

**Universidade de São Paulo**  
**Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas**

**AGG0633 – Gravimetria aplicada à prospecção de bens  
minerais e estruturas crustais**

**O Campo Gravimétrico**  
**Conceitos e aplicações em Geofísica**

**Yára Regina Marangoni**  
**2014**

## Capítulo 1 - Teoria do Potencial

### Aspectos gerais, potencial de formas simples

#### 1.1 Introdução

Nos últimos 10 anos houve um ressurgimento do interesse na utilização dos métodos potenciais em exploração e em geodinâmica. Isto aconteceu devido aos avanços tecnológicos na aquisição de dados - as gradiometrias aeromagnética e gravimétrica, aerogravimetria e altimetria por satélite, e ao aumento da capacidade de processamento e modelagem dos dados.

O método gravimétrico utilizado em estudos geofísicos e geológicos fundamenta-se na Teoria do Potencial. A base matemática da Teoria do Potencial descreve um conjunto de fenômenos físicos como a atração gravitacional, campos magnetoestático e eletrostático, a transferência de calor num meio homogêneo, o fluxo de fluidos ideais, o comportamento de sólidos elásticos, e muitos outros (Kellogg, 1953). O desenvolvimento da Teoria do Potencial baseia-se em dois marcos do desenvolvimento da física e da matemática: a lei da gravitação universal de Newton (1687) e um século mais tarde, a proposição de Pierre Simon, Marquês de Laplace, de que a atração gravitacional obedece a uma equação diferencial simples, a equação de Laplace.

A seguir é apresentada uma síntese dos aspectos gerais da Teoria do Potencial, ou seja, as propriedades do Potencial Newtoniano necessárias ao entendimento e a aplicação do método gravimétrico. O material aqui apresentado é uma síntese dos capítulos 1 e 3 de Blakely (1996), das apostilas da Profa. Naomi Ussami do IAG-USP e do cap. 2 de Lowrie (1997).

#### 1.2 Campos potenciais

Campo de força são usados para estimar de alguma propriedade física em cada ponto de um meio (Roy, 2008). Como essa estimativa deve ser quantitativa, pode-se dizer que um campo apresenta um conjunto de funções de espaço e tempo.

- *Campos materiais* que descrevem uma propriedade física do material em cada ponto, num determinado instante. Exemplo: densidade, porosidade, susceptibilidade magnética e temperatura.

- *Campo de força* que descreve as forças que atuam sobre um ponto do espaço, num determinado instante. A atração gravitacional, campo magnético e campo eletrostático são exemplos de campos de força.

Os campos podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais.

- *Campo escalar* é uma função simples do espaço e tempo. Exemplos: o deslocamento de uma mola distendida, a temperatura de um volume de gás e a densidade dentro de um volume de rocha.

- *Campo vetorial* deve ser caracterizado por três funções do espaço e tempo, ou seja, as componentes do campo em três direções ortogonais. Pode ser descrito em termos de linhas de campo ou linhas de fluxo. Tem-se como exemplos, o fluxo de calor, a velocidade de um fluido e a atração gravitacional.

A atração gravitacional e magnética são campos vetoriais. Entretanto, os instrumentos geofísicos, em geral medem apenas uma componente do vetor, e esta única componente constitui-se num campo escalar. Por exemplo, os gravímetros utilizados em levantamentos geofísicos medem a componente vertical  $g_z$  (campo escalar) da aceleração da gravidade  $g$  (campo vetorial).

#### 1.3 Energia, trabalho e potencial

Considere uma partícula sob a influência de um campo de força  $F$  (figura 1.1).

A partícula poderia ser uma pequena massa  $m$  sob a ação de um campo gravitacional produzido por um corpo de massa maior, ou uma carga elétrica sob a influência de um campo elétrico. A energia cinética despendida pelo campo de força para deslocar uma par-

tícula de um ponto a outro é definida como o *trabalho* realizado pelo campo de força.

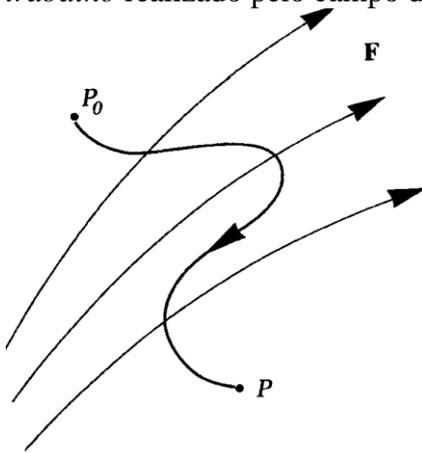


Figura 1.1: sob a influência do campo de forças  $\mathbf{F}$ , a partícula de massa  $m$  move-se de  $P_0$  no tempo  $t_0$  até  $P$  chegando no tempo  $t$  e seguindo um caminho qualquer (Blakely, 1996).

A segunda lei de Newton do movimento requer que o momento da partícula em qualquer instante varia numa taxa proporcional à magnitude do campo de força na direção paralela à direção do campo de força no local da partícula, isto é:

$$\lambda \vec{F} = m \frac{d}{dt} \vec{v} \quad (1.1),$$

onde  $\lambda$  é uma constante que depende das unidades utilizadas, e  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula. As unidades são selecionadas de tal forma que  $\lambda = 1$  e a equação anterior é multiplicada por  $\mathbf{v}$  para se obter

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} E \quad (1.2),$$

onde  $E$  é a energia cinética da partícula. Se a partícula se move do ponto  $P_0$  a  $P$  durante o intervalo de tempo  $t_0$  a  $t$  (figura 1.1), então a variação da energia cinética é dada pela integração da equação (1.2) sobre o intervalo de tempo,

$$E - E_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = W(P, P_0) \quad (1.3),$$

onde  $d\vec{s}$  representa um deslocamento infinitesimal da partícula. A quantidade  $W(P, P_0)$  é o trabalho necessário para deslocar a partícula do ponto  $P_0$  ao ponto  $P$ . A equação (1.3) mostra que uma variação na energia cinética da partícula é igual ao trabalho realizado por  $\mathbf{F}$ .

Em geral, o trabalho necessário para deslocar a partícula de  $P_0$  a  $P$  é diferente e depende do caminho percorrido pela partícula.

Um campo vetorial é considerado *conservativo*, no caso especial em que o trabalho independe do caminho percorrido pela partícula.

Considere uma partícula que se desloca por uma distância pequena  $\Delta x$  paralela ao eixo  $x$ , como mostrado na figura 1.2, em um campo conservativo. Neste caso

$$W(P, P_0) + W(P + \Delta x, P) = W(P + \Delta x, P_0).$$

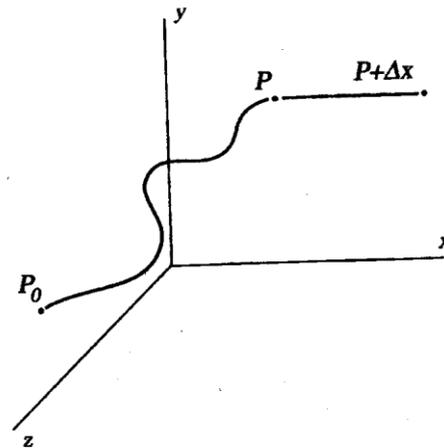


Figura 1.2: a partícula se move no campo conservativo de  $P_0$  a  $P$  por um caminho qualquer e depois uma distância adicional  $\Delta x$  paralelo ao eixo  $x$  apenas (Blakely, 1996).

Rearranjando os termos acima tem-se

$$\begin{aligned} W(P + \Delta x, P_0) - W(P, P_0) &= W(P + \Delta x, P) \\ &= \int_P^{P+\Delta x} F_x(x, y, z) dx \end{aligned}$$

A integral pode ser resolvida dividindo-se ambos os lados da equação por  $\Delta x$  e aplicando a definição de média:

$$\frac{W(P + \Delta x, P_0) - W(P, P_0)}{\Delta x} = F_x(x + \varepsilon, y, z),$$

onde  $0 < \varepsilon < 1$ . Se  $\Delta x$  torna-se arbitrariamente pequeno, tem-se

$$\frac{\partial W}{\partial x} = F_x \quad (1.4).$$

Esta derivada pode ser repetida para as direções  $y$  e  $z$ , multiplicando cada equação por vetores unitários apropriados, e somando-as à equação (1.4) para se chegar à:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \nabla W \quad (1.5).$$

Portanto, a derivada do trabalho em qualquer direção é igual à componente da força naquela direção. O campo de força vetorial  $\vec{F}$  é completamente especificado pelo campo escalar  $W$ , o qual se chama *função trabalho* de  $\vec{F}$ . Assim, o *campo conservativo é representado pelo gradiente de uma função escalar* (a função trabalho). Podendo-se afirmar que:

- todo campo de forças derivado de um campo escalar é um campo conservativo;

- todo campo conservativo pode ser derivado de um campo escalar.

Há uma relação inversa entre as equações (1.3) e (1.5). Caso a função trabalho  $W$  tenha derivadas contínuas, estas podem ser integradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W(P, P_0) &= \int_{P_0}^P \vec{F} \bullet d\vec{s} = \\ &= \int_{P_0}^P \left( \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \right) = \int_{P_0}^P dW = \\ &= W(P) - W(P_0) \end{aligned} \quad (1.6).$$

Portanto, o trabalho depende apenas dos valores de  $W$  nos pontos extremos  $P$  e  $P_0$ , e não do caminho percorrido. Assim, qualquer campo vetorial cuja função trabalho tem derivadas contínuas como descritas na equação (1.5) é conservativo. Da equação (1.6) resulta que se o caminho percorrido pela partícula é um circuito fechado nenhum trabalho é necessário para deslocar a partícula.

O *potencial*  $\Phi$  do campo vetorial  $\vec{F}$  é definido como a função trabalho com sinal positivo ou negativo, dependendo da convenção utilizada. Kellogg (1953) resume esta convenção da seguinte forma:

- se as partículas de mesmo sinal se atraem (por exemplo, o campo gravitacional), então  $\vec{F} = \nabla\Phi$ , e o potencial é igual ao trabalho efetuado pelo seu campo;

- se as partículas de mesmo sinal se repelem (campos eletrostáticos, por exemplo), então

$\vec{F} = -\nabla\Phi$ , e o potencial é igual ao trabalho efetuado contra o campo pela partícula.

No segundo caso, o potencial  $\Phi$  é a energia potencial da partícula. No primeiro caso,  $\Phi$  é o valor negativo da energia potencial da partícula.

Nota-se que qualquer constante pode ser adicionada a  $\Phi$  sem mudar o resultado importante de que

$$\vec{F} = \nabla\Phi \quad (1.7).$$

A constante, em geral, é escolhida tal que  $\Phi$  se aproxima de zero no infinito. Em outras palavras, o potencial no ponto  $P$  é dado por

$$\Phi(P) = \int_{\infty}^P \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

Portanto, é mais relevante a diferença de potencial entre dois pontos no espaço, do que o valor do potencial em si.

#### 1.4 Superfícies equipotenciais

Uma superfície equipotencial é uma superfície na qual o potencial permanece constante, isto é:

$$\Phi(x, y, z) = \text{constante} \quad (1.8).$$

Se  $\hat{s}$  é um vetor unitário tangente a uma superfície equipotencial de  $\vec{F}$ , então  $\hat{s} \bullet \vec{F} = \frac{\partial\Phi}{\partial s}$  em qualquer ponto e deve se anular de acordo com a definição de superfície equipotencial. Segue-se que as linhas de campo em qualquer ponto são sempre perpendiculares às suas superfícies equipotenciais e, reciprocamente, qualquer superfície que é perpendicular a todas as linhas de campo deve ser uma superfície equipotencial. Portanto, nenhum trabalho é realizado deslocando-se uma partícula-teste ao longo de uma superfície equipotencial. Somente uma superfície equipotencial pode existir em qualquer ponto do espaço.

A distância entre superfícies equipotenciais é uma medida da densidade das linhas de campo, isto é, o campo de força terá maior intensidade em regiões onde as superfícies equipotenciais estão separadas por distâncias menores.

### 1.5 Potencial newtoniano

A magnitude da força gravitacional entre duas massas é proporcional a cada massa e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

Em coordenadas cartesianas a força mútua entre a partícula de massa  $m$  centrada no ponto  $Q(x',y',z')$  e uma partícula de massa  $m_0$  em  $P(x,y,z)$  (figura 1.3) separadas pela distância  $r$  é dada por

$$\vec{F} = G \frac{m m_0}{r^2} \hat{r} \quad (1.9),$$

onde  $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$ ,  $\hat{r}$  é o vetor unitário direcionado da massa  $m$  ao ponto de observação  $P$ , em coordenadas cartesianas  $\hat{r} = \frac{1}{r} [(x-x')\hat{i} + (y-y')\hat{j} + (z-z')\hat{k}]$  e  $G$  é a constante universal da gravitação.

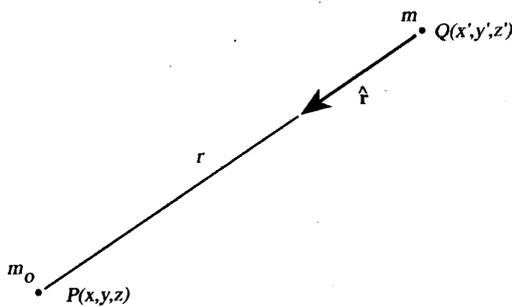


Figura 1.3: massas  $m$  e  $m_0$  experimentam atração gravitacional mútua. Por convenção o versor  $\hat{r}$  é direcionado da fonte gravitacional  $Q$  para o ponto de observação  $P$  onde a massa teste  $m_0$  está localizada (Blakely, 1996).

À Geofísica interessa a força exercida em uma massa de teste  $m$  pela massa da Terra  $M$ . Dividir a força gravitacional (eq. 1.9) por  $m$ , isto é, supor que a massa teste é unitária, resultará na aceleração gravitacional da Terra:

$$\begin{aligned} \vec{F}(P) &= G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad \vec{F} = m\vec{a} \\ \frac{\vec{F}(P)}{m} &= G \frac{M}{r^2} \hat{r}, \quad \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = G \frac{M}{r^2} \hat{r} \\ \vec{g} &= -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (1.10). \end{aligned}$$

O sinal negativo na equação (1.10) é necessário pela a convenção adotada:  $\hat{r}$  é direcionado da fonte, massa da Terra, para o ponto de observação, partícula teste. Isso garante

que  $\vec{g}$  será positivo e apontará para o interior da Terra.

A aceleração gravitacional é um campo conservativo e pode ser representado pelo gradiente do potencial escalar

$$\vec{g}(P) = \nabla U(P) \quad (1.11),$$

$$\text{onde } U(P) = G \frac{m}{r} \quad (1.12).$$

A função  $U$  é chamada de potencial gravitacional ou potencial newtoniano, e a aceleração  $\vec{g}$  é um campo potencial.

### 1.6 Unidades e constante gravitacional

	SI	cgs
Massa	kg	g
Distância	m	cm
Aceleração	m/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>
Densidade	kg/m <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>
G	6,6732x10 <sup>-11</sup> m <sup>3</sup> /kgs <sup>2</sup>	6,6732x10 <sup>-8</sup> cm <sup>3</sup> /gs <sup>2</sup>
Raio Terra		
Equador	6,378x10 <sup>6</sup>	6,378x10 <sup>8</sup>
Lat 45°	6,367 x10 <sup>6</sup>	6,367x10 <sup>8</sup>
Massa Terra	5,976x10 <sup>24</sup>	5,976x10 <sup>27</sup>

A atração gravitacional é frequentemente referida em Gal (em homenagem a Galileu) onde 1 Gal = 1 cm/s<sup>2</sup>, e na literatura geofísica, a atração gravitacional é dada em unidades de mGal (1 mGal = 10<sup>-3</sup> Gal). A conversão de cgs para unidade SI é 1 mGal = 10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup>.

Em algumas aplicações onde os levantamentos são locais e a variação da aceleração de gravidade é pequena, utiliza-se o gu (gravity unit) que corresponde a 0,1 vezes o mGal, 1 mGal = 10 gu.

### 1.7 O potencial de distribuições de massas

O potencial gravitacional obedece ao princípio da superposição: *o potencial gravitacional de uma coleção de massas é a soma das atrações gravitacionais de massas indi-*

viduais. Portanto, a força total sobre uma partícula-teste é a soma vetorial das forças devido a todas as massas no espaço.

O princípio da superposição pode ser aplicado para determinar a atração gravitacional no limite de uma distribuição contínua de massa. A distribuição contínua de massa  $m$  pode ser descrita como uma coleção de um número muito grande de massas infinitesimais  $dm = \rho(x, y, z)dV$ . Aplicando o princípio da superposição

$$U(P) = G \int_V \frac{dm}{r} = G \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dV \quad (1.13),$$

onde a integração é sobre  $V$ , o volume ocupado pela massa. Geralmente,  $P$  é o ponto de observação,  $Q$  o ponto de integração, e  $r$  a distância entre  $P$  e  $Q$ .

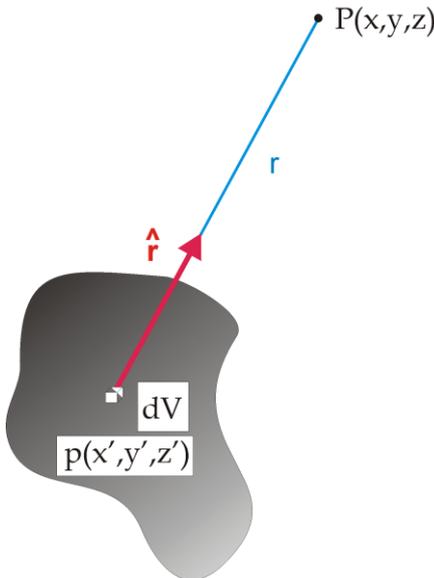


Figura 1.4: atração gravitacional em um ponto  $P$  devido à distribuição de densidade  $\rho$  (Blakely, 1996).

Considere inicialmente os pontos de observação localizados fora da distribuição de massa (figura 1.4).

Se a densidade é uma função bem comportada, a integral (1.13) converge para todo  $P$  situado fora das massas (Kellogg, 1953) e a derivada com relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  pode ser deslocada para dentro da integral. Por exemplo, a derivada parcial de  $U$  com relação a  $x$ <sup>[1]</sup> é

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x} = -G \int_V \frac{(x-x')}{r^3} \rho(Q) dV.$$

Calculando as derivadas para as outras duas direções ortogonais e somando as três componentes tem-se a atração fora da distribuição de massa:

$$\vec{g}(P) = \nabla U(P) = -G \int_V \rho(Q) \frac{\hat{r}}{r^2} dV \quad (1.14).$$

Derivadas de segunda ordem podem ser obtidas de forma análoga, por exemplo, para a componente  $x$ <sup>[2]</sup> tem-se:

$$\frac{\partial^2 U(P)}{\partial x^2} = G \int_V \left[ \frac{-\rho}{r^3} + \frac{3\rho(x-x')^2}{r^5} \right] dV.$$

Repetindo para as componentes  $y$  e  $z$ , e somando-se os três resultados tem-se<sup>[3]</sup>

$$\nabla^2 U(P) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1.15),$$

e o potencial gravitacional é harmônico em todos os pontos fora das massas.

E o potencial no interior da distribuição de massa?

Se  $P$  está situado no interior da distribuição de massa, o integrando da equação (1.14) é singular, e a integral é imprópria. Entretanto, a integral converge. De fato, Kellogg (1953) mostra que a integral

$$I(P) = \int_V \frac{\rho}{r^n} dV,$$

é convergente para  $P$  dentro do volume  $V$  e é contínua em  $V$  se  $n < 3$ ,  $V$  é limitado e  $\rho$  é contínua por partes. Portanto,  $U(P)$  e  $\vec{g}(P)$  existem e são contínuas em todo espaço, seja interno ou externo às massas, desde que a densidade seja uma função bem comportada. Utilizando o resultado do Teorema de Helmholtz (pág. 28, Blakely, 1996,<sup>[4]</sup>) tem-se que se  $\vec{g} = \nabla U(P)$  e se anula no infinito, então

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{g}}{r} dV \quad (1.16).$$

Comparando o integrando da equação (1.16) com o integrando da equação (1.14) tem-se

$$\nabla^2 U(P) = -4\pi G \rho(P) \quad (1.17).$$

A equação (1.17) é a equação de Poisson que descreve o potencial em todos os pontos dentro de uma distribuição de massas. A equação de Laplace é um caso especial da equação de Poisson, válida para regiões livres de massas.

Resumindo:

- (1) O potencial Newtoniano  $U$  e a aceleração da gravidade  $\mathbf{g}$  existem e são contínuos em todo espaço para o caso de uma distribuição delimitada de massa que é comportada e contínua em pedaços.
- (2) O potencial  $U$  é diferenciável em todo o espaço, ou seja, a equação  $\vec{g} = \nabla U(P)$  é verdadeira em todo o espaço.
- (3) A equação de Poisson  $\nabla^2 U(P) = -4\pi G\rho(P)$  descreve a relação entre a massa e o potencial em todo espaço. A equação de Laplace  $\nabla^2 U(P) = 0$  é o caso especial da equação de Poisson válida em regiões do espaço não ocupadas pelas massas.
- (4) A generalidade da equação de Laplace leva à ambiguidade. Diferentes distribuições de massas ou de magnetização geram o mesmo campo potencial através de regiões do espaço (Sharma, 1997).

### 1.8 Distribuição de massa de uma camada esférica e de uma esfera oca

Considere uma camada esférica de raio  $a$  e densidade superficial uniforme  $\sigma$ . A origem do sistema de coordenadas está no centro da esfera, e um dos eixos orientados passa pelo ponto  $P$  (figura 1.5).

O potencial de uma distribuição de massa sobre uma superfície  $S$  vista de um ponto  $P$  fora da superfície é dado por:

$$U(P) = G \int_S \frac{\sigma(S)}{r} dS \quad (1.18),$$

onde  $\sigma$  é a densidade superficial em unidade de massa por unidade de área ( $\text{kg}/\text{m}^2$  ou  $\text{g}/\text{cm}^2$ ). A equação (1.18) pode ser escrita como<sup>[5]</sup>:

$$U(P) = G \int_S \frac{\sigma(S)}{r} dS = G \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma a^2 \sin\theta}{r} d\theta d\phi \quad (1.19),$$

onde  $dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$ .

