Gravimetria

Bloco - atração gravitacional de corpos simples

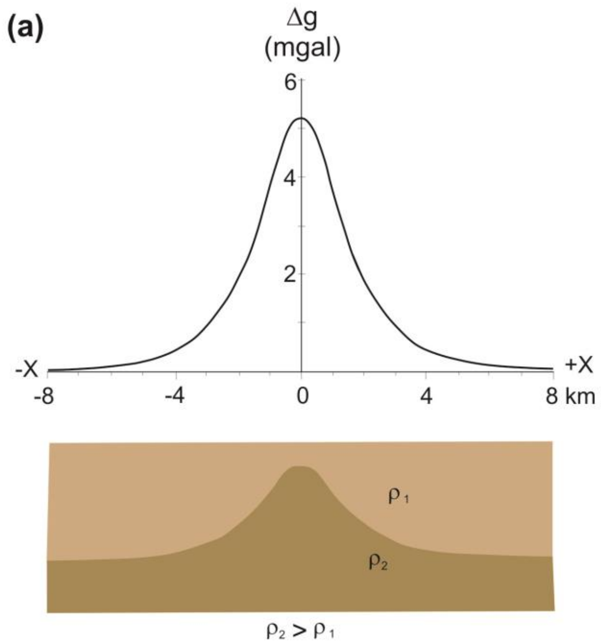
Alguns pontos teóricos

complemento

Massa-densidade-contraste de densidade

Contraste de densidade

$\Delta\rho = \rho_{corpo} - \rho_{entorno}$



Δρ > 0 excesso de massa – atração: maior ou menor? Alto gravimétrico ou baixo gravimétrico?
Δρ < 0 falta de massa – atração: maior ou menor? Alto gravimétrico ou baixo gravimétrico?

Massa – coleção de massas

- Pontos importantes para o método gravimétrico:
- O campo de força gravitacional é um campo vetorial;
- O campo de força da aceleração gravitacional também é um campo vetorial;
- Os gravímetros utilizados em medidas geofísicas <u>só medem a componente vertical da aceleração gravimétrica</u> → aceleração da gravidade para fins práticos pode ser considerada um campo escalar.

Unidades usadas em gravimetria

	SI	cgs
Massa	kg	g
Distância	m	cm
Aceleração	m/s^2	cm/s^2

$1\ cm/s^2$ = 1 Gal (Galileu)

Geofísica: 1 mGal = 10^{-3} Gal = $10^{-5}\ m/s^2$

gu (gravity unit) = 0,1 mGal

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/kgs^2 = 6{,}67 \times 10^{-8}\ cm^3/gs^2$

campo

- Campo material
- Campo de força
- Campo escalar
- Campo vetorial

Campo

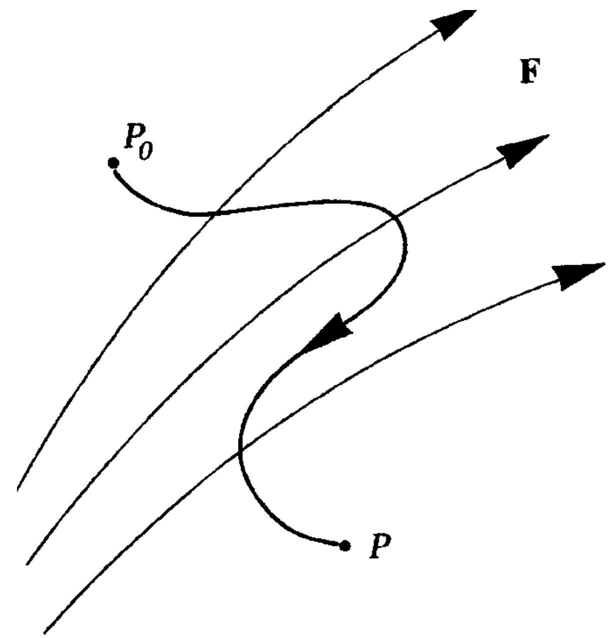
- *Campos materiais:* descrevem uma propriedade física do material em cada ponto, num determinado instante.
- *Campo de força:* descreve as forças que atuam sobre um ponto do espaço, num determinado instante.
- *Campo escalar* é uma função simples do espaço e tempo.
- *Campo vetorial* deve ser caracterizado por três funções do espaço e tempo, ou seja, as componentes do campo em três direções ortogonais.

