







Do original

*Mathematical methods for physicists*

Tradução autorizada da edição publicada por Elsevier Inc.

Copyright ©2005

©2007, Elsevier Editora Ltda.

Todos os direitos reservados e protegidos pela Lei 9.610 de 19/02/1998.

Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados: eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

*Projeto Gráfico e Editoração Eletrônica:* Maria do Socorro V.M. de Barros/Francisca Valéria F. Gomes

*Revisão Gráfica:* Marília Pinto de Oliveira/Renato Rosário Carvalho

*Copidesque:* Ivone Teixeira

Editora Campus/Elsevier

A Qualidade da Informação

Rua Sete de Setembro, 111 – 16<sup>o</sup> andar

20050-006 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Telefone: (21) 3970-9300 Fax: (021) 2507-1991

E-mail: [info@elsevier.com.br](mailto:info@elsevier.com.br)

Escritório São Paulo:

Rua Quintana, 753, 8<sup>o</sup> andar

04569-011 – Brooklin - São Paulo - SP

Tel.: (11) 5105-8555

ISBN 10: 85-352-2050-X

ISBN 13: 978-85-352-2050-6

**Nota:** Muito zelo e técnica foram empregados na edição desta obra. No entanto, podem ocorrer erros de digitação, impressão ou dúvida conceitual. Em qualquer das hipóteses, solicitamos a comunicação à nossa Central de Atendimento, para que possamos esclarecer ou encaminhar a questão.

Nem a editora nem os autores assumem qualquer responsabilidade por eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens, originados do uso desta publicação.

*Central de Atendimento:*

Tel.: 0800-265340

Rua Sete de Setembro, 111, 16<sup>o</sup> andar – Centro – Rio de Janeiro

e-mail: [info@elsevier.com.br](mailto:info@elsevier.com.br)

site: [www.campus.com.br](http://www.campus.com.br)

CIP-Brasil, catalogação-na-fonte.

Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

---

A732f Arfken, George B. (George Brown), 1922.  
Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física/  
George Arfken e Hans Weber .  
tradução de Arlete Simille Marques  
– Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

Tradução de: *Mathematical methods for physicists*, 6th ed

ISBN 978-85-352-2050-6

---

07-0469. 1. Física. 2. Física. I. Weber, Hans-Jurgen. II. Título. CDD 510  
CDU 51  
12.02.07 16.02.07 000480

---



# Prefácio

Por seis edições até agora, *Métodos matemáticos para físicos* forneceu todos os métodos matemáticos que os pretendentes às carreiras de cientistas e engenheiros provavelmente encontrarão como estudantes e pesquisadores. Há material mais do que suficiente para um curso de graduação ou pós-graduação de dois semestres.

O livro é avançado no sentido de que as relações matemáticas quase sempre são provadas, além de ilustradas em termos de exemplos. Essas provas não são o que um matemático consideraria como rigorosas, mas dão um esboço das idéias e enfatizam as relações que são essenciais para o estudo da física e campos relacionados. Essa abordagem incorpora teoremas que normalmente não são citados nas abordagens mais gerais, mas se adaptam perfeitamente bem às aplicações mais restritas exigidas pela física. Por exemplo, um físico normalmente aplica o teorema de Stokes a uma superfície partindo do entendimento tácito de que ela é simplesmente conectada. Neste livro, essas suposições ficam mais explícitas.

## Habilidades para Resolver Problemas

O livro também adota um foco deliberado sobre habilidades para resolver problemas. Esse nível mais avançado de entendimento e aprendizado ativo é rotineiro em cursos de física e requer prática da parte do leitor. Seguindo esse princípio, os conjuntos extensivos de problemas apresentados em cada capítulo fazem parte integral do livro. Foram revisados e atualizados com cuidado e seu número aumentou nesta Sexta Edição.

## Como o Livro deve ser Usado

Estudantes de graduação terão melhor aproveitamento se começarem revendo o Capítulo 1 de acordo com o nível de treinamento da classe. A Seção 1.2 sobre as propriedades de transformação de vetores, o produto cruzado e a invariância do produto escalar sob rotações pode ser adiada até o início da análise tensorial, para a qual essas seções funcionam como uma introdução e servem como exemplos. Podem continuar seus estudos com álgebra linear no Capítulo 3 e então, talvez passar para tensores e simetrias (Capítulos 2 e 4) e, em seguida, análise real e complexa (Capítulos 5 a 7), equações diferenciais (Capítulos 9 e 10) e funções especiais (Capítulos 11 a 13).

Em geral, o núcleo de um curso de graduação de um semestre compreende os Capítulos 5 a 10 e 11 a 13, que tratam de análise real e complexa, equações diferenciais e funções especiais. Dependendo do nível dos estudantes em um curso, pode-se estudar um pouco de álgebra linear no Capítulo 3 (eigenvalores, por exemplo.), juntamente com simetrias (teoria de grupo no Capítulo 4). Tensores (Capítulo 2) podem ser estudados se necessário ou se desejado. A teoria de grupo também pode ser incluída com equações diferenciais (Capítulos 9 e 10). Relações adequadas foram incluídas e discutidas nos Capítulos 4 e 9.

Um curso de dois semestres pode abordar tensores, teoria de grupo e funções especiais (Capítulos 11 a 13) mais extensivamente e adicionar séries de Fourier (Capítulo 14), transformadas integrais (Capítulo 15), equações integrais (Capítulo 16) e cálculo de variações (Capítulo 17).

## Mudanças na Sexta Edição

Nesta Sexta Edição foram feitas mudanças em quase todos os capítulos, acrescentando exemplos e problemas e mais derivações de resultados. Vários erros de ortografia causados pela digitalização para o sistema LaTeX, um processo sujeito a erros à taxa de muitos erros por páginas foram corrigidos, juntamente com erros tais como o das matrizes  $\gamma$  de Dirac no Capítulo 3. Alguns capítulos mudaram de lugar. A função gama agora está no Capítulo 8, logo após os Capítulos 6 e 7 sobre funções complexas de uma variável, já que é uma aplicação desses métodos. Equações diferenciais agora estão nos Capítulos 9 e 10. Foi acrescentado um novo Capítulo sobre probabilidade, bem como novas subseções sobre formas diferenciais e equações de Mathieu atendendo a insistentes pedidos de leitores e estudantes ao longo dos anos. As novas subseções são mais avançadas e escritas no estilo conciso do livro, elevando-as assim ao nível de pós-graduação. Foram acrescentados muitos exemplos, por exemplo nos Capítulos 1 e 2, que costumam ser usados na física ou são figurinhas carimbadas em cursos de física. Foram feitas várias adições no Capítulo 3, tais como dependência linear de vetores, espaços vetoriais duais e decomposição espectral de matrizes simétricas ou Hermitianas. Uma subseção sobre a equação de difusão dá destaque especial a métodos para adaptar soluções de equações diferenciais parciais a condições de fronteira. Foram desenvolvidas novas fórmulas para polinomiais de Hermite, incluídas no Capítulo 13 e úteis para tratar vibrações moleculares; elas são de interesse do físico-químico.

## Agradecimentos

Contamos com o benefício do conselho e da ajuda de muitas pessoas. Algumas das revisões atendem a comentários feitos por leitores e ex-alunos, como o Dr. K. Bodoor e J. Hughes. Nossos agradecimentos e eles e aos editores Barbara Holland e Tom Singer que organizaram os testes de precisão. Gostaríamos de agradecer em particular ao Dr. Michael Bozoian e ao Prof. Frank Harris por sua inestimável ajuda na verificação de precisão e a Simon Crump, Editor de Produção por seu gerenciamento especializado de Sexta Edição.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Análise Vetorial</b>	<b>1</b>
1.1	Definições, Abordagem Elementar . . . . .	1
1.2	Rotação dos Eixos Coordenados . . . . .	6
1.3	Produto Escalar ou Produto Interno . . . . .	10
1.4	Produto de Vetores ou Produto Externo . . . . .	14
1.5	Produto Escalar Triplo, Produto Vetorial Triplo . . . . .	20
1.6	Gradiente, $\nabla$ . . . . .	26
1.7	Divergência, $\nabla$ . . . . .	30
1.8	Rotacional, $\nabla \times$ . . . . .	34
1.9	Aplicações Sucessivas de $\nabla$ . . . . .	38
1.10	Integração Vetorial . . . . .	42
1.11	Teorema de Gauss . . . . .	46
1.12	Teorema de Stokes . . . . .	50
1.13	Teoria do Potencial . . . . .	53
1.14	Lei de Gauss, Equação de Poisson . . . . .	61
1.15	Função Delta de Dirac . . . . .	64
1.16	Teorema de Helmholtz . . . . .	74
<b>2</b>	<b>Análise Vetorial em Coordenadas Curvas e Tensores</b>	<b>80</b>
2.1	Coordenadas Ortogonais em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	80
2.2	Operadores Vetoriais Diferenciais . . . . .	85
2.3	Sistemas de Coordenadas Especiais: Introdução . . . . .	88
2.4	Coordenadas Cilíndricas Circulares . . . . .	89
2.5	Coordenadas Polares Esféricas . . . . .	96
2.6	Análise Tensorial . . . . .	103
2.7	Contração, Produto Direto . . . . .	107

2.8	Regra do Quociente . . . . .	109
2.9	Pseudotensores, Tensores Duais . . . . .	110
2.10	Tensores Gerais . . . . .	116
2.11	Operadores de Derivadas de Tensores . . . . .	123
<b>3</b>	<b>Determinantes e Matrizes</b>	<b>126</b>
3.1	Determinantes . . . . .	126
3.2	Matrizes . . . . .	134
3.3	Matrizes Ortogonais . . . . .	148
3.4	Matrizes hermitianas, Matrizes Unitárias . . . . .	158
3.5	Diagonização de Matrizes . . . . .	163
3.6	Matrizes Normais . . . . .	175
<b>4</b>	<b>Teoria dos Grupos</b>	<b>183</b>
4.1	Introdução à Teoria dos Grupos . . . . .	183
4.2	Geradores de Grupos Contínuos . . . . .	187
4.3	Momento Angular Orbital . . . . .	198
4.4	Acoplamento de Momento Angular . . . . .	202
4.5	Grupo Homogêneo de Lorentz . . . . .	211
4.6	Covariância de Lorentz de Equações de Maxwell . . . . .	215
4.7	Grupos Discretos . . . . .	221
4.8	Formas Diferenciais . . . . .	231
<b>5</b>	<b>Séries Infinitas</b>	<b>245</b>
5.1	Conceitos Fundamentais . . . . .	245
5.2	Testes de Convergência . . . . .	248
5.3	Séries Alternantes . . . . .	258
5.4	Álgebra de Séries . . . . .	260
5.5	Série de Funções . . . . .	264
5.6	Expansão de Taylor . . . . .	267
5.7	Série de Potências . . . . .	275
5.8	Integrais Elípticas . . . . .	281
5.9	Números de Bernoulli e Fórmula de Euler-Maclaurin . . . . .	286
5.10	Séries Assintóticas . . . . .	295
5.11	Produtos Infinitos . . . . .	300



<b>6</b>	<b>Funções de uma Variável Complexa I</b>	<b>305</b>
6.1	Álgebra Complexa . . . . .	306
6.2	Condições de Cauchy-Riemann . . . . .	312
6.3	Teorema Integral de Cauchy . . . . .	316
6.4	Fórmula Integral de Cauchy . . . . .	321
6.5	Expansão de Laurent . . . . .	325
6.6	Singularidades . . . . .	332
6.7	Mapeamento . . . . .	335
6.8	Mapeamento Conformal . . . . .	342
<b>7</b>	<b>Funções de uma Variável Complexa II</b>	<b>345</b>
7.1	Cálculo de Resíduos . . . . .	345
7.2	Relações de Dispersão . . . . .	365
7.3	Método das Inclinações mais Acentuadas . . . . .	370
<b>8</b>	<b>A Função Gama (Função Fatorial)</b>	<b>377</b>
8.1	Definições, Propriedades Simples . . . . .	377
8.2	Funções Digama e Poligama . . . . .	386
8.3	Série de Stirling . . . . .	390
8.4	A Função Beta . . . . .	393
8.5	Funções Gama Incompletas e Funções Relacionadas . . . . .	398
<b>9</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>404</b>
9.1	Equações Diferenciais Parciais . . . . .	404
9.2	Equações Diferenciais de Primeira Ordem . . . . .	410
9.3	Separação de Variáveis . . . . .	418
9.4	Pontos Singulares . . . . .	425
9.5	Soluções de Série — Método de Frobenius . . . . .	427
9.6	Uma Segunda Solução . . . . .	437
9.7	Equação Não-Homogênea — Função de Green . . . . .	447
9.8	EDP de Fluxo de Calor ou de Difusão . . . . .	462
<b>10</b>	<b>Teoria de Sturm-Liouville — Funções Ortogonais</b>	<b>469</b>
10.1	EDO Auto-Adjuntas . . . . .	469
10.2	Operadores Hermitianos . . . . .	479

10.3	Ortogonalização de Gram-Schmidt . . . . .	484
10.4	Completude de Autofunções . . . . .	490
10.5	Função de Green — Expansão em Autofunção . . . . .	499
<b>11</b>	<b>Funções de Bessel</b>	<b>510</b>
11.1	Funções de Bessel da Primeira Espécie, $J_\nu(x)$ . . . . .	510
11.2	Ortogonalidade . . . . .	524
11.3	Funções de Neumann e Funções de Bessel da Segunda Espécie . . . . .	529
11.4	Funções de Hankel . . . . .	534
11.5	Funções Modificadas de Bessel $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ . . . . .	539
11.6	Expansões Assintóticas . . . . .	544
11.7	Funções Esféricas de Bessel . . . . .	548
<b>12</b>	<b>Funções de Legendre</b>	<b>560</b>
12.1	Função Geratriz . . . . .	560
12.2	Relações de Recorrência e Propriedades Especiais . . . . .	566
12.3	Ortogonalidade . . . . .	571
12.4	Definições Alternativas de Polinômios de Legendre . . . . .	580
12.5	Funções Associadas de Legendre . . . . .	582
12.6	Harmônicos Esféricos . . . . .	595
12.7	Operadores de Momento Angular Orbital . . . . .	600
12.8	O Teorema da Adição para Harmônicos Esféricos . . . . .	603
12.9	Integrais de Produtos de Três Harmônicos Esféricos . . . . .	607
12.10	Funções de Legendre da Segunda Espécie . . . . .	610
12.11	Harmônicos Esféricos Vetoriais . . . . .	615
<b>13</b>	<b>Mais Funções Especiais</b>	<b>618</b>
13.1	Funções de Hermite . . . . .	618
13.2	Funções de Laguerre . . . . .	633
13.3	Polinômios de Chebyshev . . . . .	642
13.4	Funções Hipergeométricas . . . . .	650
13.5	Funções Hipergeométricas Confluentes . . . . .	653
13.6	Funções de Mathieu . . . . .	658
<b>14</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>667</b>



