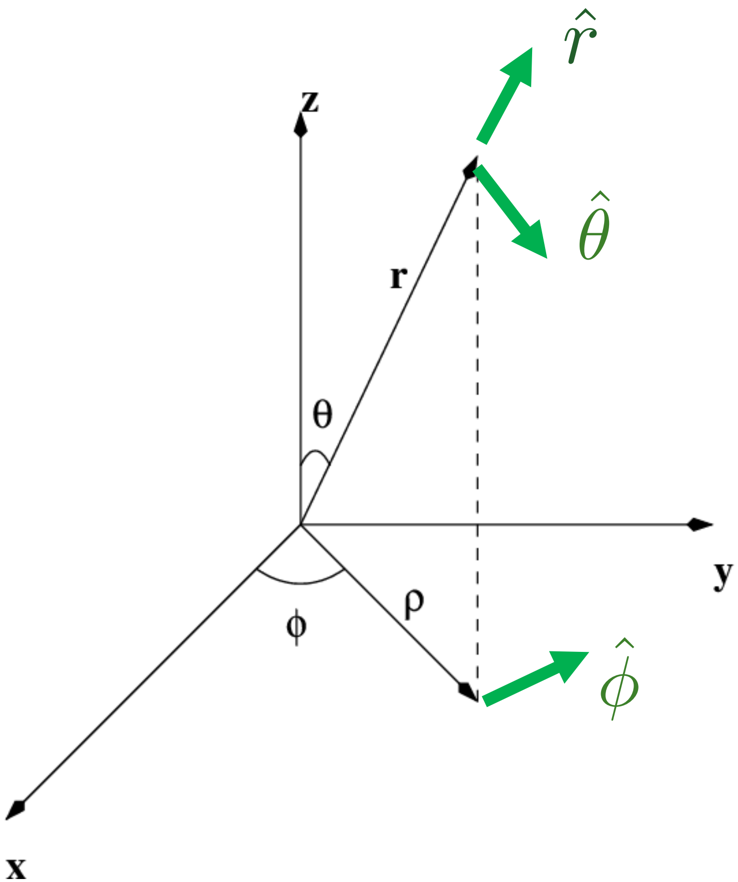




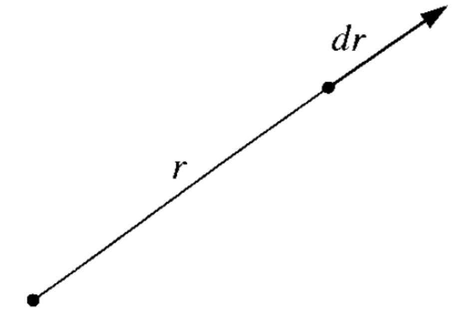


A rotação criada no interior se manifesta
na borda e vice-versa !