A distância de  $P$  a qualquer ponto da camada esférica é

$$r = [R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta]^{1/2} \text{ e } \frac{dr}{d\theta} = \frac{aR\sin\theta}{r}.$$

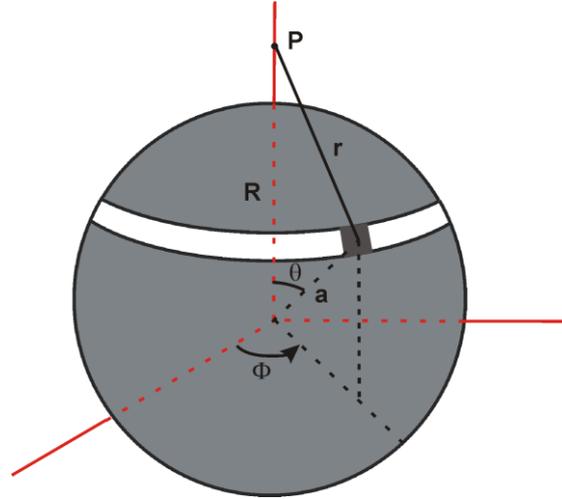


Figura 1.5: camada esférica de raio  $a$  observada no ponto  $P$  (Blakely, 1996).

Substituindo na integral:

$$U(P) = \frac{2\pi G\sigma a}{R} \int_{R-a}^{R+a} dr = G \frac{4\pi a^2 \sigma}{R} = G \frac{M}{R} \quad (1.20),$$

onde  $M$  é a massa total da camada. Portanto, o potencial gravitacional em qualquer ponto fora de uma casca esférica uniforme é equivalente ao potencial de uma massa puntiforme localizada no centro da casca com massa total igual à da esfera.

Segue que a atração gravitacional para pontos fora da casca esférica é equivalente a de um ponto de massa

$$\vec{g}(P) = \nabla U(P) = -G \frac{M}{R^2} \hat{r},$$

e que  $\nabla^2 U(P) = 0$ .

Agora considere  $P$  dentro da esfera oca. A integral de (1.20) pode ser repetida modificando-se os limites

$$U(P) = \frac{2\pi G\sigma a}{R} \int_{a-R}^{a+R} dr = G4\pi a\sigma = G\frac{M}{a} \quad (1.21).$$

Todas as quantidades em (1.21) são constantes, então *o potencial gravitacional é constante em qualquer ponto dentro de uma casca uniforme*. Conseqüentemente, nenhuma força gravitacional existe dentro de uma esfera oca porque

$$\vec{g}(P) = \nabla(G\frac{M}{a}) = 0 \quad (1.22).$$

Considere uma esfera sólida. Para um ponto  $P$  fora da esfera pode-se aplicar o princípio da superposição. Uma esfera pode ser considerada como uma coleção de cascas esféricas com raios variando de 0 até  $a$ . Portanto, *o potencial de uma esfera sólida para todos os pontos externos a ela pode ser visto como um simples ponto de massa localizado no centro da esfera com magnitude igual a massa total da esfera*.

$$U(P) = G\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{R} \quad \vec{g}(P) = -G\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho}{R^2} \hat{r} \quad (1.23),$$

e  $\nabla^2 U(P) = 0$  em todo o espaço fora da esfera.

### 1.9 Fio de comprimento finito e infinito

Considere a atração gravitacional devido a um fio estendido ao longo do eixo  $z$  e com comprimento de  $z = -a$  até  $z = a$  e um ponto de observação  $P$  colocado no eixo  $x$  no plano  $xz$  (figura 1.6).

A componente da gravidade ao longo do eixo  $y$  é zero em  $P$ . A componente paralela à direção do fio também é zero porque o ponto  $P$  está no centro do fio, isto é, a massa entre  $0 \leq z \leq a$  é igual à massa entre  $-a \leq z \leq 0$ .

A atração gravitacional pode ser escrita como:

$$\vec{g}(P) = -G \int_V \rho \frac{\hat{r}}{r^2} dV = -\hat{i} G\lambda x \int_{-a}^a \frac{1}{r^3} dz' \quad (1.24),$$

onde  $\lambda$  é a massa por unidade de comprimento do fio. Fazendo algumas substituições, o ângulo  $OPQ$  por  $\theta$ , o ângulo  $OPa$  por  $\theta_0$ ,  $r = x \sec\theta$ ,  $z' = x \tan\theta$  e  $dz' = x \sec^2\theta d\theta$ , e derivando [6]:

$$\begin{aligned} \vec{g}(P) &= -\hat{i} \frac{G\lambda}{x} \int_{\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta d\theta = -\hat{i} \frac{2G\lambda}{x} \text{sen}\theta_0 \\ &= -\hat{i} 2G\lambda \frac{a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned} \quad (1.25).$$

Portanto, a atração gravitacional de um fio de comprimento finito ao longo da linha perpendicular ao ponto central do fio é dirigida ao centro do fio.

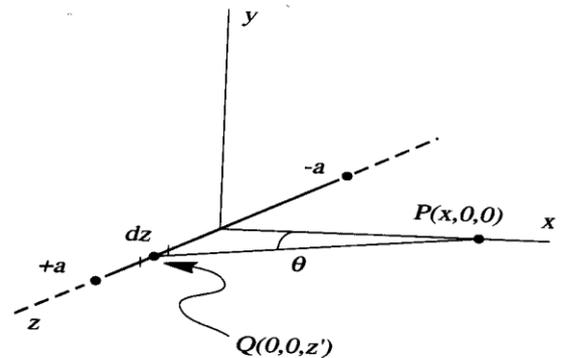


Figura 1.6: gravidade em  $P$  devido a um fio ao longo do eixo  $z$  (Blakely, 1996).

Considere a atração de um fio infinito. Quando  $a \rightarrow \infty$  na equação (1.25) a atração torna-se:

$$\vec{g}(P) = -\hat{i} \frac{2G\lambda}{x} \quad (1.26).$$

Portanto, a atração gravitacional de um fio infinitamente longo é *inversamente proporcional e na direção da perpendicular ao fio*. Uma generalização da relação (1.26) para um ponto  $P$  situado em um local arbitrário no plano  $xy$  é:

$$\vec{g}(P) = -\frac{2G\lambda}{r} \hat{r} \quad (1.27),$$

onde  $\hat{r}$  é direcionado do fio ao ponto  $P$  e está no plano  $xy$ , e  $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}$ .

Considere o potencial de um fio finito de comprimento  $2a$  (figura 1.6):

$$\begin{aligned}
 U(P) &= G\lambda \int_{-a}^a \frac{1}{r} dz' = G\lambda \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sec \theta d\theta \\
 &= G\lambda \ln \left( \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \right) = G\lambda \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a}
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

Quando  $a \rightarrow \infty$  o potencial também tende a infinito, o quê viola a hipótese inicial de que o potencial deve desaparecer no infinito. Este fato pode ser remediado redefinindo o significado do potencial para corpos infinitamente longos. O potencial de um fio infinito é *definido* de forma que ele desapareça a uma unidade de distância do fio. Isto é obtido adicionando uma constante à equação (1.28):

$$U(P) = G\lambda \left[ \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} - \ln \frac{\sqrt{1 + a^2} + a}{\sqrt{1 + a^2} - a} \right]
 \tag{1.29}$$

Agora, quando  $a \rightarrow \infty$ ,

$$U(P) = 2G\lambda \ln \frac{1}{x}
 \tag{1.30}$$

e movendo  $P$  para um ponto arbitrário no plano  $xy$ , resulta:

$$U(P) = 2G\lambda \ln \frac{1}{r}
 \tag{1.31}$$

onde  $r$  é a distância perpendicular de  $P$  ao fio. Observe que o potencial não desaparece no infinito, mas em  $r=1$ .

A integração de (1.31) mostra que o potencial newtoniano de um cilindro de raio  $a$ , com densidade uniforme e infinitamente longo é dado por:

$$U(P) = 2\pi a^2 G\rho \ln \frac{1}{r}
 \tag{1.32}$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $r$  é a distância perpendicular ao eixo do cilindro. Da equação (1.27) determina-se a atração gravitacional de um cilindro infinitamente longo:

$$\vec{g}(P) = -\frac{2\pi a^2 G\rho}{r} \hat{r}
 \tag{1.33}$$

onde  $\vec{r}$  é direcionado do eixo do cilindro para o ponto  $P$ .

### 1.10 Distribuições bi-dimensionais em geral

Massas que são infinitamente estendidas em uma direção são chamadas de bi-dimensionais. A densidade de uma fonte bi-dimensional, por definição, não varia ao longo do seu eixo maior, e  $\rho$  é função apenas das duas dimensões perpendiculares ao eixo maior do corpo, isto é,  $\rho(x,y,z) = \rho(x,y)$ .

Usando a equação (1.13) e a figura 1.7 tem-se:

$$U(P) = G \int_R \frac{\rho(Q)}{r} dV = G \int_S \rho(S) \left( \int_{-a}^a \frac{1}{r} dz' \right) dS
 \tag{1.34}$$

onde  $S$  no caso representa a área da seção transversal da fonte bi-dimensional. Quando  $a \rightarrow \infty$ , a integral interna torna-se o potencial logarítmico de um fio com  $G\lambda=1$ , e o potencial de uma distribuição bi-dimensional é:

$$U(P) = 2G \int_S \rho(S) \ln \left( \frac{1}{r} \right) dS
 \tag{1.35}$$

O gradiente da equação (1.35) dá a atração gravitacional:

$$\vec{g}(P) = -2G \int_S \frac{\rho(S)}{r} \hat{r} dS
 \tag{1.36}$$

que é perpendicular ao corpo.

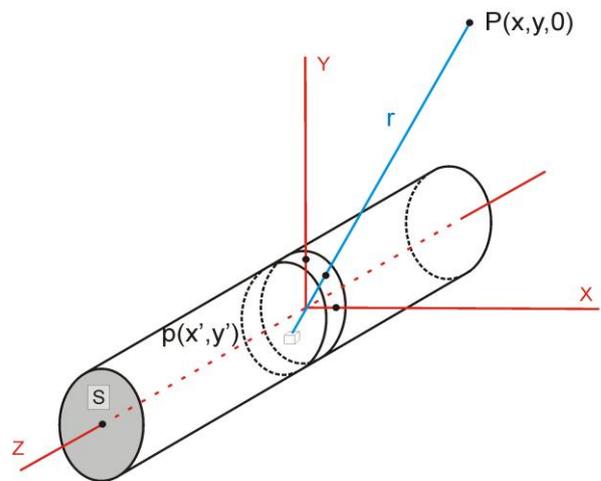


Figura 1.7: efeito gravitacional observado no ponto  $P$  devido a um corpo infinito da direção  $z$  (Blakely, 1996).

As equações (1.35) e (1.36) representam o potencial newtoniano e a atração de um corpo infinitamente longo, uniforme na direção paralela à dimensão maior do corpo. Objetos bi-dimensionais são mais fáceis de serem visualizados. Algumas feições geológicas como falhas, contatos e sinclinais podem ser aproximadas por corpos 2-D.

### 1.11 Associação com feições geológicas

#### 1.11.1 Esfera uniforme – modelo para diápiro

Estruturas de diápiros introduzem material de densidade diferente dentro da rocha hospedeira. Um domo salino de densidade baixa ( $\rho = 2150 \text{ kg/m}^3$ ) intrudindo em uma rocha carbonática de densidade mais elevada ( $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ) produz um contraste de densidade de  $\Delta\rho = -350 \text{ kg/m}^3$  e causa uma anomalia negativa. Um plug vulcânico ( $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$ ) intrudindo em um granito ( $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$ ) tem um contraste de densidade de  $\Delta\rho = +200 \text{ kg/m}^3$  e causa uma anomalia positiva. As linhas de isovalores de anomalia em um mapa são centradas no diápiro e um perfil apresenta a mesma característica. Modelos simples, como esfera ou cilindro vertical, podem modelar esse tipo de estrutura.

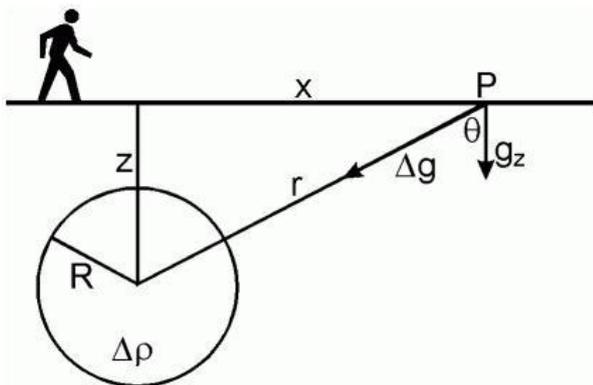


Figura 1.8: efeito gravitacional, componente vertical, devido a uma esfera ou ponto de massa  $m$ . [http://gravmag.ou.edu/grav\\_interp/grav\\_interp.html](http://gravmag.ou.edu/grav_interp/grav_interp.html)

Suponha uma esfera de raio  $R$  e contraste de densidade  $\Delta\rho$  com o centro a uma profundidade  $z$  abaixo da superfície. A componente  $g_z$  da atração gravitacional (aquela que o gravímetro mede) é dada por (figura 1.8):

$$g_z = g \cos\theta = G \frac{M}{r^2} \frac{z}{r} \quad (1.37).$$

Substituindo a massa  $M$  e a distância  $r$  por  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta\rho$  e  $r^2 = z^2 + x^2$ , obtém-se:

$$g_z = \frac{4}{3} \pi G R^3 \Delta\rho \left( \frac{z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \right) \quad (1.38).$$

#### 1.11.2 Cilindro horizontal – modelo para anticlinal ou sinclinal

A anomalia gravimétrica de um anticlinal pode ser modelada assumindo que as camadas dobradas trazem rochas mais densas para regiões próximas à superfície, resultando em um contraste de densidade positivo. Um sinclinal é modelado assumindo que a parte central é preenchida com rochas menos densas, resultando em contraste de densidade negativo.

A atração gravitacional  $dg$  devido a um segmento infinitesimal da linha de massa  $d\ell$  é (figura 1.9):

$$dg = \frac{G dm}{r^2} \frac{R}{r} = G \lambda R \frac{d\ell}{(R^2 + \ell^2)^{3/2}}$$

$$dm = \lambda d\ell \quad \cos\theta = R/r \quad r^2 = R^2 + \ell^2$$

A componente  $z$  é:

$$dg_z = dg \sin\phi$$

$$g_z = G \lambda \sin\phi R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ell}{(R^2 + \ell^2)^{3/2}} \quad (1.39).$$

Avaliando a integral:

$$\ell = R \tan\theta \quad d\ell = R \sec^2\theta d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ell}{(R^2 + \ell^2)^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R \sec^2\theta d\theta}{(R^2 + R^2 \tan^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R \sec^2\theta d\theta}{(R^2 \sec^2\theta)^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R \sec^2\theta d\theta}{R^3 \sec^3\theta} =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{R^2 \sec\theta} = \frac{1}{R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{1}{R^2} \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{R^2}$$

Portanto:

$$g_z = G\lambda \sin \phi R \frac{2}{R^2} = \frac{2G\lambda \sin \phi}{R} = \frac{2G\lambda}{R^2}$$

$$= 2G\lambda \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (1.40).$$

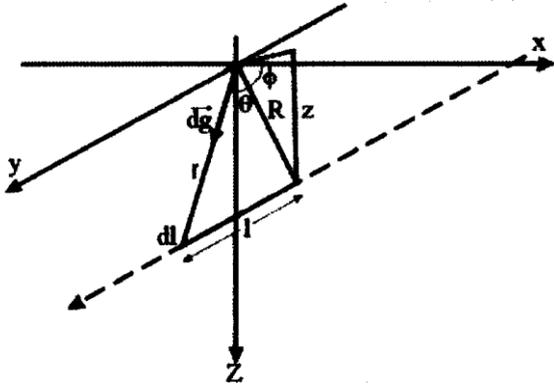


Figura 1.9: geometria usada para o cálculo do efeito gravitacional de uma linha de massa m. (Ussami, 2006).

Para um cilindro de raio A e densidade  $\Delta\rho$ , a massa por unidade de comprimento torna-se  $\pi A^2 \Delta\rho$  e a atração gravitacional:

$$g_z = 2\pi GA^2 \Delta\rho \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (1.41).$$

### 1.11.3 Camada horizontal fina

O efeito gravimétrico causado por uma camada horizontal muito fina pode ser calculado supondo que esta é composta de numerosos elementos de massa.

Seja  $z$  a profundidade da camada,  $t$  a espessura e  $\Delta\rho$  o contraste de densidade. A massa por unidade de comprimento na direção  $y$  de um elemento de largura  $dx$  é  $(\Delta\rho t dx)$ . Substituindo na equação da atração gravimétrica de uma linha de massa e integrando entre os limites  $x_1$  e  $x_2$  (figura 1.10) tem-se:

$$g_z = G\Delta\rho t z \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2 + z^2}$$

$$= G\Delta\rho t \left[ \arctan\left(\frac{x_2}{z}\right) - \arctan\left(\frac{x_1}{z}\right) \right] \quad (1.42).$$

Escrevendo  $\arctan(x_1/z) = \Phi_1$  e  $\arctan(x_2/z) = -\Phi_2$ , como na figura 1.10b, a equação torna-se:

$$g_z = G\Delta\rho t (\phi_2 - \phi_1) \quad (1.43).$$

O efeito gravimétrico de uma camada horizontal semi-infinita pode ser obtido deslocando-se a origem do eixo  $x$  para o limite da camada, como mostrado na figura 1.10c. Com esta geometria  $\arctan(x/z) = \Phi_1$  e  $\Phi_2 = \pi/2$ . O efeito gravitacional é:

$$g_z = G\Delta\rho t \left[ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x}{z}\right) \right] \quad (1.44).$$

Outro caso de interesse é de uma camada horizontal infinita. Agora  $\Phi_2 = \pi/2$  e  $\Phi_1 = -\pi/2$  e o efeito gravimétrico é:

$$g_z = 2\pi G\Delta\rho t \quad (1.45),$$

que é a expressão do platô de Bouguer.

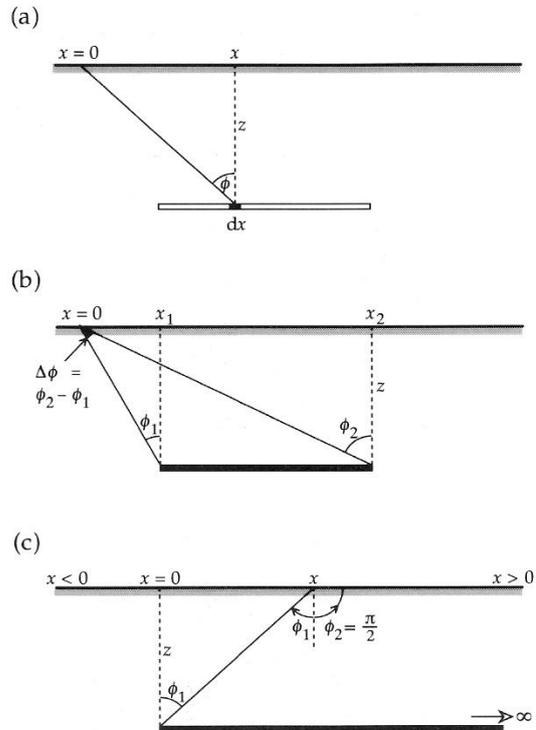


Figura 1.10: geometria para o cálculo do efeito gravitacional de uma camada horizontal fina. (a) Subdivisão em elementos de  $dx$ ; (b) limites  $x_1$  e  $x_2$ ; (c) camada semi-infinita. (Lowrie, 1997).

### 1.11.4 Camada horizontal espessa – modelo para falha vertical

A figura 1.11 ilustra um perfil gravimétrico cortando uma falha vertical. O efeito gravimétrico aumenta progressivamente até alcançar o bloco soerguido, responsável pela presença de material mais denso em profundidade menor. O bloco falhado pode ser modelado como o resultado de uma camada horizontal

semi-infinita de altura  $h$  e contraste de densidade  $\Delta\rho$  com centro na profundidade  $z_0$ .

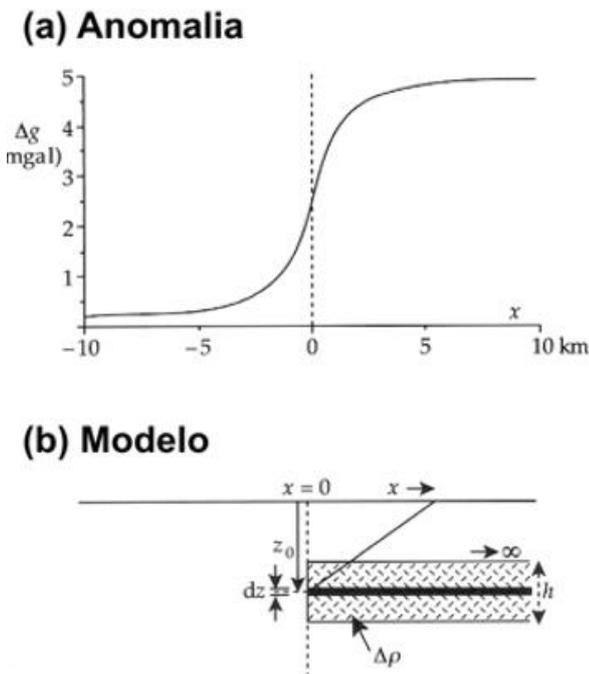


Figura 1.11: (a) anomalia gravimétrica através de uma falha vertical; (b) modelo do corpo anômalo considerando uma placa semi-infinita de espessura  $h$ . (modificada de Lowrie, 1997).

A placa pode ser dividida em camadas semi-infinitas, horizontais, finas, de espessura  $dz$  à profundidade  $z$ . A expressão (1.44) é usada para calcular o efeito de cada camada fina. Integrando essa expressão em  $z$  para obter o efeito de toda a camada, com limites de integração dados por  $z-(h/2)$  e  $z+(h/2)$  determina-se a atração gravimétrica. Neste caso, é:

$$g_z = G\Delta\rho h \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{h} \int_{z_0-\frac{h}{2}}^{z_0+\frac{h}{2}} \arctan\left(\frac{x}{z}\right) dz \right] \quad (1.46).$$

A expressão dentro do colchete é o valor médio do ângulo  $\arctan(x/z)$  calculado sobre todo o deslocamento vertical da falha ( $h$ , na figura 1.11). Esta expressão pode ser aproximada pelo valor médio do deslocamento vertical,  $z_0$ , resultando em:

$$g_z = G\Delta\rho h \left[ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x}{z_0}\right) \right] \quad (1.47).$$

O erro envolvido nessa aproximação é de cerca de 2%, desde que  $z_0 > 2h$ .