Campos gravitacional e magnético da Terra:

- *Material ou de força?*
- *Escalar ou vetorial?*
- *Se o instrumento geofísico medir apenas uma componente do vetor. Essa componente medida será escalar ou vetorial?*
- *Os gravímetros utilizados em levantamentos geofísicos medem a componente vertical g. Temos uma medida de campo escalar ou vetorial?*
- *Magnetômetros de precessão de protons mede a intensidade do campo magnético. Temos uma medida de campo escalar ou vetorial?*

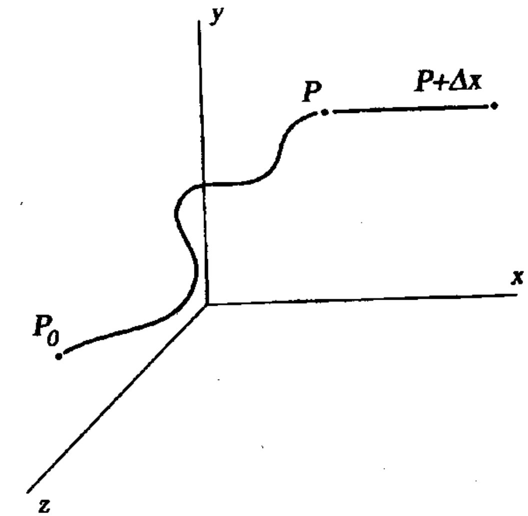
Energia, trabalho e potencial

- Partícula teste sob a influência de um campo de força **F**.
- Trabalho realizado depende do caminho usado para mover a partícula de P até P0.



Energia, trabalho e potencial

- Caso particular: trabalho é independente do caminho percorrido → *campo conservativo*.
- Campo de forças vetorial **F** é especificado pelo campo escalar W, chamado de função trabalho de **F**.
- Se a função trabalho tem derivadas contínuas, o trabalho depende apenas dos valores de W nos pontos extremos P e P0 e não do caminho percorrido.
- Qualquer campo vetorial que tem a função trabalho com derivadas contínuas é conservativo. Campo conservativo é dado pelo gradiente de sua função trabalho.