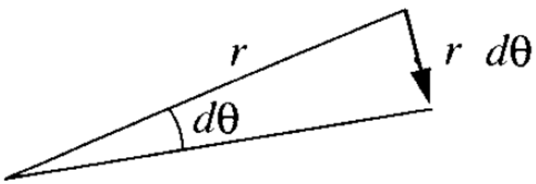
Coordenadas esféricas



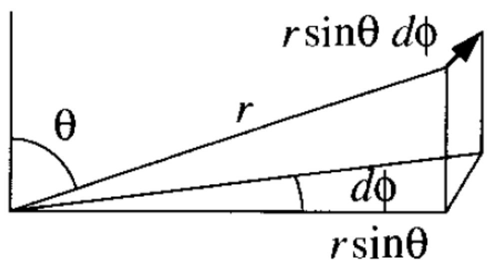
Deslocamento infinitesimal em r



Deslocamento infinitesimal em theta



Deslocamento infinitesimal em phi

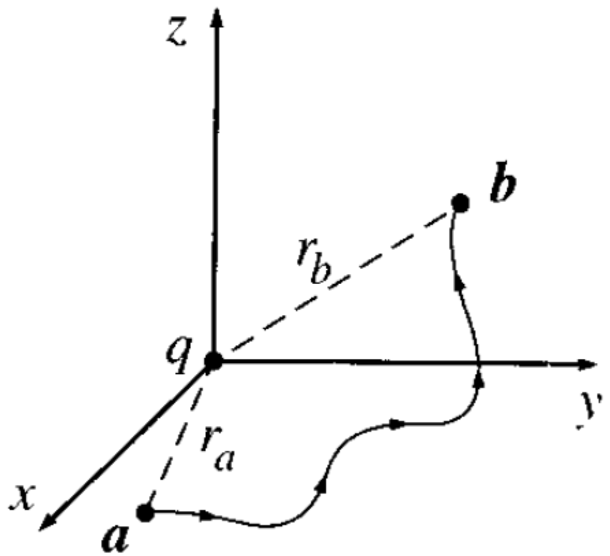


Deslocamento infinitesimal total em esféricas :

$$d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Carga em repouso na origem

Vamos calcular $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$



$$\begin{cases} \mathbf{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \\[2em] d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases}$$

$$\hat{r}\,.\,\hat{r} = 1 \quad \hat{r}\,.\,\hat{\theta} = 0 \quad \hat{r}\,.\,\hat{\phi} = 0$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{q}{r^2}dr = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\bigg|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b}\right)$$

Se o percurso for fechado, a = b , $r_a = r_b$, temos $$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Usando o Teorema de Stokes $$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \,.\, d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \,.\, d\vec{l}$$

Concluimos que $$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Se houverem várias cargas, usamos o princípio da superposição :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots) = (\nabla \times \mathbf{E}_1) + (\nabla \times \mathbf{E}_2) + \ldots = 0$$

Vale para qualquer distribuição estática de cargas !!!

Potencial Elétrico

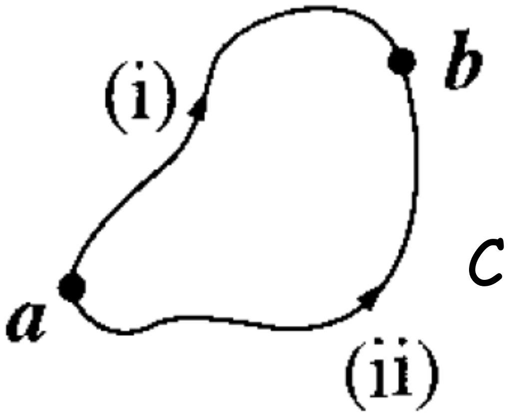
Teorema: Se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ $\longrightarrow$ $\mathbf{F} = -\nabla V$

Vimos que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ e então $\mathbf{E} = -\nabla V$

V é uma função escalar : o potencial elétrico

Potencial Elétrico

Vamos apresentar V de outra maneira:



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \,.\, d\vec{l} = \int_{a(i)}^{b} \vec{E} \,.\, d\vec{l} + \int_{b(ii)}^{a} \vec{E} \,.\, d\vec{l} = 0$$

$$\int_{a(i)}^{b} \vec{E} \,.\, d\vec{l} = - \int_{b(ii)}^{a} \vec{E} \,.\, d\vec{l}$$

A integral $\int_{a}^{b} \vec{E} \,.\, d\vec{l}$

$$\int_{a(i)}^{b} \vec{E} \,.\, d\vec{l} = \int_{a(ii)}^{b} \vec{E} \,.\, d\vec{l}$$

não depende do caminho de a para b !!!

Então podemos definir $$\boxed{V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

$\mathcal{O}$ é um ponto de referência arbitrário e $V = V(r)$

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\left\{\begin{aligned} V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) &= \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}\right.$$

(do teorema fundamental do cálculo)

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \longrightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

Comentários

1) O potencial NÃO É a energia potencial ! (mas é parente próximo...)