14.1	Propriedades Gerais . . . . .	667
14.2	Vantagens, Usos da Série de Fourier . . . . .	672
14.3	Aplicações de Séries de Fourier . . . . .	675
14.4	Propriedades da Série de Fourier . . . . .	684
14.5	Fenômeno de Gibbs . . . . .	688
14.6	Transformada Discreta de Fourier . . . . .	691
14.7	Expansão de Fourier de Funções de Mathieu . . . . .	695
<b>15</b>	<b>Transformadas Integrais</b>	<b>705</b>
15.1	Transformadas Integrais . . . . .	705
15.2	Desenvolvimento da Integral de Fourier . . . . .	708
15.3	Transformadas de Fourier — Teorema da Inversão . . . . .	710
15.4	Transformada de Fourier de Derivadas . . . . .	716
15.5	Teorema de Convolução . . . . .	720
15.6	Representação de Momentum . . . . .	723
15.7	Função de Transferência . . . . .	728
15.8	Transformadas de Laplace . . . . .	731
15.9	Transformada de Laplace de Derivadas . . . . .	736
15.10	Outras Propriedades . . . . .	741
15.11	Teorema da Convolução (“Faltung”) . . . . .	750
15.12	Transformada Inversa de Laplace . . . . .	753
<b>16</b>	<b>Equações Integrais</b>	<b>763</b>
16.1	Introdução . . . . .	763
16.2	Transformadas Integrais, Funções Geradoras . . . . .	768
16.3	Série de Neumann, Núcleos Separáveis (Degenerados) . . . . .	772
16.4	Teoria de Hilbert-Schmidt . . . . .	781
<b>17</b>	<b>Cálculo de Variações</b>	<b>787</b>
17.1	Uma Variável Dependente e uma Variável Independente . . . . .	787
17.2	Aplicações da Equação de Euler . . . . .	792
17.3	Diversas Variáveis Dependentes . . . . .	798
17.4	Diversas Variáveis Independentes . . . . .	802
17.5	Diversas Variáveis Dependentes e Independentes . . . . .	803
17.6	Multiplicadores de Lagrange . . . . .	804

17.7	Variação com Vínculos . . . . .	808
17.8	Técnica Variacional de Rayleigh-Ritz . . . . .	814
<b>18</b>	<b>Métodos Não-Lineares e Caos</b>	<b>818</b>
18.1	Introdução . . . . .	818
18.2	O Mapa Logístico . . . . .	819
18.3	Sensibilidade a Condições Iniciais e Parâmetros . . . . .	822
18.4	Equações Diferenciais Não-Lineares . . . . .	825
<b>19</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>842</b>
19.1	Definições, Propriedades Simples . . . . .	842
19.2	Variáveis Aleatórias . . . . .	847
19.3	Distribuição Binomial . . . . .	857
19.4	Distribuição de Poisson . . . . .	859
19.5	Distribuição Normal de Gauss . . . . .	861
19.6	Estatística . . . . .	864



# 1

## Análise Vetorial

### 1.1 Definições, Abordagem Elementar

Na ciência e na engenharia, freqüentemente encontramos quantidades que têm grandeza e apenas grandeza: massa, tempo e temperatura. Denominamos essas grandezas quantidades **escalares** e elas continuam as mesmas, não importando as coordenadas que usarmos. Ao contrário, muitas quantidades físicas interessantes têm grandeza e, além disso, uma direção associada. Esse segundo grupo inclui deslocamento, velocidade, aceleração, força, momento linear e momento angular. Quantidades que têm grandeza e direção são denominadas quantidades **vetoriais**. Em geral, em tratamentos elementares, um vetor é definido como uma quantidade que tem grandeza e direção. Para distinguir vetores de escalares, identificamos quantidades vetoriais com letras em negrito, isto é, **V**.

Nosso vetor pode ser convenientemente representado por uma seta de comprimento proporcional à grandeza. A direção da seta dá a direção do vetor, e o sentido positivo de direção é indicado pela ponta. Por essa representação, a adição vetorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.1)$$

consiste em colocar a extremidade traseira do vetor **B** na ponta do vetor **A**. Então o vetor **C** é representado por uma seta desenhada a partir da extremidade traseira de **A** até a ponta de **B**. Esse procedimento, a lei de adição do triângulo, atribui significado à Equação (1.1) e é ilustrado na Figura 1.1. Completando o paralelogramo, vemos que

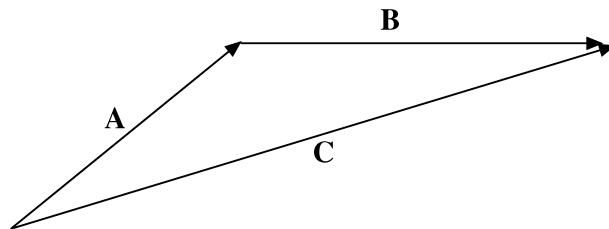


Figura 1.1: Lei do triângulo da adição vetorial.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (1.2)$$

como mostra a Figura 1.2. Em palavras, a adição de vetores é **comutativa**.

Para a soma de três vetores, (Figura 1.3),

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

podemos primeiro somar **A** e **B**:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

Então, essa soma é adicionada a **C**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{C}.$$

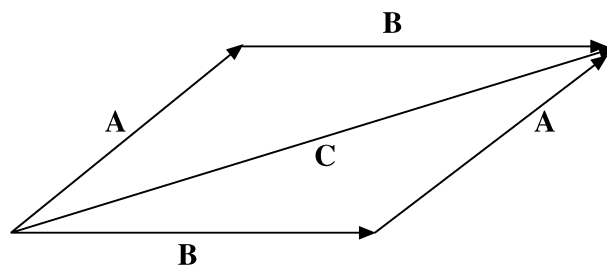


Figura 1.2: Lei do paralelogramo da adição vetorial.

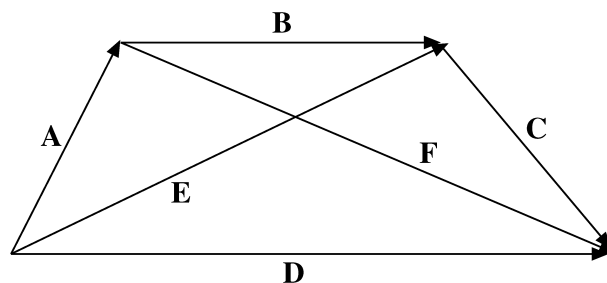


Figura 1.3: A adição de vetores é associativa.

De modo semelhante, podemos primeiro somar  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{F}.$$

Então,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{F}.$$

Em termos da expressão original,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

A adição de vetores é **associativa**.

Um exemplo físico direto da lei de adição do paralelogramo é dado por um peso suspenso por dois fios. Se o ponto de junção ( $O$  na Figura 1.4) estiver em equilíbrio, a soma vetorial das duas forças  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  deve exatamente anular a força da gravidade dirigida para baixo,  $\mathbf{F}_3$ . Nesse caso, a lei de adição do paralelogramo está sujeita à verificação experimental imediata.<sup>1</sup>

A subtração pode ser executada definindo o negativo de um vetor como um vetor da mesma grandeza, mas com sentido inverso. Então,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

Na Figura 1.3,

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} - \mathbf{B}.$$

Note que os vetores são tratados como objetos geométricos que são independentes de qualquer sistema de coordenadas. Esse conceito de independência de um sistema de coordenadas preferencial é desenvolvido com detalhes na seção seguinte.

A representação do vetor  $\mathbf{A}$  por uma seta sugere uma segunda possibilidade. A seta  $\mathbf{A}$  (Figura 1.5), iniciando na origem,<sup>2</sup> termina no ponto  $(A_x, A_y, A_z)$ . Assim, se concordarmos que o vetor deve começar na origem, a extremidade positiva pode ser especificada dando as coordenadas cartesianas  $(A_x, A_y, A_z)$  da ponta da seta.

Embora  $\mathbf{A}$  possa representar qualquer quantidade vetorial (momento linear, campo elétrico etc.), uma quantidade vetorial particularmente importante, o deslocamento da origem até o ponto  $(x, y, z)$  é denotado pelo

<sup>1</sup>Em termos estritos, a adição pela regra do paralelogramo foi introduzida como uma definição. Experimentos mostram que, se admitirmos que as forças são quantidades vetoriais e as combinarmos pela adição do paralelogramo, a condição de equilíbrio de força resultante zero é satisfeita.

<sup>2</sup>Poderíamos iniciar em qualquer ponto de nosso sistema cartesiano de referência; escolhemos a origem por simplicidade. Essa liberdade de deslocar a origem do sistema de coordenadas sem afetar a geometria é denominada **invariância de translação**.

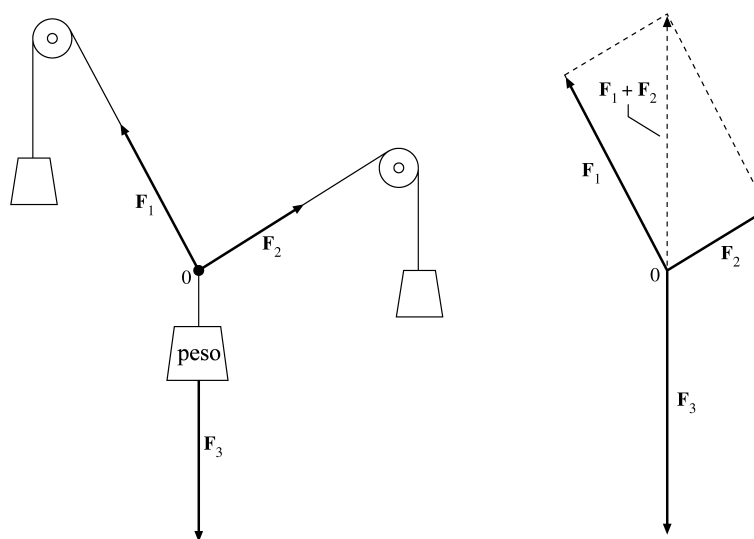


Figura 1.4: Equilíbrio de forças:  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$ .

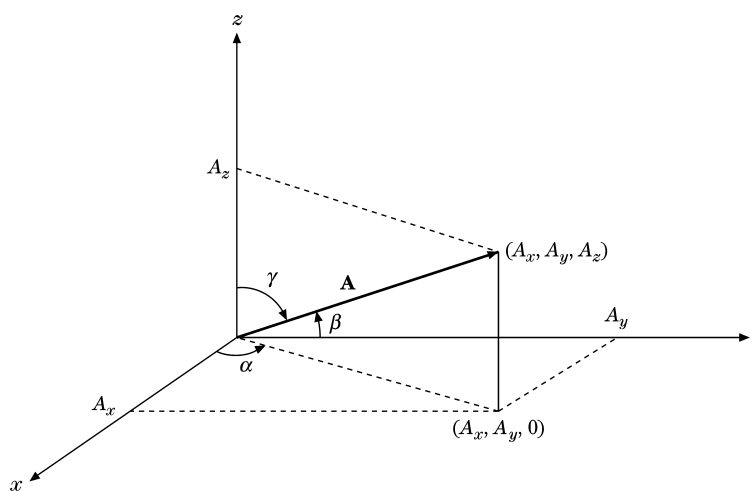


Figura 1.5: Componentes cartesianas e co-senos diretores de  $\mathbf{A}$ .

símbolo especial  $\mathbf{r}$ . Então, podemos escolher entre nos referirmos ao deslocamento como o vetor  $\mathbf{r}$  ou como a coleção  $(x, y, z)$ , as coordenadas de sua extremidade:

$$\mathbf{r} \leftrightarrow (x, y, z). \quad (1.3)$$

Usando  $r$  para a grandeza do vetor  $\mathbf{r}$ , constatamos que a Figura 1.5 mostra que as coordenadas da extremidade e a grandeza são relacionadas por

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma. \quad (1.4)$$

Aqui,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e  $\cos \gamma$  são denominados **co-senos diretores**, sendo  $\alpha$  o ângulo entre o vetor dado e o eixo  $x$  positivo e assim por diante. Um pouco mais de vocabulário: as quantidades  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$  são conhecidas como as **componentes** (cartesianas) de  $\mathbf{A}$  ou as **projeções** de  $\mathbf{A}$ , com  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Assim, qualquer vetor  $\mathbf{A}$  pode ser resolvido em suas componentes (ou projetado sobre os eixos coordenados) para resultar  $A_x = A \cos \alpha$  etc., como na Equação (1.4). Podemos escolher entre nos referirmos ao vetor como uma quantidade única  $\mathbf{A}$  ou às suas componentes  $(A_x, A_y, A_z)$ . Note que o índice  $x$  em  $A_x$  denota a componente  $x$  e não uma dependência da variável  $x$ . A decisão de utilizar  $\mathbf{A}$  ou suas componentes  $(A_x, A_y, A_z)$  é, em essência, uma escolha entre uma representação geométrica ou uma representação algébrica. Use qualquer das representações segundo sua conveniência. A representação “geométrica da seta no espaço” pode ajudar na visualização. O conjunto algébrico de componentes em geral é mais adequado para cálculos precisos numéricos ou algébricos.

Vetores entram na física em duas formas distintas: (1) um vetor  $\mathbf{A}$  pode representar uma única força agindo sobre um único ponto. A força da gravidade agindo no centro de gravidade ilustra essa forma; (2) um vetor  $\mathbf{A}$  pode ser definido sobre uma região estendida, isto é,  $\mathbf{A}$  e suas componentes podem ser funções da posição  $A_x = A_x(x, y, z)$  e assim por diante. Exemplos desse tipo são a velocidade de um fluido variando de ponto a ponto em um dado volume e campos elétricos e magnéticos. Esses dois casos podem ser distinguidos referindo-se ao vetor definido sobre uma região como um **campo vetorial**. O conceito do vetor definido sobre uma região e sendo uma função de posição se tornará de extrema importância na diferenciação e integração de vetores.