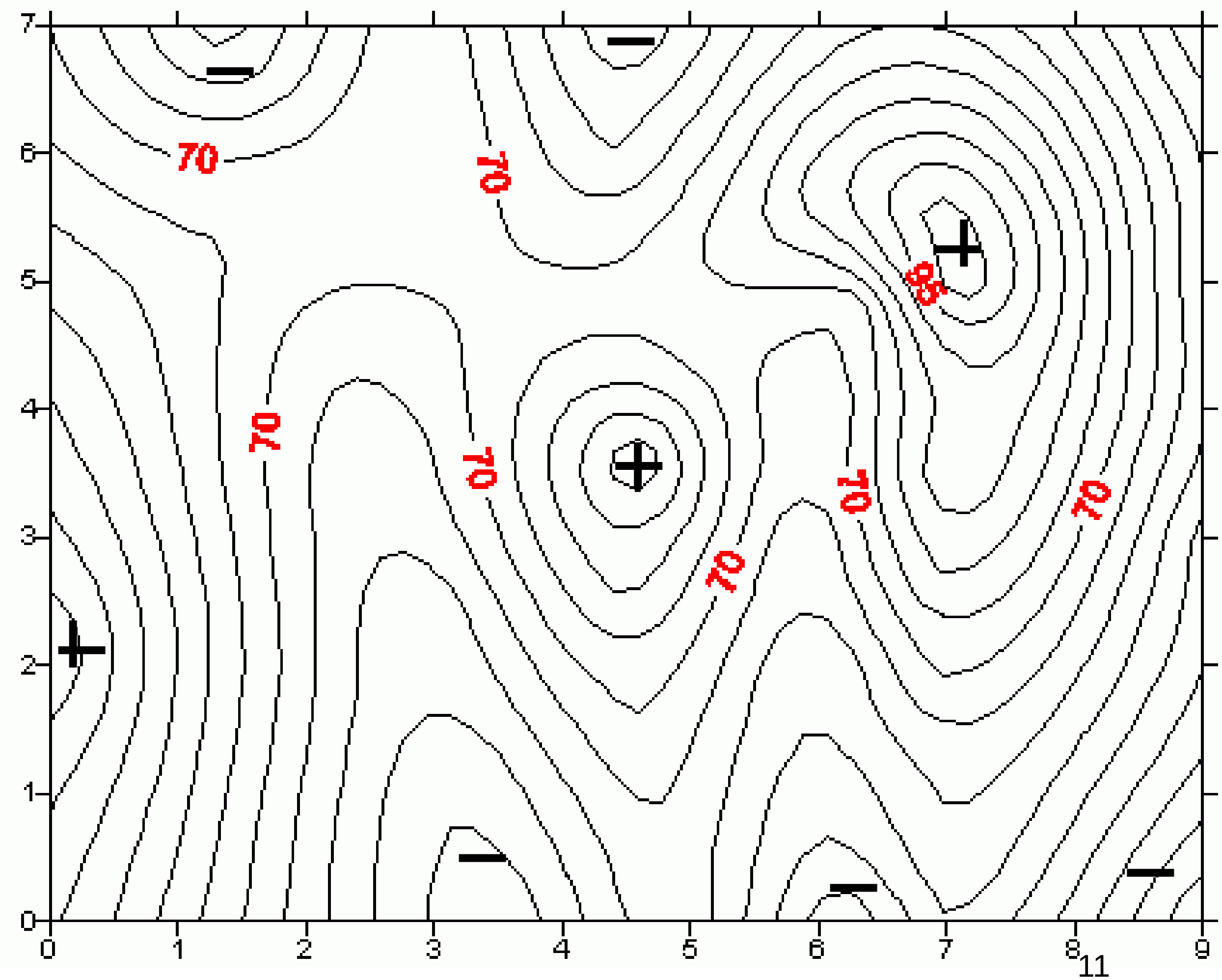


Energia, trabalho e potencial

- Potencial Φ do campo vetorial **F** é definido como (+ ou -) a função trabalho.
- Convenção:
- Sinal positivo se partículas do mesmo sinal se atraem (ex. campo gravitacional) → potencial é igual ao trabalho efetuado pelo campo; Φ é o valor negativo da energia potencial.
- Sinal negativo se partículas do mesmo sinal se repelem (ex. campo magnético) → potencial é igual ao trabalho efetuado contra campo; Φ é o valor da energia potencial.
- A diferença de potencial entre dois pontos separados no espaço é mais relevante que o potencial no ponto em si.