2) O ponto de referência é arbitrário ! Se escolhermos um outro, vamos apenas somar uma constante ao potencial.

$$V'(\mathbf{r}) = -\int_{\mathcal{O}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = K + V(\mathbf{r})$$

A diferença de energia potencial entre dois pontos nunca muda!

$$V'(\mathbf{b}) - V'(\mathbf{a}) = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})$$

A derivada das constantes dá zero e assim: $\nabla V' = \nabla V$

O campo elétrico não depende do ponto de referência pois $\mathbf{E} = -\nabla V$

Escolha usual do ponto de referência $\mathcal{O} = \infty$

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{r} \vec{E}\,.\,d\vec{l} \longrightarrow \boxed{V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,.\,d\vec{l}}$$

No ponto de referência o potencial é zero !

$$V(\infty) = -\int_{\infty}^{\infty} \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0$$

O melhor é usar a expressão geral e escolher o ponto de referência depois !

$$\boxed{V(b) - V(a) = -\int_{a}^{b} \vec{E}\,.\,d\vec{l}}$$

3) O potencial obedece o princípio da superposição

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots$$

$$V = V_1 + V_2 + \ldots$$

4) As unidades :

$\vec{F}$ Newton

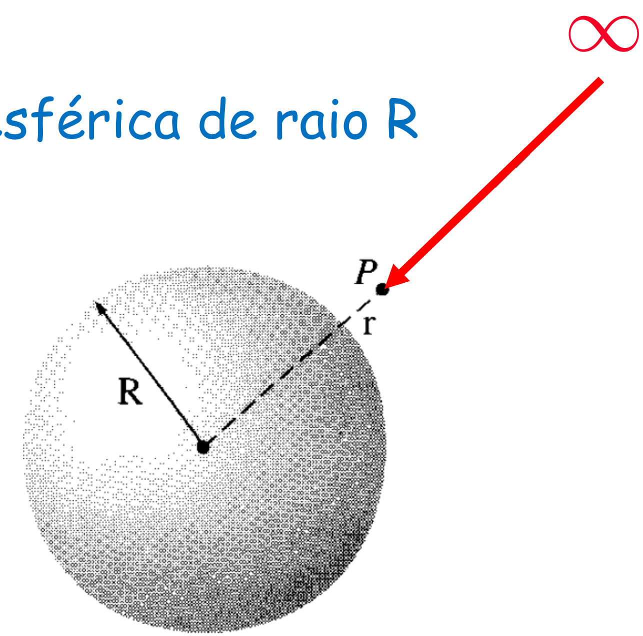
Q Coulomb

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{Q}$ Newton / Coulomb

$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{r} \vec{E} \, . \, d\vec{l}$ Newton metro / Coulomb = Joule/Coulomb = Volt

Exemplo 2.6

Calcule o potencial dentro e fora de uma casca esférica de raio R com carga q uniformemente distribuída.



a) Fora da casca (r>R):

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \,.\, d\vec{l}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

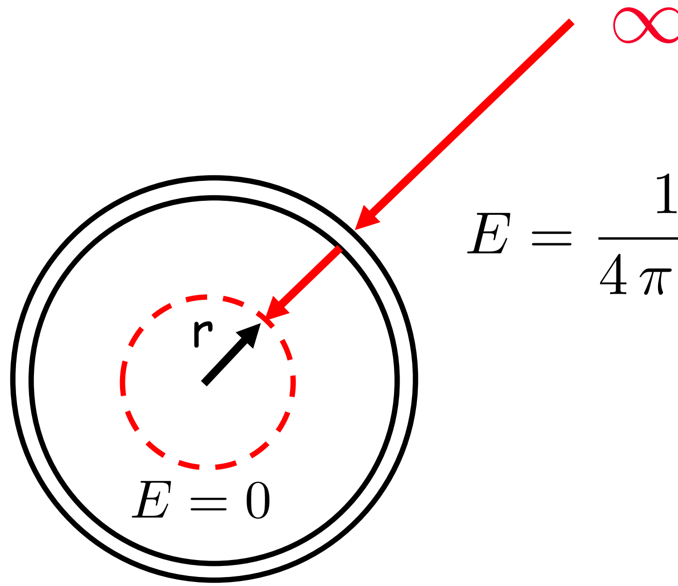
$$d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}\,dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}.$$

a) Dentro da casca (r<R):