Neste estágio é conveniente introduzir vetores unitários ao longo de cada um dos eixos coordenados. Seja  $\hat{x}$  um vetor de grandeza unitária apontando na direção positiva  $x$ ,  $\hat{y}$ , um vetor de grandeza unitária na direção positiva  $y$ , e  $\hat{z}$  um vetor de grandeza unitária na direção positiva  $z$ . Então,  $\hat{x}A_x$  é um vetor de grandeza igual a  $|A_x|$  e na direção  $x$ . Por adição de vetores,

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z. \quad (1.5)$$

Note que, se  $\mathbf{A}$  se anular, todas as suas componentes devem se anular individualmente, isto é, se

$$\mathbf{A} = 0, \quad \text{então } A_x = A_y = A_z = 0.$$

Isso significa que esses vetores unitários servem como uma **base** ou um conjunto completo de vetores no espaço euclidiano tridimensional, em termos do qual qualquer vetor pode ser expandido. Assim, a Equação (1.5) é uma afirmação de que os três vetores unitários  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  varrem nosso espaço tridimensional real: qualquer vetor pode ser escrito como uma combinação linear de  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Visto que  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são linearmente independentes (nenhum é uma combinação linear dos outros dois), eles formam uma base para o espaço euclidiano tridimensional real. Por fim, pelo teorema de Pitágoras, o módulo do vetor  $\mathbf{A}$  é

$$|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Note que os vetores unitários associados às coordenadas não são o único conjunto completo ou base. Essa resolução de um vetor em suas componentes pode ser realizada em uma variedade de sistemas coordenados, como será mostrado no Capítulo 2. Aqui, vamos nos restringir às coordenadas cartesianas, em que os vetores unitários têm as coordenadas  $\hat{x} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{y} = (0, 1, 0)$  e  $\hat{z} = (0, 0, 1)$ , e todos têm comprimento e direção constantes, propriedades características das coordenadas cartesianas.

Em substituição à técnica gráfica, a adição e a subtração de vetores agora podem ser realizadas em termos de suas componentes. Para  $\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$  e  $\mathbf{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$ ,

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \hat{x}(A_x \pm B_x) + \hat{y}(A_y \pm B_y) + \hat{z}(A_z \pm B_z). \quad (1.7)$$

Deve-se enfatizar aqui que os vetores unitários  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são usados por conveniência. Eles não são essenciais; podemos descrever vetores e usá-los exclusivamente em termos de suas componentes:  $\mathbf{A} \leftrightarrow (A_x, A_y, A_z)$ . Essa



é a abordagem das duas mais poderosas e mais sofisticadas definições de vetor que serão discutidas na próxima seção. Contudo,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  enfatizam a **direção**.

Até aqui definimos as operações de adição e subtração de vetores. Nas próximas seções serão definidas três variedades de multiplicação com base em sua aplicabilidade: um produto escalar, ou interno, um produto vetorial peculiar ao espaço tridimensional e um produto direto, ou externo, que resulta em um tensor de segunda ordem. A divisão por um vetor não é definida.

### Exercícios

- 1.1.1 Mostre como encontrar  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , dados  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  e  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .
- 1.1.2 O vetor  $\mathbf{A}$ , cuja grandeza é 1,732 unidade e faz ângulos iguais com os eixos coordenados. Ache  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ .
- 1.1.3 Calcule as componentes de um vetor unitário que se encontra no plano  $xy$  e faz ângulos iguais com as direções positivas dos eixos  $x$  e  $y$ .
- 1.1.4 A velocidade do veleiro  $A$  em relação ao veleiro  $B$ ,  $\mathbf{v}_{rel}$ , é definida pela equação  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ , onde  $\mathbf{v}_A$  é a velocidade de  $A$  e  $\mathbf{v}_B$  é a velocidade de  $B$ . Determine a velocidade de  $A$  em relação a  $B$  se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= 30 \text{ km/h no sentido leste} \\ \mathbf{v}_B &= 40 \text{ km/h no sentido norte.} \end{aligned}$$

Resposta:  $\mathbf{v}_{rel} = 50 \text{ km/h}$ ,  $53,1^\circ$  no sentido sudeste.

- 1.1.5 Um veleiro navega durante 1 h a 4 km/h (em relação à água) no rumo constante de bússola de  $40^\circ$  nordeste. O veleiro é levado simultaneamente por uma corrente. Ao final de uma hora o barco está a 6,12 km de seu ponto de partida. A reta entre seu ponto de partida e sua localização está a  $60^\circ$  nordeste. Ache as componentes  $x$  (rumo leste) e  $y$  (rumo norte) da velocidade da água.

Resposta:  $v_{leste} = 2,73 \text{ km/h}$ ,  $v_{norte} \approx 0 \text{ km/h}$ .

- 1.1.6 Uma equação vetorial pode ser reduzida à forma  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . A partir disso, mostre que a equação vetorial única é equivalente a **três** equações escalares. Admitindo a validade da segunda lei de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , como uma equação **vetorial**, isso significa que  $a_x$  depende somente de  $F_x$  e é independente de  $F_y$  e  $F_z$ .
- 1.1.7 Os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  de um triângulo são dados pelos pontos  $(-1, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(1, -1, 0)$ , respectivamente. Ache o ponto  $D$ , tal que a figura  $ABCD$  forme um paralelogramo plano.

Resposta:  $(0, -2, 2)$  ou  $(2, 0, -2)$ .

- 1.1.8 Um triângulo é definido pelos vértices de três vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , que se estendem da origem. Em termos de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , mostre que a soma **vetorial** dos lados sucessivos do triângulo ( $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA}$ ) é zero, sendo que o lado  $AB$  vai de  $A$  a  $B$  etc.
- 1.1.9 Uma esfera de raio  $a$  tem centro em um ponto  $\mathbf{r}_1$ .
  - (a) Escreva a equação algébrica para a esfera.
  - (b) Escreva uma equação **vetorial** para a esfera.

Resposta: (a)  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$ .  
 (b)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}$ , com  $\mathbf{r}_1 =$  centro.  
 ( $\mathbf{a}$  assume todas as direções mas tem uma grandeza fixa  $a$ .)

- 1.1.10 Um refletor de canto é formado por três superfícies refletoras mutuamente perpendiculares. Mostre que um raio de luz que incide sobre esse refletor (atingindo todas as três superfícies) é refletido de volta ao longo de uma linha paralela à linha de incidência.  
*Sugestão:* Considere o efeito de uma reflexão sobre as componentes de um vetor que descreve a direção do raio de luz.
- 1.1.11 *Lei de Hubble.* Hubble descobriu que galáxias distantes estão se afastando com uma velocidade proporcional à sua distância do local onde estamos na Terra. Para a  $i$ -ésima galáxia,

$$\mathbf{v}_i = H_0 \mathbf{r}_i,$$

tendo nós na origem. Mostre que esse afastamento das galáxias em relação a nós **não** implica que estamos no centro do universo. Especificamente, considere a galáxia em  $\mathbf{r}_1$  uma nova origem e mostre que ainda assim a lei de Hubble é obedecida.

- 1.1.12** Ache os vetores diagonais de um cubo unitário com um vértice na origem e seus três lados ao longo dos eixos cartesianos. Mostre que há quatro diagonais de comprimento  $\sqrt{3}$ . Representando essas diagonais como vetores, quais são suas componentes? Mostre que o comprimento das diagonais das faces do cubo é  $\sqrt{2}$  e determine suas componentes.

## 1.2 Rotação dos Eixos Coordenados<sup>3</sup>

Na seção anterior, vetores foram definidos ou representados de dois modos equivalentes: (1) geometricamente, especificando grandeza e direção, como uma seta, e (2) algebricamente, especificando as componentes relativas aos eixos cartesianos. A segunda definição é adequada para a análise vetorial deste capítulo. Nesta seção, são apresentadas duas definições mais refinadas sofisticadas e poderosas. A primeira é que o campo vetorial é determinado em termos do comportamento de suas componentes sob rotação dos eixos coordenados. Essa abordagem de teoria de transformação leva à análise tensorial do Capítulo 2 e a grupos de transformação no Capítulo 4. A segunda é a definição de componente da Seção 1.1 refinada e generalizada segundo os conceitos dos matemáticos de vetor e espaço vetorial. Essa abordagem leva a espaços de função, incluindo o espaço de Hilbert.

A definição de vetor como uma quantidade que tem grandeza e direção é incompleta. Por um lado, encontramos quantidades, tais como constantes elásticas e índices de refração em cristais anisotrópicos, que têm grandeza e direção, **mas** não são vetores. Por outro lado, nossa abordagem ingênua é inaquedadequada para generalizar e estender para quantidades mais complexas. Procuramos uma nova definição de campo vetorial usando nosso vetor coordenada  $\mathbf{r}$  como um protótipo.

Há uma base física para nosso desenvolvimento de uma nova definição. Descrevemos nosso mundo físico pela Matemática, mas essa descrição e quaisquer previsões físicas que possamos fazer devem ser **independentes** de nossas convenções matemáticas.

Em nosso caso específico, admitimos que o espaço é isotrópico; isto é, não há uma direção preferencial ou todas as direções são equivalentes. Então, o sistema físico que está sendo analisado ou a lei da física que está sendo enunciada não pode e não deve depender de nossa escolha ou **orientação** dos eixos coordenados. Especificamente, se uma quantidade  $S$  não depender da orientação dos eixos coordenados, ela é denominada escalar.

Agora retornamos ao conceito do vetor  $\mathbf{r}$  como um objeto geométrico independente do sistema de coordenadas. Vamos examinar  $\mathbf{r}$  em dois sistemas diferentes, um rotacionado em relação ao outro.

Por simplicidade, em primeiro lugar consideramos o caso bidimensional. Se as coordenadas  $x$  e  $y$  forem rotacionadas no sentido anti-horário por um ângulo  $\varphi$ , **mantendo  $\mathbf{r}$  fixo** (Figura 1.6), obtemos as seguintes relações entre as componentes projetadas no sistema original (sem linha) e projetadas no novo sistema rotacionado (com linha):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Vimos na Seção 1.1 que um vetor pode ser representado pelas coordenadas de um ponto; isto é, as coordenadas eram proporcionais às componentes do vetor. Por conseguinte, as componentes de um vetor devem se transformar, sob rotação, em coordenadas de um ponto (tal como  $\mathbf{r}$ ). Portanto, sempre que qualquer par de quantidades  $A_x$  e  $A_y$  no sistema de coordenadas  $xy$  é transformado em  $(A'_x, A'_y)$  por essa rotação do sistema de coordenadas com

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \\ A'_y &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, \end{aligned} \tag{1.9}$$

**definimos**<sup>4</sup>  $A_x$  e  $A_y$  como as componentes de um vetor  $\mathbf{A}$ . Nosso vetor agora é definido em termos da transformação de suas componentes sob rotação do sistema de coordenadas. Se  $A_x$  e  $A_y$  se transformam do mesmo modo que  $x$  e  $y$ , as componentes do vetor geral bidimensional da coordenada  $\mathbf{r}$ , elas são as componentes de um vetor  $\mathbf{A}$ . Se  $A_x$  e  $A_y$  não mostrarem essa **invariância de forma** (também denominada **covariância**) quando as coordenadas forem rotacionadas, elas não formam um vetor.

As componentes do campo vetorial  $A_x$  e  $A_y$  que satisfazem as equações definidoras, Equações (1.9), associam uma grandeza  $A$  e uma direção com cada ponto no espaço. A grandeza é uma quantidade escalar, invariante em relação à rotação do sistema de coordenadas. A direção (relativa ao sistema “sem linha”) é, da mesma maneira, invariante pela rotação do sistema coordenado (veja o Exercício 1.2.1). O resultado de tudo isso é que as componentes de um vetor podem variar de acordo com a rotação do sistema coordenado “com linha”.

<sup>3</sup>Esta seção é opcional aqui. Será essencial para o Capítulo 2.

<sup>4</sup>Uma quantidade escalar não depende da orientação de coordenadas;  $S' = S$  expressa o fato de que ela é invariante sob rotação das coordenadas.

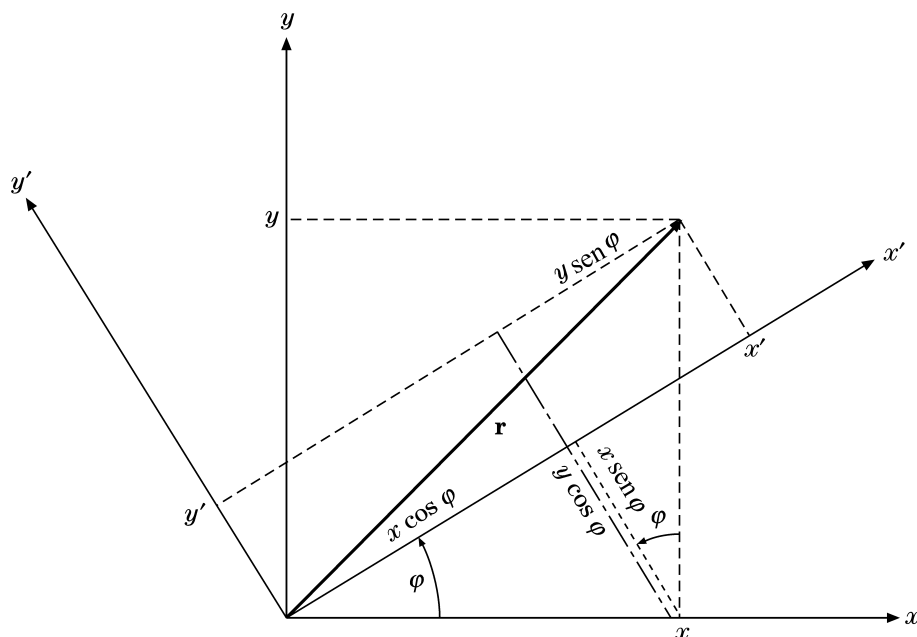


Figura 1.6: Rotação de eixos coordenados cartesianos ao redor do eixo z.

É isso que dizem as Equações (1.9). Mas a variação com o ângulo é tal que as componentes no sistema coordenado rotacionado  $A'_x$  e  $A'_y$  definem um vetor com a mesma grandeza e a mesma direção do vetor definido pelas componentes  $A_x$  e  $A_y$  em relação aos eixos coordenados  $x$  e  $y$  (compare com o Exercício 1.2.1). As componentes de  $\mathbf{A}$  em um determinado sistema de coordenadas constituem a **representação** de  $\mathbf{A}$  naquele sistema de coordenadas. As Equações (1.9), as relações de transformação, são uma garantia de que a entidade  $\mathbf{A}$  é independente da rotação do sistema de coordenada.