Potencial

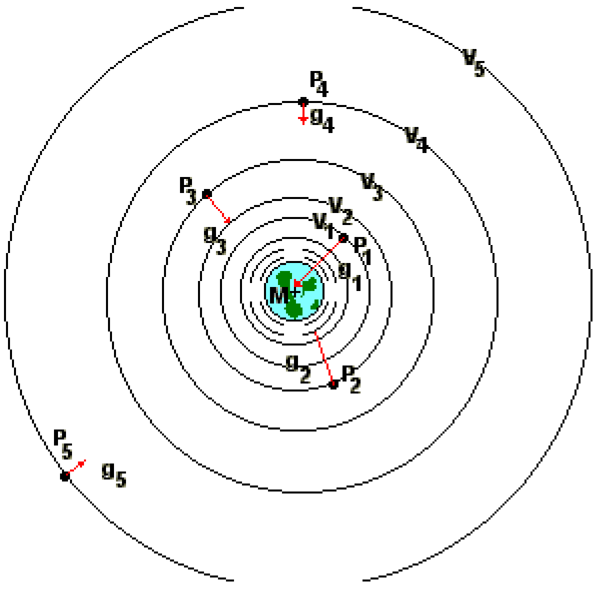
- *Dado o mapa abaixo, representando as isolinhas de um campo escalar, desenhe alguns vetores gradiente. Lembre-se que: o gradiente aponta para a região onde a grandeza assume o seu valor máximo e ele intercepta ortogonalmente as isolinhas.*



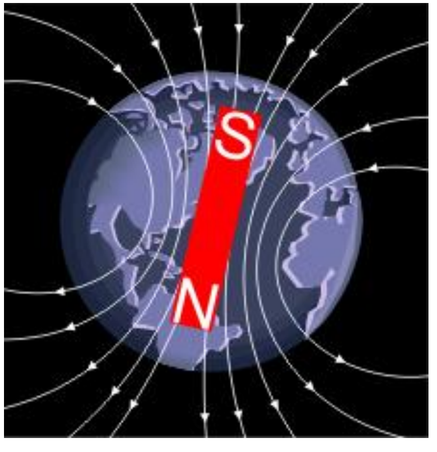
Superfícies equipotenciais

- Superfície com potencial constante.
- Linhas de campo em qualquer ponto são sempre perpendiculares à equipotencial.
- Nenhum trabalho é realizado deslocando-se uma partícula teste ao longo da superfície equipotencial.
- Somente uma superfície equipotencial pode existir em qualquer ponto do espaço.
- Distância entre superfícies equipotenciais é uma medida da intensidade do campo.

Campo potencial e superfície equipotencial da Terra



- A) linhas de força do campo potencial gravimétrico e algumas das superfícies equipotenciais.



- B) linhas de força do campo magnético interno da Terra como observado na superfície.

Potencial, força e aceleração gravitacional

- Força de atração gravitacional

$$F = G\frac{m\,m_0}{r^2}$$

- Aceleração gravitacional

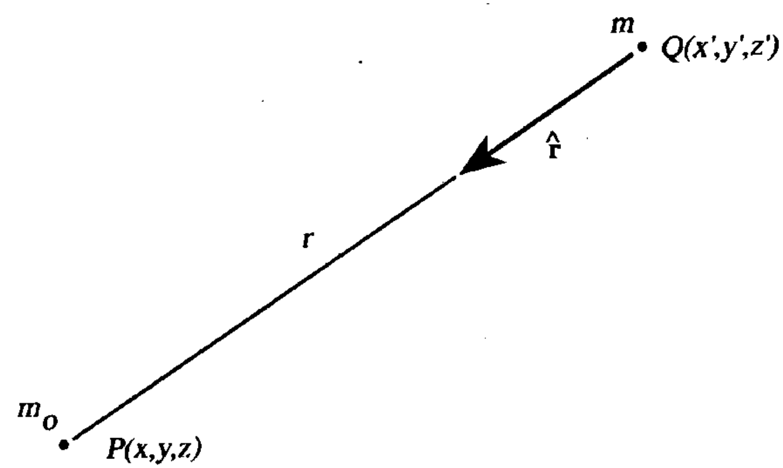
$$a(P) = -G\frac{m}{r^2}\hat{r}$$

- Relações entre aceleração

e potencial gravitacional

$$a(P) = \nabla U(P)$$

$$U(P) = G\frac{m}{r}$$



Potencial da distribuição de massas princípio da superposição

- Princípio da superposição: potencial gravitacional de uma coleção de massas é a soma do potencial gravitacional de cada massa.

