Apêndice F

ANÁLISE DE INCERTEZA EXPERIMENTAL

F-1 INTRODUÇÃO

Dados de testes experimentais são freqüentemente utilizados para complementar análises de engenharia como uma base de projeto. Nem todos os dados são igualmente bons; a validade dos dados deve ser documentada antes que os resultados do teste sejam usados no projeto. A análise de incerteza é o procedimento usado para quantificar a validade e exatidão dos dados.

A análise de incerteza também é útil durante o projeto do experimento. Estudos cuidadosos podem indicar fontes potenciais de erros inaceitáveis e sugerir métodos de medição aperfeiçoados.

F-2 TIPOS DE ERROS

Erros estão sempre presentes quando medições experimentais são feitas. Além dos enganos grosseiros do experimentalista, os erros podem ser de dois tipos. O erro fixo (ou sistemático) causa repetidas medições erradas da mesma quantidade em cada tentativa. O erro fixo é o mesmo para cada leitura, e pode ser eliminado por calibração ou correção apropriada. O erro aleatório (não repetitivo) é diferente para cada leitura e, por isso, não pode ser eliminado. Os fatores que introduzem erro aleatório são incertos por sua própria natureza. O objetivo da análise de incerteza é estimar o erro aleatório provável nos resultados experimentais.

Admitimos que o equipamento foi construído corretamente e calibrado de forma apropriada para eliminar os erros fixos. Admitimos que os instrumentos têm resolução apropriada e que as flutuações nas leituras não são excessivas. Admitimos, também, que observações são feitas e registradas com o devido cuidado de modo que só os erros aleatórios permaneçam.

F-3 ESTIMATIVA DE INCERTEZA

Nosso objetivo é estimar a incerteza de medições experimentais e de resultados calculados devido aos erros aleatórios. O procedimento tem três etapas:

1. Estimar o intervalo de incerteza para cada quantidade medida.
2. Estabelecer o limite de confiança em cada medição.
3. Analisar a propagação de incerteza nos resultados calculados a partir dos dados experimentais.

A seguir, delineamos o procedimento para cada etapa e ilustramos aplicações com exemplos.

Etapa 1. *Estimar o intervalo da incerteza de medição.* Denote as variáveis medidas em um experimento por $x_1, x_2, ..., x_n$. Um modo possível de determinar o intervalo de incerteza para cada variável é repetir cada medição muitas vezes. O resultado é uma distribuição de dados pade todas as leituras futuras são esperadas cair dentro do intervalo. Probabilidades de cerca de 20 por 1 correspondem a $\pm 2\sigma$ e de 3 por 1 correspondem a limites de confiança de $\pm \sigma$. Probabilidades de 20 por 1 são as utilizadas, tipicamente, nos trabalhos de engenharia.

Etapa 3. *Analisar a propagação de incerteza nos cálculos.* Suponha que medições das variáveis independentes, $x_1, x_2, ..., x_n$, sejam feitas no laboratório. A incerteza relativa de cada quantidade medida independentemente é estimada como u_i. As medições são usadas para calcular algum resultado, R, para o experimento. Desejamos analisar como os erros nos x_is *propagam-se* no cálculo de R a partir dos valores medidos.

Em geral, R pode ser expresso matematicamente como $R = R(x_1, x_2, ..., x_n)$. O efeito sobre R de um erro na medição de um x_i individual pode ser estimado por analogia com a derivada de uma função [4]. Uma variação, δx_i, em x_i causa uma variação δR_i em R,

$$\delta R_i = \frac{\partial R}{\partial x_i}\delta x_i$$

A variação relativa em R é

$$\frac{\delta R_i}{R} = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}\delta x_i = \frac{x_i}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\delta x_i}{x_i} \qquad \text{(F.1)}$$

A Eq. F.1 pode ser usada para estimar a incerteza relativa no resultado devido à incerteza em x_i. Introduzindo a notação de incerteza relativa, obtemos

$$u_{R_i} = \frac{x_i}{R}\frac{\partial R}{\partial x_i}u_{x_i} \qquad \text{(F.2)}$$