Para passar para três e, mais adiante, quatro dimensões, achamos conveniente usar uma notação mais compacta. Seja

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_1 \\ y &\rightarrow x_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi, & a_{12} &= \sin \varphi, \\ a_{21} &= -\sin \varphi, & a_{22} &= \cos \varphi. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Então as Equações (1.8) tornam-se

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

O coeficiente  $a_{ij}$  pode ser interpretado como um co-seno diretor, o co-seno do ângulo entre  $x'_i$  e  $x_j$ ; isto é,

$$\begin{aligned} a_{12} &= \cos(x'_1, x_2) = \sin \varphi, \\ a_{21} &= \cos(x'_2, x_1) = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \varphi. \end{aligned} \tag{1.13}$$

A vantagem da nova notação<sup>5</sup> é que ela nos permite usar o símbolo de somatório e reescrever as Equações (1.12) como

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2. \tag{1.14}$$

<sup>5</sup>Você talvez estranhe a substituição de um parâmetro  $\varphi$  por quatro parâmetros  $a_{ij}$ . É claro que  $a_{ij}$  não constitui um conjunto mínimo de parâmetros. Para duas dimensões os quatro  $a_{ij}$  estão sujeitos às três limitações dadas na Equações (1.18). A justificativa para esse conjunto redundante de co-senos diretores é a conveniência que ele oferece. Esperamos que essa conveniência se torne mais evidente nos Capítulos 2 e 3. Para rotações tridimensionais (9  $a_{ij}$ , mas somente três independentes) são fornecidas descrições alternativas por: (1) ângulos de Euler discutidos na Seção 3.3, (2) quatérnions, e (3) parâmetros de Cayley-Klein. Essas alternativas têm suas respectivas vantagens e desvantagens.

Note que  $i$  continua como um parâmetro que dá origem a uma única equação quando for igualado a 1 e a uma segunda equação quando for igualado a 2. O índice  $j$ , é claro, é um índice de somatório, um índice fictício e, como acontece com uma variável de integração,  $j$  pode ser substituído por qualquer outro símbolo conveniente.

Agora, a generalização para três, quatro ou  $N$  dimensões é simples. Diz-se que o conjunto de  $N$  quantidades  $V_j$  forma as componentes de um vetor  $N$ -dimensional  $\mathbf{V}$  se e somente se seus valores relativos aos eixos coordenados rotacionados forem dados por

$$V'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.15)$$

Como antes,  $a_{ij}$  é o co-seno do ângulo entre  $x'_i$  e  $x_j$ . Muitas vezes o limite superior de  $N$  e a faixa correspondente de  $i$  não serão indicados. É dado como certo que você sabe quantas dimensões seu espaço tem.

Pela definição de  $a_{ij}$  como o co-seno do ângulo entre a direção  $x'_i$  positiva e a direção  $x_j$  positiva, podemos escrever (coordenadas cartesianas)<sup>6</sup>

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}. \quad (1.16a)$$

Usando a rotação inversa ( $\varphi \rightarrow -\varphi$ ) temos

$$x_j = \sum_{i=1}^2 a_{ij} x'_i \quad \text{ou} \quad \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij}. \quad (1.16b)$$

Note que essas são **derivadas parciais**. Usando as Equações (1.16a) e (1.16b), a Equação (1.15) torna-se

$$V'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j. \quad (1.17)$$

Os co-senos diretores  $a_{ij}$  satisfazem uma **condição de ortogonalidade**

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (1.18)$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \quad (1.19)$$

Aqui, o símbolo  $\delta_{jk}$  é o delta de Kronecker definido por

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= 1 & \text{para} & \quad j = k, \\ \delta_{jk} &= 0 & \text{para} & \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (1.20)$$

É fácil verificar que as Equações (1.18) e a Equação (1.19) são válidas no caso bidimensional, substituindo os  $a_{ij}$  específicos das Equações (1.11). O resultado é a bem conhecida identidade  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  para o caso de não-nulo. Para verificar a Equação (1.18) na forma geral, podemos usar as formas das derivadas parciais das Equações (1.16a) e (1.16b) para obter

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k}. \quad (1.21)$$

A última etapa é obtida usando-se as regras padrões para a diferenciação parcial, admitindo que  $x_j$  é uma função de  $x'_1, x'_2, x'_3$  e assim por diante. O resultado final,  $\partial x_j / \partial x_k$ , é igual a  $\delta_{jk}$ , já que se admite que  $x_j$  e  $x_k$ , como eixos coordenados, são perpendiculares (duas ou três dimensões) ou ortogonais (para qualquer número de dimensões). De modo equivalente, podemos admitir que  $x_j$  e  $x_k$  ( $j \neq k$ ) são variáveis totalmente independentes. Se  $j = k$ , a derivada parcial é claramente igual a 1.

Ao redefinir um vetor em termos do modo como suas componentes se transformam sob uma rotação do sistema de coordenadas, devemos enfatizar dois pontos:

<sup>6</sup>Diferencie  $x'_i$  em relação a  $x_j$ . Veja a discussão após a Equação (1.21).





- Essa definição é desenvolvida porque é útil e apropriada para descrever nosso mundo físico. Nossas equações vetoriais serão independentes de qualquer sistema de coordenadas particular. (O sistema de coordenadas não precisa nem ao menos ser cartesiano.) A equação vetorial sempre pode ser expressa em algum sistema de coordenadas particular e, para obter resultados numéricos, devemos, em última instância, expressar a equação em algum sistema de coordenadas específico.
- Essa definição está sujeita a uma generalização que abrirá o ramo da matemática conhecido como análise tensorial (Capítulo 2).

Aqui, devemos fazer uma qualificação. O comportamento das componentes do vetor sob rotação das coordenadas é usado na Seção 1.3 para provar que um produto escalar é um escalar; na Seção 1.4, para provar que um produto vetorial é um vetor; e na Seção 1.6, para mostrar que o gradiente de um escalar  $\psi$ ,  $\nabla\psi$ , é um vetor. O restante deste capítulo prossegue tendo como base as definições menos restritivas de vetor dadas na Seção 1.1.

### Resumo: Vetores e Espaço Vetorial

Em matemática costuma-se denominar uma tripla ordenada de números reais  $(x_1, x_2, x_3)$  **vetor**  $\mathbf{x}$ . O número  $x_n$  é denominado a  $n$ -ésima componente do **vetor**  $\mathbf{x}$ . A coleção de todos esses vetores (obedecendo às propriedades apresentadas a seguir) forma um **espaço vetorial** tridimensional real. Atribuímos cinco propriedades a nossos vetores: se  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ,

- Igualdade de vetores:  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  significa  $x_i = y_i, i = 1, 2, 3$ .
- Adição de vetores:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$  significa  $x_i + y_i = z_i, i = 1, 2, 3$ .
- Multiplicação escalar:  $a\mathbf{x} \leftrightarrow (ax_1, ax_2, ax_3)$  (com  $a$  real).
- Negativo de um vetor:  $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \leftrightarrow (-x_1, -x_2, -x_3)$ .
- Vetor nulo: Existe um vetor nulo  $\mathbf{0} \leftrightarrow (0, 0, 0)$ .

Uma vez que as componentes de nosso vetor são números reais (ou complexos), as seguintes propriedades também valem:

- A adição de vetores é comutativa:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .
- A adição de vetores é associativa:  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ .
- A multiplicação escalar é distributiva:

$$a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y} \quad \text{e também} \quad (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}.$$

- A multiplicação escalar é associativa:  $(ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$ .

Além disso, o vetor nulo  $\mathbf{0}$  é único, assim como o negativo de um dado vetor  $\mathbf{x}$ .

No que tange aos vetores em si, essa abordagem é uma mera formalização da discussão da componente da Seção 1.1. A importância está nas extensões, que serão consideradas em capítulos posteriores. No Capítulo 4, mostramos que vetores formam um grupo abeliano sob adição e um espaço linear com as transformações no espaço linear descritas por matrizes. Por fim, e talvez mais importante, para a Física avançada, o conceito de vetores apresentado aqui pode ser generalizado para: (1) quantidades complexas,<sup>7</sup> (2) funções e (3) um número infinito de componentes. Isso leva a espaços de funções de infinitas dimensões, os espaços de Hilbert, que são importantes na moderna teoria quântica. Uma breve introdução às expansões de funções e ao espaço de Hilbert aparece na Seção 10.4.

### Exercícios

- 1.2.1** (a) Mostre que a grandeza de um vetor  $\mathbf{A}$ ,  $A = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2}$ , é independente da orientação do sistema de coordenadas rotacionado.

$$(A_x^2 + A_y^2)^{1/2} = (A_x'^2 + A_y'^2)^{1/2},$$

isto é, é independente do ângulo de rotação  $\varphi$ .

Essa independência do ângulo é expressa dizendo que  $A$  é **invariante** sob rotações.

- (b) Em um ponto  $(x, y)$  dado,  $\mathbf{A}$  define um ângulo  $\alpha$  relativo ao eixo  $x$  positivo e um ângulo  $\alpha'$  relativo ao eixo  $x'$  positivo. O ângulo entre  $x$  e  $x'$  é  $\varphi$ . Mostre que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$  define a **mesma**

<sup>7</sup>O espaço vetorial de  $n$  dimensões de  $n$  reais costuma ser denominado  $\mathbb{R}^n$ , e o espaço vetorial de  $n$  dimensões de  $n$  complexas é denominado  $\mathbb{C}^n$ .

direção no espaço quando expresso em termos de suas componentes “linha”, bem como quando expresso em termos de suas componentes “sem linha”; isto é,

$$\alpha' = \alpha - \varphi.$$

**1.2.2** Prove a condição de ortogonalidade  $\sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}$ . Como um caso especial disso, os co-senos diretores da Seção 1.1 satisfazem a relação

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

um resultado que segue da Equação (1.6).

### 1.3 Produto Escalar ou Produto Interno

Agora que já definimos vetores, passaremos a combiná-los. As leis para combinação de vetores devem ser matematicamente consistentes. Dentre as possibilidades que são consistentes, selecionamos duas que são interessantes tanto em termos matemáticos quanto em termos físicos. Uma terceira possibilidade é apresentada no Capítulo 2, no qual formamos tensores.

A projeção de um vetor  $\mathbf{A}$  sobre um eixo coordenado, que dá suas componentes cartesianas na Equação (1.4), define um caso geométrico especial do produto escalar entre  $\mathbf{A}$  e os vetores unitários coordenados:

$$A_x = A \cos \alpha \equiv \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad A_y = A \cos \beta \equiv \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}}, \quad A_z = A \cos \gamma \equiv \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.22)$$

Esse caso especial de um produto escalar em conjunção com propriedades gerais do produto escalar é suficiente para compreender o caso geral do produto escalar.

Exatamente como a projeção é linear em  $\mathbf{A}$ , queremos que o produto escalar de dois vetores seja linear em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , isto é, obedeça às leis distributiva e associativa

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.23a)$$

$$\mathbf{A} \cdot (y\mathbf{B}) = (y\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = y\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.23b)$$

em que  $y$  é um número. Agora podemos usar a decomposição de  $\mathbf{B}$  em suas componentes cartesianas conforme a Equação (1.5),  $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$ , para construir o escalar geral ou o produto escalar dos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{A} \cdot (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= B_x \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + B_y \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} + B_z \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad \text{por aplicação das Equações (1.23a) e (1.23b)} \\ &= B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z \quad \text{por substituição na Equação (1.22)}. \end{aligned}$$

Por conseguinte

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \sum_i B_i A_i = \sum_i A_i B_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.} \quad (1.24)$$

Se  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  na Equação (1.24), recuperamos a grandeza  $A = (\sum A_i^2)^{1/2}$  de  $\mathbf{A}$  na Equação (1.6) pela Equação (1.24).

É obvio, pela Equação (1.24), que o produto escalar trata  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  da mesma maneira, ou seja, é simétrico em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e é comutativo. Assim, alternativa e equivalentemente, podemos primeiro generalizar as Equações (1.22) para a projeção  $A_B$  de  $\mathbf{A}$  na direção de um vetor  $\mathbf{B} \neq 0$ , em que  $A_B = A \cos \theta \equiv \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ , em que  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/B$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{B}$  e  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , como mostra a Figura 1.7. De modo semelhante, projetamos  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$  como  $B_A = B \cos \theta \equiv \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ . Em segundo lugar, fazemos essas projeções simétricas em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , o que leva à definição

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A_B B = AB_A = AB \cos \theta.} \quad (1.25)$$

A lei distributiva na Equação (1.23a) é ilustrada na Figura 1.8, que mostra que a soma das projeções de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  sobre  $\mathbf{A}$ ,  $B_A + C_A$  é igual à projeção de  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$  sobre  $\mathbf{A}$ ,  $(\mathbf{B} + \mathbf{C})_A$ .

Segue das Equações (1.22), (1.24) e (1.25) que os vetores unitários das coordenadas satisfazem às relações

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1, \quad (1.26a)$$

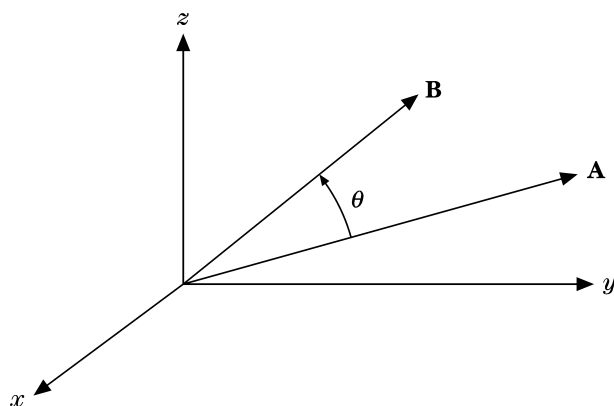


Figura 1.7: Produto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ .

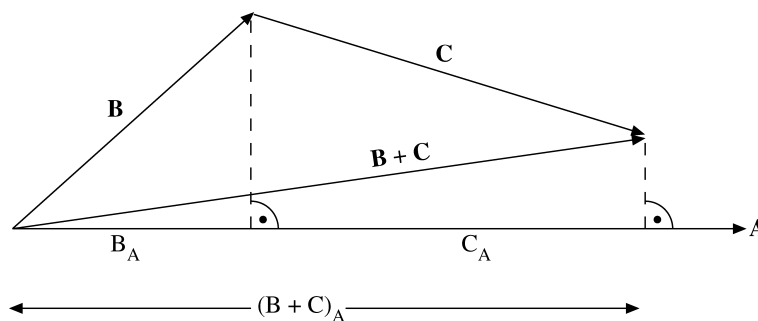


Figura 1.8: A lei distributiva  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = AB_A + AC_A = A(\mathbf{B} + \mathbf{C})_A$ , Equação (1.23a).

enquanto

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0. \tag{1.26b}$$

Se a definição de componente, Equação (1.24), for rotulada como uma definição algébrica, então a Equação (1.25) é uma definição geométrica. Uma das aplicações mais comuns do produto escalar na física é no cálculo de **trabalho** = **força-deslocamento**  $\cdot \cos \theta$ , que é interpretada como o deslocamento vezes a projeção da força ao longo da direção de deslocamento, isto é, o produto escalar da força e do deslocamento,  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ .

Se  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  e sabemos que  $\mathbf{A} \neq 0$  e  $\mathbf{B} \neq 0$ , então, pela Equação (1.25),  $\cos \theta = 0$  ou  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$  e assim por diante. Os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  devem ser perpendiculares. Alternativamente, podemos dizer que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são ortogonais. Os vetores unitários  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são mutuamente ortogonais. Para desenvolver um pouco mais essa noção de ortogonalidade, suponha que  $\mathbf{n}$  seja um vetor unitário e  $\mathbf{r}$  um vetor não-zero no plano  $xy$ , isto é,  $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y$  (Figura 1.9). Se

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

para **todas** as escolhas de  $\mathbf{r}$ , então  $\mathbf{n}$  deve ser perpendicular (ortogonal) ao plano  $xy$ .

Muitas vezes é conveniente substituir  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  por vetores unitários com índices  $\mathbf{e}_m, m = 1, 2, 3$ , com  $\hat{x} = \mathbf{e}_1$  e assim por diante. Então, as Equações (1.26a) e (1.26b) tornam-se

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn}. \tag{1.26c}$$

Para  $m \neq n$ , os vetores unitários  $\mathbf{e}_m$  e  $\mathbf{e}_n$  são ortogonais. Para  $m = n$ , cada vetor é normalizado à unidade, isto é, tem grandeza unitária. O conjunto  $\mathbf{e}_m$  é denominado **ortonormal**. Uma grande vantagem da Equação (1.26c) sobre as Equações (1.26a) e (1.26b) é que a Equação (1.26c) pode ser imediatamente generalizada para espaço  $N$  dimensional:  $m, n = 1, 2, \dots, N$ . Por fim, estamos escolhendo conjuntos de vetores unitários  $\mathbf{e}_m$  que são ortonormais por conveniência – uma conveniência muito grande.

### Invariância do Produto Escalar sob Rotações

Ainda não mostramos que a palavra *escalar* é justificada ou que o produto *escalar* é, de fato, uma quantidade escalar. Para fazer isso, investigamos o comportamento de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  sob a rotação do sistema de coordenadas. Pela

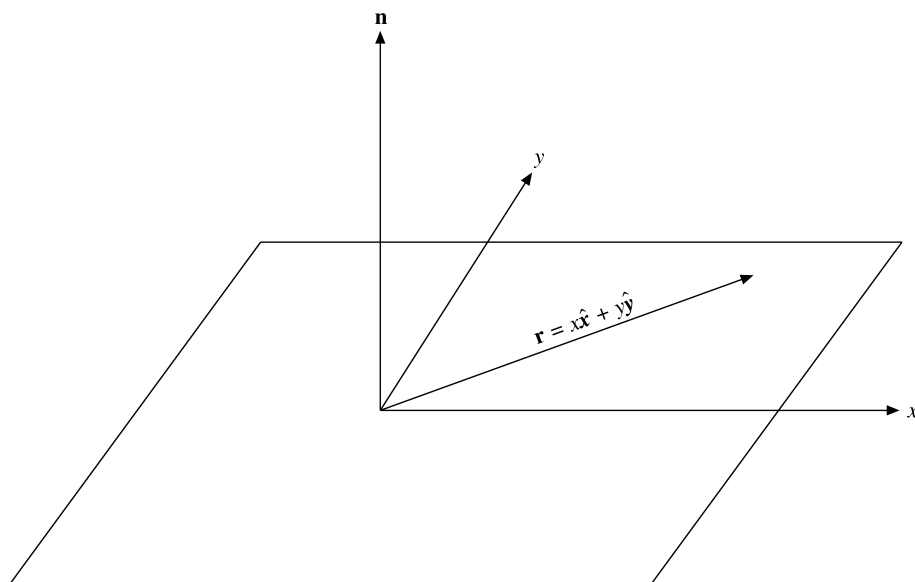


Figura 1.9: Um vetor normal.

utilização da Equação (1.15),

$$\begin{aligned}
 A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z &= \sum_i a_{xi} A_i \sum_j a_{xj} B_j + \sum_i a_{yi} A_i \sum_j a_{yj} B_j \\
 &+ \sum_i a_{zi} A_i \sum_j a_{zj} B_j.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Usando os índices  $k$  e  $l$  para somar  $xy$  e  $z$ , obtemos

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li} A_i a_{lj} B_j,
 \tag{1.28}$$

e, rearranjando os termos do lado direito, temos

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j (a_{li} a_{lj}) A_i B_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i.
 \tag{1.29}$$

As últimas duas etapas são executadas utilizando a Equação (1.18), a condição de ortogonalidade dos co-senos diretores e as Equações (1.20), que definem o delta de Kronecker. O efeito do delta de Kronecker é cancelar todos os termos de um somatório para qualquer índice, exceto para o termo cujos índices são iguais. Na Equação (1.29) seu efeito é estabelecer  $j = i$  e eliminar o somatório em  $j$ . É claro que também podíamos, da mesma forma, estabelecer  $i = j$  e eliminar o somatório em  $i$ . A Equação (1.29) nos dá

$$\boxed{\sum_k A'_k B'_k = \sum_i A_i B_i},
 \tag{1.30}$$

que é exatamente a nossa definição de uma quantidade escalar, uma quantidade que permanece invariante sob a rotação do sistema coordenado.

Por uma abordagem similar que explora esse conceito de invariância, tomamos  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  e o multiplicamos escalarmente por ele mesmo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\
 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.
 \end{aligned}
 \tag{1.31}$$

Uma vez que

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2,
 \tag{1.32}$$



o quadrado da grandeza do vetor  $C$  e, por isso, uma quantidade invariante, vemos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2), \text{ invariante.} \tag{1.33}$$

Uma vez que o lado direito da Equação (1.33) é invariante — isto é, uma quantidade escalar —, o lado esquerdo,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , também deve ser invariante sob rotação do sistema coordenado. Por conseguinte,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  é um escalar.

A Equação (1.31) é, na realidade, uma outra forma da lei dos co-senos, que é

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta. \tag{1.34}$$

Comparando as Equações (1.31) e (1.34), temos uma outra verificação da Equação (1.25) ou, se preferirmos, uma derivação vetorial da lei dos co-senos (Figura 1.10).

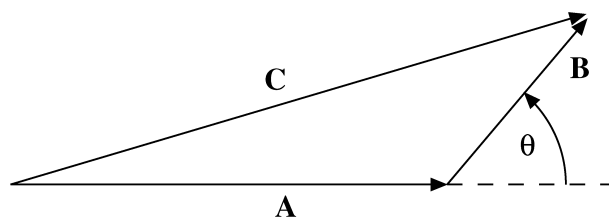


Figura 1.10: A lei dos co-senos.

O produto escalar, dado pela Equação (1.24), pode ser generalizado de duas maneiras. O espaço não precisa ficar restrito a três dimensões. Em um espaço  $n$  dimensional, a Equação (1.24) se aplica com a soma indo de 1 a  $n$ . Além do mais,  $n$  pode ser infinito, quando então a soma é uma série infinita convergente (Seção 5.2). A outra generalização estende o conceito de vetor para abranger funções. A função análoga de um produto escalar, ou interno, aparece na Seção 10.4.

### Exercícios

- 1.3.1** Dois vetores de grandeza unitária  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}_j$  devem ser paralelos ou perpendiculares um ao outro. Mostre que  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  fornece uma interpretação da Equação (1.18), a relação de ortogonalidade do co-seno diretor.
- 1.3.2** Dado que (1) o produto escalar de um vetor unitário por ele mesmo é a unidade e (2) essa relação é válida em todos os sistemas de coordenadas (rotacionados), mostre que  $\hat{\mathbf{x}}' \cdot \hat{\mathbf{x}}' = 1$  (com o sistema “linha” rotacionado de  $45^\circ$  ao redor do eixo  $z$  em relação ao sistema “sem linha”) implica que  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$ .
- 1.3.3** O vetor  $\mathbf{r}$ , que inicia na origem, termina no ponto no espaço  $(x, y, z)$  e especifica esse ponto. Ache a superfície abrangida pela extremidade de  $\mathbf{r}$  se
  - (a)  $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$ . Caracterize a geometricamente.
  - (b)  $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$ . Descreva o papel geométrico de  $\mathbf{a}$ .  
O vetor  $\mathbf{a}$  é constante (em grandeza e direção).
- 1.3.4** A energia de interação entre dois dipolos de momentos  $\boldsymbol{\mu}_1$  e  $\boldsymbol{\mu}_2$  pode ser escrita na forma vetorial

$$V = -\frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r^3} + \frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5}$$

e na forma escalar

$$V = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi).$$

Aqui,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos de  $\boldsymbol{\mu}_1$  e  $\boldsymbol{\mu}_2$  em relação a  $\mathbf{r}$ , enquanto  $\varphi$  é o azimute de  $\boldsymbol{\mu}_2$  em relação ao plano de  $\boldsymbol{\mu}_1$ - $\mathbf{r}$  (Figura 1.11). Mostre que essas duas formas são equivalentes.

*Sugestão:* A Equação (12.178) será útil.

- 1.3.5** Um cano desce em diagonal pela parede sul de um edifício, fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal. Ao chegar a uma quina da parede, o cano muda de direção e continua descendo na diagonal por uma parede leste, ainda fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal. Qual é o ângulo entre as seções do cano da parede sul e da parede leste?

Resposta:  $120^\circ$ .

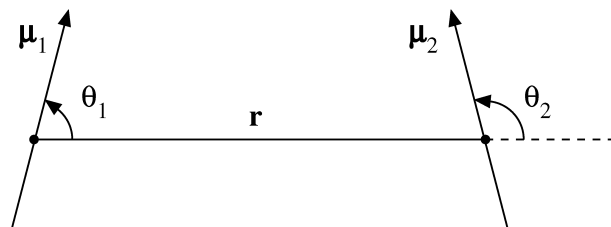


Figura 1.11: Dois momentos dipolares.

- 1.3.6** Ache a distância mais curta entre um observador no ponto  $(2, 1, 3)$  e um foguete em vôo livre com velocidade de  $(1, 2, 3)$  m/s. O foguete foi lançado do ponto  $(1, 1, 1)$  no tempo  $t = 0$ . As distâncias estão expressas em quilômetros.
- 1.3.7** Prove a lei dos co-senos a partir do triângulo com vértices nos pontos **C** e **A** da Figura 1.10 e da projeção do vetor **B** sobre o vetor **A**.

### 1.4 Produto de Vetores ou Produto Externo

Uma segunda forma de multiplicação de vetores emprega o seno do ângulo incluído em vez do co-seno. Por exemplo, o momento angular de um corpo mostrado na ponta do vetor distância da Figura 1.12 é definido como

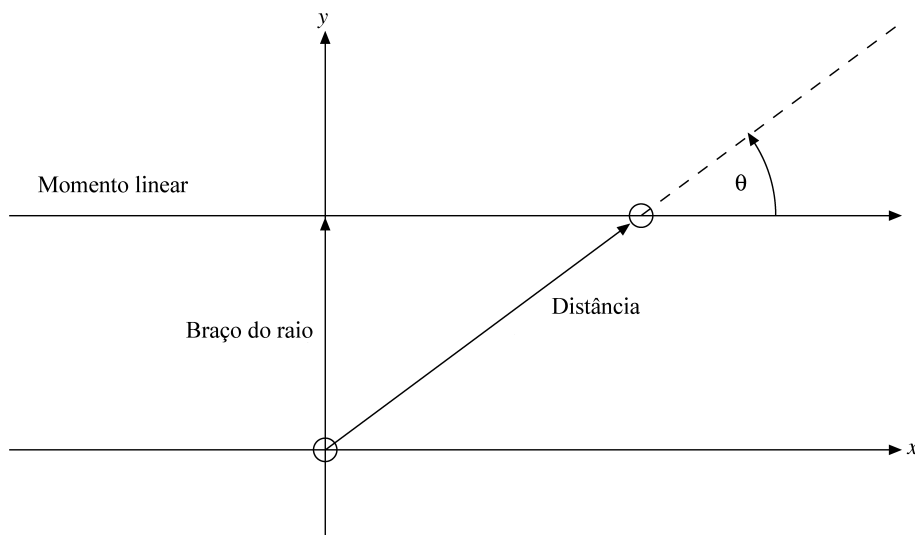


Figura 1.12: Momento angular.

$$\begin{aligned} \text{momento angular} &= \text{braço do raio} \times \text{momento linear} \\ &= \text{distância} \times \text{momento linear} \times \text{sen } \theta . \end{aligned}$$

Por conveniência no tratamento de problemas relacionados a quantidades tais como momento angular, torque e velocidade angular, definimos o produto vetorial ou produto externo como

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad \text{com } C = AB \text{sen } \theta.} \tag{1.35}$$



Diferente do caso anterior do produto escalar,  $\mathbf{C}$  agora é um vetor e atribuímos a ele uma direção perpendicular ao plano de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , tal que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  formam um sistema do dextrogiro. Com essa escolha de direção temos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad \text{anticomutação.} \quad (1.36a)$$

Por essa definição de produto externo, temos

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad (1.36b)$$

ao passo que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}, & \quad \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}, & \quad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}, \\ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{z}}, & \quad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}, & \quad \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (1.36c)$$

Entre os exemplos de produtos externo na física matemática estão a relação entre o momento linear  $\mathbf{p}$  e o momento angular  $\mathbf{L}$ , com  $\mathbf{L}$  definido como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

relação entre velocidade linear  $\mathbf{v}$  e velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ ,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{p}$  descrevem propriedades da partícula ou sistema físico. Contudo, o vetor posição  $\mathbf{r}$  é determinado pela escolha da origem das coordenadas. Isso significa que  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{L}$  dependem da escolha da origem.

A familiar indução magnética  $\mathbf{B}$  costuma ser definida pela equação do produto vetorial da força<sup>8</sup>

$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ (unidades mks).}$$

Aqui,  $\mathbf{v}$  é a velocidade da carga elétrica  $q$  e  $\mathbf{F}_M$  é a força resultante sobre a carga em movimento.

O produto externo tem uma importante interpretação geométrica, que utilizaremos em seções subseqüentes. No paralelogramo definido por  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  (Figura 1.13),  $B \text{sen } \theta$  é a altura se  $A$  for tomado como o comprimento da base. Então  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \text{sen } \theta$  é a **área** do paralelogramo. Como vetor,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é a área do paralelogramo definido por  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , com o vetor de área normal ao plano do paralelogramo. Isso sugere que a área (com sua orientação no espaço) pode ser tratada como uma quantidade vetorial.