O campo elétrico é
zero pela lei de Gauss

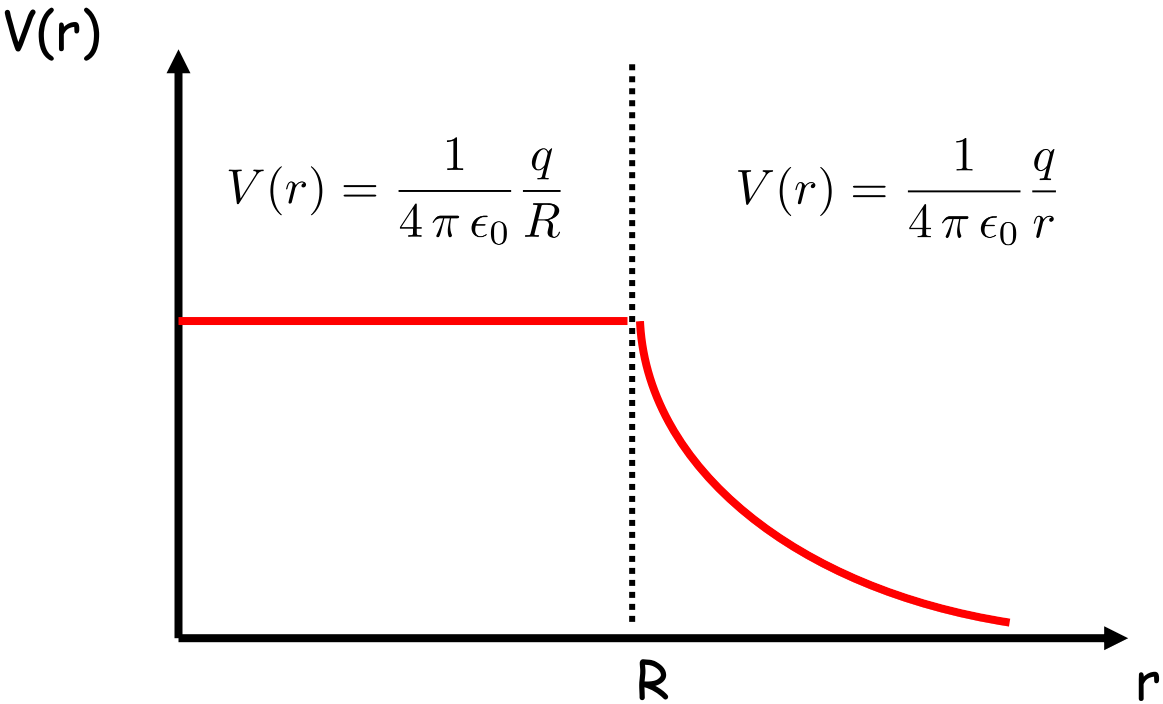


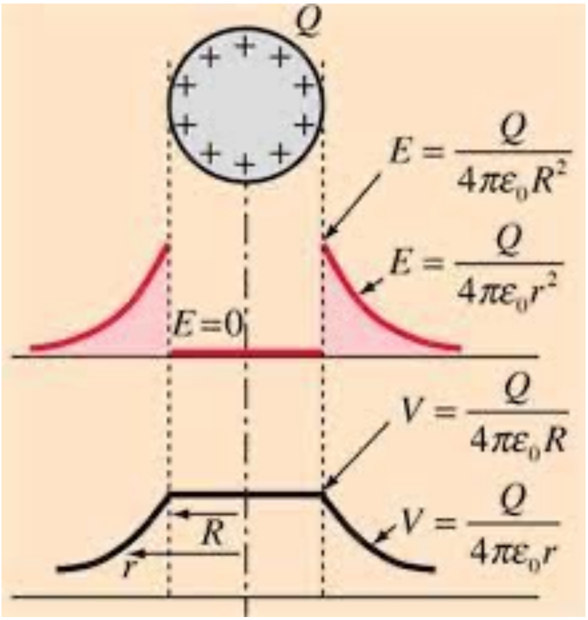
$$E = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\,.\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R}\vec{E}\,.\,d\vec{r} - \int_{R}^{r}\cancelto{0}{\vec{E}}\,.\,d\vec{r}$$

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{q}{r'^2}\,dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}\bigg|_{\infty}^{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

O gráfico


V(r)