### 1.11.5 Camada horizontal espessa – modelo para falha inclinada

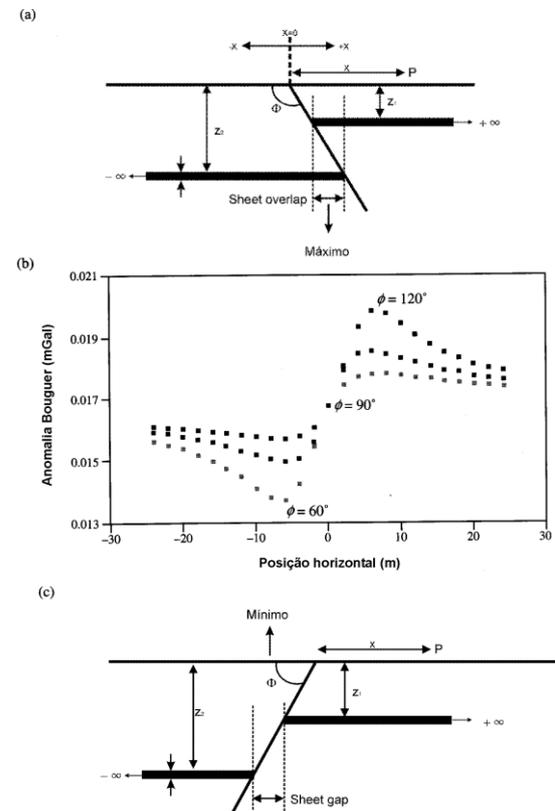


Figura 1.12: efeito gravimétrico de uma camada horizontal falhada. (a) Inclinação da falha de  $120^\circ$  (mergulho de  $60^\circ$  para a direita); (b) anomalia Bouguer para inclinações de  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $120^\circ$ ; (c) inclinação da falha de  $60^\circ$  (mergulho de  $60^\circ$  para a esquerda) (Burger et al., 2006).

Uma falha vertical tem aplicação bastante limitada. Para uma falha com ângulos diversos deve-se usar a expressão (1.48):

$$g_z = G\Delta\rho t \left[ \begin{array}{l} \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x}{z_1} + \cot\phi\right) - \\ \tan^{-1}\left(\frac{x}{z_2} + \cot\phi\right) \end{array} \right] \quad (1.48),$$

onde  $x$  é a posição horizontal da medida,  $t$  é a espessura da camada,  $\Phi$  é a inclinação da falha,  $z_1$  é a profundidade do bloco levantado e  $z_2$  é a profundidade do bloco abatido, como na figura 1.12.

### 1.11.6 Cilindro vertical

Outra forma geométrica interessante é o cilindro vertical. A aceleração gravimétrica diretamente sobre o eixo do cilindro, no ponto P da figura 1.13 é dado pela relação (1.49), derivada em Burger et al. (2006):

$$g_z = 2\pi G\Delta\rho\left(h_2 - h_1 + \sqrt{R^2 + h_1^2} - \sqrt{R^2 + h_2^2}\right) \quad (1.49).$$

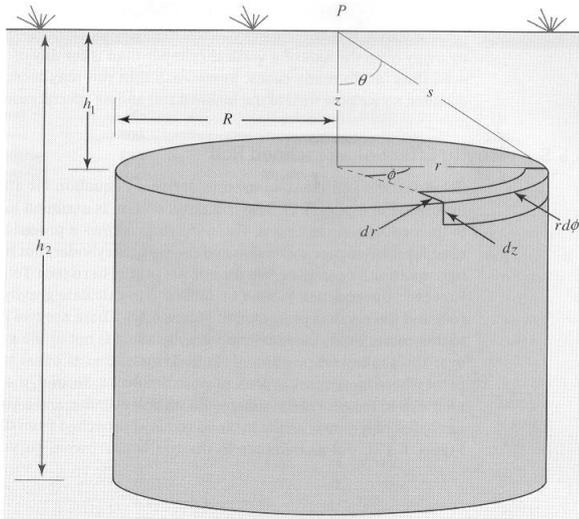


Figura 1.15: esquema usado na notação para o cálculo do valor da gravidade no eixo de um cilindro vertical (Burger et al., 2006).

#### Notas:

[1]

$$U(P) = G \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dV$$

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x} = G \int_V \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho(Q)}{r} dV$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-1/2} = -\frac{1}{2} \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-3/2} 2(x-x') \\ &= -\frac{(x-x')}{r^3} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U(P)}{\partial x} = -G \int_V \frac{(x-x')}{r^3} \rho(Q) dV$$

Calculando as derivadas com relação a y e z e depois somando as três componentes temos:

$$\vec{g}(P) = \nabla U(P) = -G \int_V \frac{(x-x')\hat{i} + (y-y')\hat{j} + (z-z')\hat{k}}{r^3} \rho(Q) dV = -G \int_V \frac{\hat{r}}{r^2} \rho(Q) dV$$

### Referências do tópico 1

**Blakely, R.J.**, 1996, Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications, Cambridge University Press, 441 pp.

**Burger, H.R., Sheehan, A.F. and Jones, C.H.**, 2006. Introduction to Applied Geophysics. Exploring the shallow subsurface. W.W. Norton & Company, New York. Ch. 6: 349-428

**Kellogg, O.D.**, 1953, Foundations of Potential Theory, Dover, New York.

**Lowrie, W.**, 1997, Fundamentals of Geophysics, Cambridge University Press, 354 pp.

**Roy, K.K.**, 2008. Potential Theory in Applied Geophysics, Springer-Verlag.

**Ussami, N.**, 2008. Material para o curso AGG324.

Parte 2: Campo gravimétrico. Conceitos e aplicações

[2]

$$\frac{\partial^2 U(P)}{\partial x^2} = -G \int_V \frac{\partial}{\partial x} \frac{(x-x')}{r^3} \rho(Q) dV$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(x-x')}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} (x-x') [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-3/2}$$

$$= [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-3/2} - (x-x') \frac{3}{2} 2(x-x') [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-5/2} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-x')^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 U(P)}{\partial x^2} = G \int_V \left[ \frac{\rho}{r^3} + \frac{3\rho(x-x')^2}{r^5} \right] dV$$


---

[3]

$$\frac{\partial^2 U(P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(P)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(P)}{\partial z^2} = G \int_V \left[ \frac{\rho}{r^3} + \frac{3\rho(x-x')^2}{r^5} - \frac{\rho}{r^3} + \frac{3\rho(y-y')^2}{r^5} - \frac{\rho}{r^3} + \frac{3\rho(z-z')^2}{r^5} \right] dV =$$

$$= G \int_V \left[ -3 \frac{\rho}{r^3} + \frac{3\rho[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{r^5} \right] dV = G \int_V \left[ -3 \frac{\rho}{r^3} + \frac{3\rho r^2}{r^5} \right] dV = 0$$

$$\nabla^2 U(P) = 0$$


---

[4]

Teorema de Helmholtz: qualquer campo vetorial  $\mathbf{F}$  que é contínuo e zero no infinito pode ser expresso como o gradiente de um escalar e o rotacional de um vetor, isto é,  $\vec{F} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$  onde  $\nabla\phi$  e  $\nabla \times \vec{A}$  são perpendiculares na integral da norma. A quantidade  $\Phi$  é o potencial escalar de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{A}$  é o vetor potencial. Se  $\mathbf{F}$  é contínuo e vai a zero no infinito podemos construir a integral

$$\vec{W}(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{F}(Q)}{r} dV$$

onde  $Q$  é o ponto de integração,  $r$  é a distância entre  $P$  e  $Q$  e a integral é feita em todo espaço. Cada uma das componentes cartesianas de  $\mathbf{W}$  tem a forma

$$W_x = \frac{1}{4\pi} \int \frac{F_x}{r} dV$$


---

[5]

Em coordenadas esféricas  $ds = a^2 \sin\theta d\theta d\Phi$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2} (-2aR \sin\theta) (R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta)^{-1/2} = \frac{aR \sin\theta}{r}$$


---

[6]

$$r = x \sec\theta \quad z' = x \tan\theta \quad dz' = x \sec^2\theta d\theta$$

$$\vec{g}(P) = -\hat{i} G\lambda \int_{-a}^a \frac{x}{r^3} dz' = -\hat{i} G\lambda \int_0^{\theta_0} \frac{x}{x^3 \sec^3\theta} x \sec^2\theta d\theta = -\hat{i} G\lambda \int_0^{\theta_0} \frac{1}{x \sec\theta} d\theta = -\hat{i} G\lambda \int_0^{\theta_0} \frac{\cos\theta}{x} d\theta$$

$$= -\hat{i} \frac{G\lambda}{x} (\sin\theta - \sin\theta_0) = -\hat{i} \frac{2G\lambda}{x} \sin\theta_0$$

## Capítulo 2 - Densidade, Redução e Anomalias

Aqui são discutidas as correções necessárias para isolar o efeito gravitacional causado por diferenças de densidade no interior da Terra.

### 2.1 Densidade

A anomalia gravimétrica resulta do contraste lateral de densidade entre um corpo rochoso de densidade  $\rho_1$  e sua vizinhança de densidade  $\rho_2$ :  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ . O sinal de  $\Delta\rho$  determina se a anomalia será um alto ou baixo gravimétrico.

A maioria das rochas tem densidades entre 1,6 e 3,2 g/cm<sup>3</sup>, veja valores na Tabela 2.1.

A densidade depende da composição e da porosidade. A porosidade é a principal causa da variação na densidade das rochas sedimentares. Estas, na média, apresentam valores mais baixos, em função da porosidade, e da densidade do fluido que preenche os poros. As sequências de rochas sedimentares apresentam um aumento da densidade em função da profundidade devido à compactação. As rochas ígneas e metamórficas têm uma porosidade muito reduzida e a densidade depende da composição. As rochas vulcânicas extrusivas, no geral, têm densidade menor que os respectivos intrusivos, e as rochas mais básicas têm maior densidade que as ácidas. A densidade tende a aumentar com o grau de metamorfismo da rocha, pois este preenche o espaço poroso ao recristalizar os minerais em composições mais densas.

Aqui apenas serão apresentados os métodos de determinação da densidade. Informações mais detalhadas devem ser buscadas em Lowrie (1997), Telford et al. (1990), Nettleton (1976) e outros livros texto.

A densidade pode ser obtida através de medidas do peso de uma amostra no ar e na água, e aplicando o princípio de Arquimedes:

$$\rho = \frac{P_{ar}}{P_{ar} - P_{ag}} \quad (2.1)$$

Tabela 2.1: densidade de rochas baseado em Telford et al. (1990).

Tipo	Densidade	Valor médio
<b>Rochas sedimentares</b> (valores para rochas saturadas)	(g/cm <sup>3</sup> )	(g/cm <sup>3</sup> )
Aluvião	1,96 – 2,00	1,98
Argila	1,63 – 2,60	2,21
Areia	1,7 – 2,3	2,0
Arenito	1,61 – 2,76	2,35
Argilito	1,77 – 3,2	2,40
Calcário	1,93 – 2,90	2,55
<b>Rochas ígneas</b>		
Riolito	2,35 - 2,70	2,52
Andesito	2,4 – 2,8	2,61
Granito	2,50 - 2,81	2,64
Granodiorito	2,67 – 2,79	2,73
Diabásio	2,50 – 3,20	2,91
Basalto	2,70 – 3,30	2,99
Gabro	2,70 – 3,50	3,03
Peridotito	2,78 – 3,37	3,15
Piroxenito	2,93 – 3,34	3,17
<b>Rochas metamórficas</b>		
Quartzito	2,5 – 2,70	2,60
Xisto	2,39 – 2,9	2,64
Granulito	2,52 – 2,73	2,65
Filito	2,68 – 2,80	2,74
Mármore	2,6 – 2,9	2,75
Ardósia	2,7 – 2,9	2,78
Gnaiss	2,59 – 3,0	2,80
Anfibolito	2,90 – 3,04	2,96
Eclogito	3,2 – 3,54	3,37

#### 2.1.1 Densidade a partir da velocidade das ondas sísmicas

Medidas em laboratório de amostras de rochas sedimentares saturadas, rochas ígneas e metamórficas mostram que a densidade e a velocidade das ondas sísmicas P e S são relacionadas. O melhor ajuste é uma curva empí-

rica suavizada, como mostrado na figura 2.1. Observe que há dispersão das medidas, os valores dessa curva servem apenas para corpos de grandes dimensões alojados dentro da crosta. É quase certo que o comportamento em profundidades maiores é diferente devido ao aumento de pressão e temperatura.

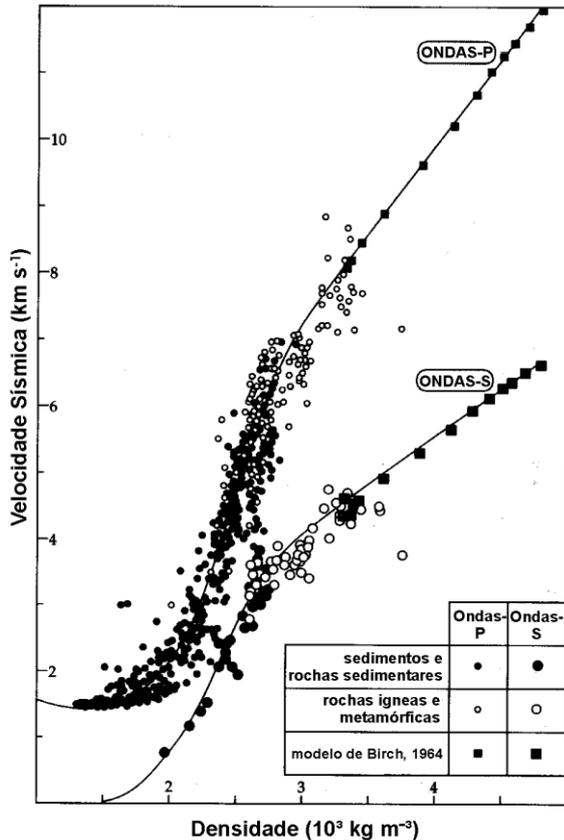


Figura 2.1: velocidade das ondas P e S versus a densidade para vários tipos de rochas (modificado de Lowrie, 1997).

### 2.1.2 Perfilagem gama-gama

A densidade de uma formação rochosa adjacente a um poço pode ser medida usando-se um perfilador de poço. O princípio físico é o espalhamento Compton dos raios gama pelos elétrons com ligação mais fraca das rochas adjacentes ao poço.

O perfilador de densidade é um cilindro blindado que contém uma fonte de raios  $\gamma$ , como  $^{137}\text{Cs}$ , que emite radiação através de uma pequena janela (figura 2.2). Os raios  $\gamma$  colidem com os elétrons dos átomos próximos à parede do poço e são espalhados. Cintiladores próximo e distante, acima da fonte, detectam e medem a energia dos raios  $\gamma$ . O perfilador desce encostado à parede do poço. A intensidade da radiação é determinada pela densida-

de de elétrons na rocha. Os raios  $\gamma$  penetram cerca de 15 cm junto à parede do poço. O equipamento deve ser calibrado com medidas em situações controladas.

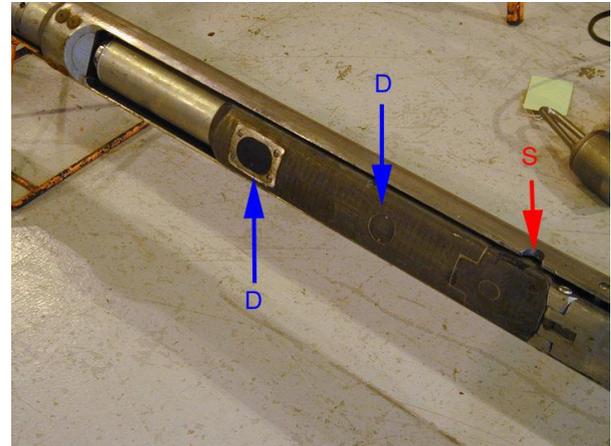


Figura 2.2: vista de um perfilador para medidas de densidade. S marca a posição da fonte, D a posição dos detectores próximo e distante.

[http://www.abdn.ac.uk/~wpg002/pg/mscipg/fieldtrips/ipp\\_bakeratlas\\_gallery.php](http://www.abdn.ac.uk/~wpg002/pg/mscipg/fieldtrips/ipp_bakeratlas_gallery.php)

Um exemplo de resultado de perfilagem pode ser visto na figura 2.3.

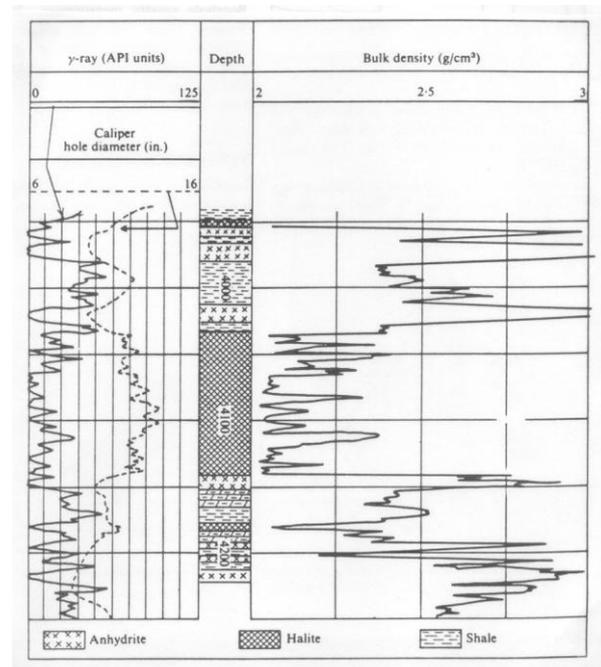


Figura 2.3: perfil de densidade, raios gama e caliper para identificação de evaporitos (Hallenburg, 1984).

### 2.1.3 Gravímetro de poço

Alguns tipos de gravímetros foram modificados para permitir medida da aceleração de gravidade dentro de poços estreitos e em temperaturas elevadas (figura 2.4). A medida de densidade é baseada na aplicação das correções de ar-livre e Bouguer.



Figura 2.4: gravímetro de poço.  
<http://www.microglacoste.com/bhg-intro2.htm>

Sejam  $g_1$  e  $g_2$  os valores de gravidade medidos em poço a alturas  $h_2$  e  $h_1$  acima do elipsóide de referência (figura 2.5). Como o ponto  $h_1$  está mais próximo do centro da Terra, o valor de  $g_2$  será maior pela quantidade  $(0,3086 - 0,0419\rho)\Delta h$ , onde  $\rho$  é em  $\text{g/cm}^3$  e  $\Delta h = h_1 - h_2$ . Na profundidade  $h_1$  o gravímetro sente a atração da massa acima dessa profundidade, diminuindo o valor de  $g_2$ , que requer uma compensação na correção de Bouguer pelo acréscimo de  $(0,0419\rho) \Delta h$ . A diferença  $\Delta g$  entre os valores corrigidos de  $g_1$  e  $g_2$  após a redução no nível  $h_1$  é:

$$\begin{aligned} \Delta g &= (0,3086 - 0,0419\rho)\Delta h - 0,0419\rho\Delta h = \\ &= (0,3086 - 0,0838\rho)\Delta h \end{aligned} \quad (2.2)$$

Rearranjando os termos tem-se:

$$\rho = 3,683 - 11,93 \frac{\Delta g}{\Delta h} \quad (2.3)$$

onde a densidade é dada em  $\text{g/cm}^3$ .

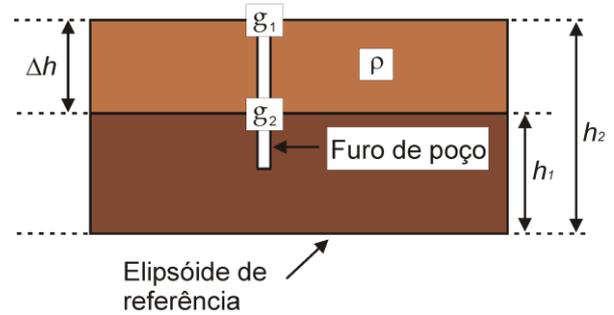


Figura 2.5: esquema para medida usando gravímetro em poço (modificado de Lowrie, 1996).

A figura 2.6 apresenta os resultados de medidas de densidade usando um gravímetro de poço comparado aos dados obtidos com perfilador gama.

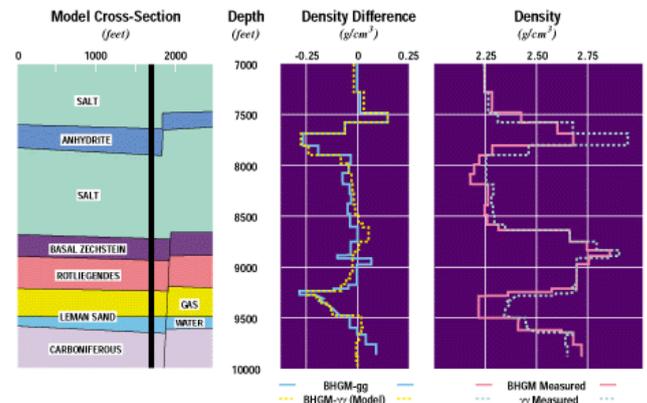


Figura 2.6: Resultados de medidas de densidade feitos em um furo do Mar do Norte e comparação com medidas de perfilagem gama.  
<http://www.microglacoste.com/bhg-intro2.htm>

### 2.1.4 Método de Nettleton

O método de Nettleton compara curvas obtidas com diferentes valores de densidade na correção de Bouguer com a topografia, ao longo de um perfil.

O melhor valor de densidade é aquele cujo perfil apresenta a correlação mínima com a topografia, como pode ser visto na figura 2.7.

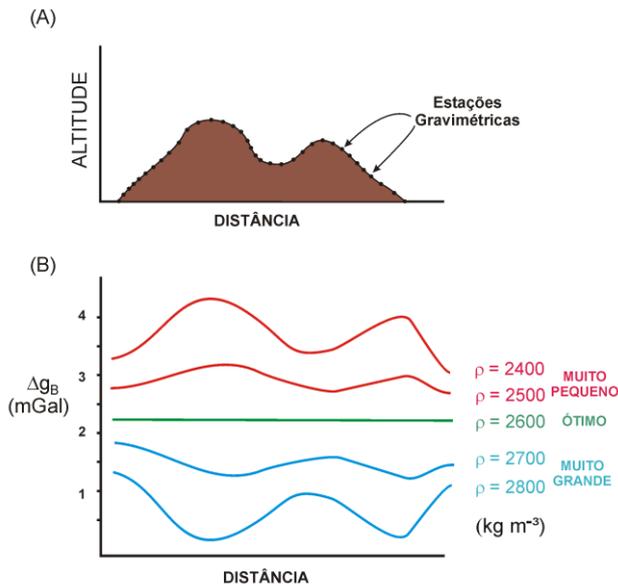


Figura 2.7: esquema do método de Nettleton. (a) medidas feitas na superfície de uma pequena elevação. (b) anomalia Bouguer utilizando diferentes valores de densidade. (modificado de Lowrie, 1997).

## 2.2 Reduções gravimétricas

A aceleração da gravidade varia de ponto a ponto sobre toda a superfície terrestre. Essa variação tem origem em diversas causas: a rotação e o achatamento da Terra, atração da Lua e do Sol, variações de altitude entre os pontos de medida, efeitos da estrutura da crosta e manto superior, etc. As variações com causas diversas se superpõem, se confundem e se mascaram mutuamente. Quando o objetivo é o de se estudar variação da aceleração da gravidade causada por diferenças de densidade na crosta e no manto é necessário eliminar todas as demais variações conhecidas. O processo de eliminação dessas variações é chamado de *correção gravimétrica* e os valores resultantes são conhecidos como *anomalias gravimétricas*.