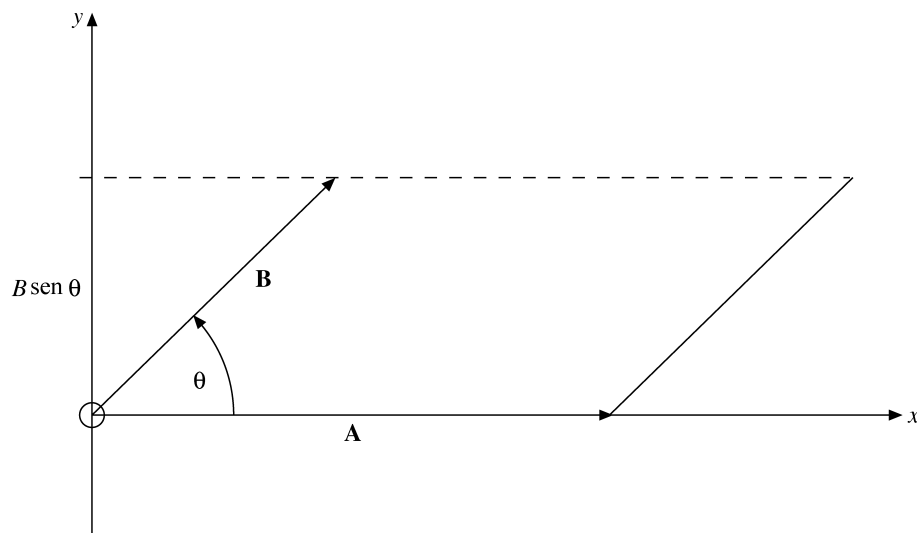


Figura 1.13: Representação em paralelogramo do produto vetorial.

Uma definição alternativa do produto vetorial pode ser derivada do caso especial dos vetores unitários coordenados nas Equação (1.36c) junto com a linearidade do produto externo em ambos os argumentos vetoriais,

<sup>8</sup>Aqui, admite-se que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é zero.

por analogia com as Equações (1.23) para o produto escalar.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \quad (1.37a)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}, \quad (1.37b)$$

$$\mathbf{A} \times (y\mathbf{B}) = y\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (y\mathbf{A}) \times \mathbf{B}, \quad (1.37c)$$

em que  $y$  é, mais uma vez, um número. Usando a decomposição de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  em suas componentes cartesianas de acordo com a Equação (1.5), encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &\equiv \mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \times (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} + (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

aplicando as Equações (1.37a) e (1.37b) e substituindo as Equações (1.36a), (1.36b) e (1.36c), de modo que as componentes cartesianas de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  se tornam

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y, \quad C_y = A_zB_x - A_xB_z, \quad C_z = A_xB_y - A_yB_x, \quad (1.38)$$

ou

$$C_i = A_jB_k - A_kB_j, \quad i, j, k \text{ todos diferentes}, \quad (1.39)$$

e com permutação cíclica dos índices  $i, j$  e  $k$  correspondendo a  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. O produto vetorial  $\mathbf{C}$  pode ser representado mnemonicamente por um determinante<sup>9</sup>

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \equiv \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}, \quad (1.40)$$

que deve ser expandido pela linha superior para reproduzir as três componentes de  $\mathbf{C}$  listadas nas Equações (1.38).

A Equação (1.35) poderia ser denominada definição geométrica do produto vetorial. Então as Equações (1.38) seriam uma definição algébrica.

Para mostrar a equivalência entre a Equação (1.35) e a definição de componente, as Equações (1.38), vamos formar os produtos  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$  e  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ , usando as Equações (1.38). Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= A_x(A_yB_z - A_zB_y) + A_y(A_zB_x - A_xB_z) + A_z(A_xB_y - A_yB_x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

De modo semelhante,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (1.42)$$

As Equações (1.41) e (1.42) mostram que  $\mathbf{C}$  é perpendicular a ambos,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  ( $\cos \theta = 0, \theta = \pm 90^\circ$ ) e, portanto, perpendicular ao plano que eles determinam. A direção positiva é determinada considerando casos especiais, tais como os vetores unitários  $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$  ( $C_z = +A_xB_y$ ).

O módulo é obtido por

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= A^2B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \\ &= A^2B^2 - A^2B^2 \cos^2 \theta \\ &= A^2B^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Por conseguinte,

$$C = AB \sin \theta. \quad (1.44)$$

<sup>9</sup>Veja a Seção 3.1 para um breve resumo de determinantes.





A primeira etapa na Equação (1.43) pode ser verificada pela expansão na forma de componentes usando as Equações (1.38) para  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  e a Equação (1.24) para o produto escalar. Pelas Equações (1.41), (1.42) e (1.44), vemos a equivalência das Equações (1.35) e (1.38), as duas definições de produto vetorial.

Resta ainda o problema de verificar que  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é, de fato, um vetor, isto é, obedece à Equação (1.15), a lei de transformação vetorial. Iniciando em um sistema rotacionado (sistema “linha”),

$$\begin{aligned} C'_i &= A'_j B'_k - A'_k B'_j, \quad i, j, \text{ e } k \text{ em ordem cíclica,} \\ &= \sum_l a_{jl} A_l \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m \\ &= \sum_{l,m} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m. \end{aligned} \tag{1.45}$$

A combinação de co-senos diretores entre parênteses desaparece para  $m = l$ . Por conseguinte, temos  $j$  e  $k$  assumindo valores fixos, dependendo da escolha de  $l$  e seis combinações de  $l$  e  $m$ . Se  $i = 3$ , então  $j = 1, k = 2$ , (ordem cíclica) e temos as seguintes combinações de co-senos diretores:<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} &= a_{33}, \\ a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} &= a_{32}, \\ a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} &= a_{31} \end{aligned} \tag{1.46}$$

e seus negativos. As Equações (1.46) são identidades satisfeitas pelos co-senos diretores. Elas podem ser verificadas com a utilização de determinantes e matrizes (veja Exercício 3.3.3). Substituindo  $M$  na Equação (1.45),

$$\begin{aligned} C'_3 &= a_{33} A_1 B_2 + a_{32} A_3 B_1 + a_{31} A_2 B_3 - a_{33} A_2 B_1 - a_{32} A_1 B_3 - a_{31} A_3 B_2 \\ &= a_{31} C_1 + a_{32} C_2 + a_{33} C_3 \\ &= \sum_n a_{3n} C_n. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Permutando os índices para pegar  $C'_1$  e  $C'_2$ , vemos que a Equação (1.15) é satisfeita, e  $\mathbf{C}$  é, de fato, um vetor. É preciso mencionar que essa **natureza vetorial do produto externo** é um acidente associado com a natureza **tridimensional** do espaço ordinário.<sup>11</sup> Veremos, no Capítulo 2, que o produto cruzado também pode ser tratado como um tensor anti-simétrico de segunda ordem.

Se definirmos um vetor como uma trinca ordenada de números (ou funções), como na última parte da Seção 1.2, então não há problema algum em identificar o produto cruzado como um vetor. A operação de produto externo mapeia as duas trincas  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  para uma terceira trinca,  $\mathbf{C}$ , que é, por definição, um vetor.

Agora temos dois modos de multiplicar vetores: uma terceira forma aparece no Capítulo 2. Mas, e a divisão por um vetor? Acontece que a razão  $\mathbf{B}/\mathbf{A}$  não é exclusivamente especificada (Exercício 3.2.21), a menos que se exija que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sejam também paralelos. Por conseguinte, a divisão de um vetor por outro não é definida.

## Exercícios

- 1.4.1 Mostre que as medianas de um triângulo se interceptam no centro, que está a  $2/3$  do comprimento da mediana a partir de cada vértice. Construa um exemplo numérico e represente-o em um gráfico.
- 1.4.2 Prove a lei dos co-senos partindo de  $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^2$ .
- 1.4.3 Começando com  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , mostre que  $\mathbf{C} \times \mathbf{C} = 0$  leva a

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

- 1.4.4 Mostre que

$$(a) \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = A^2 - B^2$$

<sup>10</sup>As Equações (1.46) são válidas para rotações porque preservam volumes. Para uma transformação ortogonal mais geral, a do lado direito das Equações (1.46) é multiplicada pelo determinante da matriz de transformação (veja Capítulo 3 para matrizes e determinantes).

<sup>11</sup>Especificamente, as Equações (1.46) são válidas apenas para o espaço tridimensional. Veja D. Hestenes e G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus* (Dordrecht: Reidel, 1984) para uma generalização mais ampla do produto externo.

(b)  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

As leis distributivas necessárias aqui,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

e

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

podem ser verificadas com facilidade (se desejado) por expansão em componentes cartesianas.

**1.4.5** Dados os três vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= 3\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}, \\ \mathbf{Q} &= -6\hat{x} - 4\hat{y} + 2\hat{z}, \\ \mathbf{R} &= \hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}, \end{aligned}$$

determine dois que são perpendiculares e dois que são paralelos ou antiparalelos.

**1.4.6** Se  $\mathbf{P} = \hat{x}P_x + \hat{y}P_y$  e  $\mathbf{Q} = \hat{x}Q_x + \hat{y}Q_y$  são dois vetores não-paralelos quaisquer (também não-antiparalelos) no plano  $xy$ , mostre que  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  está na direção  $z$ .

**1.4.7** Prove que  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (AB)^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ .

**1.4.8** Usando os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta, \\ \mathbf{Q} &= \hat{x} \cos \varphi - \hat{y} \sin \varphi, \\ \mathbf{R} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \end{aligned}$$

prove as familiares identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \varphi) &= \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi, \\ \cos(\theta + \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

**1.4.9** (a) Ache um vetor  $\mathbf{A}$  que é perpendicular a

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}, \\ \mathbf{V} &= \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}. \end{aligned}$$

(b) O que é  $\mathbf{A}$  se, além desse requisito, impusermos que ele tenha módulo unitário?

**1.4.10** Se quatro vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  estiverem todos no mesmo plano, mostre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0.$$

*Sugestão:* Considere as direções dos vetores do produto externo.

**1.4.11** As coordenadas dos três vértices de um triângulo são  $(2, 1, 5)$ ,  $(5, 2, 8)$  e  $(4, 8, 2)$ . Calcule sua área por métodos vetoriais, seu centro e medianas. Comprimentos em centímetros.

*Sugestão:* Veja o Exercício 1.4.1.

**1.4.12** Os vértices do paralelogramo  $ABCD$  são  $(1, 0, 0)$ ,  $(2, -1, 0)$ ,  $(0, -1, 1)$  e  $(-1, 0, 1)$  na ordem. Calcule as áreas vetoriais do triângulo  $ABD$  e do triângulo  $BCD$ . As duas áreas vetoriais são iguais?

$$\text{Resposta: } \text{Área}_{ABD} = -\frac{1}{2}(\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}).$$

**1.4.13** A origem e os três vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  (todos começando na origem) definem um tetraedro. Tomando a direção para fora como positiva, calcule a área vetorial total das quatro superfícies tetraédricas.

*Nota:* Na Seção 1.11 esse resultado é generalizado para qualquer superfície fechada.

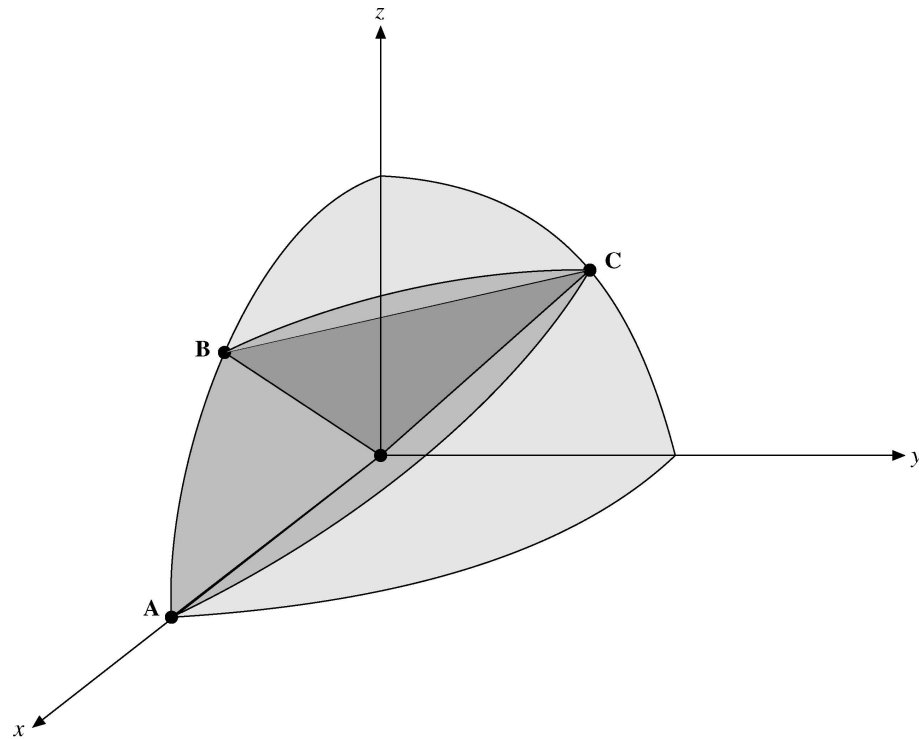


Figura 1.14: Triângulo esférico.

**1.4.14** Ache os lados e os ângulos do triângulo esférico  $ABC$  definido pelos três vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{B} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \mathbf{C} &= \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Cada vetor tem início na origem (Figura 1.14).