$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$
$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$
R
r


Q
$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
$E = 0$
$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$
$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
R
r

Coordenadas cilíndricas

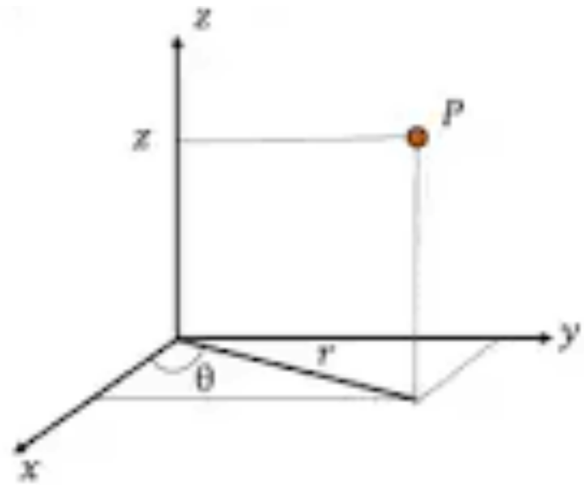
$$x = r.\cos\theta$$

$$y = r.\sin\theta$$

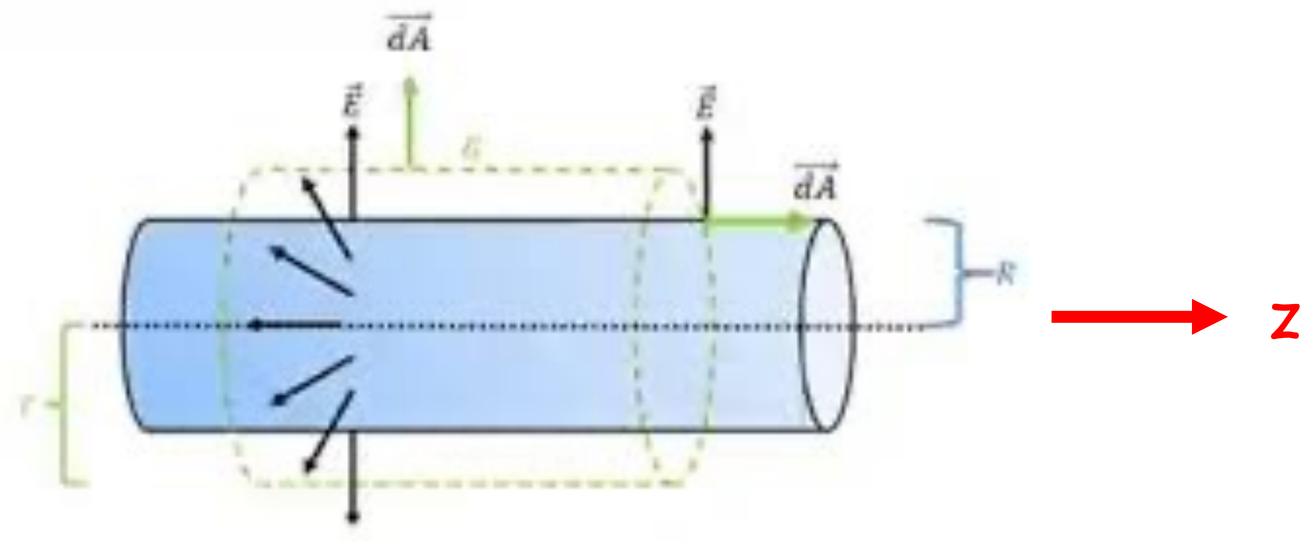
$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \left(\frac{y}{x}\right)$$