Como podemos estimar a incerteza relativa em R causada pelos efeitos combinados das incertezas relativas em todos os x_is? O erro aleatório em cada variável tem uma faixa de valores dentro do intervalo de incerteza. É improvável que todos os erros tenham valores adversos ao mesmo tempo. Pode ser demonstrado [2] que a melhor representação para a incerteza relativa do resultado é

$$u_R = \pm\left[\left(\frac{x_1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_1}u_1\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x_2}u_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{R}\frac{\partial R}{\partial x_n}u_n\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(F.3)}$$

EXEMPLO F.2 Incerteza no Volume de Cilindro

Obtenha uma expressão para a incerteza na determinação do volume de um cilindro a partir de medições do seu raio e da sua altura. O volume do cilindro, em termos do raio e da altura, é

$$\forall = \forall(r, h) = \pi r^2 h$$

Diferenciando, obtemos

$$d\forall = \frac{\partial \forall}{\partial r}dr + \frac{\partial \forall}{\partial h}dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2 dh$$

posto que

$$\frac{\partial \forall}{\partial r} = 2\pi rh \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \forall}{\partial h} = \pi r^2$$

Da Eq. F.2, a incerteza relativa devido ao raio é

$$u_{\forall,r} = \frac{\delta \forall_r}{\forall} = \frac{r}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial r}u_r = \frac{r}{\pi r^2 h}(2\pi rh)u_r = 2u_r$$

e a incerteza relativa devido à altura é

$$u_{\forall,h} = \frac{\delta \forall_h}{\forall} = \frac{h}{\forall}\frac{\partial \forall}{\partial h}u_h = \frac{h}{\pi r^2 h}(\pi r^2)u_h = u_h$$

A incerteza relativa no volume é, então,

$$u_{\forall} = \pm\left[(2u_r)^2 + (u_h)^2\right]^{1/2} \tag{F.4}$$

Comentário: O coeficiente 2, na Eq. F.4, mostra que a incerteza na medição do raio do cilindro tem um efeito maior do que a incerteza na medição da altura. Isso ocorre porque o raio está elevado ao quadrado na equação do volume.

F-4 APLICAÇÕES A DADOS

Aplicações a dados obtidos de medições de laboratório são ilustradas nos exemplos que se seguem.

EXEMPLO F.3 Incerteza na Vazão Mássica de Líquido

A vazão mássica de água escoando através de um tubo deve ser determinada coletando-a em um béquer. A vazão mássica é calculada dividindo o valor da massa de água coletada pelo intervalo de tempo,

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{F.5}$$

onde $\Delta m = m_f - m_e$. As estimativas de erro para as quantidades medidas são

Massa do béquer cheio, $m_f = 400 \pm 2$ g (20 por 1)

Massa do béquer vazio, $m_e = 200 \pm 2$ g (20 por 1)

Intervalo de tempo de coleta, $\Delta t = 10 \pm 0{,}2$ s (20 por 1)

As incertezas relativas nas quantidades medidas são

$$u_{m_f} = \pm\frac{2\,\text{g}}{400\,\text{g}} = \pm 0{,}005$$

$$u_{m_e} = \pm\frac{2\,\text{g}}{200\,\text{g}} = \pm 0{,}01$$

$$u_{\Delta t} = \pm\frac{0{,}2\,\text{s}}{10\,\text{s}} = \pm 0{,}02$$

A incerteza relativa no valor medido da massa de água é calculada a partir da Eq. F.3 como

$$\begin{aligned} u_{\Delta m} &= \pm\left[\left(\frac{m_f}{\Delta m}\frac{\partial \Delta m}{\partial m_f}u_{m_f}\right)^2 + \left(\frac{m_e}{\Delta m}\frac{\partial \Delta m}{\partial m_e}u_{m_e}\right)^2\right]^{1/2} \\ &= \pm\{[(2)(1)(\pm 0{,}005)]^2 + [(1)(-1)(\pm 0{,}01)]^2\}^{1/2} \\ u_{\Delta m} &= \pm 0{,}0141 \end{aligned}$$

Uma vez que $\dot{m} = \dot{m}(\Delta m, \Delta t)$, podemos escrever a Eq. F.3 como

$$u_{\dot{m}} = \pm\left[\left(\frac{\Delta m}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m}u_{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t}u_{\Delta t}\right)^2\right]^{1/2} \tag{F.6}$$