**1.4.15** Derive a lei dos senos (Figura 1.15):

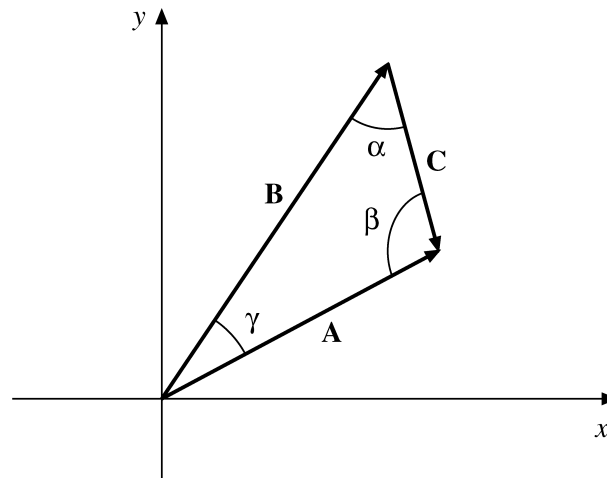


Figura 1.15: Lei dos senos.

$$\frac{\text{sen } \alpha}{|\mathbf{A}|} = \frac{\text{sen } \beta}{|\mathbf{B}|} = \frac{\text{sen } \gamma}{|\mathbf{C}|}.$$

**1.4.16** A indução magnética  $\mathbf{B}$  é **definida** pela equação de força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Executando três experimentos, constatamos que, se

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \hat{x}, & \quad \frac{\mathbf{F}}{q} = 2\hat{z} - 4\hat{y}, \\ \mathbf{v} = \hat{y}, & \quad \frac{\mathbf{F}}{q} = 4\hat{x} - \hat{z}, \\ \mathbf{v} = \hat{z}, & \quad \frac{\mathbf{F}}{q} = \hat{y} - 2\hat{x}. \end{aligned}$$

Pelos resultados desses três experimentos separados, calcule a indução magnética  $\mathbf{B}$ .

**1.4.17** Defina um produto externos de dois vetores em espaço bidimensional e dê uma interpretação geométrica de sua construção.

**1.4.18** Ache a distância mais curta entre as trajetórias de dois foguetes em vôo livre. Admita que a trajetória do primeiro foguete  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1$  com lançamento em  $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 1)$  e velocidade  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$  e que a trajetória do segundo foguete seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2$ , com  $\mathbf{r}_2 = (5, 2, 1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, 1)$ . Distâncias em quilômetros; velocidades em quilômetros por hora.

## 1.5 Produto Escalar Triplo, Produto Vetorial Triplo

### Produto Escalar Triplo

As Seções 1.3 e 1.4 abrangeram os dois tipos de multiplicação que nos interessam aqui. Contudo, há combinações de três vetores,  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  e  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , que ocorrem com frequência suficiente para merecer mais atenção. A combinação

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

é conhecida como **produto escalar triplo**.  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  resulta em um vetor que, multiplicado escalarmente por  $\mathbf{A}$ , dá um escalar. Notamos que  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  representa um escalar multiplicado em produto externo por um vetor, uma operação que não é definida. Por conseqüência, se concordarmos em excluir essa interpretação indefinida, os parênteses podem ser omitidos e o produto escalar triplo pode ser escrito como  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ .

Usando as Equações (1.38) para o produto externo e a Equação (1.24) para o produto escalar, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \text{ e assim por diante.} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Há um alto grau de simetria na expansão da componente. Cada termo contém os fatores  $A_i$ ,  $B_j$  e  $C_k$ . Se  $i$ ,  $j$  e  $k$  estiverem em ordem cíclica  $(x, y, z)$ , o sinal é positivo. Se a ordem for anticíclica, o sinal é negativo. Além disso, o produto escalar e o produto externo podem ser permutados,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (1.49)$$

Uma representação conveniente da expansão de componentes da Equação (1.48) é dada pelo determinante

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.50)$$

As regras para permutar linhas e colunas de um determinante<sup>12</sup> fornecem uma verificação imediata das permutações listadas na Equação (1.48), enquanto a simetria de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  na forma de determinante sugere a relação dada na

<sup>12</sup>Veja a Seção 3.1 para um resumo das propriedades de determinantes.



Equação 1.49. Os produtos triplos encontrados na Seção 1.4, que mostraram que  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  era perpendicular a ambos,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , eram casos especiais do resultado geral (Equação (1.48)).

O produto escalar triplo possui uma interpretação geométrica direta. Os três vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  podem ser interpretados como definindo um paralelepípedo (Figura 1.16):

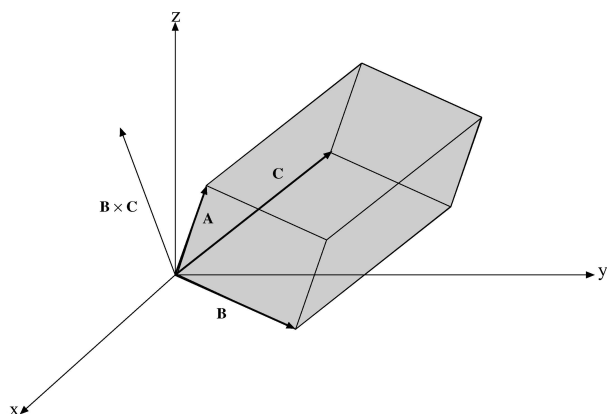


Figura 1.16: Representação em paralelepípedo do produto escalar triplo.

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| &= BC \sin \theta \\ &= \text{área da base do paralelogramo.} \end{aligned} \quad (1.51)$$

A direção, é claro, é normal à base. Introduzir o produto escalar por  $\mathbf{A}$  nessa expressão significa multiplicar a área da base pela projeção de  $\mathbf{A}$  sobre a normal, ou seja, base vezes altura. Portanto,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \text{volume do paralelepípedo definido por } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{C}.$$

O produto escalar triplo encontra uma aplicação interessante e importante na construção de um reticulado cristalino recíproco. Admitamos que  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  (não necessariamente mutuamente perpendiculares) representem os vetores que definem um reticulado cristalino. Então, o deslocamento de um ponto do reticulado para outro pode ser escrito

$$\mathbf{r} = n_a \mathbf{a} + n_b \mathbf{b} + n_c \mathbf{c}, \quad (1.52)$$

com  $n_a, n_b$  e  $n_c$  assumindo valores inteiros. Com esses vetores podemos formar

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}. \quad (1.53a)$$

Vemos que  $\mathbf{a}'$  é perpendicular ao plano que contém  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , e podemos mostrar com facilidade que

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1, \quad (1.53b)$$

ao passo que

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.53c)$$

É por essas Equações (1.53b) e (1.53c) que o nome **reticulado recíproco** é associado com os pontos  $\mathbf{r}' = n'_a \mathbf{a}' + n'_b \mathbf{b}' + n'_c \mathbf{c}'$ . O espaço matemático no qual esse reticulado recíproco existe às vezes é denominado *espaço de Fourier*, com base em relações com a análise de Fourier apresentada nos Capítulos 14 e 15. Esse reticulado recíproco é útil em problemas que envolvem a dispersão de ondas pelos vários planos de um cristal. Mais detalhes podem ser encontrados em R. B. Leighton, *Principles of Modern Physics*, pp. 440-448 [Nova York: McGraw-Hill (1959)].

### Produto Vetorial Triplo

O segundo produto triplo de interesse é  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , que é um vetor. Aqui, os parênteses devem ser mantidos, como se pode verificar por um caso especial  $(\hat{x} \times \hat{x}) \times \hat{y} = 0$ , enquanto  $\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{y}) = \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$ .

### Exemplo 1.5.1 UM PRODUTO VETORIAL TRIPLO

Para os vetores

$$\mathbf{A} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z} = (1, 2, -1), \quad \mathbf{B} = \hat{y} + \hat{z} = (0, 1, 1), \quad \mathbf{C} = \hat{x} - \hat{y} = (0, 1, 1),$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} + \hat{y} - \hat{z},$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{x} - \hat{z} = -(\hat{y} + \hat{z}) - (\hat{x} - \hat{y}) \\ &= -\mathbf{B} - \mathbf{C}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Reescrevendo o resultado na última linha do Exemplo 1.5.1 como uma combinação linear de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , notamos que, ao seguirmos uma abordagem geométrica, o produto vetorial triplo é perpendicular a  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ . O plano definido por  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  é perpendicular a  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  e, assim, o produto triplo está nesse plano (veja a Figura 1.17)

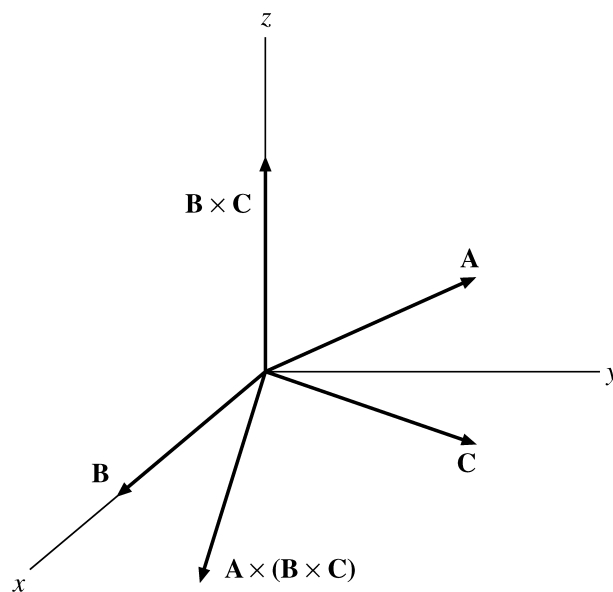


Figura 1.17:  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  estão no plano  $xy$ .  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  é perpendicular ao plano  $xy$  e é mostrado aqui ao longo do eixo  $z$ . Então,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  é perpendicular ao eixo  $z$  e, por conseguinte, está de volta ao plano  $xy$ .

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = u\mathbf{B} + v\mathbf{C}. \tag{1.54}$$

Considerando que o produto escalar da Equação (1.54) com  $\mathbf{A}$  resulta zero para o lado esquerdo, portanto,  $u\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + v\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0$ . Por conseguinte,  $u = w\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$  e  $v = -w\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  para um  $w$  adequado. Substituindo esses valores na Equação (1.54), temos

$$\boxed{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = w[\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]}; \tag{1.55}$$

queremos mostrar que

$$w = 1$$

na Equação (1.55), uma importante relação também conhecida como regra **BAC-CAB**. Uma vez que a Equação (1.55) é linear em  $A$ ,  $B$  e  $C$ ,  $w$  é independente dessas grandezas. Isto é, precisamos apenas mostrar que  $w = 1$  para vetores unitários  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$ . Vamos denotar  $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}} = \cos \alpha$ ,  $\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \cos \beta$ ,  $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \cos \gamma$ , e elevar



a Equação (1.55) ao quadrado para obter

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{A}} \times (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}})]^2 &= \hat{\mathbf{A}}^2(\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}})^2 - [\hat{\mathbf{A}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}})]^2 \\
 &= 1 - \cos^2 \alpha - [\hat{\mathbf{A}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}})]^2 \\
 &= w^2[(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{C}})^2 + (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})^2 - 2(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{C}})(\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}})] \\
 &= w^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma),
 \end{aligned}
 \tag{1.56}$$

usando  $(\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}})^2 = \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}^2 - (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})^2$  repetidas vezes (veja Equação (1.43) para uma prova). Por conseqüência, o volume (ao quadrado) abrangido por  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$  que ocorre na Equação (1.56) pode ser escrito como

$$[\hat{\mathbf{A}} \cdot (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}})]^2 = 1 - \cos^2 \alpha - w^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Aqui,  $w^2 = 1$ , visto que esse volume é simétrico em  $\alpha, \beta, \gamma$ . Isto é,  $w = \pm 1$  e é independente de  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ . Usando mais uma vez o caso especial  $\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}) = -\hat{\mathbf{y}}$  na Equação (1.55), finalmente temos  $w = 1$ . (Uma derivação alternativa usando o símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  apresentado no Capítulo 2 é o tópico do Exercício 2.9.8.)

Poderíamos observar que, exatamente como vetores são independentes das coordenadas, também uma equação vetorial é independente do sistema de coordenadas particular. O sistema de coordenadas apenas determina as componentes. Se a equação vetorial puder ser estabelecida em coordenadas cartesianas, ela pode ser estabelecida e válida em qualquer dos sistemas de coordenadas que serão apresentados no Capítulo 2. Assim, a Equação (1.55) pode ser verificada por um método direto, se bem que não muito elegante, de expansão em componentes cartesianas (veja o Exercício 1.5.2).

### Exercícios

- 1.5.1** Um dos vértices de um paralelepípedo de vidro está na origem (Figura 1.18). Os três vértices adjacentes estão em  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  e  $(0, 3, 1)$ . Todos os comprimentos são dados em centímetros. Calcule o número de centímetros cúbicos de vidro no paralelepípedo usando o produto escalar triplo.

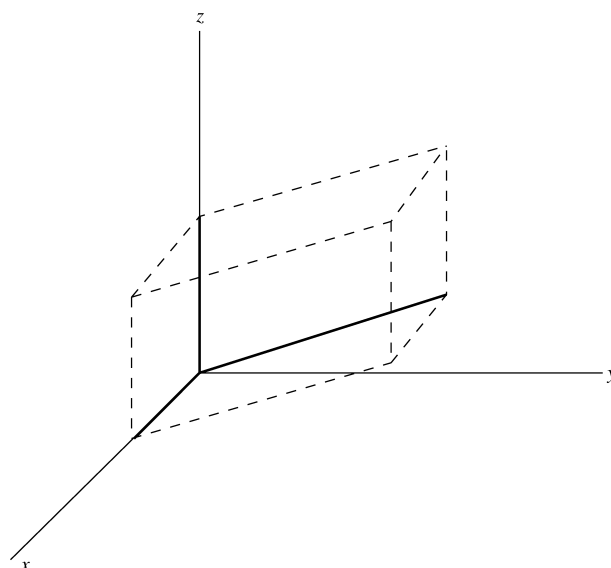


Figura 1.18: Paralelepípedo: produto escalar triplo.

- 1.5.2** Verifique a expansão do produto vetorial triplo

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

por expansão direta em coordenadas cartesianas.

**1.5.3** Mostre que a primeira etapa na Equação (1.43), que é

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2,$$

é consistente com a regra *BAC-CAB* para um produto vetorial triplo.

**1.5.4** São dados os três vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ ,

$$\mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y},$$

$$\mathbf{B} = \hat{y} + \hat{z},$$

$$\mathbf{C} = \hat{x} - \hat{z}.$$

(a) Calcule o produto escalar triplo,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ . Observando que  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ , dê uma interpretação geométrica do seu resultado para o produto escalar triplo.

(b) Calcule  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ .

**1.5.5** O momento angular orbital  $\mathbf{L}$  de uma partícula é dado por  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , em que  $\mathbf{p}$  é o momento linear. Com as velocidades linear e angular relacionadas por  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , mostre que

$$\mathbf{L} = mr^2[\boldsymbol{\omega} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

Aqui,  $\hat{\mathbf{r}}$  é um vetor unitário na direção  $\mathbf{r}$ . Para  $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  isso se reduz a  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , com o momento de inércia  $I$  dado por  $mr^2$ . Na Seção 3.5 esse resultado é generalizado para formar um tensor de inércia.