A medida da componente vertical da aceleração da gravidade na superfície da Terra é a soma de vários componentes (Blakely, 1996):

*Aceleração da Gravidade observada = variações temporais (maré)*

*+ efeito cinemático de veículos de medida em movimento (Eötvös)*

*+ efeito da rotação da Terra (latitude)*

*+ efeito da elevação acima do nível médio do mar (ar-livre)*

*+ efeito da massa acima do nível médio do mar (Bouguer e terreno)*

*+ efeito das massas que suportam as cargas topográficas (isostático)*

*+ variações da densidade na crosta e manto superior (geologia)*

A anomalia gravimétrica  $\Delta g$  é definida como:

*anomalia gravimétrica  $\Delta g =$  valor medido de  $g$  + correções de maré, topografia, etc. - valor de  $g$  previsto pela fórmula internacional da gravidade*

*Ou seja, anomalia é a discrepância entre a situação real (o que realmente medido corrigido dos efeitos citados acima) e a situação desejada (modelo de Terra normal),*

$$\Delta g = g_{med} - g_{teor} \quad (2.4)$$

onde  $g_{teor}$  é o valor da gravidade teórica (modelo).

Usualmente interessa as variações de densidade na crosta e no manto superior causadas pela presença de corpos geológicos, como intrusões, e grandes feições tectônicas, como bacias e montanhas. As variações de densidade envolvidas relacionadas com corpos geológicos diversos é muito pequena, gerando anomalias gravimétricas menores do que 100 mGal, que representa menos de 0,01% do valor da aceleração de gravidade na superfície (980 Gal). Gravímetros podem medir valores

de gravidade com precisão de 0,01 mGal, porém as várias correções necessárias e as hipóteses usadas impedem resolução da componente geológica melhor do que 0,1 a 5 mGal, na maior parte das situações de campo. A maior fonte de erro nos levantamentos está na precisão da determinação da altitude ortométrica. O uso de GPS permite o posicionamento  $x, y$  dos dados com precisão de 1 m. Para melhorar a precisão nas coordenadas  $x, y, z$  é necessário a utilização de GPS diferencial e um bom modelo de geóide. O uso desse tipo de tecnologia permite a precisão de 30 cm nas coordenadas  $x, y, z$  de uma estação gravimétrica.

Blakely (1996) usa a figura 2.8 para ilustrar o perfil gravimétrico que é obtido para uma carga topográfica acima do nível do mar com uma intrusão magmática de densidade mais elevada. Enquanto forem discutidas as várias correções será possível observar como esta figura (esquema dos corpos e gráfico da anomalia) se modifica até que apenas a anomalia gerada pelo corpo mais denso fique delineada.

### 2.2.1 Variação temporal – efeito da maré

O efeito das marés devido à ação da Lua e do Sol causa um aumento de cerca 0,3 mGal, sendo 2/3 devido à Lua. O efeito da maré depende da latitude e da hora. Esse efeito é bem conhecido sendo facilmente calculado e tabulado.

Para levantamentos locais, o retorno do gravímetro a um ponto fixo de leituras repetidas vezes pode eliminar o efeito da maré junto com a deriva do equipamento.

### 2.2.2 Correção de Eötvös

Todo objeto na Terra sente a aceleração centrífuga devido ao efeito de rotação. Um objeto que se move na superfície tem aceleração adicional relacionada com a velocidade com que ele se move. A velocidade angular de um observador se movendo para leste é maior do que aquele parado em um ponto na superfície da Terra. Um observador que se move para leste tem aceleração gravitacional menor, e um observador se movendo para oeste tem atração gravitacional maior.

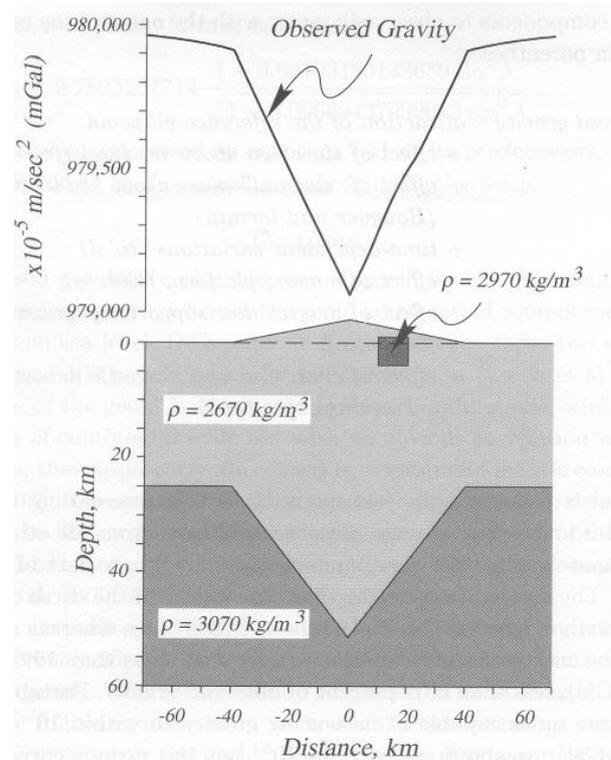


Figura 2.8: aceleração da gravidade causada por uma topografia acima do nível do mar e sua raiz. Dentro da elevação existe um corpo de densidade maior posicionado parcialmente acima do nível do mar (Blakely, 1996).

Para dados coletados em navios, a correção de Eötvös é:

$$g_E = 2\omega v \cos\phi \sin\alpha + 0,001210v^2 \quad (2.5)$$

$$g_E = 7,503v \cos\lambda \sin\alpha + 0,004154v^2 \quad (2.5a)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular da Terra,  $v$  é a velocidade do navio (em nós para 2.5a),  $\alpha$  é o azimute do rumo do navio (positiva quando o navio se desloca para leste e negativa quando o navio se desloca para oeste) e  $\phi$  é a latitude de observação. Para o caso de avião consulte Harlan (1968).

Para um navio viajando para leste com a velocidade de 10 km/h na latitude de  $45^\circ$  a correção de Eötvös é de 28,6 mGal. Um avião com velocidade de 300 km/h no rumo leste tem correção de 856 mGal (Lowrie, 1997). Pela magnitude desses valores percebe-se a necessidade dessa correção quando as medidas de aceleração da gravidade são feitas em navios e aviões.

Os itens 2.2.1 e 2.2.2 discutidos acima dependem da data e posição geográfica do ponto e de como é feita a leitura. Esses fatores não

dependem da distribuição interna de massa da Terra.

O termo gravidade medida considera que o efeito da maré, da deriva do gravímetro e do movimento do gravímetro (a correção de Eötvös) já foram aplicados. Essa consideração será utilizada no resto do texto.

Os itens discutidos abaixo representam variações de aceleração da gravidade com respeito a um modelo adotado, ao fato das medidas não serem obtidas sobre o geóide e às variações internas de densidade, seja em pequena escala como um pequeno corpo geológico próximo à superfície, seja em grande escala, como a presença de montanhas e bacias sedimentares.

### 2.2.3 Correção de latitude

A variação de maior amplitude é a da latitude, causada pela rotação e consequente achatamento terrestre. Esta é descrita pela Fórmula Internacional da Gravidade adotada pela União Internacional de Geodésia e Geofísica (IUGG). Essa fórmula expressa a atração gravitacional calculada sobre a superfície de um elipsóide de revolução. Essa figura matemática representa uma Terra homogênea, definida pelos parâmetros geodésicos achatamento ( $f$ ), raio equatorial ( $a$ ), elipticidade ( $J_2$ ), o termo  $GM$  (constante gravitacional multiplicada pela massa) e a aceleração no Equador ( $g_e$ ). A relação entre esses parâmetros geodésicos e a fórmula internacional da gravidade pode ser vista em Lowrie (1997). Os valores adotados pela IUGG para a Fórmula Internacional da Gravidade de 1967 e de 1980 são dados na tabela 2.2.

A expressão simplificada mais utilizada é:

$$g_{teor} = g_{eq} (1 + \alpha \sin^2 \phi + \beta \sin^2 2\phi) \quad (2.6)$$

onde  $g_{teor}$  é o valor da gravidade teórica (modelo),  $g_{eq}$  é o valor da gravidade no equador,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $\phi$  é a latitude geográfica.

Os modelos de referência mais aceitos são os de 1967 e de 1980. Os valores estão em mGal.

$$g_{1967} = 9780318(1 + 0,0053024\sin^2 \phi - 0,0000059\sin^2 2\phi)$$

$$g_{1980} = 9780327(1 + 0,0053024\sin^2 \phi - 0,0000058\sin^2 2\phi)$$

Tabela 2.2: valores dos parâmetros de geodésicos para as fórmulas de 1967 e 1980.

Sistema\ Parâmetro	1967	1980
$a$ (km)	6378,160	6378,137
$F$	1/298,247	1/298,257
$J_2$	0,0010827	0,00108263
$GM$ (m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> )	3,98603x10 <sup>14</sup>	3,98605x10 <sup>14</sup>
$g_e$ (m/s <sup>2</sup> )	9,780318	9,780327

Para levantamentos pequenos e localizados, com finalidade de engenharia, ambiental e de prospecção mineral, o uso da eq. 2.6 pode ser pouco viável e usa-se uma relação mais simples para a correção de latitude. .

$$C_\phi = \frac{1}{R} \frac{dg}{d\phi} = 0,812\sin 2\phi \quad (2.7)$$

onde  $R$  é o raio médio da Terra (6371 km) e  $\phi$  é a latitude de uma estação base arbitrária. A unidade da correção da eq. 2.7 é mGal/km e deve ser aplicada na direção NS. Essa correção vale zero nos polos e equador e tem valor máximo para latitude de 45°. Segundo Sharma (1997) se a precisão do levantamento for de 0,1 gu (0,01 mGal) a precisão na distância entre as estações na direção NS deve ser de 12 metros ou menos.

A figura 2.9 mostra o efeito da remoção da gravidade teórica no modelo da figura 2.8. Observe que a curva da gravidade manteve-se inalterada, mas o eixo y teve os valores alterados. A massa da crosta e do manto foi removida, mas a topografia, a compensação isostática da topografia, e a intrusão continuam presentes como fontes de anomalias de massa. Note que a intrusão aparenta ter dois valores de densidade, o contraste de 300 kg/m<sup>3</sup> na porção dentro da crosta e o valor de 2970 kg/m<sup>3</sup> para a porção acima da superfície.

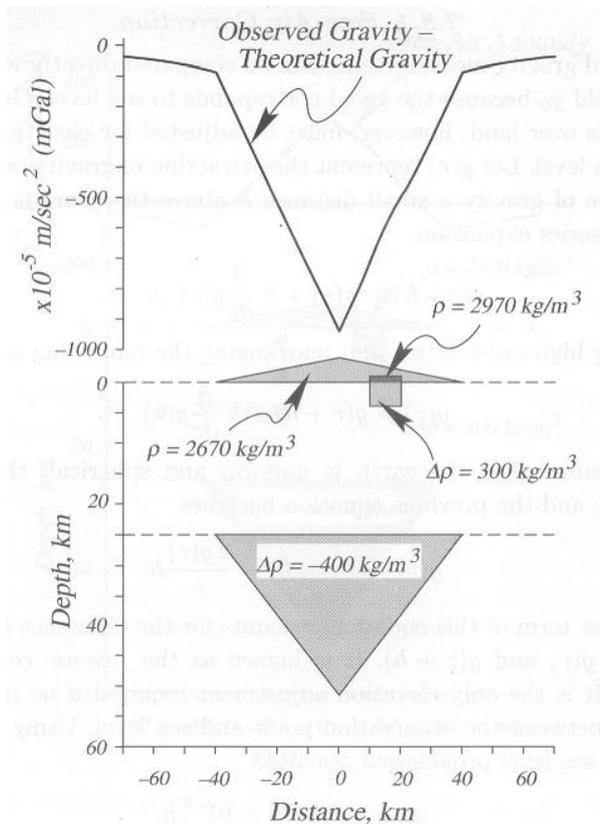


Figura 2.9: efeito da remoção da gravidade teórica na aceleração da gravidade devido ao modelo da figura 2.8 (Blakely, 1996).

### 2.2.4 Correção ar-livre

A correção ar-livre permite trazer todos os pontos de medidas feitos na superfície física da Terra a uma altura  $h$ , para o nível médio dos oceanos, o geóide.

O geóide é uma superfície equipotencial que nos oceanos coincide com o nível médio dos mares.

A correção ar-livre é dada por:

$$C_a = \frac{2h}{R} g_0 = 0,3086h \quad (2.8)$$

onde  $h$  é a altitude ortométrica do ponto de medida, em metros, e a correção é dada em mGal. A altitude ortométrica é normal à superfície do geóide. Essa correção não considera a existência de massa entre o ponto de medida e o nível médio dos mares, considerando que entre as duas superfícies existe ar. Essa correção leva em conta o fato que  $g$  diminui quando o gravímetro é afastado da Terra, portanto para trazer os valores ao geóide é necessário acrescentar a quantidade  $2h/R$ .

Segundo Sharma (1997) se a precisão do levantamento for de 0,1 gu (0,01 mGal) a precisão na diferença de elevação entre as estações deve ser de 4 cm.

A anomalia ar-livre é definida como:

$$\Delta g = g_{med} + C_a - g_{teor} \quad (2.9)$$

A figura 2.10 mostra o resultado da remoção da altura da topografia (correção ar-livre) no resultado da figura 2.9. Note que a topografia continua lá, uma vez que a massa não é removida na correção ar-livre. A anomalia apresenta um alto acentuado, causado pela massa da topografia. A raiz provoca pequenos negativos ao lado do alto gravimétrico.

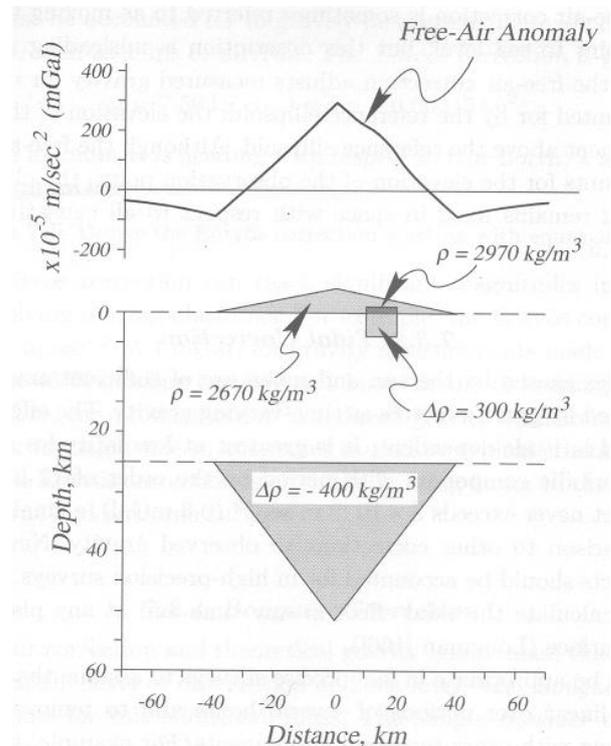


Figura 2.10: efeito da correção ar-livre nos resultados da figura 2.9 (Blakely, 1996).

### 2.2.5 Correção de Bouguer

A correção de Bouguer considera o efeito de atração da massa existente entre o gravímetro e o nível médio do mar, assumindo uma placa horizontal de extensão infinita e espessura finita  $h$ , igual à altitude ortométrica da estação gravimétrica no ponto de medida. É dada por:

$$C_B = 2\pi G\rho h = 0,0419\rho h \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material crustal em  $g/cm^3$ ,  $C_B$  está em mGal e  $h$  em metros. Quan-

do a densidade é desconhecida costuma-se usar o valor  $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$ , que é a média para a crosta superior, obtendo-se a relação

$$C_B = 2\pi G\rho h = 0,1119h \quad (2.11)$$

Essa correção leva em conta o fato que  $g$  aumenta devido à quantidade maior de massa sob o gravímetro, portanto para trazer os valores ao geóide é necessário remover a massa representada pelo platô. A anomalia Bouguer é dada por:

$$\Delta g = g_{med} + C_a - C_B - g_{teor} \quad (2.12)$$

### 2.2.6 Correção de terreno

A correção de terreno considera os desvios entre o platô de Bouguer e a topografia nas vizinhanças da estação. Para efetuar esta correção utilizam-se técnicas numéricas e mapas digitais de topografia.

Dá-se o nome de anomalia Bouguer completa quando a correção de terreno também é feita.

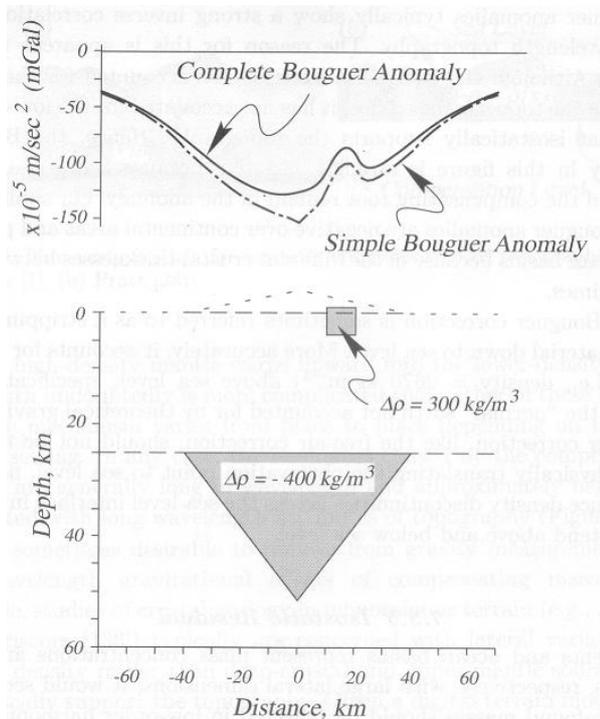


Figura 2.11: efeito da correção Bouguer e de terreno nos resultados da figura 2.10 (Blakely, 1996).

A figura 2.11 mostra o resultado da correção de Bouguer e de terreno aplicados à figura 2.10. Observe que a topografia desapareceu e a anomalia apresenta um forte baixo relacionado ao contraste negativo de densidade

da raiz da topografia e um ligeiro alto relacionado ao pequeno corpo. Como a densidade da topografia é a mesma da crosta, a densidade da intrusão agora aparenta ser de  $300 \text{ kg/m}^3$  em todo o corpo.

### 2.3 Isostasia

Observe na figura 2.11 que o efeito da raiz é bastante pronunciado, levando a anomalia Bouguer a um valor negativo muito alto. A remoção desse efeito depende da escolha de um modelo adequado para representar uma propriedade da Terra, que é o equilíbrio da pressão em certa profundidade, ou seja, a pressão litostática exercida pela coluna de rochas acima de uma dada profundidade é igual em qualquer ponto. A esse mecanismo de compensação das variações de massa de uma coluna de rocha se dá o nome de isostasia ou compensação isostática. A compensação isostática explica como grandes cargas topográficas ou escondidas dentro da crosta são sustentadas pela litosfera terrestre. Uma excelente apresentação da história da descoberta desse fenômeno e dos modelos propostos pode ser lida em Watts (2001).

Os modelos de compensação isostática podem ser locais ou regionais. No modelo local imagina-se que a compensação ocorra apenas sob a carga, implicando que a litosfera terrestre não é capaz de suportar nenhum esforço, ou seja, não possui rigidez flexural, fraturando-se para acomodar o peso da carga topográfica. Os modelos neste caso são os de Airy e Pratt. O modelo regional assume que a litosfera apresenta rigidez flexural, sendo capaz de suportar pequenas cargas sem se deformar. Quando a deformação ocorre, ela é distribuída por uma região maior do que aquela ocupada pela carga pelo simples fato de que a litosfera é capaz de transmitir esforços lateralmente. Os modelos mais conhecidos são o de placa elástica fina e o visco-elástico.

A litosfera terrestre não apresenta uma forma única de compensação. Uma mistura dos vários modelos pode ser detectada por métodos geofísicos e estes devem ter variado com a idade da feição tectônica, pois a isostasia é um processo dinâmico.

O termo litosfera usado no contexto de métodos potenciais refere-se à camada da Terra que engloba a crosta e a porção superior do manto superior. A espessura varia entre cerca de 120 km, espessura média para a litosfera oceânica, até cerca de 250 km para a litosfera continental sob regiões cratônicas. A litosfera apresenta comportamento rúptil e elástico, enquanto que a astenosfera (camada abaixo da litosfera) apresenta comportamento visco-elástico. O limite litosfera astenosfera é definido pela temperatura onde ocorre a mudança de um comportamento para outro, que é de cerca 1200°C.

### 2.3.1 Modelo de Airy

O modelo de Airy (figura 2.12) postula uma crosta terrestre fina e sólida, porém pouco resistente apoiada sobre um substrato (manto) de densidade maior que a da crosta e de consistência plástica. Se colocarmos uma cadeia montanhosa extensa sobre essa crosta, esta última rompe-se sob o esforço, por ser pouco resistente, e a cadeia montanhosa afunda no substrato plástico até que seu peso seja equilibrado pelo empuxo. Dessa forma a compensação da massa do relevo visível se dá pela falta de massa criada pelo deslocamento de parte do material do substrato e sua substituição pela crosta menos densa. Com os resultados de refração sísmica profunda foi possível observar como a interface crosta-manto (descontinuidade de Mohorovicic) apresenta raízes profundas sob as cadeias montanhosas de grande porte atingindo profundidades de até 70 km.

A idéia de Airy foi proposta em 1855 e Heiskanen, em 1931, colocou-a em termos matemáticos. Para isso ele assumiu que:

- a compensação isostática é uniforme;
- a crosta, como um todo, está flutuando em uma “camada de sima” de acordo com o princípio de Arquimedes;
- as massas que compensam estão diretamente sob as montanhas e oceanos;
- a densidade da crosta é  $\rho_c$  em todo lugar e toda profundidade, e a densidade da “camada sima” é  $\rho_m$  em todo lugar e profundidade;

- a espessura da crosta  $T_c$  ao nível do mar, é constante em todo lugar.

