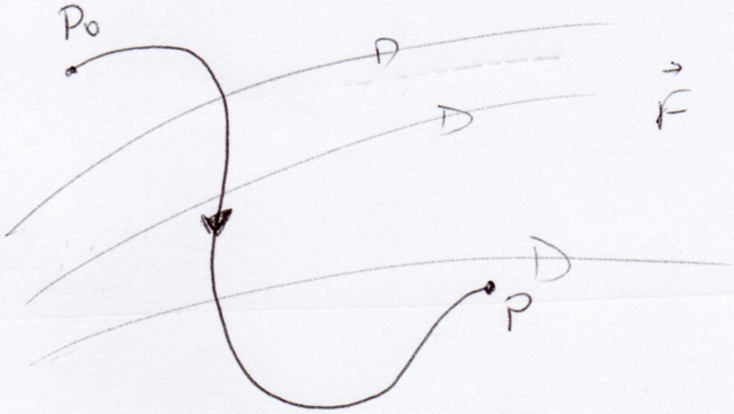
Notas matemáticas → aula de atração da gravidade de corpos simples

→ partícula teste de massa $\underline{m}$ em um campo de força $\vec{F}$

trabalho ≡ energia cinética para mover $\underline{m}$ de P_0 até P



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} v^2$$

$E_C = \frac{1}{2} m v^2$ → energia cinética

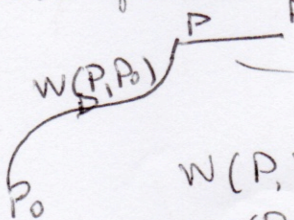
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} E_C$$

$P_0 \to P$ em Δt $\quad \Delta t = t_0 - t$ → há variação de energia cinética

$$E - E_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}\, dt'}_{ds} = \int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \underline{W(P, P_0)}$$

função trabalho, escalar

Caso particular que nos interessa → campo conservativo



→ $W(P+\Delta x, P)$

Δx é pequeno

$$W(P, P_0) + W(P+\Delta x, P) = W(P+\Delta x, P_0)$$

$$\cancel{W(P+\Delta x, P) - (W(P, P_0)}$$

$$W(P, P_0) - W(P+\Delta x, P_0) = W(P+\Delta x, P)$$

$$W(P+\Delta x, P) = \int_{P}^{P+\Delta x} F_x(x, y, z)\, dx$$ → componente da força na direção X

$$\frac{W(P+\Delta x, P_0) - W(P, P_0)}{\Delta x} = F_x(x+\varepsilon, y, z) \qquad 0\, \varepsilon < 1$$

se $\Delta x \ll 1$

$\frac{\partial W}{\partial x} = F_x$ → derivada da função trabalho é igual à componente da força naquela direção

aplicando o mesmo raciocínio para as outras direções:

$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \nabla W$ gradiente da função trabalho

Se W tem derivadas contínuas, é possível realizar a integração

$$W(P,P_0) = \int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{P_0}^{P}\left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right) = \int_{P_0}^{P} dW =$$

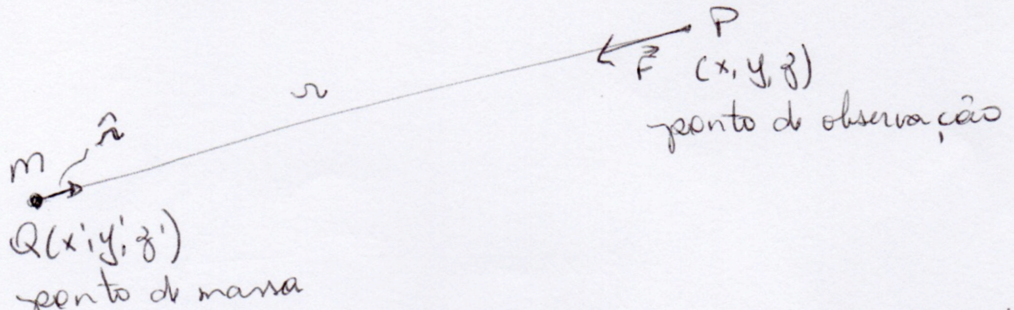
$$W(P) - W(P_0)$$

no campo conservativo $\vec{F}$, o trabalho realizado para mover a partícula teste $\underline{m}$ não depende do caminho.

$$W(P) = \int_{\infty}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{s} \Rightarrow W(P \to \infty) = 0$$

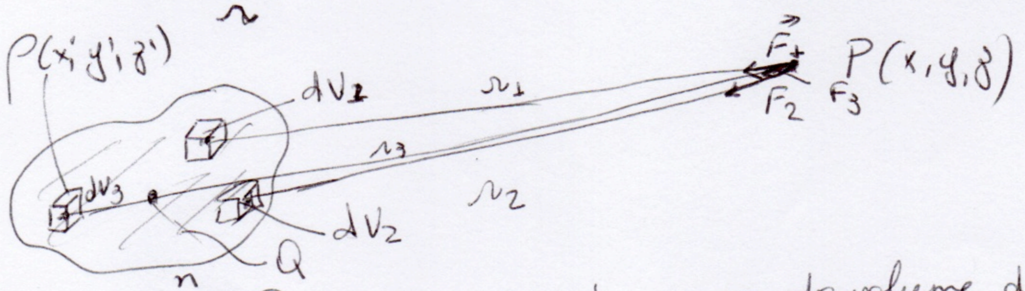
campo potencial gravitacional decai a zero longe da ~~Terra~~ massa atrativa.