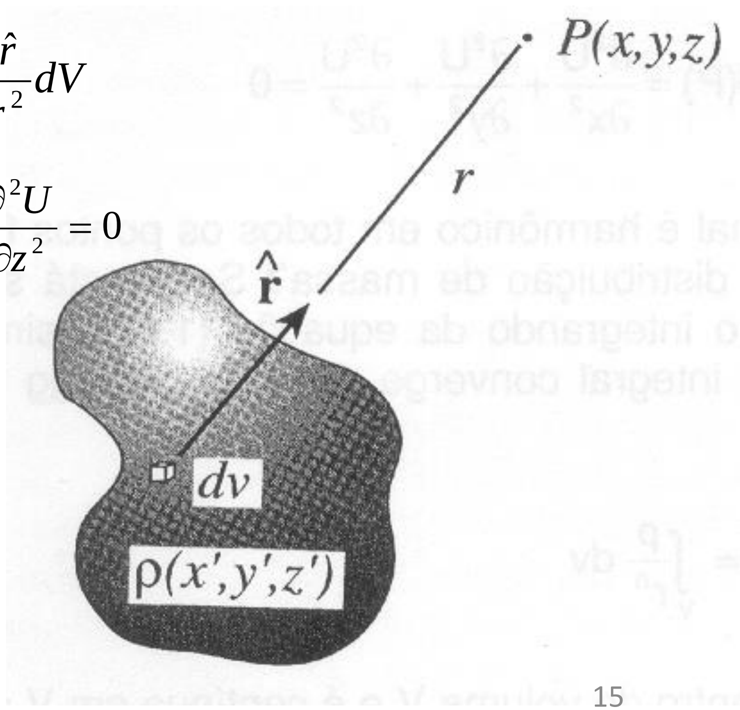
$$U(P) = G\int_V \frac{dm}{r} = G\int_V \frac{\rho(Q)}{r}\,dV$$

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x} = -G\int_V \frac{(x-x')}{r^3}\rho(Q)dV \qquad \vec{g}(P) = \nabla U(P) = -G\int_V \rho(Q)\frac{\hat{r}}{r^2}dV$$

$$\frac{\partial^2 U(P)}{\partial x^2} = G\int_V \left[\frac{-\rho}{r^3} + \frac{3\rho(x-x')^2}{r^5}\right]dV \qquad \nabla^2 U(P) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

- Potencial gravitacional é harmônico

fora das massas



Potencial da distribuição de massas

- (1) O potencial Newtoniano *U* e a aceleração gravitacional ***a*** existem e são contínuos em todo espaço para o caso de uma distribuição delimitada de massa que é comportada e contínua em pedaços.

- (2) O potencial *U* é diferenciável em todo o espaço, ou seja, a equação é verdadeira em todo o espaço.

- (3) A equação de Poisson descreve a relação entre a massa e o potencial em todo espaço. A equação de Laplace é o caso especial da equação de Poisson válida em regiões do espaço não ocupadas pelas massas.