O modelo assume que a pressão hidrostática na base de qualquer coluna é igual para uma determinada profundidade. No caso da Geofísica, o termo correto para essa pressão é litostática, pois a coluna de material é de rocha ao invés de água. Igualando a pressão litostática em cada coluna vertical da figura 2.12, com seção transversal de área unitária tem-se:

$$P_1 = T_c \rho_c g + r \rho_m g$$

$$P_2 = (T_c + h + r) \rho_c g$$

$$P_3 = d \rho_w g + (T_c - d - r') \rho_c g + (r' + r) \rho_m g$$

Assumindo equilíbrio isostático, pode-se igualar a coluna que contém a montanha com aquela ao nível do mar,  $P_2 = P_1$ , resultando em:

$$r = \frac{h \rho_c}{\rho_m - \rho_c} \quad (2.13)$$

onde  $h$  é a altitude ortométrica da feição topográfica (altura da montanha acima do nível do mar),  $r$  é a raiz da feição topográfica (corresponde a projeção da crosta dentro do manto),  $\rho_c$ ,  $\rho_m$  são as densidades da crosta ( $\sim 2800 \text{ kg/m}^3$ ) e do manto ( $\sim 3300 \text{ kg/m}^3$ ) respectivamente.

Modelo de Airy

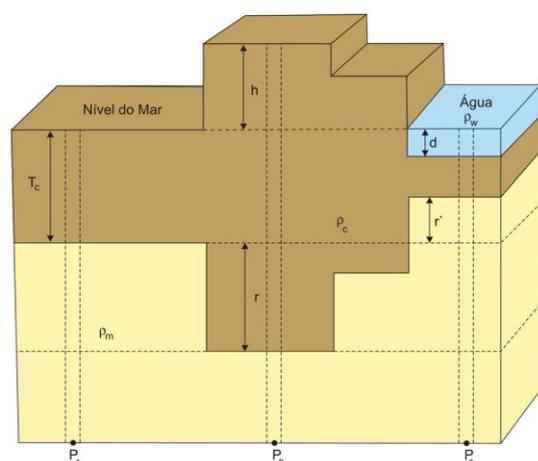


Figura 2.12: modelo de compensação isostática de Airy.

Para uma feição a uma profundidade  $d$  abaixo do nível do mar,  $P_1 = P_3$ , resultando em:

$$r = \frac{d(\rho_c - \rho_w)}{\rho_m - \rho_c} \quad (2.14)$$

onde  $\rho_c$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_w$ , são as densidades da crosta, do manto e da água e, respectivamente, assumem os valores médios de 2800, 3330 e 1000 kg/m<sup>3</sup>,  $d$  é a profundidade da bacia oceânica, e  $r$  é a anti raiz da feição (correspondendo ao afinamento da crosta sob a bacia).

### 2.3.2 Modelo de Pratt

O modelo de Pratt, de 1859, propõe que a espessura da crosta é constante, mas que a densidade pode variar lateralmente, sendo que para uma dada profundidade o peso das várias colunas de diferentes densidades é equilibrado pela força de empuxo (figura 2.13).

Hayford, em 1909, colocou o modelo de Pratt de uma forma mais precisa para ser usado em cálculos geodésicos. Para isso ele assumiu que:

- a compensação isostática é uniforme;
- a camada de compensação está diretamente sob as montanhas e vai até a profundidade de compensação  $D_c$ , onde o equilíbrio prevalece;
- a densidade da crosta acima do nível do mar (nas montanhas) é a mesma que ao nível do mar;
- a densidade da crosta abaixo do nível do mar varia lateralmente, sendo menor sob as montanhas que sob os oceanos;
- a profundidade de compensação é constante em todo lugar.

Igualando a pressão litostática em cada coluna vertical da figura 2.13, com seção transversal de área unitária tem-se:

$$P_1 = D_c \rho_c g$$

$$P_2 = D_c \rho_1 g + h \rho_c g$$

$$P_3 = d \rho_w g + (D_c - d) \rho_2 g$$

Assumindo equilíbrio isostático, pode-se igualar a coluna que contém a montanha com aquela ao nível do mar,  $P_2 = P_1$ , resultando em:

$$\rho_1 = \rho_c \frac{D_c - h}{D_c} \quad (2.15)$$

onde  $h$  é a altitude ortométrica da feição topográfica (altura da montanha acima do nível do mar),  $D_c$  é a profundidade de compensação,  $\rho_c$ ,  $\rho_m$  são as densidades da crosta (~2800 kg/m<sup>3</sup>) e do manto (~3330 kg/m<sup>3</sup>) respectivamente.

### Modelo de Pratt

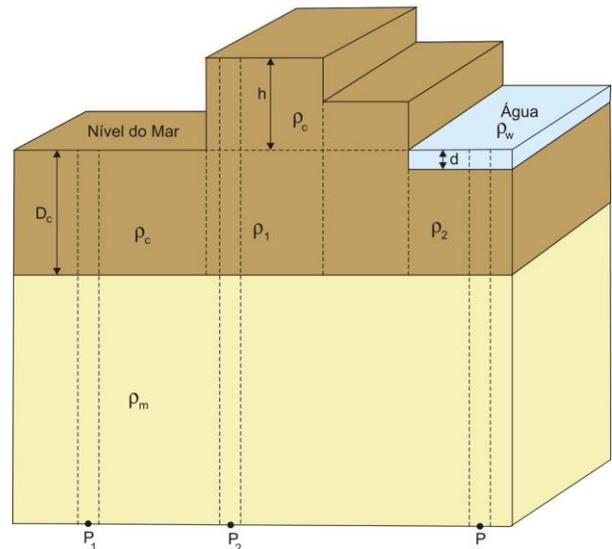


Figura 2.13: modelo de compensação isostática de Pratt.

Para uma feição a uma profundidade  $d$  abaixo do nível do mar,  $P_1 = P_3$ , resulta em:

$$\rho_2 = \frac{D_c \rho_c - d \rho_w}{D_c - d} \quad (2.16)$$

onde  $\rho_c$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_w$ , são as densidades da crosta, do manto e da água e, respectivamente, assumem os valores médios de 2800, 3330 e 1000 kg/m<sup>3</sup>,  $d$  é a profundidade da bacia oceânica, e  $D_c$  é a profundidade de compensação.

Para o caso em que a premissa "A densidade da crosta,  $\rho_c$ , acima do nível do mar é a mesma que a densidade da crosta na costa" não seja adotada, como colocado em muitos livros textos de Geofísica, as relações de pressão e para a densidade, com a topografia emersa, tornam-se:

$$P_1 = D_c \rho_c g$$

$$P_2 = (D_c + h) \rho_1 g$$

$$P_3 = d \rho_w g + (D_c - d) \rho_2 g$$

$$\rho_1 = \rho_c \frac{D_c}{D_c + h} \quad (2.17)$$

Os dois modelos, Airy e Pratt, propõem formas diferentes de se obter o equilíbrio isostático e assumem que a compensação ocorre localmente, ou seja, sob as massas topográficas. Com o aumento das informações sobre a crosta e o manto percebeu-se que os mecanismos de compensação local não eram suficientes e que a compensação isostática poderia ter um caráter mais regional, abrangendo uma área maior do que aquela onde se encontram as massas topográficas. Nos modelos regionais a superfície da litosfera que irá se deformar é maior que a área física compreendida pela carga. A litosfera tem resistência ao cisalhamento vertical, portanto não ocorrem tanta falhas verticais como é necessário no modelo de Airy, e transmite esforços lateralmente, usando uma porção maior de área para compensar a carga.

### 2.3.3 Flexura de placa elástica

Materiais elásticos deformam quando uma força é aplicada e retornam à posição original quando a força é removida. Rochas à baixa pressão e temperatura comportam-se como materiais elásticos quando são submetidas a forças que não sejam muito grandes. As propriedades elásticas não dependem da direção.

A deformação plástica é uma deformação contínua, irreversível e que ocorre sem fraturamento.

Na tectônica de placas a litosfera é uma camada rígida, fina que flutua sobre o manto. Na escala de tempo geológico (milhões de anos) a litosfera comporta-se elasticamente e o manto como um fluido viscoso. Para tempos pequenos (propagação de ondas sísmicas) ambos se comportam como sólidos elásticos.

Modelo de flexura ou arqueamento bidimensional das placas: placa infinita em  $y$ ;  $L$  é o comprimento da placa em  $x$ ; a força vertical por unidade de comprimento  $V_A$  (N/m) é aplicada no centro da placa de espessura  $h$ , resultando na deformação  $w$ . Tanto a espessura da placa,  $h$ , como a deformação da placa,  $w$ , são

muito menores do que o comprimento  $L$ ,  $h \ll L$ ,  $w(x) \ll L$ . Veja modelo na figura 2.14.

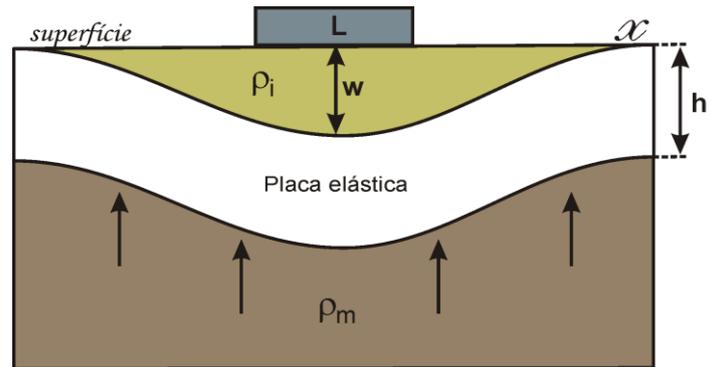


Figura 2.14: modelo de flexura de placa elástica sujeita à carga  $L$  (modificado de Lowrie, 1997).

Supondo que a placa está em equilíbrio sob a ação de todas as forças e torques, a equação diferencial para a deflexão de uma placa elástica fina em função da distância horizontal  $x$  é:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = V(x) - H \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.18)$$

onde  $w(x)$  é a deflexão da placa;  $V(x)$  é a força vertical, por unidade de comprimento, aplicada à placa,  $H$  é a força horizontal constante por unidade de comprimento; e  $D$  é a rigidez flexural da placa definida como:

$$D = \frac{E T e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.19)$$

onde  $E$  é o módulo de Young,  $\nu$  é a razão de Poisson (parâmetros elásticos que relacionam esforço e deformação) e  $T e$  é a espessura elástica efetiva da placa, isto é, o quanto da placa se comporta de forma elástica.  $E$  varia entre 10 e 100 GPa,  $\nu$  entre 0,1 e 0,4. Para a crosta os valores usuais são:  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0,25$ .

Valores muito altos de  $D$  (espessura elástica efetiva grande) implicam que a litosfera apresenta forte resistência ao cisalhamento, deformando-se relativamente pouco. Baixos valores de  $D$  (espessura elástica efetiva pequena) indicam uma litosfera menos resistente ao cisalhamento aumentando a deformação sob a carga. No limite em que  $D = 0$ , a litosfera não apresenta nenhuma resistência e tem-se o modelo de Airy.

A solução da equação (2.18) depende das condições de contorno impostas aos extremos da placa e da carga vertical aplicada a ela. Para as aplicações à litosfera terrestre deve-se incluir, na carga vertical, a força restauradora hidrostática, devido à substituição de material do manto por material crustal mais leve.

A formulação física que resulta na equação (2.18) assim como a resolução dessa expressão para várias situações pode ser encontrada em Turcotte & Schubert (2002).

É importante comentar que a deflexão da superfície da litosfera é mais bem traduzida por este modelo flexural elástico, o que não implica que a litosfera se deforme apenas de forma elástica. Um exemplo desse modelo pode ser visto na figura 2.15 que mostra o modelo elástico para o monte submarino de Great Meteor.

Outra situação reológica considerada com frequência no modelo flexural é a do comportamento visco-elástico, que se caracteriza por apresentar uma diminuição da rigidez flexural com o tempo, fazendo com que a litosfera vá se aproximando do modelo de compensação local.

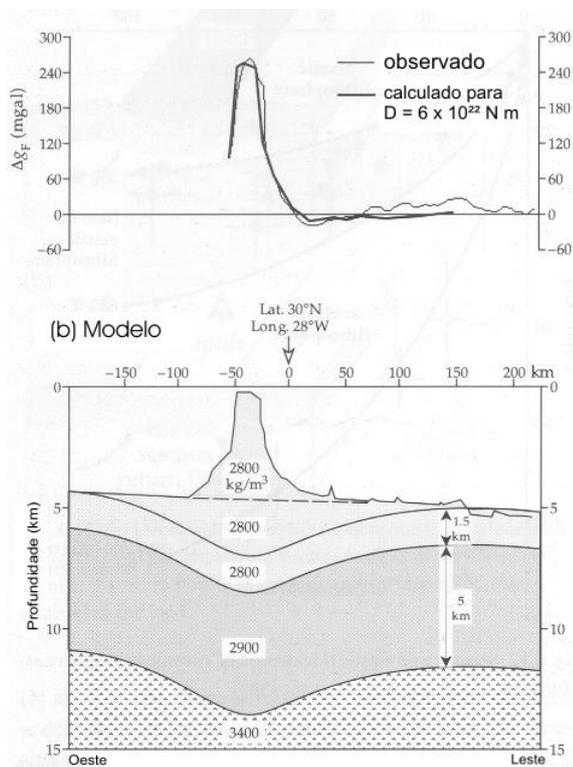


Figura 2.15: comparação entre a anomalia ar-livre observada e calculada com um modelo de placa elástica para o monte submarino Great Meteor.

## 2.4 Correção isostática

Voltando ao caso apresentado na figura 2.8. Aplicando o modelo de Airy para a topografia, pode-se remover o efeito da raiz e observar o resultado na figura 2.16. Observe que apenas a intrusão tem efeito gravimétrico observável. Modelar esse efeito significa descrever os parâmetros geométricos (forma e posição) e físicos (densidade) do corpo enterrado na crosta.

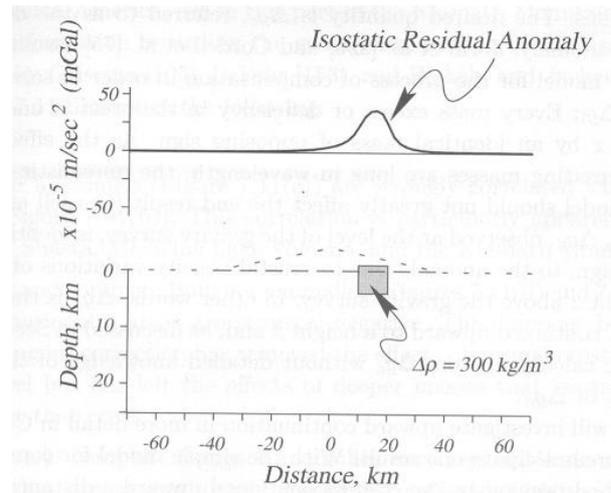


Figura 2.16: efeito da correção isostática, com modelo de Airy, no resultado da figura 2.11 (Blakely, 1996).

Nem sempre é viável aplicar um modelo de correção isostática. Áreas de pesquisa de dimensões de algumas dezenas de quilometro tornam o procedimento pouco viável. Nesse caso, para isolar o efeito de feições geológicas intracrustal utilizam-se outros mecanismos matemáticos e o procedimento é conhecido como separação regional-residual. Os procedimentos envolvem tanto a experiência e conhecimento da geologia do local pelo intérprete, como manipulações matemáticas e uso das propriedades do campo potencial. São estes mecanismos o enfoque da interpretação que será discutido a seguir.

## Referências para o tópico 2

**Blakely, R.J.**, 1996, Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications, Cambridge University Press, 441 pp.

**Hallenburg, J.K.**, 1984, Geophysical logging for mineral and engineering applications, Pennwell, Tulsa, 254 p.

## Parte 2: Campo gravimétrico. Conceitos e aplicações

**Harlan, R.B.**, 196., Airborne correction for airborne gravimetry, *Journal of Geophys. Res.*, 73, 4675-4679.

**Lowrie, W.**, 1997, *Fundamentals of Geophysics*, Cambridge University Press, 354 pp.

**Nettleton, L.L.**, 1976. *Gravity and magnetics in oil prospecting*, McGraw-Hill, New York, 464p.

**Sharma, P.V.**, 1997. *Environmental and engineering geophysics*. Cambridge University Press.

**Telford, W.M., Geldart, L.P., Sheriff, R.E.**, 1990, *Applied geophysics*, Cambridge University Press, 1990, 2nd ed., 770p.

**Turcotte, D.L. & Schubert, G.**, 2002. *Geodynamics*, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> ed.

**Watts, A.B.**, 2001, *Isostasy and flexure of the lithosphere*, Cambridge University Press, 458 pp.

## Capítulo 3 – Transformações do Campo Potencial e Anomalias

### Separação regional residual, transformações do campo potencial

#### 3.1 Introdução

A ambiguidade e o princípio da superposição impedem uma interpretação única da anomalia gravimétrica. Um exemplo pode ser visto na figura 3.1 onde os corpos (1-3) têm o mesmo contraste de densidade ( $\Delta\rho$ ), mas diferem em profundidade e volume. A anomalia gravimétrica é a mesma.

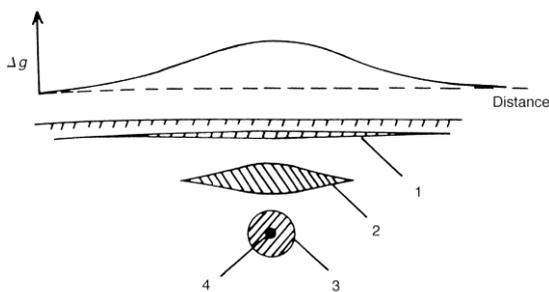


Figura 3.1: esquema mostrando a ambiguidade na gravimetria. Os corpos 1 a 3 apresentam o mesmo contraste de densidade (Sharma, 1997).

A interpretação de anomalias gravimétricas depende do objetivo do estudo que está sendo feito. Em estudos de grande escala, como os de tectônica, o interesse é modelar a anomalia Bouguer completa e muitas vezes a anomalia isostática, que pode explicar parte das observações, pois estas darão informações sobre uma região grande da crosta, tanto em extensão como em profundidade. Quando a escala de estudo volta-se para prospecção mineral e petróleo, os corpos geológicos são menores e muitas vezes deve-se realçar a anomalia de interesse para obter um modelo com maior significado geológico.

Usualmente a interpretação começa com o isolamento e realce da anomalia de interesse. Este é obtido através da separação regional residual, que pode envolver análises gráficas simples onde o intérprete usa sua experiência, técnicas matemáticas simples como ajuste de polinômios por mínimos quadrados, técnicas matemáticas mais sofisticadas baseadas nas propriedades do campo potencial usando transformada de Fourier.

Uma vez isolada a anomalia, usam-se técnicas de interpretação baseadas na forma e hipóteses sobre a geometria da distribuição de massa para estimar alguns parâmetros da fonte, como tamanho, profundidade do centro de massa e massa total do corpo

Após a identificação da anomalia de interesse procura-se um modelo geológico que possa representá-la. A obtenção desse modelo é feita por modelagem direta ou modelo inverso. Para uso dessas técnicas é necessário conhecer, ou pelo menos restringir alguns valores como profundidade do topo da fonte, tamanho da fonte ou limites de densidade. As transformações do campo potencial auxiliam a definir limites para alguns desses parâmetros.

O texto abaixo é baseado em vários livros citados nas referências e nas notas de aula da Profa. Naomi Ussami.

#### 3.2 Contraste de densidade e largura da anomalia

A anomalia gravimétrica deriva da presença de diferentes densidades na Terra, sendo que o método gravimétrico é sensível a variações laterais, ou seja, quando essas diferenças se encontram lado a lado.

A figura 3.2 mostra uma anomalia gravimétrica gerada pelo soergimento da camada de densidade  $\rho_2$  na camada sobrejacente de densidade  $\rho_1$ . O gravímetro mede apenas a diferença na região devido ao corpo anômalo, não detectando diferenças quando as camadas 1 e 2 são planas. Por isso é comum indicar a densidade do corpo anômalo como  $\rho$ , a densidade do entorno como  $\rho_0$  e o contraste de densidade como sendo  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ .

A aparência da anomalia depende das dimensões, contraste de densidade e profundidade do corpo anômalo. A extensão horizontal da anomalia é chamada de comprimento de onda aparente. Este é uma medida da profundidade do corpo. Corpos profundos tendem a produzir anomalias mais achatadas que ocu-

com uma área maior (longo comprimento de onda). Corpos mais rasos tendem a produzir anomalias estreitas e de amplitude mais definida (pequeno comprimento de onda), mas também podem produzir longos comprimentos de onda.

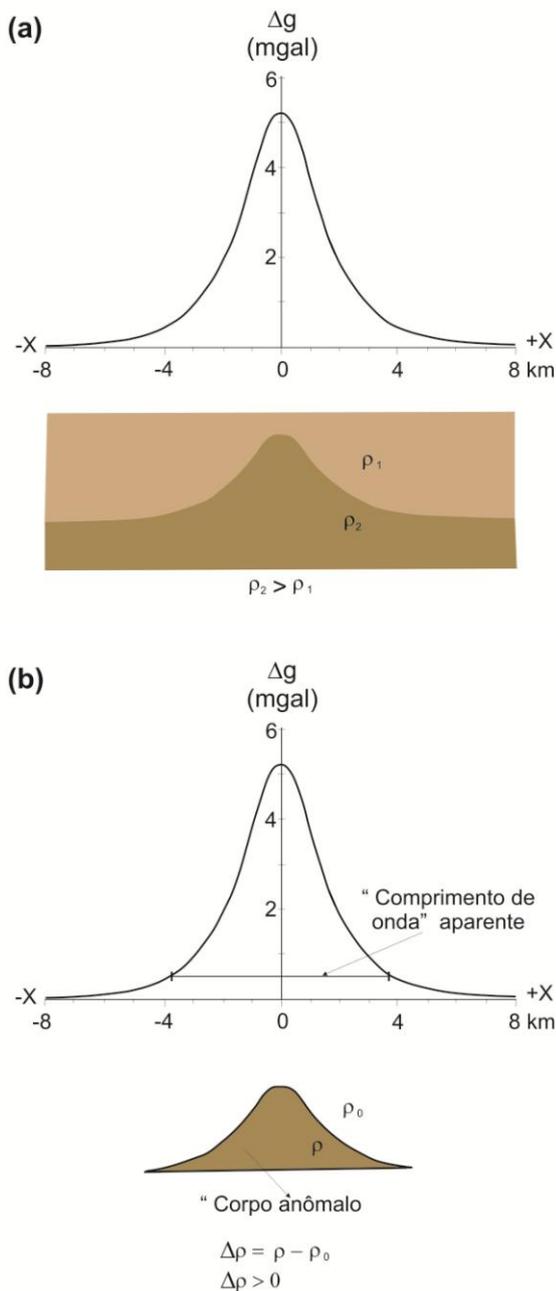


Figura 3.2: esquema mostrando a anomalia positiva devido ao contraste de densidade positivo entre o corpo anômalo e o entorno. A anomalia apresenta um comprimento de onda aparente.

### 3.3 Separação regional-residual

As anomalias de grande comprimento de onda, de origem profunda tendem a ser chamadas de regional, enquanto que as anomalias

de pequeno comprimento de onda são chamadas de residual (Lowrie, 1997). O conceito de regional e residual é relativo, dependendo sempre do objeto de estudo e do tamanho da área investigada. A idéia da separação regional residual é destacar as anomalias de pequeno comprimento de onda eliminando ou reduzindo a interferência das anomalias de grande comprimento de onda. A separação regional residual é crítica e pode interferir no processo de interpretação (Sharma, 1997).

