Universidade de São Paulo
Instituto de Física

RELATIVIDADE - 4300374

AULA 06

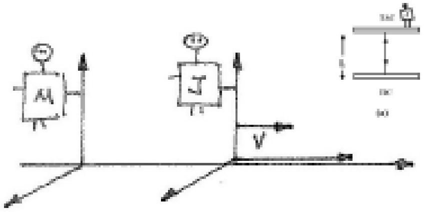
https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=101531

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br

2o. Semestre de 2022

O TEMPO na Teoria da Relatividade

Na aula passada vimos que os cálculos para a unidade de tempo



MJMS, Figura 18.2

MJMS, Figura 18.4

Mecânica clássica

$$\Delta T_m = \frac{2L}{c} = \Delta T_j$$

Por outro lado na Teoria da relatividade

$$\Delta t_m = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t_m = \gamma \Delta T_j$$

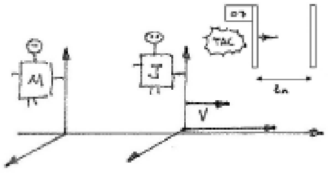
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

- Note que o tempo realmente transcorre diferente no referencial de João visto por Maria

O ESPAÇO na Teoria da Relatividade

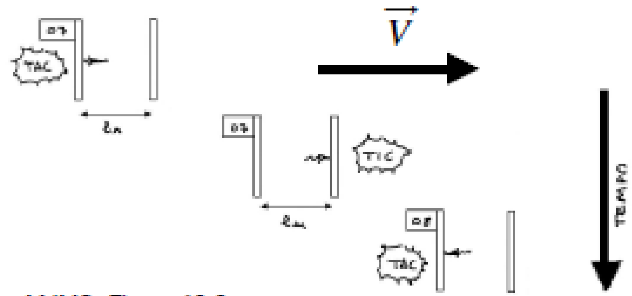
Na aula passada vimos que os cálculos para a unidade de espaço

Mecânica clássica



MJMS, Figura 18.2

$$\Delta T_m = \frac{2L}{c} = \Delta T_j$$



MJMS, Figura 19.3

Por outro lado na Teoria da relatividade

$$l_M = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

- Note que o espaço está contraído no referencial do João visto pela Maria

$$l_M = \frac{L}{\gamma} \qquad com\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - {V^2}/{c^2}}}$$

A Relatividade da Simultaneidade

Na teoria da relatividade, dois eventos são simultâneos **em um referencial** quando a luz emitida por cada evento chegar no mesmo instante em um ponto equidistante desses dois eventos

De maneira mais formal: se um evento 1 ocorre em P1 no instante *t1*, sendo marcado pela emissão de um sinal luminoso que parte de P1 nesse instante, e o mesmo vale para P2 em *t2* (evento 2), dizemos que estes dois eventos são simultâneos (*t1=t2*) quando o ponto de encontro dos dois sinais luminosos é o ponto médio do segmento P1P2

Transformação de coordenadas

- Vimos algumas consequências dos princípios da Teoria da Relatividade em relação à Mecânica Clássica, contração de tempo e espaço

- Precisamos formalizar isto ?

- Tem algum procedimento de mudança de coordenadas entre referenciais inercias?

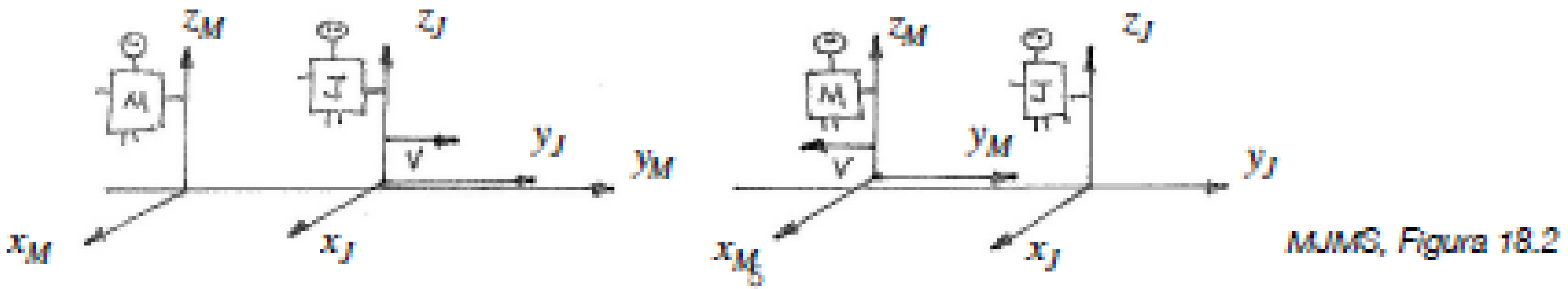
- Como as Transformações de Galileu devem ser modificadas no contexto da Teoria da Relatividade?