$$\nabla^2 U(P) = -4\pi G \rho(P)$$

- **A generalidade da equação de Laplace leva à ambigüidade.**

$$\nabla^2 U(P) = 0$$

Potencial de uma esfera

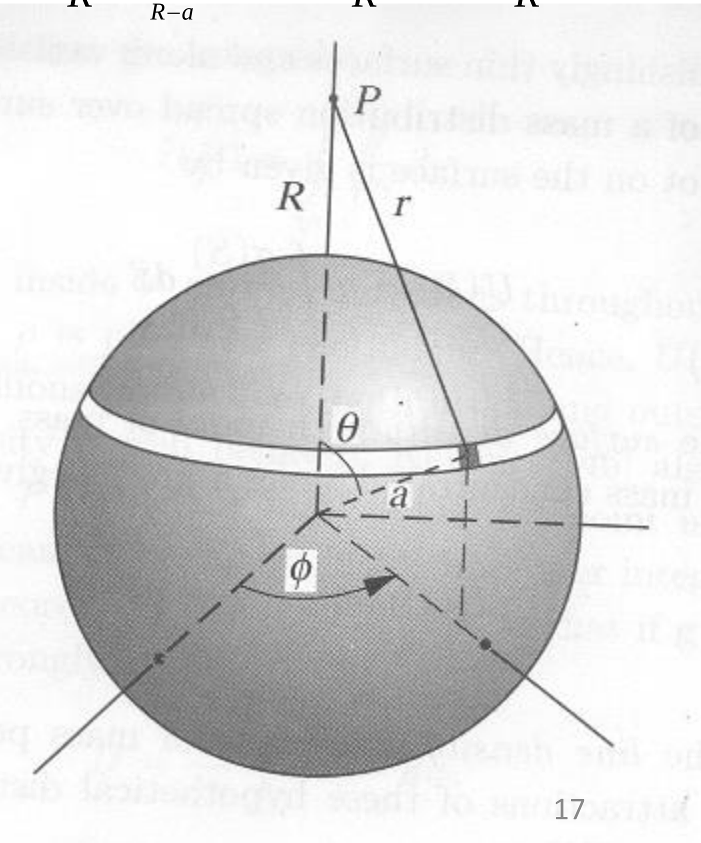
- Potencial da camada da superfície esférica de raio a

$$U(P) = G\int_S \frac{\sigma(S)}{r}\,dS = G\sigma a^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{r}\,d\theta\,d\phi$$

$$U(P) = \frac{2\pi G\sigma a}{R}\int_{R-a}^{R+a} dr = G\,\frac{4\pi a^2\sigma}{R} = G\,\frac{M}{R}$$

o potencial gravitacional em qualquer ponto fora de uma casca esférica uniforme é equivalente ao potencial de uma massa puntiforme localizada no

centro da casca com massa total igual à da esfera.