Potencial gravitacional de uma distribuição de massa



Potencial gravitacional de uma massa pontual

$$V(P) = \frac{G\,m}{r}$$



$$V(P) = \sum_{m=1}^{n} G\frac{m_i}{r_i}$$

m_i é a massa do volume dV_i

r_i é a distância entre o centro de massa de dV_i e o ponto $P(x,y,z)$

$$V(P) = \int_V G\frac{dm}{r} \Rightarrow \text{se a distribuição de massa for contínua.}$$

$$V(P) = \int_V G \frac{dm}{r} = \int_V G \frac{\rho\, dV}{r} \qquad \text{onde } dm = \rho\, dV$$

se $\rho(x', y', z')$ é uma função bem comportada, a integral converge.

Potencial gravitacional de uma camada esférica

ver figura no ppt de corpos simples.

$$V(P) = G \int_S \frac{\sigma(S)}{r} dS$$

$\sigma(S) \Rightarrow$ densidade superficial em kg/m^2

$dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ elemento de superfície

$a = cte =$ raio da esfera

$\theta = 0$ a π

$\phi = 0$ a 2π

$$V(P) = G \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sigma a^2 \sin\theta}{r} d\theta \, d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$V(P) = G\sigma \int_0^{\pi} \frac{2\pi a^2 \sin\theta}{r} d\theta$$

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta \Rightarrow r = (R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{1/2}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{-1/2} \cdot -2aR(-\sin\theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{aR\sin\theta}{r} \longrightarrow dr = \frac{aR\sin\theta}{r} d\theta \qquad d\theta = \frac{r}{aR\sin\theta} dr$$

$\theta = 0 \Rightarrow r = R - a$

$\theta = \pi \rightarrow r = R + a$

$$V(P) = G\sigma \int_{R-a}^{R+a} \frac{2\pi a^2 \sin\theta}{r} \cdot \frac{r}{aR\sin\theta} dr = G\sigma \int_{R-a}^{R+a} \frac{2\pi a}{R} dr =$$

$$G\sigma 2\pi a \underbrace{\int_{R-a}^{R+a} \frac{1}{R} dr}_{\frac{1}{R}[(R+a)-(R-a)] = \frac{2a}{R}}$$

$$V(P) = \frac{G\sigma 4\pi a^2}{R}$$

④

$\sigma 4\pi a^2 \Rightarrow$ massa da casca esférica

$$V(P) = \frac{GM}{R}$$

Ponto P dentro de uma esfera oca de raio a

$$V(P) = G \int_S \frac{\sigma(S)}{r} dS$$

$$dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$\theta = 0$ a π

$\phi = 0$ a 2π

$$d\theta = \frac{r}{a \sin\theta} dr \qquad \text{mas: } \theta = 0 \Rightarrow r = a - R$$

$$\theta = \pi \Rightarrow r = a + R$$

dentro da esfera o raio varia de $-a$ até a

$$V(P) = \frac{2\pi G \sigma a}{R} \underbrace{\int_{a-R}^{a+R} dr}_{(a+R)-(a-R) = 2R}$$

$$V(P) = \frac{G 2\pi \sigma a \cdot 2R}{R} = G 4\pi a \sigma$$

$$V(P) = \frac{G 4\pi \sigma a^2}{a} = \frac{GM}{a} \quad \text{que é constante}$$

isto não se aplica à Terra porque ela não é uma casca esférica

Esfera sólida de massa M e raio a

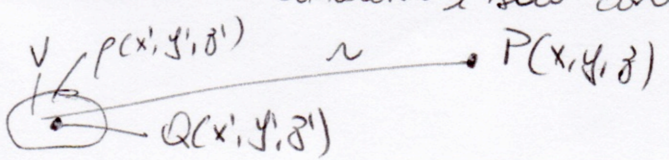
aplicando o princípio da superposição

$$V(P) = \frac{GM}{R} = \frac{G \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho}{R}$$

$\rho \Rightarrow$ densidade volumétrica ou densidade em kg/m^3

Campo potencial conservativo as derivadas existem e são contínuas.

$$V(P) = \int_V G \frac{\rho(Q)}{r} dV$$



$$r = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{\partial V(P)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} G \int \frac{\rho(Q)}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}} \, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} \cdot 2(x-x') = \frac{-(x-x')}{r^3}$$

$$\frac{\partial V(P)}{\partial x} = -G \int_V \frac{(x-x')}{r^3} \rho(Q) \, dV$$

$$\frac{\partial V(P)}{\partial y} = -G \int_V \frac{(y-y')}{r^3} \rho(Q) \, dV$$

$$\frac{\partial V(P)}{\partial z} = -G \int_V \frac{(z-z')}{r^3} \rho(Q) \, dV$$

$$\nabla V = -G \int_V \frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k}}{r^3} \rho(Q) \, dV$$

$$\frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}} = \hat{r} \quad \text{versor na direção } \vec{r}$$

$$\nabla V = -G \int_V \frac{\rho(Q)}{r^2} \, \hat{r} \, dV = \vec{g}(P)$$