Transformação de coordenadas

- Estamos buscando uma forma de calcular: como um certo evento é visto em diferentes referencias inerciais
  - **Um evento é algo que realmente ocorre num ponto do espaço e em um instante do tempo. O fato de um evento poder ser observado e registrado é que define sua realidade e sua ocorrência não depende de referencial, mas a sua descrição depende.**
- Portanto, vamos definir um evento como algo que ocorre em uma determinada posição em um determinado instante, representado por **coordenadas (x, y, z, t**) em um dado referencial

Transformação de coordenadas

- Queremos saber como representar um evento no referencial da Maria (x_M,y_M, z_M e t_M) e no referencial do João (x_J,y_J,z_J e t_J).



- os eixos dos dois referencias são paralelos ($x_M \parallel x_J$, $y_M \parallel y_J$, $z_M \parallel z_J$)
- as origens coincidem ($O_M = O_J$) em $t_M = t_J = 0$
- o movimento do referencial do João em relação ao referencial da Maria, é na direção y_M ,y_J, no sentido de y crescente com velocidade V ou o movimento do referencial da Maria em relação ao referencial do João, é na direção y_M ,y_J, com velocidade V no sentido de y decrescente

Transformação de coordenadas – Hipóteses

Vamos assumir que:

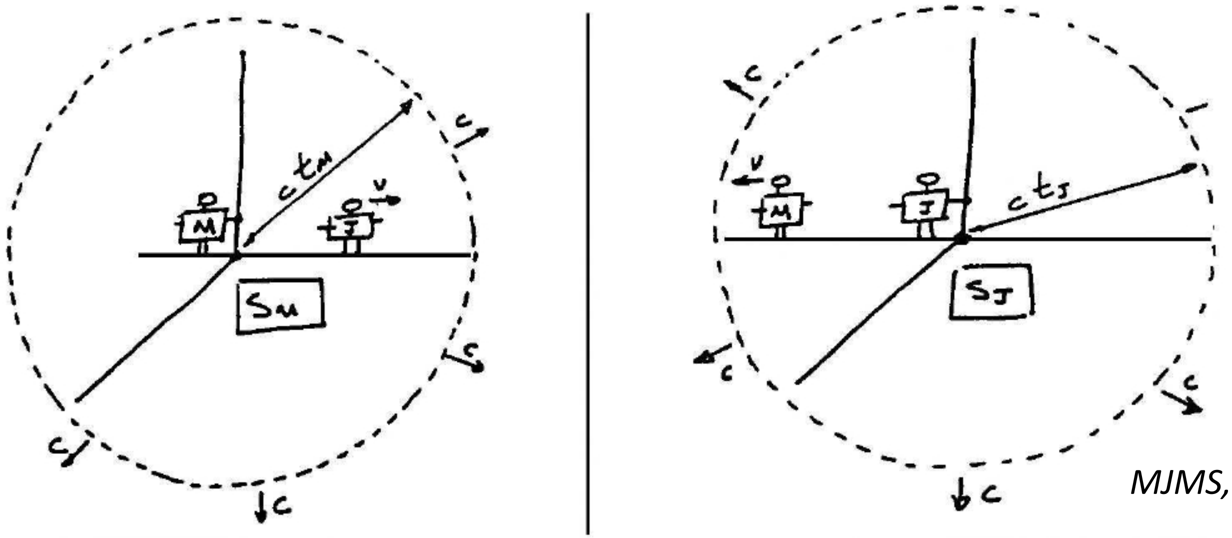
- Temos um movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial da Maria e também deve ser em relação ao referencial do João
- Para V=0, a transformação de ser reduzida a 1 (unidade)