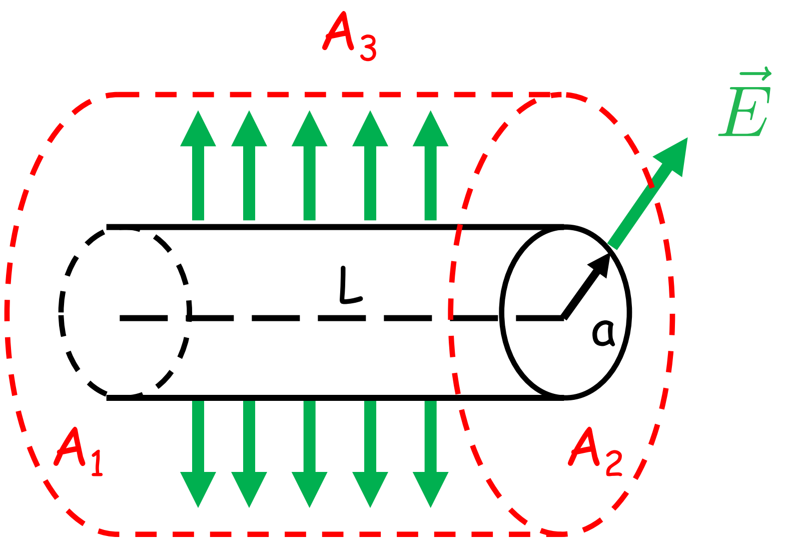


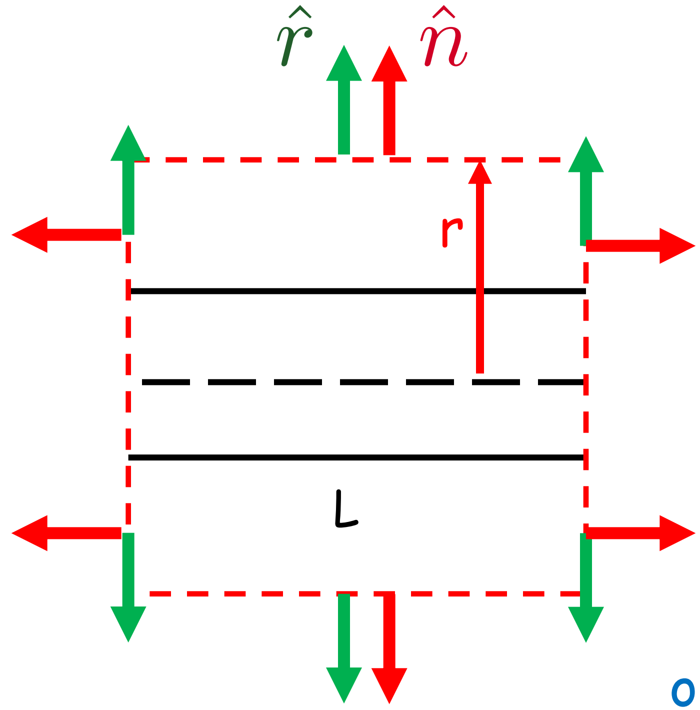
Campo elétrico de uma casca cilíndrica carregada infinita