$$\vec{g}(P) = \nabla U(P) = -G\,\frac{M}{R^2}\,\hat{r}$$

$$\nabla^2 U(P) = 0$$

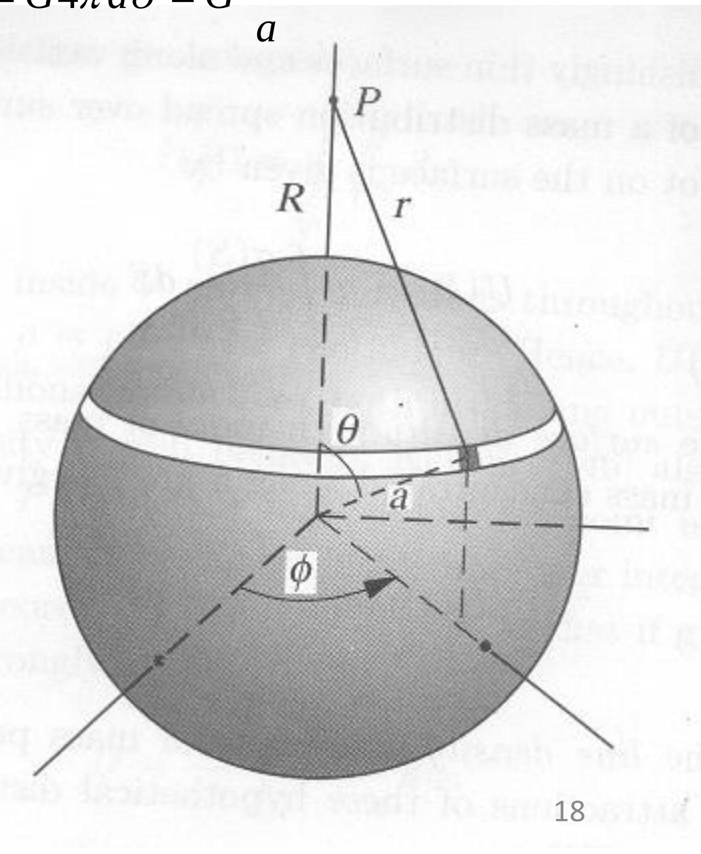
Potencial de uma esfera

- P dentro da esfera oca de raio a

$$U(P)=\frac{2\pi G\sigma a}{R}\int_{R-a}^{R+a}dr=G\frac{4\pi a^2\sigma}{R}=G\frac{M}{R}\qquad U(P)=\frac{2\pi G\sigma a}{R}\int_{a-R}^{a+R}dr=G4\pi a\sigma=G\frac{M}{a}$$

o potencial gravitacional é constante em

qualquer ponto dentro de uma casca uniforme



$$\vec{g}(P)=\nabla(G\frac{M}{a})=0$$

Esfera sólida: aplicar o princípio da superposição

$$U(P)=G\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho}{R}\qquad \vec{g}(P)=-G\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho}{R^2}\hat{r}$$

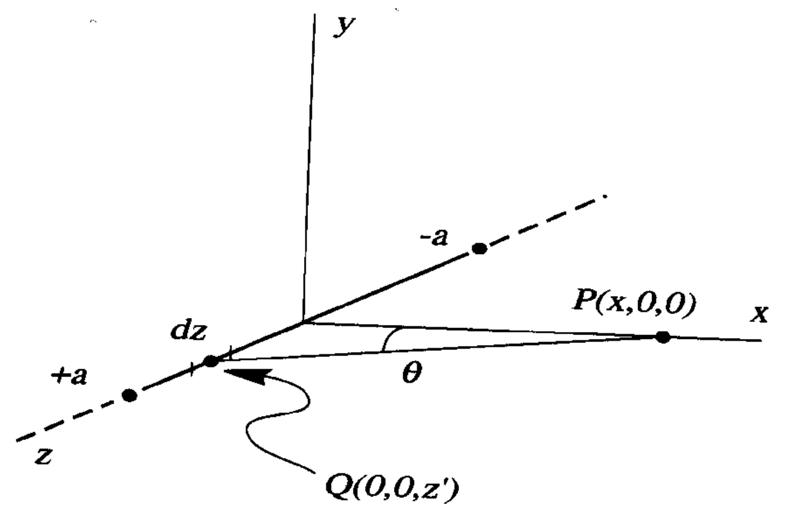
Aceleração gravitacional de um fio infinito e finito

- Fio de comprimento 2a estendido ao longo do eixo z

$$\vec{g}(P) = -G\int_V \rho \frac{\hat{r}}{r} dV = -\hat{i}G\lambda x \int_{-a}^{a} \frac{1}{r^3} dz' \qquad \vec{g}(P) = -\hat{i}\,2G\lambda \frac{a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

- Fio infinito

$$\vec{g}(P) = -\hat{i}\,\frac{2G\lambda}{x} \qquad \vec{g}(P) = -\frac{2G\lambda}{r}\hat{r}$$



Potencial de um fio infinito e finito

- Fio de comprimento 2a estendido ao longo do eixo z

$$U(P) = G\lambda \int_{-a}^{a} \frac{1}{r} dz' = G\lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \qquad U(P) = G\lambda \left[\ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} - \ln \frac{\sqrt{1 + a^2} + a}{\sqrt{1 + a^2} - a} \right]$$

- Fio infinito

$$U(P) = 2G\lambda \ln \frac{1}{x} \qquad U(P) = 2G\lambda \ln \frac{1}{r}$$

- Cilindro infinito de raio a

$$U(P) = 2\pi a^2 G\rho \ln \frac{1}{r} \qquad \vec{g}(P) = -\frac{2\pi a^2 G\rho}{r} \hat{r}$$