- se um sinal luminoso é enviado de $O_M = O_J$ em $t_M = t_J = 0$, a sua frente de onda deve se propagar

com velocidade em ambos os referenciais, de modo que:

- $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 t_M^2 \leftrightarrow x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2 t_J^2$

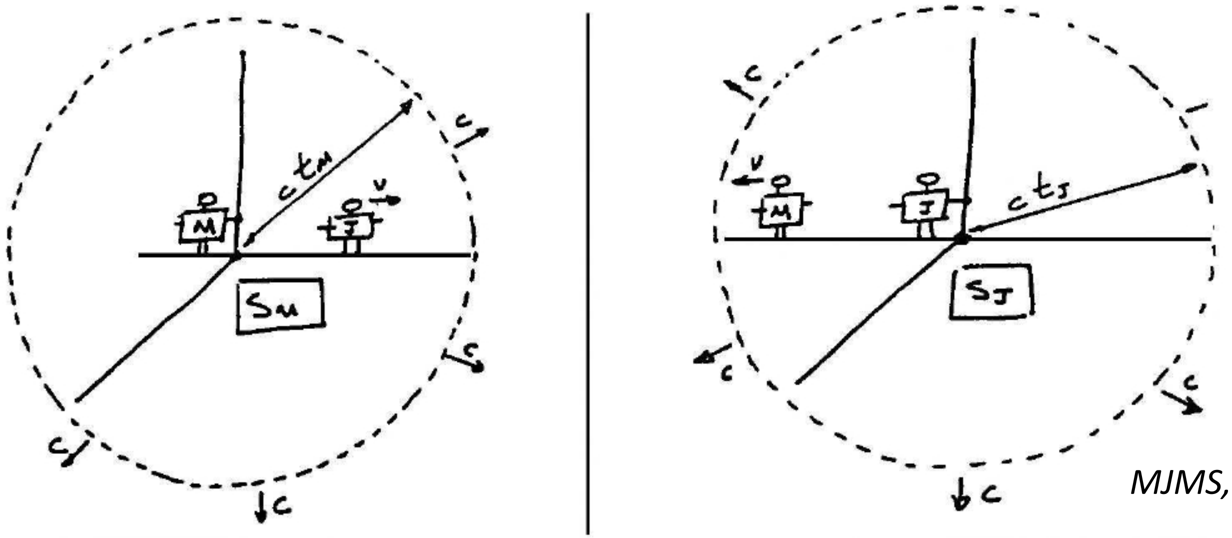
Transformação de coordenadas – Hipóteses



MJMS, Figura 20.4

A medida que o tempo passa, em cada um dos referenciais o pulso se expande e a luz emitida fica distribuída sobre uma esfera, cujo raio cresce com a velocidade da luz. De acordo com o segundo princípio, em S_M, é Maria que está no centro da esfera enquanto que, em S_J , é João que se encontra nessa posição. Essa situação viola bastante a nossa intuição clássica, já que parece corresponder a uma esfera com dois centros.

Transformação de coordenadas – Hipóteses



MJMS, Figura 20.4

Podemos nos perguntar se seria possível unificar os dois desenhos em um só, representando simultaneamente as duas visões. A resposta é não!!!

Tentar fazer isso corresponde à pretensão a uma visão do problema que independe de referenciais particulares, superior e mais poderosa do que as permitidas aos humanos. Seria equivalente, no exemplo da casa, a tentar fazer um desenho mostrando todas as suas faces, as quatro paredes, telhado, etc.