Os termos requeridos das derivadas parciais são

$$\frac{\Delta m}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta m} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta t}{\dot{m}}\frac{\partial \dot{m}}{\partial \Delta t} = -1$$

Substituindo na Eq. F.6, resulta

$$u_{\dot{m}} = \pm\{[(1)(\pm 0{,}0141)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}02)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{\dot{m}} = \pm 0{,}0245 \qquad \text{ou} \qquad \pm 2{,}45\% \text{ (20 por 1)}$$

Comentário: O intervalo de incerteza de 2% na medição do tempo é a contribuição mais importante para o intervalo de incerteza no resultado.

EXEMPLO F.4 Incerteza no Número de Reynolds para Escoamento de Água

O número de Reynolds deve ser calculado para o escoamento de água num tubo. A equação de cálculo para o número de Reynolds é

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi\mu D} = Re(\dot{m}, D, \mu) \tag{F.7}$$

Consideramos o intervalo de incerteza no cálculo da vazão em massa. E com relação às incertezas em μ e D? O diâmetro do tubo é dado como $D = 6{,}35$ mm. Podemos admitir este valor como exato? O diâmetro deve ser medido com leitura mínima de 0,1 mm. Assim, a incerteza relativa no diâmetro é estimada como

$$u_D = \pm\frac{0{,}05\text{ mm}}{6{,}35\text{ mm}} = \pm 0{,}00787 \qquad \text{ou} \qquad \pm 0{,}787\%$$

A viscosidade da água depende da temperatura. A temperatura é estimada em $T = 24 \pm 0{,}5$°C. Como a incerteza na temperatura afeta a incerteza em μ? Um modo de estimar isso é escrever

$$u_{\mu(T)} = \pm\frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT}(\pm\delta T) \tag{F.8}$$

A derivada pode ser estimada a partir de dados tabulados de viscosidade próximos da temperatura nominal de 24°C. Assim,

$$\frac{d\mu}{dT} \approx \frac{\Delta\mu}{\Delta T} = \frac{\mu(25^\circ\text{C}) - \mu(23^\circ\text{C})}{(25-23)^\circ\text{C}} = (0{,}000890 - 0{,}000933)\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{1}{2^\circ\text{C}}$$

$$\frac{d\mu}{dT} = -2{,}15\times 10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s/(m}^2\cdot{}^\circ\text{C)}$$

Segue, da Eq. F.8, que a incerteza na viscosidade devido à temperatura é

$$u_{\mu(T)} = \frac{1}{0{,}000911}\,\frac{\text{m}^2}{\text{N}\cdot\text{s}} \times -2{,}15\times 10^{-5}\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2\cdot{}^\circ\text{C}} \times (\pm 0{,}5^\circ\text{C})$$

$$u_{\mu(T)} = \pm 0{,}0118 \qquad \text{ou} \qquad \pm 1{,}18\%$$

Os próprios dados tabulados de viscosidade também apresentam alguma incerteza. Se ela for de ± 1,0%, uma estimativa para a incerteza relativa resultante na viscosidade será

$$u_\mu = \pm[(\pm 0{,}01)^2 + (\pm 0{,}0118)^2]^{1/2} = \pm 0{,}0155 \qquad \text{ou} \qquad \pm 1{,}55\%$$

As incertezas na vazão em massa, diâmetro do tubo e viscosidade, necessárias para calcular o intervalo de incerteza para o número de Reynolds calculado, são agora conhecidas. As derivadas parciais requeridas, determinadas a partir da Eq. F.7, são

$$\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}} = \frac{\dot{m}}{Re}\frac{4}{\pi \mu D} = \frac{Re}{Re} = 1$$

$$\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu} = \frac{\mu}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi \mu^2 D} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

$$\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D} = \frac{D}{Re}(-1)\frac{4\dot{m}}{\pi \mu D^2} = -\frac{Re}{Re} = -1$$