Potencial de uma casca cilíndrica de raio a com densid. sup. de carga σ

Campo elétrico: $r > a$





$$\vec{E} = E\,\hat{r}$$

$$\hat{n} = \hat{r}$$

$$\vec{E}\,.\,\hat{n} = E$$

Nas tampas
o fluxo é zero !

$$\oint_A \vec{E}\,.\,\hat{n}\,da = \frac{Q_e}{\epsilon_0}$$

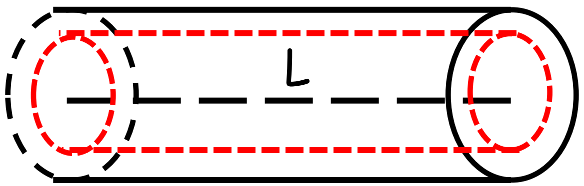
$$\int_{A_3} E\,da = \frac{\sigma\,A_c}{\epsilon_0}$$

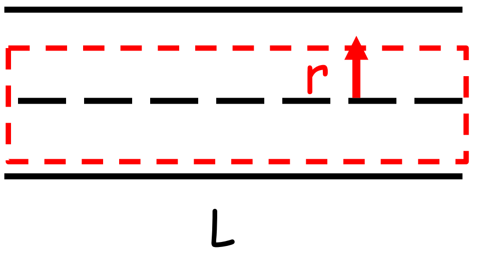
$$\cancel{2}\,\pi\,r\,\cancel{L}\,E = \frac{\cancel{2}\,\pi\,a\,\cancel{L}\,\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{a}{r}\hat{r}}$$

Potencial de uma casca cilíndrica de raio a com densid. sup. de carga σ

Campo elétrico: $r < a$





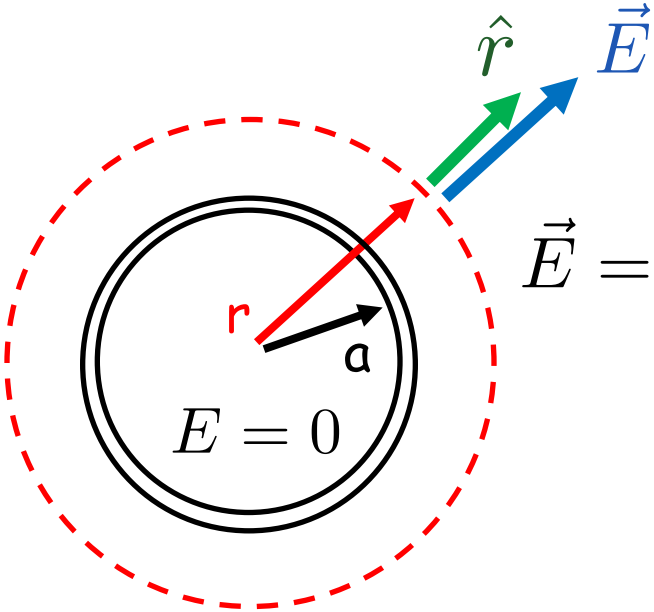
A carga envolvida ("dentro") pela sup. Gaussiana é zero o campo elétrico é zero !

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

Nas regiões onde
o campo elétrico é nulo
o potencial não muda !

Potencial de uma casca cilíndrica de raio a com densid. sup. de carga σ



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{a}{r}\hat{r}$$

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}\,.\,d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = d\vec{r} \qquad d\vec{r} = dr\,\hat{r}$$