Transformação de coordenadas

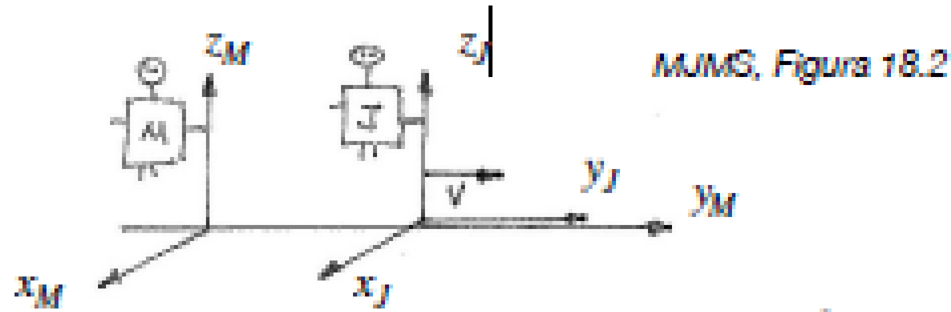
- Essas condições implicam em transformações lineares, que visam preservar a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo nos dois referencias
- O que queremos vamos fazer e calcular as coordenadas (x,y,z,t) e de um determinado evento em um referencial a partir das coordenadas de outro referencial
- Isto é:

Queremos (x_J,y_J,z_J,t_J) a partir de (x_M,y_M,z_M,t_M) e vice-versa

- As equações que permitem essa transformação de um referencial para outro e que são consistentes com os princípios da Teoria da Relatividade são chamadas de **Transformações de Lorentz**

Transformação de Lorentz

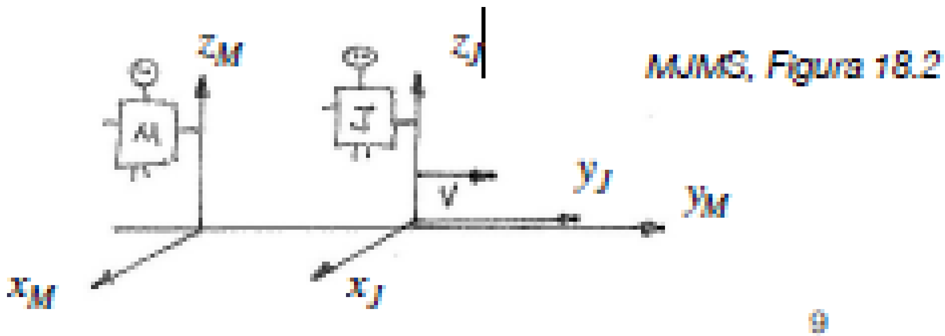
- No nosso exemplo o movimento é na direção y



9

- Então não há qualquer mudança nas coordenadas x e z
- $x_J = x_M$ e $z_J = z_M$
- Para a direção y, como a origem do sistema de coordenadas no referencial do João ($y_j^0 = 0$) tem seu movimento descrito no referencial da Maria como:
- $y_j^o = V.t_M$ e podemos assumir de forma geral: $y_J = A \cdot (y_M - V \cdot t_M)$

Transformação de Lorentz



- Em relação ao tempo, supondo também uma transformação linear, pode-se escrever de forma genérica:
  - $t_J = \mathrm{B}.t_M + \mathrm{D}.y_M$
- Onde não há termos para x_M e z_M, *pois isto viole a ideia de isotropia do espaço, pois a única direção preferencial ou identificável é a direção y*

Dedução da Equações de Transformação de Lorentz

$$x_J = x_M$$
$$y_J = A(y_M - Vt_M)$$
$$z_J = z_M$$
$$t_J = Bt_M + Dy_M$$

- Nos resta determinar as três constantes: A,B e D
- Usaremos o princípio da constância da luz

Transformação de Lorentz

Voltando à hipótese

$$x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2\, t_J^2$$
$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 t_M^2$$

t_J = B.t_M + D.y_M $\quad y_J = A\cdot(y_M - V\cdot t_M)$ $\quad x_J^2 = x_M^2$ $\quad z_J^2 = z_M^2$