O regional usualmente é obtido através de inspeção visual, ajustes matemáticos em perfis ou mapas usando polinômios, pela análise de Fourier da área e aplicando filtros convenientes. Muitas vezes para regiões extensas o regional é obtido usando um modelo isostático, como discutido no capítulo 2.

O residual é obtido através da diferença entre a anomalia Bouguer e o regional:

$$\text{Campo residual} = \text{anomalia Bouguer (ou campo total)} - \text{campo regional}$$

Independente do método utilizado é importante ter um mínimo de conhecimento da geologia e/ou tectônica da área para escolha do método mais apropriado.

#### 3.3.1 Análise visual

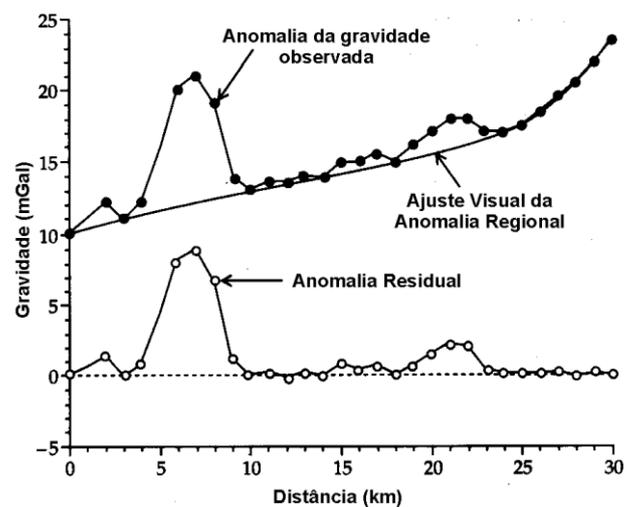


Figura 3.3: ajuste visual do regional. A anomalia residual é obtida subtraindo o regional dos dados ponto a ponto (Lowrie, 1997).

Remove-se uma tendência suave nos dados. O residual é obtido pela subtração ponto a ponto da tendência suave dos dados de anomalia Bouguer. Usualmente é aplicado a per-

fis, mas pode ser feito também em mapas, suavizando-se manualmente as linhas de contorno. Esse tipo de procedimento é lento e muito subjetivo.

As figuras 3.3 e 3.4 mostram o processo para um perfil e um mapa, respectivamente.

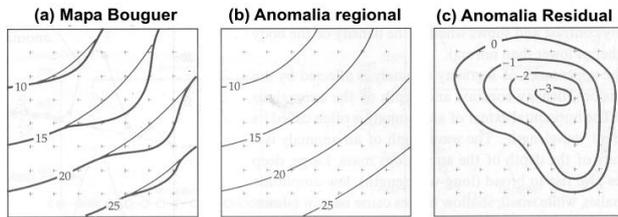


Figura 3.4: remoção visual do regional de um mapa. (a) suavização da anomalia Bouguer marcando o regional com linha fina, (b) mapa do regional, (c) residual obtido da subtração do regional da anomalia Bouguer (Lowrie, 1997).

### 3.3.2 Ajuste de polinômio

Esse é um método alternativo ao ajuste visual. Neste caso assume-se que o regional pode ser aproximado por um polinômio de grau  $n$ , baixo, em ambas as direções,  $x$  e  $y$ . O grau do polinômio deve variar entre 1 e 4,  $n > 4$  pode ajustar as anomalias de menor comprimento de onda, o que não interessa. O ajuste é feito pelo método dos mínimos quadrados que impõem que a soma dos resíduos seja mínima. Isto pode gerar pseudo-anomalias com sinal positivo e/ou negativo quando a fonte tem apenas um sinal.

Beltrão et al. (1991) propõem uma metodologia na qual os coeficientes do polinômio são iterativamente recalculados e a eles é dada uma ponderação baseada no resíduo obtido. Segundo os autores essa metodologia permite a eliminação de pseudo-anomalias. Esta técnica é conhecida por ajuste por polinômios robustos.

A figura 3.5 mostra a remoção de um polinômio de grau 1 e de grau 3 em um perfil na direção  $x$ . Observe como o residual é diferente para cada situação, especialmente a partir da distância de 15 km quando as anomalias não são tão grandes como aquela observada em torno da distância 7 km.

Os polinômios em  $x$ ,  $y$  são escritos como:

$$g_R(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

$$g_R(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$

$$g_R(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$$

(3.1)

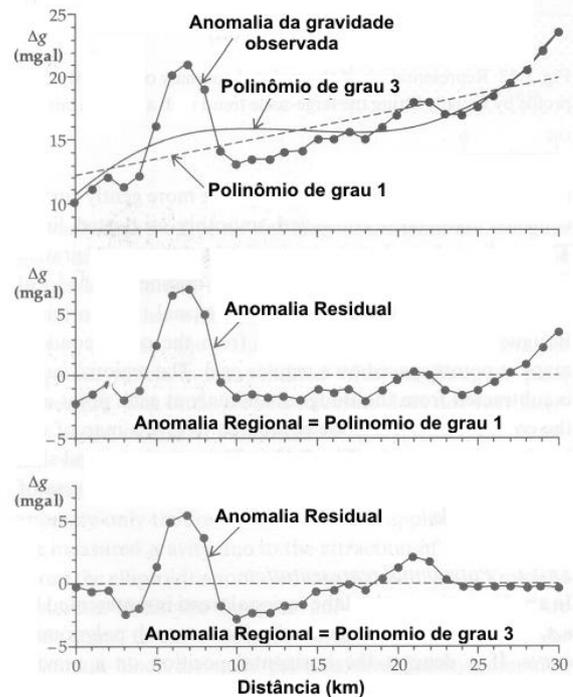


Figura 3.5: ajuste do regional por um polinômio de grau 1 (linha tracejada na figura do topo) e um polinômio de grau 3 (linha contínua sem pontos na figura do topo). As anomalias residuais para os dois casos encontram-se na figura central e inferior, respectivamente (Lowrie, 1997).

### 3.4 Transformada de Fourier aplicada ao campo potencial

A relação entre o comprimento de onda aparente da anomalia e o tamanho, forma e profundidade da fonte pode ser facilmente observada usando-se modelos simples como esfera ou cilindro, como abordado no capítulo 1. Essa relação entre forma da anomalia e da fonte é um dos motivos pelo qual a análise de Fourier pode ajudar a entender a relação entre fonte geradora e campo potencial. A análise de Fourier é uma técnica que transforma uma função do espaço (ou tempo) em uma função do número de onda (ou frequência).

A teoria é comum ao campo gravitacional e ao campo magnético, pois ambos são conservativos e satisfazem a equação de Laplace em regiões externas às massas que produzem

estes campos. As transformações do campo potencial não fornecem informações geométricas sobre as fontes das anomalias, mas podem auxiliar no processo inicial de interpretação, por exemplo, na separação das fontes de diferentes profundidades, delimitando os limites dos corpos anômalos, entre outras aplicações (Ussami, 2008).

Neste texto será usado termos que se referem principalmente a funções de distância, tais como, número de onda (wavenumber), comprimento de onda (wavelength), domínio do espaço.

Para maiores detalhes sobre a Teoria de Fourier aplicada ao campo potencial os interessados devem consultar o texto de Blakely (1996).

Uma função periódica pode ser sintetizada por uma soma ponderada, infinita de senos e cossenos onde a ponderação é determinada pela análise da função periódica (Blakely, 1996). Se  $f(x)$  é periódica no intervalo  $X$  pode-se escrever:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(ik_n x) \quad (3.2)$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{X}$$

A ponderação  $F_n$  representa números complexos determinados pela integral:

$$F_n = \frac{1}{X} \int_{x_0}^{x_0+X} f(x) \exp(-ik_n x) dx \quad (3.3)$$

No caso do campo gravimétrico e magnético as anomalias não se repetem de forma infinita, mas é possível assumir que elas são razoavelmente bem comportadas e variam dentro de um intervalo finito na área de interesse, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Para garantir a amostragem de todo o corpo e de uma região não perturbada, as medidas são estendidas bem além dos limites laterais dos corpos causativos. Neste caso tem-se:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ik_n x) dx \quad (3.4)$$

$$X \rightarrow 0$$

$k$  é chamado de número de onda e tem unidade  $[L]^{-1}$ :  $k = 2\pi/\lambda$ .

A transformada de Fourier  $F(k)$ , no geral, é uma função com parte real e parte imaginária, podendo ser escrita como,

$$F(k) = |F(k)| \exp(i\Theta(k))$$

$$|F(k)| = \left[ (\text{Re } F(k))^2 + (\text{Im } F(k))^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

$$\Theta(k) = \arctan \frac{\text{Im } F(k)}{\text{Re } F(k)}$$

As funções  $|F(k)|$  e  $\Theta(k)$  são chamadas de amplitude e espectro de fase, respectivamente. A energia total de  $f(x)$  é dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dx \quad (3.6)$$

onde  $|F(k)|^2$  é chamado de espectro de energia ou densidade de energia espectral.

A transformada inversa de Fourier é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx) dk \quad (3.7)$$

No caso de uma função de duas variáveis a transformada de Fourier e a transformada inversa de Fourier são dadas por:

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.8)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  são os números de onda em  $x$  e  $y$ :

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} \quad (3.9)$$

### 3.5 Realce de anomalias através da aplicação de filtros

Filtragem é um procedimento matemático que realça alguns comprimentos de onda à custa de outros.

Anomalias filtradas não podem ser modeladas como dados brutos (Sleep e Fujita, 1997).

Filtros têm sido utilizados para remover os longos comprimentos de onda, o regional. Filtros não extraem informações que não estejam nos dados. Filtros produzem resultados ruins próximos às bordas da área de dados, assim antes de utilizar a filtragem é necessário assegurar que a área de massa anômala está recoberta e totalmente dentro da área de coleta de dados e que existe uma margem de segurança entre o limite da anomalia e dados coletados.

Filtros podem ser desenhados de forma a deixar passar anomalias acima ou abaixo de um determinado comprimento de onda  $\lambda_s$ . Também podem ser desenhados como filtro passa banda, limitando apenas um intervalo de comprimento de onda entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Considere as funções  $f(x,y)$ ,  $f_1(x,y)$  e  $f_2(x,y)$ , resultado da convolução, dados potencial e filtro respectivamente. O processo de filtragem pode ser escrito como um processo de convolução entre os dados  $f_1(x,y)$  e o filtro  $f_2(x,y)$ :

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y) \quad (3.10)$$

Aplicando a transformada de Fourier nos dois lados resulta em:

$$F(k_x, k_y) = F_1(k_x, k_y) F_2(k_x, k_y) \quad (3.11)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  são os números de onda em  $x$  e  $y$  dados pela eq. 3.9.

### 3.5.1 Filtros passa alto e passa banda

Filtro passa alto:

$$F_2(k_x, k_y) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > (2\pi/\lambda_s) \\ 1 & \text{para o resto} \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

Filtro passa banda:

$$F_2(k_x, k_y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (2\pi/\lambda_1) < k < (2\pi/\lambda_2) \\ 1 & \text{para o resto} \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.5.2 Derivadas direcionais

As derivadas dos mapas gravimétricos e magnéticos são úteis para delimitar os limites de corpos e estruturas causadoras das principais anomalias. As anomalias de curto comprimento e maior gradiente são realçadas, e estas têm origem próxima da superfície (Ussami, 2008). *As posições em que as derivadas horizontais possuem valores máximos em módulo indicam os limites laterais do corpo causador da anomalia* (Blakely, 1996).

Considere a quantidade escalar  $\Phi(x,y)$  medida horizontalmente na superfície. As derivadas horizontais podem ser estimadas usando-se diferenças finitas e medidas discretas de  $\Phi(x,y)$ ,  $\Phi_{i,j}$ , equiespaçadas de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . As derivadas horizontais são (Blakely, 1996):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(x, y)}{dx} &\approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{d\phi(x, y)}{dy} &\approx \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Com a transformada de Fourier a derivada é realizada utilizando a propriedade de diferenciação<sup>[1]</sup> da derivada, e as derivadas horizontais de qualquer ordem podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} F\left[\frac{d^n \phi}{dx^n}\right] &= (ik_x)^n F(\phi) \\ F\left[\frac{d^n \phi}{dy^n}\right] &= (ik_y)^n F(\phi) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Os parâmetros  $(ik_x)^n$  e  $(ik_y)^n$  são os filtros que transformam a função  $\Phi$  medida na horizontal nas derivadas de ordem  $n$  com respeito à  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Se  $\Phi$  é o potencial podemos calcular a derivada vertical. A segunda derivada vertical é consequência direta da equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Se a superfície for horizontal, pode-se usar a transformada de Fourier na expressão de Laplace para se obter:

$$F\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right] = k_x^2 F(\phi) + k_y^2 F(\phi) = |k|^2 F(\phi) \quad (3.17)$$

onde  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

É possível afirmar que a segunda derivada vertical é um procedimento em 3 etapas: calcula-se a transformada de Fourier do campo, multiplica-se por  $|k|^2$  e calcula-se a transformada inversa de Fourier do produto.

Um exemplo do uso das derivadas direcionais para determinar as bordas de um corpo pode ser vista no exemplo da figura 3.6 (Sharma, 1997). Nessa figura tem-se o campo gravimétrico de um prisma de lados verticais e com o topo enterrado a uma profundidade de duas unidades do grid (fig. 3.6a) e o gradiente vertical calculado (fig. 3.6b). As posições espaciais dos valores máximos do gradiente horizontal e gradiente vertical são marcados por pontos nas figuras 3.6c e 3.6d, respectivamente. Note como esses valores marcam bem os lados do prisma.

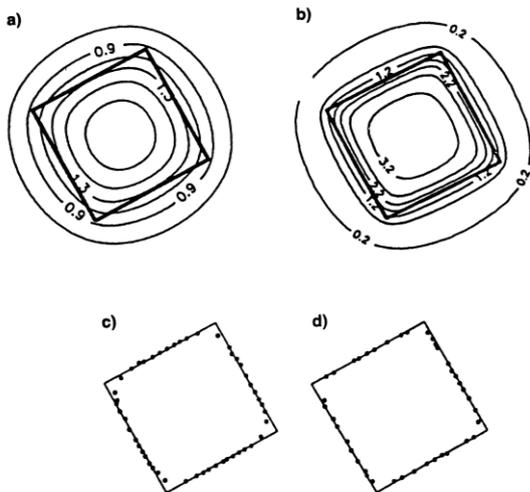


Figura 3.6: campo gravimétrico de um prisma de lados verticais e com o topo enterrado a uma profundidade de duas unidades do grid (a) e o gradiente vertical calculado (b). Valores máximos do gradiente horizontal (c) e vertical (d) marcam os limites do prisma (em linha grossa). Unidades: mGal e mGal/grid.

### 3.5.3 Continuação para cima e para baixo - upward continuation, downward continuation

A continuação para cima tende a atenuar as anomalias de curto comprimento de onda (ou alta frequência), e manter aquelas de maior comprimento de onda, dependendo da

altura  $z$  de continuação. Portanto, é possível utilizar esta transformação para estimar a componente regional no processo de separação das anomalias com diferentes profundidades de origem. Este processo é estável, ao contrário da continuação para baixo que tende a amplificar as anomalias de curto comprimento de onda. Se os dados observados apresentam ruídos ou erros, estes tendem a ser amplificados neste processo, e cuidados devem ser tomados para escolher a altitude máxima de continuação para baixo, sem que o mapa se transforme em um mapa de ruídos.

Retornando à equação de Laplace para o potencial gravimétrico:

$$\nabla^2 U(P) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

A componente vertical da aceleração da gravidade é dada por:

$$g_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Aplicando a derivada na equação de Laplace tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla^2 U)}{\partial z} &= 0 \\ \nabla^2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= 0 \Rightarrow \nabla^2 g_z = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde trocou-se de posição os operadores laplaciano e derivada. Com a troca é possível verificar que a componente vertical da aceleração da gravidade também obedece à equação de Laplace. Isto indica que  $g_z$  pode ser obtido por separação de variáveis e escrito como uma série de senos e cossenos na sua representação complexa,  $\{\exp[-i(k_x x + k_y y)]\}$ , e representa a parte do comportamento da função  $g_z$  que oscila com diferentes frequências (ou comprimentos de onda). A solução  $\exp(k_z z)$  satisfaz a condição de que a atração gravitacional  $g_z$  tende a zero quando  $z$  vai para  $-\infty$ , ou seja, para o infinito. Note que o sistema de referência cartesiano tem a direção  $z$  positiva para baixo. Adota-se  $z = 0$  como o plano onde se encontram as observações e as massas anômalas situam-se abaixo dele (Ussami, 2008). Pode-se escrever:

$$g_z(x, y, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \tilde{g}_z(k_x, k_y) \{ \exp[-i(k_x x + k_y y)] \exp(k_z z) \} \quad (3.19)$$

onde  $\tilde{g}_z(k_x, k_y)$  são os coeficientes de Fourier de  $g_z(x, y, z = 0)$  calculados usando a transformada de Fourier. Se estes cálculos forem feitos usando a transformada discreta de Fourier os comprimentos de onda são escritos como:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi n}{L_x} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2 & L_x &= \frac{N-1}{\Delta x} \\ k_y &= \frac{2\pi m}{L_y} \quad m = 0, 1, 2, \dots, (M-1)/2 & L_y &= \frac{M-1}{\Delta y} \\ k_z^2 &= k_x^2 + k_y^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

e, nesse caso a transformada discreta é feita sobre um malha regular com espaçamento  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .

Uma das grandes vantagens da continuação do campo é a manutenção do caráter do campo geopotencial, desde que a continuação não se estenda dentro da fonte de anomalia. Esse fato permite que os resultados obtidos pela continuação (regional e residual) possam ser utilizados para modelos quantitativos, diferente dos resultados da aplicação de outros filtros.

### 3.6 Estimativa de alguns parâmetros da fonte

As respostas gravimétricas de corpos simples foram vistas no capítulo 1. Interessa calcular a componente vertical da aceleração da gravidade de formas complexas. É possível estimar alguns parâmetros do corpo usando apenas o perfil da anomalia. Essas estimativas auxiliam no cálculo do modelo direto.

#### 3.6.1 Estimativa da máxima profundidade da fonte

A máxima profundidade da fonte pode ser importante para tomada de decisões acerca da viabilidade de perfuração para amostrar o corpo, ou mesmo explorá-lo no caso deste possuir mineralização importante. Utiliza-se a aproximação de esfera para corpos 3-D e li-

nha de massa para corpos aproximadamente 2-D (Ussami, 2008).

Método da meia-largura: (half width method) a meia-largura,  $x_{1/2}$ , é definida como o ponto, ao longo de um perfil, onde a amplitude da anomalia cai pela metade da amplitude máxima (figura 3.7). Utiliza-se a própria curva da anomalia para estimar a meia-largura e substitui-se esse valor na expressão para esfera ou linha de massa, calculando a razão entre a amplitude máxima e a metade da amplitude.

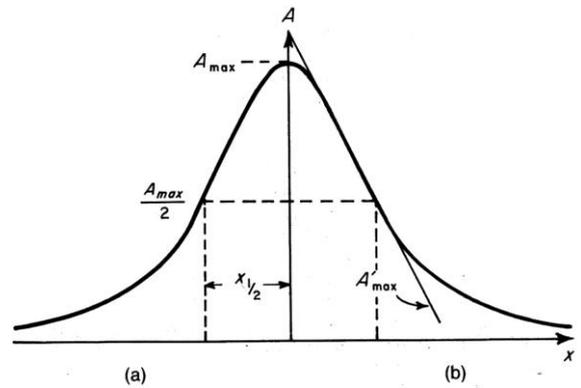


Figura 3.7: esquema indicando a amplitude máxima da anomalia ( $A_{max}$ ), a posição da meia-largura  $x_{1/2}$ , onde  $A = A_{max}/2$  (Luis, 2005).

Supondo uma esfera centrada em  $(0,0,z)$ . A amplitude ao longo do eixo  $x$  é dada por (eq. 1.38):

$$g_z = \frac{4}{3} \pi G R^3 \Delta \rho \left( \frac{z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

A amplitude máxima ocorre sobre o centro de massa da esfera, em  $x = 0$  e o valor é dado por:

$$g_{max} = \frac{4}{3} \pi G \left( \frac{R^3 \Delta \rho}{z^2} \right) = \frac{GM}{z^2} \quad (3.21)$$

$$\text{Em } x = x_{1/2} \rightarrow g_z = g_{max}/2$$

$$\frac{g_{\max}}{2} = GM \frac{z}{(z^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{GM}{z^2} = GM \frac{z}{(z^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}}$$

$$z^3 = \frac{1}{2} (z^2 + x_{1/2}^2)^{3/2}$$

$$(4^{1/3} - 1)z^2 = x_{1/2}^2$$

$$z = \frac{x_{1/2}}{(4^{1/3} - 1)^{1/2}}$$

Portanto a máxima profundidade do topo do corpo será

$$z < \frac{x_{1/2}}{(4^{1/3} - 1)^{1/2}} \quad (3.22)$$

Essa profundidade corresponde ao centro de massa do corpo.

Usando o mesmo procedimento para uma linha de massa, com centro em  $(0,0,z)$ , a amplitude da anomalia ao longo do eixo  $x$  é (eq. 1.40):

$$g_z = 2G\lambda \frac{z}{x^2 + z^2}$$

A amplitude máxima ocorre sobre o centro de massa da linha, em  $x = 0$  e o valor é dado por:

$$g_z = \frac{2G\lambda}{z}$$

$$\text{Em } x = x_{1/2} \rightarrow g_z = g_{\max}/2$$

$$\frac{g_{\max}}{2} = 2G\lambda \frac{z}{z^2 + x_{1/2}^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2G\lambda}{z} = 2G\lambda \frac{z}{z^2 + x_{1/2}^2}$$

$$2z^2 = z^2 + x_{1/2}^2$$

$$z^2 = x_{1/2}^2$$

$$z = x_{1/2}$$

Portanto a máxima profundidade do topo do corpo será

$$z < x_{1/2} \quad (3.23)$$

Método da razão gradiente amplitude: uma alternativa ao método anterior é a de esti-

mar a razão da amplitude máxima sobre gradiente máximo, como mostrado na figura 3.8.

O limite para a máxima profundidade foi obtido por Smith (1959) e Bott & Smith (1958) e estão sumarizados em Blakely (1996).

$$\text{Para corpos 3D: } z < 0,86 \frac{g_{\max}}{\left(\frac{dg}{dx}\right)_{\max}} \quad (3.24)$$

$$\text{Para corpos 2D: } z < 0,65 \frac{g_{\max}}{\left(\frac{dg}{dx}\right)_{\max}} \quad (3.25)$$

Sharma (1997) apresenta uma tabela com fórmulas para o cálculo da componente vertical da aceleração da gravidade e regras para a estimativa da profundidade para vários corpos. Uma cópia dessa figura [2] encontra-se nas notas no final do capítulo.