Ponto de referência: r = a onde V = 0

$$a = a$$

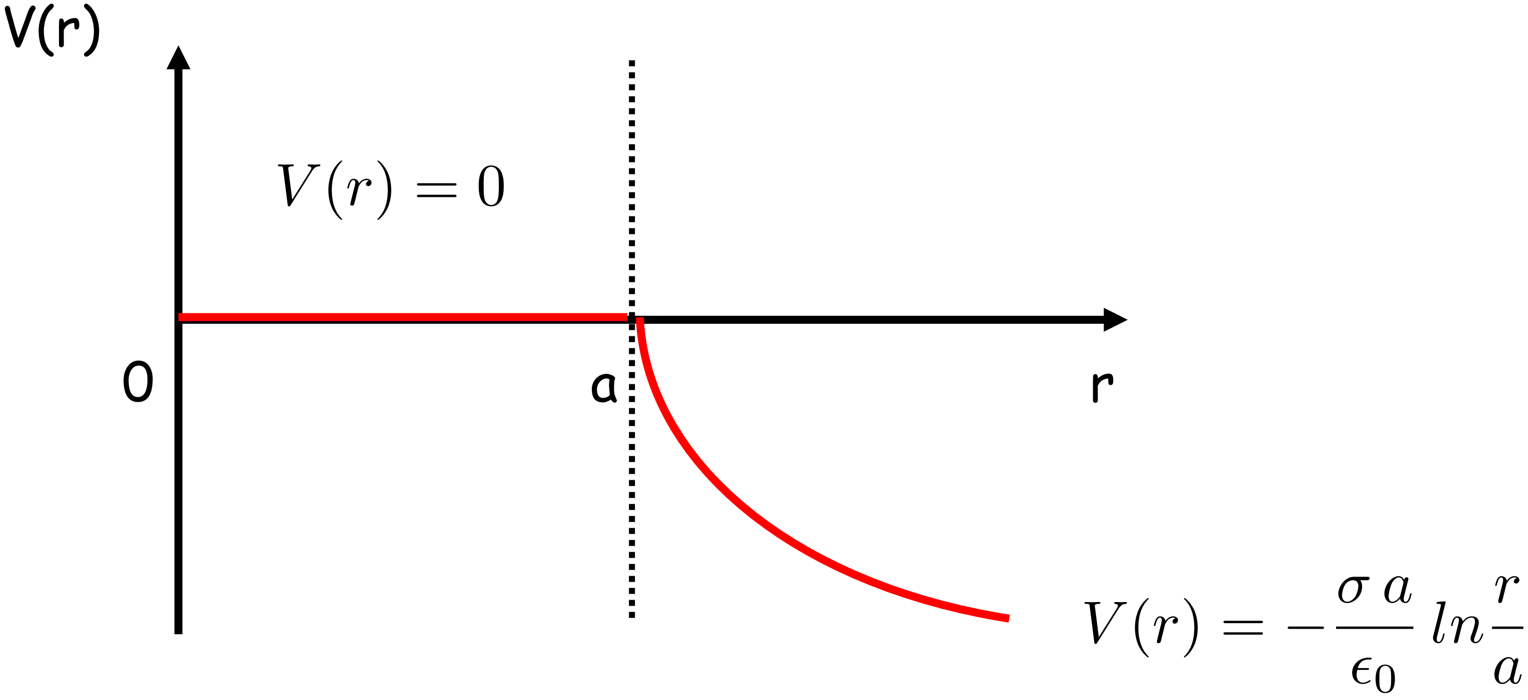
Ponto de interesse: r = r onde V(r)

$$b = r$$

$$V(r) = -\int_a^r \frac{\sigma\,a}{\epsilon_0\,r}\hat{r}\,.\,\hat{r}\,dr = -\frac{\sigma\,a}{\epsilon_0}\int_a^r \frac{1}{r}\,dr = -\frac{\sigma\,a}{\epsilon_0}(lnr - lna)$$

$$\boxed{V(r) = -\frac{\sigma\,a}{\epsilon_0}\,ln\frac{r}{a}}$$

O gráfico



FIM

A equação de Poisson

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Multiplicamos dos dois lados por $\vec{\nabla}\,.$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V$$

Lembramos da lei da Gauss na forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Chegamos em

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Equação de Poisson

$$\int_a^b d\vec{l} = \int_a^b dx(-\hat{x}) = (b-a)(-\hat{x})$$