Substituindo na Eq. F.3, resulta

$$u_{Re} = \pm\left\{\left[\frac{\dot{m}}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \dot{m}}u_{\dot{m}}\right]^2 + \left[\frac{\mu}{Re}\frac{\partial Re}{\partial \mu}u_{\mu}\right]^2 + \left[\frac{D}{Re}\frac{\partial Re}{\partial D}u_D\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm\{[(1)(\pm 0{,}0245)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}0155)]^2 + [(-1)(\pm 0{,}00787)]^2\}^{1/2}$$

$$u_{Re} = \pm 0{,}0300 \quad \text{ou} \quad \pm 3{,}00\%$$

Comentário: Os Exemplos F.3 e F.4 ilustram dois pontos importantes para o projeto de um experimento. Primeiro, a massa de água coletada, Δm, é calculada a partir de duas quantidades medidas, m_f e m_e. Para qualquer intervalo de incerteza admitido nas medições de m_f e m_e, a incerteza *relativa* em Δm pode ser diminuída fazendo Δm maior. Isso pode ser realizado usando recipientes maiores ou um tempo de medição mais longo, Δt, que também reduziria a incerteza relativa no Δt medido. Segundo, a incerteza nos dados tabulados de propriedades pode ser significativa. A incerteza dos dados também é aumentada pela incerteza na medição da temperatura do fluido.

EXEMPLO F.5 Incerteza na Velocidade do Ar

A velocidade do ar é calculada a partir de medições com tubo de pitot em um túnel de vento. Da equação de Bernoulli,

$$V = \left(\frac{2gh\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}\right)^{1/2} \tag{F.9}$$

onde h é a altura observada da coluna do manômetro.

O único elemento novo neste exemplo é a raiz quadrada. A variação em V devida ao intervalo de incerteza em h é

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\left(\frac{2gh\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}\right)^{-1/2}\frac{2g\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}}$$

$$\frac{h}{V}\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{h}{V}\frac{1}{2}\frac{1}{V}\frac{2g\rho_{\text{água}}}{\rho_{\text{ar}}} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{V^2} = \frac{1}{2}$$

Usando a Eq. F.3, calculamos a incerteza relativa em V como

$$u_V = \pm\left[\left(\frac{1}{2}u_h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u_{\rho_{\text{água}}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}u_{\rho_{\text{ar}}}\right)^2\right]^{1/2}$$

Se $u_h = \pm 0{,}01$ e as outras incertezas são desprezíveis,

$$u_V = \pm\left\{\left[\frac{1}{2}(\pm 0{,}01)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$u_V = \pm 0{,}00500 \quad \text{ou} \quad \pm 0{,}500\%$$

Comentário: A raiz quadrada reduz a incerteza relativa na velocidade calculada para metade daquela de u_h.

F-5 RESUMO

A citação da incerteza provável de dados é uma importante parte de um relatório completo e claro de resultados experimentais. A Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos (*ASME — American Society of Mechanical Engineers*) exige que todos os artigos submetidos à publicação em revistas incluam uma citação adequada da incerteza de dados experimentais [5]. A estimativa de incerteza em resultados experimentais requer cuidado, experiência e capacidade de julgamento, em comum com muito esforço de engenharia. Enfatizamos a necessidade de quantificar a incerteza de medições, mas o espaço permitiu a inclusão de apenas alguns exemplos. Muito mais informações estão disponíveis nas referências que seguem (p. ex., [4, 6, 7]). Aconselhamos fortemente que você as consulte, quando estiver projetando experimentos ou analisando dados.

REFERÊNCIAS

1. Pugh, E. M., and G. H. Winslow, *The Analysis of Physical Measurements.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
2. Kline, S. J., and F. A. McClintock, "Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments," *Mechanical Engineering, 75*, 1, January 1953, pp. 3–9.
3. Doebelin, E. O., *Measurement Systems*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
4. Young, H. D., *Statistical Treatment of Experimental Data.* New York: McGraw-Hill, 1962.
5. Rood, E. P., and D. P. Telionis, "JFE Policy on Reporting Uncertainties in Experimental Measurements and Results," *Transactions of ASME, Journal of Fluids Engineering, 113*, 3, September 1991, pp. 313–314.
6. Coleman, H. W., and W. G. Steele, *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers.* New York: Wiley, 1989.
7. Holman, J. P., *Experimental Methods for Engineers*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1989.