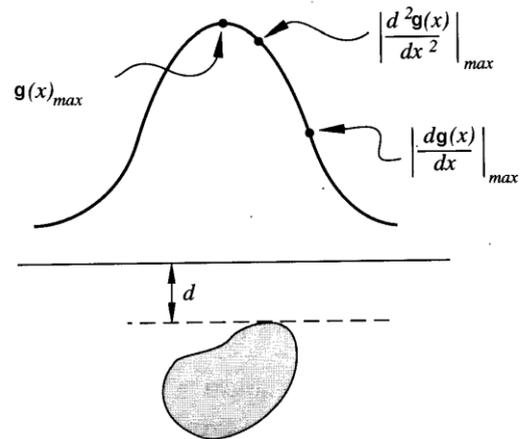


Figura 3.8: esquema indicando a amplitude máxima da anomalia ( $g(x)_{\max}$ ), a posição do ponto de máxima derivada primeira e segunda.  $d$  é a profundidade do topo do corpo (Blakely, 1996).

### 3.6.2 Estimativa da extensão lateral da fonte

Já foi mencionado que as derivadas horizontais e vertical auxiliam a estimar a extensão lateral da fonte. A localização dos pontos de inflexão (pontos da curva onde a segunda derivada é igual a zero) dos perfis gravimétricos pode fornecer informação útil sobre a natureza das fronteiras da fonte. Quando os contatos são inclinados para fora, como na figura 3.9a, os pontos de inflexão (identificados pelas setas) situam-se na base da

anomalia. Já os contatos inclinados para dentro: (caso de bacias sedimentares) os pontos de inflexão situam-se nas bordas da anomalia (figura 3.9b).

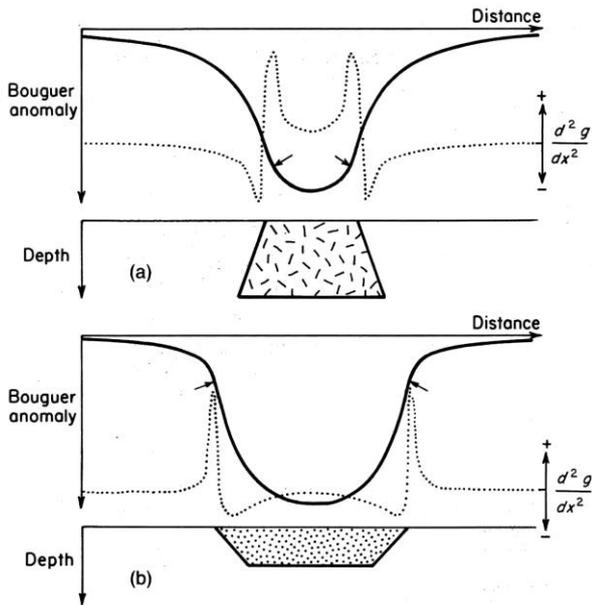


Figura 3.9: perfis de anomalia Bouguer através de um corpo granítico (a) e de uma bacia sedimentar (b). Os pontos de inflexão são marcados por uma seta. As linhas tracejadas mostram a segunda derivada horizontal (Kearey et al., 2002).

### 3.6.3 Estimativa do excesso de massa

Outra estimativa importante é a massa do corpo causador da anomalia, uma vez que a mineralização deve corresponder a uma percentagem da massa total. Se esta última for estimada e o valor da concentração da mineralização for conhecido, então é possível avaliar o potencial mineral da região.

A magnitude de uma anomalia é uma medida direta da massa, e a massa anômala total pode ser determinada de forma única sem necessidade de qualquer hipótese sobre forma, densidade e profundidade do corpo anômalo.

Utiliza-se basicamente o Teorema de Gauss, aplicado somente à área onde se dispõem de observações gravimétricas e sobre a anomalia residual. Deve-se ter o cuidado de garantir que a anomalia residual decai a zero na área do levantamento e que as extremidades da anomalia estejam bem definidas no mapa (Kearey et al., 2002), ou seja, foi deter-

minado um bom regional para a área e a anomalia em estudo encontra-se isolada.

Dividindo a área do levantamento em  $n$  células com área  $\Delta a$  e anomalia média  $\Delta g$ , o excesso de massa  $M_e$  é:

$$M_e = \frac{1}{2\pi G} \sum_{i=1}^n \Delta g_i \Delta a_i \quad (3.26)$$

Para calcular a massa real do corpo anômalo é preciso conhecer as densidades do corpo anômalo ( $\rho$ ) e da rocha encaixante ( $\rho_0$ ):

$$M = \frac{\rho M_e}{\rho - \rho_0} \quad (3.27)$$

### 3.6.4 Estimativa de parâmetros de falha

Burger et al. (2006) apresentam a técnica desenvolvida por Stanley (1977) para calcular alguns parâmetros de uma falha inclinada a partir da segunda derivada (em  $x$ ) ao longo de um perfil. Stanley demonstrou que o perfil da segunda derivada sobre falhas apresenta alguns pontos característicos que podem ser usados para resolver alguns parâmetros da falha. Esses pontos são o valor máximo da segunda derivada em  $x$ ,  $g''_{max}$ , que encontra-se na posição horizontal  $x_{max}$ , o valor mínimo da segunda derivada em  $x$ ,  $g''_{min}$ , que encontra-se na posição horizontal  $x_{min}$ , e  $x = 0$ , como mostrados na figura 3.10.

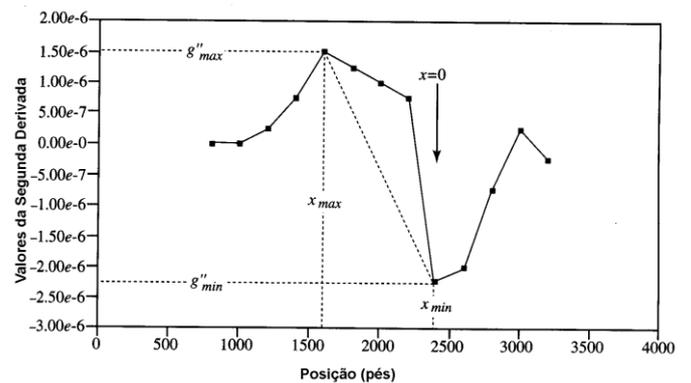


Figura 3.10: curva da segunda derivada através de uma falha próxima de Amherst, Massachusetts (Burger et al., 2006).

O ângulo de mergulho  $\alpha$  e a profundidade  $t$  (mostrados na figura 3.11) são dados pelas relações (3.28) e (3.29):

$$\frac{(g''_{max} + g''_{min})}{(g''_{max} - g''_{min})} = \cos \alpha \quad (3.28)$$

e

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{-2t}{\sin \alpha} \quad (3.29)$$

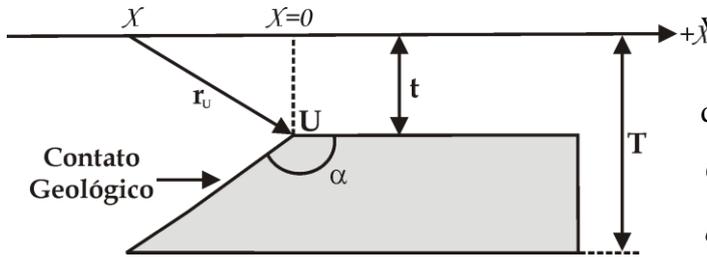


Figura 3.11: notação usada por Stanley (1977) para os parâmetros da falha a partir da segunda derivada horizontal (modificado de Burger et al., 2006).

A posição  $x = 0$  deve ser o primeiro parâmetro a ser encontrado no gráfico da derivada segunda, pois é a partir desse valor que definem-se os valores de  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$ , ou seja, essas duas posições são referenciadas a  $x = 0$  e não ao ponto inicial do perfil. Segundo Stanley (1977) uma reta ligando o máximo e o mínimo do perfil irá interceptar a curva no ponto  $x = 0$ , acima do ponto U na figura 3.11.

### 3.7 Corpos de formas complexas

Muitas vezes é necessário simular corpos com geometria mais complexa. Para o caso bi-dimensional usa-se um corpo infinito ao longo do maior comprimento (strike) e define-se a forma da seção vertical através de um polígono de vários lados. A contribuição vertical para a aceleração da gravidade é a contribuição de todas as linhas de massa que fazem os lados do polígono (Lowrie, 1997). Calcula-se o efeito gravitacional em um perfil perpendicular à estrutura. Este é o princípio do algoritmo proposto por Talwani et al. (1959), e mostrado na figura 3.12.

Talwani et al. (1959) estimaram as relações integrais entre os campos potenciais e os corpos causadores. A componente vertical do efeito gravitacional é dada por:

$$g_z = 2G\rho \sum_{i=1}^n \mathfrak{G}_i \quad (3.30)$$

com os elementos mostrados na figura 3.13.

$\theta$  é ângulo entre o eixo  $x$  positivo e o raio indo da origem, P, até a linha de massa que passa por R(x,z), ponto onde os cálculos estão

sendo feitos. Pela definição do ângulo  $\theta$  e como os cálculos são baseados em uma integral de linha os vértices do polígono usado para representar a seção transversal do corpo devem seguir o sentido horário.

Os vários elementos geométricos envolvidos são:

$$\theta_i = \arctan(z_i / x_i)$$

$$\phi_i = \arctan[(z_{i+1} - z_i) / (x_{i+1} - x_i)]$$

$$\phi_{i+1} = \arctan(z_{i+1} / x_{i+1})$$

$$a_i = x_{i+1} + z_{i+1} \cdot [(x_{i+1} - x_i) / (z_{i+1} - z_i)]$$

$$\mathfrak{G}_i = a_i \sin \phi_i \cos \phi_i [(\theta_i - \theta_{i+1}) + A]$$

$$A = \left\{ \tan \phi_i \ln \left[ \frac{\cos \theta_i (\tan \theta_i - \tan \phi_i)}{\cos \theta_{i+1} (\tan \theta_{i+1} - \tan \phi_i)} \right] \right\}$$

Uma expressão alternativa que evita singularidades é apresentada por Sleep & Fujita (1996).

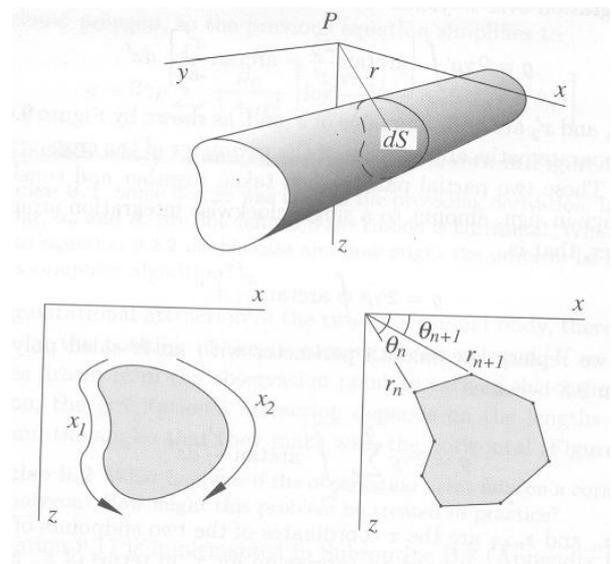


Figura 3.12: esquema de um corpo bi-dimensional, com a aproximação da seção vertical por um polígono de vários lados (Ussami, 2008).

Essa integração é repetida ao longo de todos os lados do polígono. Em seguida move-se a origem P para o próximo ponto do perfil e todos os cálculos são refeitos. O procedimento é executado até o final do perfil de dados, resultando em um perfil de anomalia calculada, que é comparado ao perfil de anomalia residual. Ajuste nos vértices e densidade implica em recomeçar os cálculos. E estes são repetidos até que a curva de anomalia

lia teórica apresente uma discrepância mínima com as observações. Por isso este método é chamado de iterativo.

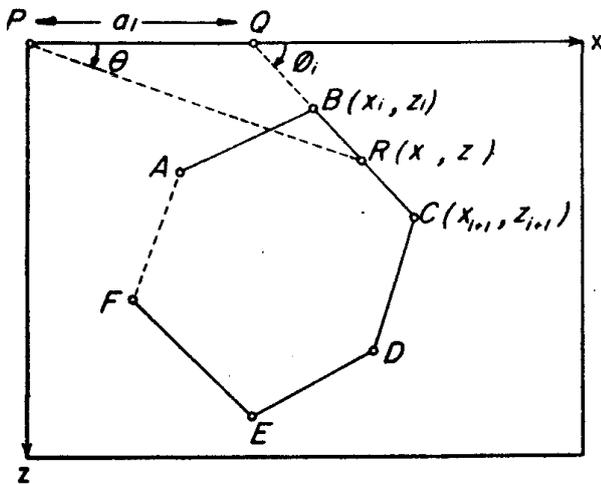


Figura 3.13: representação de uma seção poligonal com os ângulos e vértices usados (Talwani et al., 1959).

No caso 3-D usa-se o mapa de contorno do corpo. As linhas de contorno mostram o corpo suavizado a várias profundidades. Pode-se construir uma boa réplica do corpo trocando o material entre as várias linhas de contorno por lâminas finas (figura 3.14). As lâminas são aproximadas por polígonos multifacetados e os cálculos são feitos sobre cada lâmina e depois somados. Modificações nos vértices e densidade são feitas até que a diferença entre anomalia calculada e residual seja mínima.

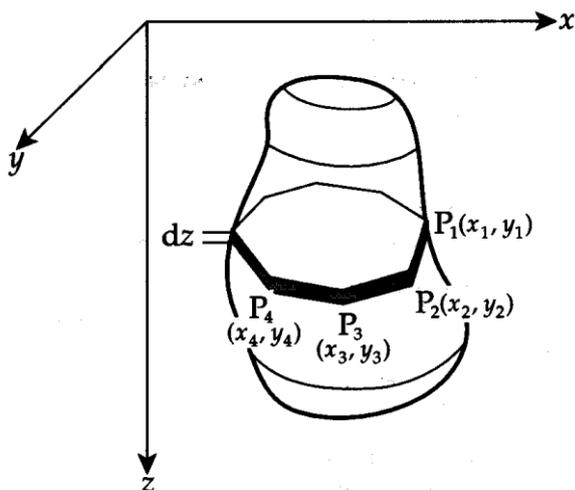


Figura 3.14: esquema para calcular a anomalia gravimétrica de corpo irregular. Um corpo 3D é substituído pela soma de lâminas horizontais dz (Lowrie, 1997).

### 3.8 Modelo direto – forward model

Modelo direto ou modelo iterativo:

- Começa com um bom modelo inicial com a geometria e densidade impostas ao corpo. O quão próximo da realidade é esse modelo depende do conhecimento da geologia da área e da experiência do intérprete.
- A resposta gravimétrica é computada e comparada com a anomalia residual (ou Bouguer, em poucos casos). Usualmente o processo de computação da resposta teórica do corpo é feito utilizando-se a metodologia proposta por Talwani et al. (1959).
- Dependendo da diferença entre os dois valores, fazem-se pequenas mudanças nos parâmetros (posição dos vértices e densidade) do corpo.
- Os cálculos são repetidos até que a discrepância entre resultado do modelo e anomalia residual seja mínima (Lowrie, 1997, Sharma, 1997).

Devido à característica de não unicidade dos métodos potenciais, não há uma solução única para o modelo proposto, e é necessário atenção para que o ajuste “perfeito” entre anomalia calculada e anomalia residual não resulte em um corpo geológico improvável.

O modelo direto é muito utilizado em perfis. Sua utilização em áreas (usando mapas) é mais demorada e trabalhosa, e tem sido abandonada em favor de técnicas de inversão.

### 3.9 Modelo inverso

No modelo inverso procura-se estimar automaticamente os parâmetros da fonte de massa que produzem dados preditos que se encontram muito próximos da anomalia observada. Usualmente o número de dados ( $n$ ) é maior do que o número de parâmetros ( $m$ ) que se deseja determinar.

Usualmente as técnicas de inversão baseiam-se em dividir o subsuperfície em prismas verticais (ou em lâminas horizontais) e as estimativas dos parâmetros obtida para cada prisma e a resposta predita para a subsuperfície discretizada é calculada e comparada com os dados observados. Dependendo da discrepância entre predição e observação no-

vos cálculos são feitos de forma automática, por processo iterativo do próprio programa, ou o intérprete modifica o modelo inicial e seus vínculos.

Para diminuir a ambigüidade, característica do método potencial, utilizam-se vínculos geológicos que devem ser descritos de forma matemática. Os vínculos mais comuns são:

- Vínculo da desigualdade: estabelece limites máximos e mínimos das estimativas de parâmetros. Por exemplo, um alto gravimétrico terá como limite mínimo de contraste de densidade  $0,0 \text{ kg/m}^3$  e um limite máximo, considerando os tipos litológicos mais comuns da região. Uma bacia sedimentar terá como limite mínimo de profundidade  $z = 0 \text{ m}$ , já que normalmente ela aflora, e um limite máximo poderá ser baseado em estimativas provenientes de dados sísmicos ou de bom senso, por exemplo, 15 km que é um valor médio da espessura da crosta superior.

- Vínculo de igualdade absoluta: impõem que as estimativas de alguns parâmetros estejam muito próximas de valores conhecidos. Por exemplo, profundidade do embasamento de uma determinada região, conhecido através de resultados de poços.

- Vínculo de compacidade: implica que a fonte não tem nenhum buraco no meio, ou seja, a distribuição de massa é contínua no espaço.

- Vínculo da igualdade relativa: considera que as estimativas de um parâmetro, quando localizados muito próximos entre si, tenham valores parecidos. Por exemplo, o embasamento em certos trechos de uma bacia sedimentar pode apresentar pouco relevo, portanto a estimativa da profundidade da bacia nessa região deverá ter valores muito próximos em prismas adjacentes.

- Vínculo do mínimo momento de inércia: considera alguns elementos geométricos (linhas ou pontos) como principais regiões de concentração de massa. Por exemplo, uma concentração de massa maior ao longo do eixo de uma bacia sedimentar.

Uma excelente discussão sobre métodos de inversão e o significado dos vários vínculos pode ser encontrada em Silva et al. (2001).

### Referências para tópico 3

**Beltrão, J.F., Silva, J.B.C. & Costa, J.C.**, 1991. Robust polynomial fitting method for regional gravity estimation. *Geophysics*, 56(1): 80-89.

**Blakely, R.J.**, 1996. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*, Cambridge University Press, 441 pp.

**Bott, M.H.P. and Smith, R.A.**, 1958. The estimation of the limiting depth of gravitating bodies. *Geophysical Prospecting*, 6: 1-10.

**Burger, H.R., Sheehan, A.F. and Jones, C.H.**, 2006. *Introduction to Applied Geophysics. Exploring the shallow subsurface*. W.W. Norton & Company, New York. Ch. 6: 349-428

**Kearey, P, Brooks, M. & Hill, I.**, 2002. *An introduction to geophysical exploration*. Blackwell Science.

**Lowrie, W.**, 1997. *Fundamentals of Geophysics*, Cambridge University Press, 354 pp.

**Luis, J.**, 2005. *Geofísica ambiental*. Material na internet, Universidade do Algarve [http://w3.ualg.pt/~jluis/geof\\_amb.htm](http://w3.ualg.pt/~jluis/geof_amb.htm)

**Sharma, P.V.**, 1997. *Environmental and engineering geophysics*. Cambridge University Press.

**Silva, J.B.C., Medeiros, W.E. e Barbosa, V.C.F.**, 2001. Potential-field inversion: Choosing the appropriate technique to solve a geologic problem. *Geophysics*, 66(2): 511-520.

**Sleep, N.H. e Fujita, K.**, 1996. *Principles of Geophysics*, Blackwell Science, 585 p.

**Smith, R.A.**, 1959. Some depth formulae for local magnetic and gravity anomalies. *Geophysical Prospecting*, 7: 55-63.

**Stanley, J.M.**, 1977. Simplified gravity interpretation by gradients – the geological contact. *Geophysics*, 42(6): 1230-1235.

**Talwani, M., Worzel, J.L., Landisman, M.**, 1959. Rapid gravity computations for two dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone. *Journal of Geophysical Research* 64, 49-59.

**Ussami, N.**, 2008. Material para o curso AGG324.

## Parte 2: Campo gravimétrico. Conceitos e aplicações

### Notas:

[1] propriedade de diferenciação

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \leftrightarrow (ik)^n F(k)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x, y) \leftrightarrow (ik_x)^n (ik_y)^m F(k_x, k_y)$$

[2] tabela 2.2 do Sharma (1997) sobre relação de fórmula da gravidade e máxima profundidade, quando viável, para formas geométricas simples e estruturas geológicas aproximadas.

Table 2.2 Simple mass shapes used to approximate geological structures. Formulas for calculating their gravity anomalies are listed. Depth rules (where applicable) are given in terms of the 'half-width' ( $x_{1/2}$ ) or some other characteristic of the anomaly (see Figs. 2.13 and 2.14).

Geometrical form	Geological structure	Gravity formula	Depth rule
Sphere	compact bodies, salt domes	$\Delta g = \frac{4\pi GR^2 \Delta \rho}{3z^2} \frac{1}{[1+(x^2/z^2)]^{3/2}}$	$z = 1.305x_{1/2}$
Horizontal cylinder (infinite strike)	ridges, valleys, tunnels	$\Delta g = \frac{2\pi GR^2 \Delta \rho}{z} \frac{1}{[1+(x^2/z^2)]}$	$z = 1.0x_{1/2}$
Narrow cylinder (infinite depth extent)	volcanic necks, plugs	$\Delta g = \pi GR^2 \Delta \rho / (x^2 + z^2)^{1/2}$	$z_1 = 0.58x_{1/2}$
Vertical sheet (infinite strike)	thin dikes	$\Delta g = 2Gb\Delta \rho \left[ \frac{\ln(x^2 + z_2^2)^{1/2}}{\ln(x^2 + z_1^2)^{1/2}} \right]$	$z_1 \approx 0.4x_{1/2}$ (empirical, for $z_2 \geq 5z_1$ )
Horizontal slab (semi-infinite)	near-vertical faults	$\Delta g = 2Gt\Delta \rho \phi$	$z = 1.0x_F$
Infinite slab (Bouguer slab)	sedimentary basins, plutons, ice caps	$\Delta g = 2\pi Gt\Delta \rho$	$t = \Delta g / 2\pi G\Delta \rho$
Finite rectangular prism	basement blocks, topographic features	(see Eq.(2.21))	
Finite cylinder	small cavities, sinkholes	(see Appendix B)	

Note:

$\Delta g$  is the gravity anomaly ( $m/s^2$ ) due to a density contrast  $\Delta \rho$  ( $kg/m^3$ );  $G = 6.672 \times 10^{-11}$  (SI units);  $x, z, R$ , respectively, denote horizontal distance along the profile, depth to center or median plane of the source, and its radius (Fig. 2.13);  $x_{1/2}$  is the half-width of the anomaly (defined in Fig. 2.13);  $z_1, z_2$  are, respectively, depth to the top and bottom of the source;  $\phi$  is the angle from the horizontal of the point of observation to the median plane of the semi-infinite slab (Fig. 2.14);  $x_F$  is the horizontal distance over which the fault anomaly falls from  $0.5\Delta g_{max}$  to  $0.25\Delta g_{max}$  (Fig. 2.14);  $t$  is thickness (depth extent) of the slab;  $b$  is horizontal thickness of the vertical sheet.