Temos:

$$x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2\, t_J^2$$
$$x_M^2 + (A.(y_M - V.t_M))^2 + z_M^2 = c^2\, .(Bt_M + D.y_M)^2$$
$$x_M^2 + A^2.(\, y_M^2 - 2.y_M.V.t_M + V^2.\, t_M^2) + z_M^2 = c^2\, .\, B^2.\, t_M^2 + 2.c^2 B.t_M\, .D.y_M + c^2 D^2.y_M^2$$

E usando: $\quad x_M^2 + z_M^2 = c^2 t_M^2 - y_M^2$

$$c^2 t_M^2 - y_M^2 + A^2.(\, y_M^2 - 2.y_M.V.t_M + V^2.\, t_M^2) - c^2.\, B^2.\, t_M^2 - 2.c^2 B.t_M\, .D.y_M - c^2 D^2.y_M^2 = 0$$

Transformação de Lorentz

Voltando

$c^2 t_M^2$ - $y_M^2 + A^2 . (y_M^2 - 2 . y_M . V . t_M + V^2 . t_M^2) - c^2 . B^2 . t_M^2 - 2 . c^2 B . t_M . D . y_M -$ $c^2 D^2 . y_M^2$ =0

y_M^2 (-1+ A^2- $c^2 D^2$) $- 2 . y_M . t_M . (A^2 . V + c^2\, B . D) + t_M^2\ (c^2 + A^2 . V^2 - c^2 . B^2) =$ 0

$$\boxed{A^2 - c^2 D^2 = 1 \quad (1)}$$

$$A^2 . V + c^2\, B . D \ = 0 \ \text{ isto é } \ \boxed{A^2 = -\frac{c^2}{V} B . D \ \ (2)}$$

$$c^2 + A^2 . V^2 - c^2 . B^2 = 0$$

$$c^2 (1 + A^2 . \frac{V^2}{c^2} - B^2) = 0$$

$$\boxed{A^2 . \frac{V^2}{c^2} - B^2 + 1 = 0 \quad (3)}$$

Substituindo (2) em (1) temos: $-\frac{c^2}{V} B . D - c^2 D^2 = 1$ logo $\boxed{-\frac{c^2}{V} D(B + V D) = 1}$

Substituindo (2) em (3) temos: $(-\frac{c^2}{V} B . D) . \frac{V^2}{c^2} - B^2 + 1 = 0$

$- B . D . V - B^2 + 1 = 0$ logo $B(DV + \mathrm{B}) = 1$ então $\boxed{DV + \mathrm{B} = \frac{1}{B}}$

Transformação de Lorentz

Voltando

Temos $\boxed{-\frac{c^2}{V}D(B+VD)=1}$

e $\boxed{DV+B=\frac{1}{B}}$

$$-\frac{c^2}{V}D\left(\frac{1}{B}\right)=1$$

$$\boxed{D=-\frac{V}{c^2}B}$$

$$A^2=-\frac{c^2}{V}B.D$$

Da equação (2) temos:

$$A^2=-\frac{c^2}{V}B.\left(-\frac{V}{c^2}B\right)$$

$$\boxed{A^2=B^2}$$

Da equação (3) temos:

$$A^2.\frac{V^2}{c^2}-B^2+1=0$$

$$A^2.\frac{V^2}{c^2}-A^2=-1$$

$$A^2\left(\frac{V^2}{c^2}-1\right)=-1$$

$$A^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)=1$$

$$A^2=\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}$$

$$A=\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}}$$

$$A=\gamma=B$$

Transformação de Lorentz

temos:

$$A = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right)}}$$

$$\boxed{A = \gamma = B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= -\frac{V}{c^2}B \\ D &= -\frac{V}{c^2}\gamma \end{aligned}}$$

Na realidade vale :

$$A = \pm \ B = \pm\, \gamma$$

$$D = \pm \frac{V}{c^2}\gamma$$

Tinha dito também que para V=0 a transformação deve ser reduzir a identidade, isto é A= B = 1 e D = 0

O que nos leva finalmente a Transformação de Lorentz

$$x_J = x_M$$
$$y_J = \gamma\,(y_M - V t_M)$$
$$z_J = z_M$$
$$t_J = \gamma\,\left(t_M - \frac{V}{c^2} y_M\right)$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$$