### Transformada de Fourier Bidimensional:

O material abaixo é uma reprodução adaptada do material didático da Profa. Naomi Ussami (Ussami, 2008).

A Transformada de Fourier 2-D é útil em diversas aplicações geológicas e geofísicas no domínio de frequências espaciais. Por exemplo, o problema de continuação do campo de gravidade ou magnético de uma área contida em um mapa a uma altura qualquer  $z$ , pode ser resolvido utilizando a transformada de Fourier dupla:

$$g_z(x, y, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M B_{nm} \exp[2\pi z(n^2 + m^2)^{1/2}] \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{2\pi nx}{L_x} \cos \frac{2\pi my}{L_y} + \cos \frac{2\pi nx}{L_x} \sin \frac{2\pi my}{L_y} \\ + \sin \frac{2\pi nx}{L_x} \cos \frac{2\pi my}{L_y} + \sin \frac{2\pi nx}{L_x} \sin \frac{2\pi my}{L_y} \end{array} \right\}$$

## Parte 2: Campo gravimétrico. Conceitos e aplicações

onde  $L_x$  e  $L_y$  são os comprimentos do mapa nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $B_{mn}$  são os coeficientes da expansão em série de Fourier e  $N, M$  são índices dos harmônicos mais elevados nos eixos  $x$  e  $y$ . A continuação para cima do campo é obtida tomando  $z$  negativo, e a continuação para baixo, próximo da fonte, é obtida tomando  $z$  positivo. Os dados na superfície são considerados como  $z = 0$ .

A transformada de Fourier 2-D de uma matriz de dados  $f(X, Y)$  é dada por:

$$F(K_x, K_y) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(X, Y) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{K_x X}{N} + \frac{K_y Y}{M} \right) \right]$$

onde  $X, K_x = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$  e  $Y, K_y = 0, 1, 2, \dots, (M-1)/2$ . Os números de onda nas direções  $x$  e  $y$  são dados por:

$$\lambda_x = \frac{N\Delta x}{K_x} \quad K_x = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad \lambda_y = \frac{M\Delta y}{K_y} \quad K_y = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

Usualmente, tomamos um mapa quadrado onde  $N = M$  e o intervalo de amostragem é o mesmo em ambas as direções,  $\Delta x = \Delta y$ .

Os dados observados são arranjados na forma de uma matriz  $f(X, Y)$ :

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(1,0) & \dots & f(N-1,0) \\ f(0,1) & f(1,1) & \dots & f(N-1,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(0,M) & f(1,M) & \dots & f(N-1, M-1) \end{bmatrix}$$

A análise de Fourier rápida e unidimensional é efetuada neste vetor de  $N = N.M$  observações. A FFT 2-D pode ser representada como uma superposição linear de duas Transformadas de Fourier discretas:

$$F(K_x, K_y) = \sum_{X=0}^{N-1} g(X, K_y) \exp(M(X))$$

$$g(X, K_y) = \sum_{Y=0}^{M-1} f(X, Y) \exp(M(Y))$$

onde

$$M(X) = -\frac{2\pi i X K_x}{N} \quad M(Y) = -\frac{2\pi i Y K_y}{M}$$

As duas transformadas discretas de Fourier indicadas acima são unidimensionais e podem ser efetuadas utilizando programas de FFT unidimensional convencionais, linha por linha para obter  $g(X, K_y)$  e depois coluna por coluna para obter  $F(K_x, K_y)$ . A extensão para dimensões maiores é direta.

## Capítulo 4 - Interpretação de Anomalias

### Estudo de casos

Estes são alguns exemplos de interpretação de dados gravimétricos. Outros estudos de casos estão disponíveis nas revistas especializadas.

Os estudos de gravidade são usados extensivamente na investigação de estruturas geológicas de grande e média escala. Em grande escala são os levantamentos para estudar feições como suturas de massas continentais, feições do assoalho oceânico e da crosta. Na média escala, as anomalias gravimétricas podem revelar a forma de intrusões ígneas sub-superficiais (batólitos graníticos) e na localização de bacias sedimentares. Na indústria de petróleo esse método já foi muito utilizado para localizar armadilhas (ou trapas) para hidrocarbonetos e estudos de bacias.

#### 4.1 Aplicação em estudos de armadilhas para hidrocarbonetos

Estruturas de sal são caracterizadas por baixos gravimétricos porque a densidade do sal ( $\sim 2200\text{kg/m}^3$ ) normalmente é menor do que as rochas sedimentares ao redor (Sharma, 1997).

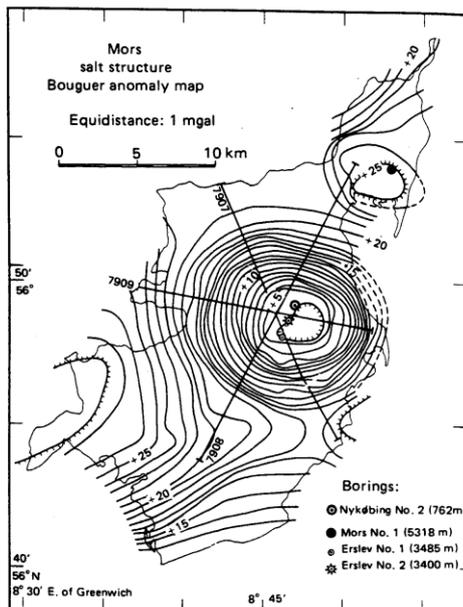


Figura 4.1: Mapa de anomalia Bouguer sobre o domo de sal Mors no norte da Dinamarca. O intervalo de contorno é de 1 mGal. Perfis sísmicos cortam o mínimo (Sharma, 1997).

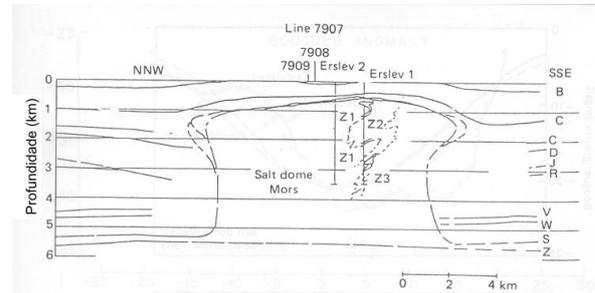


Figura 4.2: seção em profundidade da linha 7907 (Sharma, 1997).

O exemplo da figura 4.1 mostra um levantamento gravimétrico feito em uma área sedimentar ao norte de Jutland, na Dinamarca para estudar a forma geral e a estrutura dos domos de sal.

Um modelo para a estrutura do sal proveniente da sísmica pode ser visto na figura 4.2, e o resultado da interpretação conjunta da sísmica e gravimetria pode ser visto na figura 4.3.

Neste caso o estudo foi feito para verificar a possibilidade de a estrutura ser usada como depósito de rejeitos radioativos e não como armadilha de hidrocarbonetos. Mas os resultados e técnicas são os mesmos.

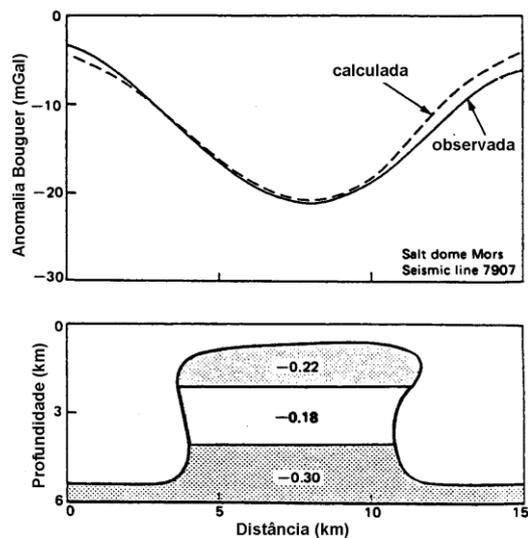


Figura 4.3: estrutura do modelo de sal derivado da sísmica e dos dados gravimétricos (Sharma, 1997).

### 4.2 Aplicação em estudos de mineralização

O método gravimétrico é pouco usado como ferramenta de exploração por ser caro e lento, mas uma vez determinado um alvo exploratório, ele pode fornecer parâmetros interessantes como tonagem do minério pelo método do excesso de massa (Kearey et al., 2009).

Slavec e outros (2001) fizeram a modelagem direta do complexo alcalino de Juquiá (SP) para determinar o volume do carbonatito nesse corpo. A alcalina está encaixada no embasamento gnáissico precambriano. A figura 4.4 mostra o mapa Bouguer residual obtido por ajuste de polinômio de grau 2.

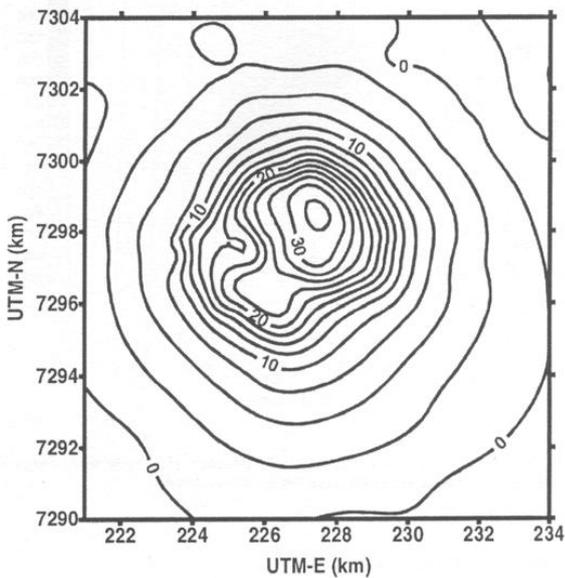


Figura 4.4: mapa Bouguer residual (Slavec et al., 2001).

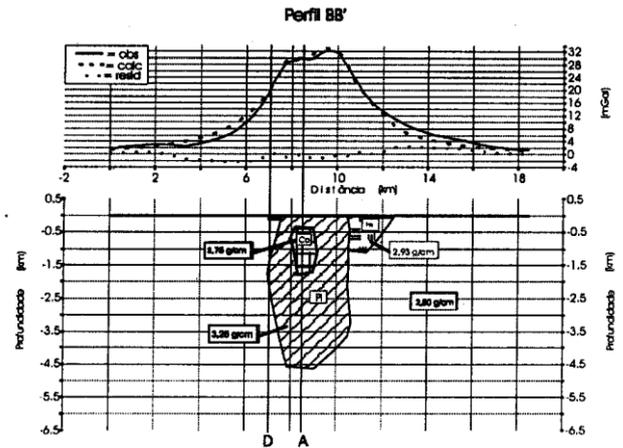


Figura 4.5: modelo 2D para um perfil cortando o complexo alcalino de Juquiá.

A modelagem direta de perfis dessa anomalia (figura 4.5) resultou em um volume de  $5,5 \text{ km}^3$  para o corpo, que atingiu a profundidade de 1,7 km.

### 4.3 Aplicação em hidrogeologia

Os levantamentos podem ser usados para investigar a geometria de potenciais aquíferos soterrados.

A figura 4.6 mostra um mapa de anomalia Bouguer de uma região próxima a Antofagasta no Chile. A armazenagem de água se dá em feições geológicas profundas. O mínimo de gravidade nesse mapa pode representar um vale soterrado sob aluvião sobreposto ao embasamento granodiorítico. Para o modelo, na figura 3.17, foi usado um contraste de densidade de  $-0,5 \text{ g/cm}^3$ .

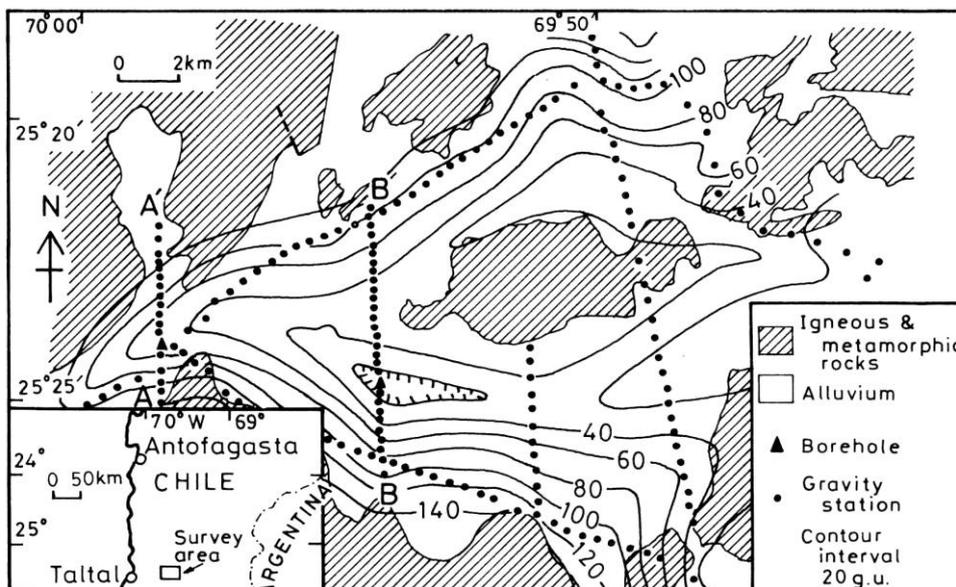


Figura 4.6: Mapa geológico de uma região próxima a Taltal, Chile, com a localização das estações gravimétricas e curvas de contorno da anomalia Bouguer (Kearey et al., 2009).

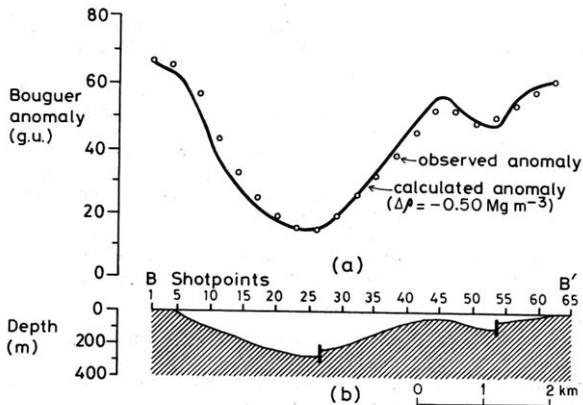


Figura 4.7: Perfil B-B' da figura 3.5. (a) Anomalias Bouguer observada e calculada a partir de um modelo com um contraste de densidade de  $-0,5 \text{ g/cm}^3$ . (b) Interpretação.

#### 4.4 Aplicação em geotecnia

Em aplicações geotécnicas o método gravimétrico é usado na localização de vazios em subsuperfície. Isto é possível usando técnicas de micro gravimetria.

A figura 4.8 (Kearey et al., 2009) mostra o mapa de anomalia Bouguer de um levantamento microgravimétrico para um local proposto para a instalação de uma torre de resfriamento de uma central nuclear. Havia a suspeita de que houvessem cavidades devido a dissolução de substrato dolomítico. As medidas foram feitas numa malha de 15 m com posição vertical determinada com uma precisão de  $\pm 3 \text{ mm}$ . A espessura do solo foi determinada de maneira que o seu efeito pudesse ser removido. Os mínimos a NE foram confirmados (por intermédio de furos) como sendo cavidades que foram posteriormente cheias de cimento. Uma repetição do levantamento confirmou o desaparecimento das anomalias.

Os levantamentos microgravimétricos são também usados na arqueologia para detectar construções enterradas, tumbas e outros artefatos (Luis, 2005).

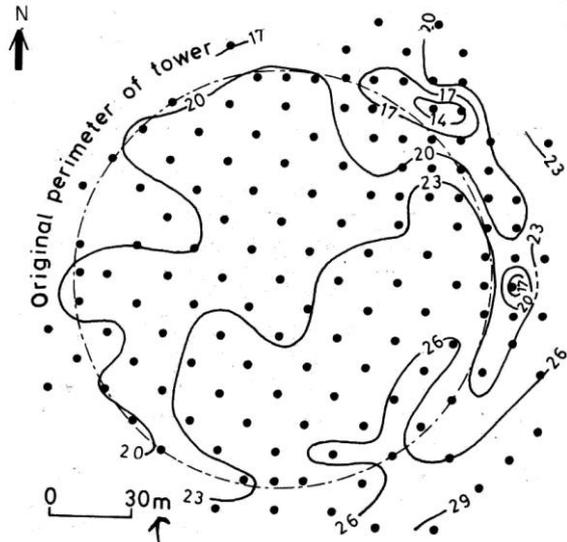


Figura 4.8: anomalia Bouguer sobre a área da torre de resfriamento. O intervalo de contorno é  $0,3 \text{ gu}$  (Kearey et al., 2009).

#### 4.5 Aplicação em meio ambiente

Nos problemas ambientais os levantamentos gravimétricos são pouco utilizados. As razões para isso são: o alto custo associado a estes levantamentos e o fato de ser difícil ressaltar anomalias provocadas por lixo enterrado (Luis, 2005).

A figura 4.9 mostra o resultado de um levantamento gravimétrico sobre um aterro. As estações estão espaçadas de 5-10 m (o mapa foi construído a partir de uma malha calculada pelo método da mínima curvatura). A anomalia residual, representada na figura 4.9, foi obtida por remoção de um polinômio de 3º grau usando, para o seu cálculo, os valores de 90 estações fora da zona de aterro. A interpretação das anomalias residuais é baseada na premissa de que a anomalia deriva apenas da variação da densidade entre o entulho e os sedimentos glaciares que estão nas margens do aterro sanitário.

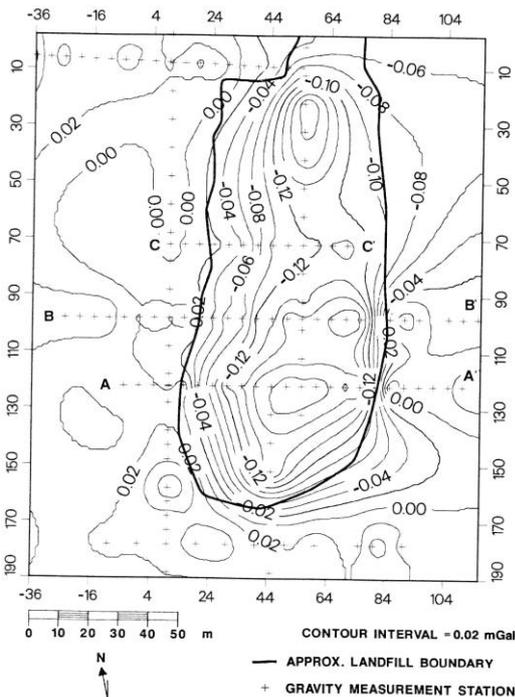


Figura 4.9: mapa de anomalia Bouguer residual de um aterro sanitário em Indiana (Estados Unidos) (Luis, 2005).

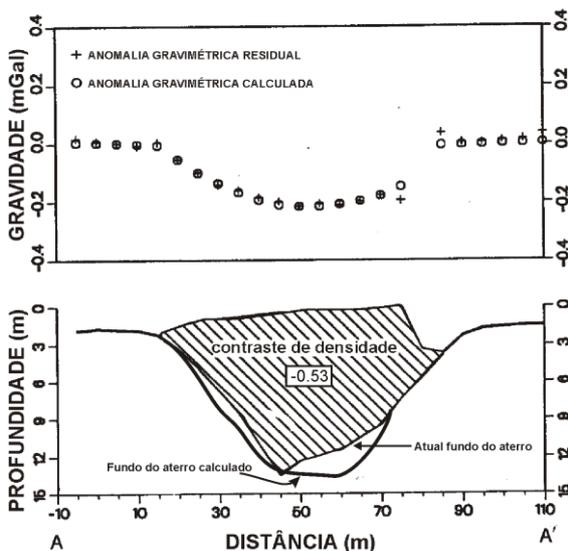


Figura 4.10: perfil gravimétrico ao longo do perfil AA' da figura 4.9. O modelo foi obtido por modelamento direto (Sharma, 1997).

A interpretação para determinar a forma do aterro foi: modelo direto usando um contraste de densidade de  $\Delta\rho = 0,53 \text{ kg/m}^3$  (figura 4.10). Em seguida foi feita a inversão dos dados usando o contorno conhecido do aterro (figura 4.11).

Verifica-se um aumento na variação da densidade de norte para sul. Este aumento foi atribuído a uma variação no tipo do lixo.

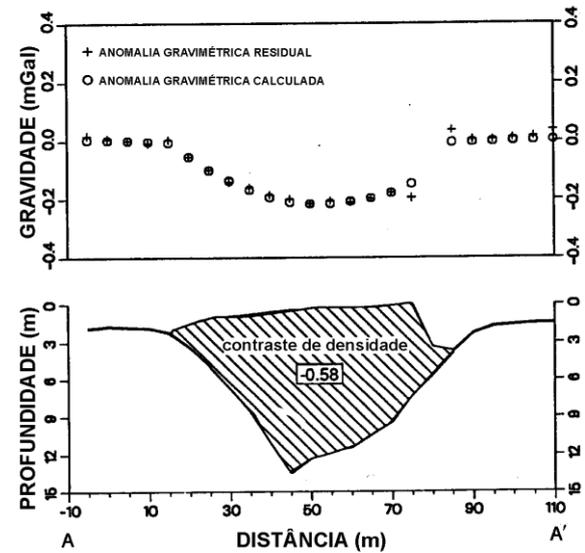


Figura 4.11: perfil gravimétrico ao longo do perfil AA' da figura 4.9. O modelo foi obtido por inversão considerando a geometria do aterro conhecida (Sharma, 1997).

#### Referências do tópico 4

- Kearey, P, Brooks, M. & Hill, I., 2009. Geofísica de exploração. Oficina de textos.
- Luis, J., 2005. Geofísica ambiental. Material na internet, Universidade do Algarve [http://w3.ualg.pt/~jluis/geof\\_amb.htm](http://w3.ualg.pt/~jluis/geof_amb.htm)
- Sharma, P.V., 1997. Environmental and engineering geophysics. Cambridge University Press.
- Slavec, G.B., Mantovani, M.S.M. & Shukowsky, W., 2001. Contribuição ao estudo do Complexo de Juquiá. Revista Brasileira de Geociências, 31(2): 203-210.