**1.5.6** A energia cinética de uma única partícula é dada por  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Para o movimento de rotação, essa expressão se transforma em  $\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2$ . Mostre que

$$T = \frac{1}{2}m[r^2\omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2].$$

Para  $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  essa expressão se reduz a  $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ , com o momento de inércia  $I$  dado por  $mr^2$ .

**1.5.7** Mostre que<sup>13</sup>

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

**1.5.8** Um vetor  $\mathbf{A}$  é decomposto em um vetor radial  $\mathbf{A}_r$  e um vetor tangencial  $\mathbf{A}_t$ . Se  $\hat{\mathbf{r}}$  for um vetor unitário na direção radial, mostre que

$$(a) \mathbf{A}_r = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \text{ e}$$

$$(b) \mathbf{A}_t = -\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}).$$

**1.5.9** Prove que uma condição necessária e suficiente para que os três vetores (não-nulos)  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  sejam coplanares é que o produto escalar triplo seja nulo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0.$$

**1.5.10** Três vetores,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , são dados por

$$\mathbf{A} = 3\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z},$$

$$\mathbf{B} = 6\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z},$$

$$\mathbf{C} = -3\hat{x} - 2\hat{y} - 4\hat{z}.$$

Calcule os valores de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  e  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ,  $\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  e  $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ .

**1.5.11** O vetor  $\mathbf{D}$  é uma combinação linear de três vetores não-coplanares (e não-ortogonais):

$$\mathbf{D} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}.$$

Mostre que os coeficientes são dados por uma razão de produtos escalares triplos,

$$a = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}, \quad \text{e assim por diante.}$$

<sup>13</sup>Esta é a identidade de Jacobi para produtos vetoriais; para comutadores, é importante no contexto de álgebras de Lie (veja a Equação (4.16) na Seção 4.2).





1.5.12 Mostre que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

1.5.13 Mostre que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{D}.$$

1.5.14 Para um triângulo, **esférico**, tal como o representado na Figura 1.14, mostre que

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } \overline{BC}} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } \overline{CA}} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } \overline{AB}}.$$

Aqui,  $\text{sen } A$  é o seno do ângulo incluído em  $A$ , enquanto,  $\overline{BC}$  é o lado oposto (em radianos).

1.5.15 Dados

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}},$$

e  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$ , mostre que

(a)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' = \delta_{xy}$ , ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ),

(b)  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^{-1}$ ,

(c)  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}$ .

1.5.16 Se  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' = \delta_{xy}$ , ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ), prove que

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}.$$

(Este problema é o inverso do Problema 1.5.15.)

1.5.17 Mostre que qualquer vetor  $\mathbf{V}$  pode ser expresso em termos dos vetores recíprocos  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'$  (do Problema 1.5.15) por

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}')\mathbf{a}' + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b}')\mathbf{b}' + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}'.$$

1.5.18 Uma carga elétrica  $q_1$  movendo-se com velocidade  $\mathbf{v}_1$  produz uma indução magnética  $\mathbf{B}$  dada por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{unidades mks}),$$

em que  $\hat{\mathbf{r}}$  aponta de  $q_1$  para o ponto em que  $\mathbf{B}$  é medido (lei de Biot e Savart).

(a) Mostre que a força magnética sobre uma segunda carga  $q_2$ , velocidade  $\mathbf{v}_2$ , é dada pelo produto vetorial triplo

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}).$$

(b) Escreva a força magnética correspondente  $\mathbf{F}_1$  que  $q_2$  exerce sobre  $q_1$ . Defina seu vetor unitário radial. Como  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  se comparam?

(c) Calcule  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  para o caso de  $q_1$  e  $q_2$  se movimentarem ao longo de trajetórias paralelas lado a lado.

Resposta:

(b)  $\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}).$

Em geral, não há nenhuma relação simples entre

$\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$ . Especificamente, a terceira lei de Newton,  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , não se aplica.

(c)  $\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2 \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_2.$

Atração mútua.

## 1.6 Gradiente, $\nabla$

Para dar uma motivação para a natureza vetorial das derivadas parciais, apresentamos agora a **variação total de uma função**  $F(x, y)$ ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Ela consiste em variações independentes nas direções  $x$  e  $y$ . Escrevemos  $dF$  como uma soma de dois incrementos, um deles exclusivamente na direção  $x$  e o outro na direção  $y$ ,

$$\begin{aligned} dF(x, y) &\equiv F(x + dx, y + dy) - F(x, y) \\ &= [F(x + dx, y + dy) - F(x, y + dy)] + [F(x, y + dy) - F(x, y)] \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

somando e subtraindo  $F(x, y + dy)$ . O teorema do valor médio (isto é, a continuidade de  $F$ ) nos diz que, aqui,  $\partial F/\partial x$  e  $\partial F/\partial y$  são avaliadas no mesmo ponto  $\xi, \eta$  entre  $x$  e  $x + dx$ ,  $y$  e  $y + dy$ , respectivamente. À medida que  $dx \rightarrow 0$  e  $dy \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow x$  e  $\eta \rightarrow y$ . Esse resultado se generaliza para três dimensões e para mais de três dimensões. Por exemplo, para uma função  $\varphi$  de três variáveis,

$$\begin{aligned} d\varphi(x, y, z) &\equiv [\varphi(x + dx, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y + dy, z + dz)] \\ &\quad + [\varphi(x, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y, z + dz)] \\ &\quad + [\varphi(x, y, z + dz) - \varphi(x, y, z)] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Algebricamente,  $d\varphi$  na variação total é um produto escalar da mudança na posição  $d\mathbf{r}$  e da mudança **direcional** de  $\varphi$ . E agora estamos prontos para reconhecer a derivada parcial tridimensional como um vetor, o que nos leva ao conceito de gradiente.

Suponha que  $\varphi(x, y, z)$  seja uma função escalar pontual, isto é, uma função cujo valor depende dos valores das coordenadas  $(x, y, z)$ . Como um escalar, ela deve ter o mesmo valor em um dado ponto fixo no espaço, independente da rotação de nosso sistema de coordenadas, ou

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \tag{1.58}$$

Diferenciando em relação a  $x'_i$  obtemos

$$\frac{\partial \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \tag{1.59}$$

pelas regras da diferenciação parcial e Equações (1.16a) e (1.16b). Mas a comparação com a Equação (1.17), a lei de transformação vetorial, agora mostra que **construímos** um vetor com componentes  $\partial\varphi/\partial x_j$ . Denominamos esse vetor gradiente de  $\varphi$ .

Um simbolismo conveniente é

$$\nabla\varphi = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{1.60}$$

ou

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.61}$$

$\nabla\varphi$  (ou  $\text{del } \varphi$ ) é nosso gradiente do escalar  $\varphi$ , enquanto o próprio  $\nabla$  ( $\text{del}$ ) é um operador diferencial vetorial (disponível para operar sobre um escalar  $\varphi$  ou diferenciá-lo). Todas as relações para  $\nabla$  ( $\text{del}$ ) podem ser derivadas da natureza híbrida de  $\text{del}$  em termos das derivadas parciais, bem como de sua natureza vetorial.

O gradiente de um escalar é de extrema importância em física e em engenharia para expressar a relação entre um campo de força e um campo de potencial,

$$\text{força } \mathbf{F} = -\nabla(\text{potencial } V), \tag{1.62}$$



que vale para campos gravitacionais, bem como para campos eletrostáticos, entre outros. Note que o sinal de menos na Equação (1.62) resulta em água fluindo montanha abaixo, em vez de montanha acima! Se uma força pode ser descrita, como na Equação (1.62), por uma única função  $V(\mathbf{r})$  em todos os lugares, denominamos a função escalar  $V$  seu **potencial**. Como a força é a derivada direcional do potencial, podemos achar o potencial, se ele existir, integrando a força ao longo de alguma trajetória adequada. Como a variação total  $dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é o trabalho realizado contra a força ao longo da trajetória  $d\mathbf{r}$ , reconhecemos o significado físico do potencial (diferença) como trabalho e energia. Além do mais, em uma soma de incrementos de trajetória, os pontos intermediários se cancelam:

$$[V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1)] + [V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r})] = V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}),$$

portanto, o trabalho integrado ao longo de alguma trajetória desde um ponto inicial  $\mathbf{r}_i$  até um ponto final  $\mathbf{r}$  é dado pela diferença de potencial  $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_i)$  nos pontos extremos da trajetória. Portanto, essas forças são especialmente simples e bem comportadas: são denominadas **conservativas**. Quando houver perda de energia devido a atrito ao longo da trajetória, ou a algum outro tipo de dissipação, o trabalho dependerá da trajetória, e essas forças não poderão ser conservativas: não existe potencial. Discutiremos forças conservativas com mais detalhes na Seção 1.13.

### Exemplo 1.6.1 O GRADIENTE DE UM POTENCIAL $V(r)$

Vamos calcular o gradiente de  $V(r) = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ , portanto,

$$\nabla V(r) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial V(r)}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial V(r)}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial V(r)}{\partial z}.$$

Agora,  $V(r)$  depende de  $x$  por meio da dependência de  $r$  de  $x$ . Portanto,<sup>14</sup>

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

De  $r$  como uma função de  $x, y, z$ , temos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{x}{r}.$$

Permutando as coordenadas ( $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ ) para obter as derivadas de  $y$  e  $z$ , obtemos

$$\begin{aligned} \nabla V(r) &= (\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr} = \hat{\mathbf{r}} \frac{dV}{dr}. \end{aligned}$$

Aqui,  $\hat{\mathbf{r}}$  é um vetor unitário ( $\mathbf{r}/r$ ) na direção radial **positiva**. O gradiente de uma função de  $r$  é um vetor na direção radial (positiva ou negativa). Na Seção 2.5,  $\hat{\mathbf{r}}$  é visto como um dos três vetores unitários ortonormais de coordenadas esféricas polares e  $\hat{\mathbf{r}} \partial/\partial r$  como a componente radial de  $\nabla$ . ■

### Uma Interpretação Geométrica

Uma aplicação imediata de  $\nabla\varphi$  resulta de seu produto escalar com um incremento de comprimento

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} dx + \hat{\mathbf{y}} dy + \hat{\mathbf{z}} dz.$$

<sup>14</sup>Esse é um caso especial da **regra da cadeia** da diferenciação:

$$\frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

em que  $\partial V/\partial \theta = \partial V/\partial \varphi = 0, \partial V/\partial r \rightarrow dV/dr$ .

Assim, obtemos

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi,$$

a mudança na função escalar  $\varphi$  correspondente a uma mudança na posição  $d\mathbf{r}$ . Agora considere  $P$  e  $Q$  dois pontos sobre uma superfície  $\varphi(x, y, z) = C$ , uma constante. Esses pontos são escolhidos de modo que  $Q$  está a uma distância  $d\mathbf{r}$  de  $P$ . Então, indo de  $P$  a  $Q$ , a mudança em  $\varphi(x, y, z) = C$  é dada por

$$d\varphi = (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{1.63}$$

desde que continuemos sobre a superfície  $\varphi(x, y, z) = C$ . Isso mostra que  $\nabla\varphi$  é perpendicular a  $d\mathbf{r}$ . Uma vez que  $d\mathbf{r}$  pode ter qualquer direção a partir de  $P$ , **contanto que permaneça na superfície** de  $\varphi$  constante e o ponto  $Q$  é restrito à superfície mas tem direção arbitrária,  $\nabla\varphi$  é visto como normal à superfície  $\varphi = \text{constante}$  (Figura 1.19).

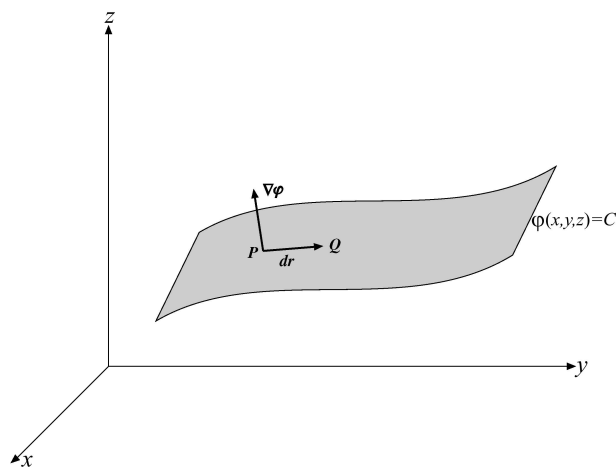


Figura 1.19: O incremento de comprimento  $d\mathbf{r}$  tem de permanecer sobre a superfície  $\varphi = C$ .

Se agora permitirmos que  $d\mathbf{r}$  nos leve de uma superfície  $\varphi = C_1$  para uma superfície adjacente  $\varphi = C_2$  (Figura 1.20),

$$d\varphi = C_1 - C_2 = \Delta C = (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.64}$$

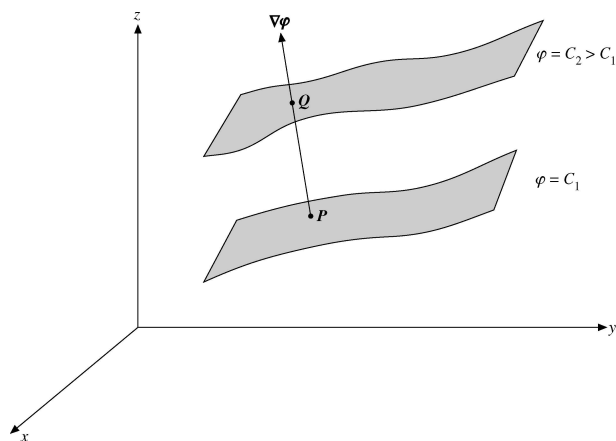


Figura 1.20: Gradiente.

Para um dado  $d\varphi$ ,  $|d\mathbf{r}|$  é um mínimo quando for escolhido paralelo a  $\nabla\varphi$  ( $\cos\theta = 1$ ) ou, para um dado  $|d\mathbf{r}|$ , a mudança na função escalar  $\varphi$  é maximizada escolhendo  $d\mathbf{r}$  paralelo a  $\nabla\varphi$ . **Isso identifica  $\nabla\varphi$  como um vetor que tem a direção da máxima taxa de mudança espacial de  $\varphi$** , uma identificação que será útil no Capítulo 2 quando considerarmos sistemas coordenados não-cartesianos. Essa identificação de  $\nabla$  também pode ser desenvolvida usando o cálculo de variações a um vínculo, Exercício 17.6.9.



### Exemplo 1.6.2 FORÇA COMO GRADIENTE DE UM POTENCIAL

Como um exemplo específico do precedente e como uma extensão do Exemplo 1.6.1, consideramos as superfícies que consistem em cascas esféricas concêntricas, Figura 1.21. Temos

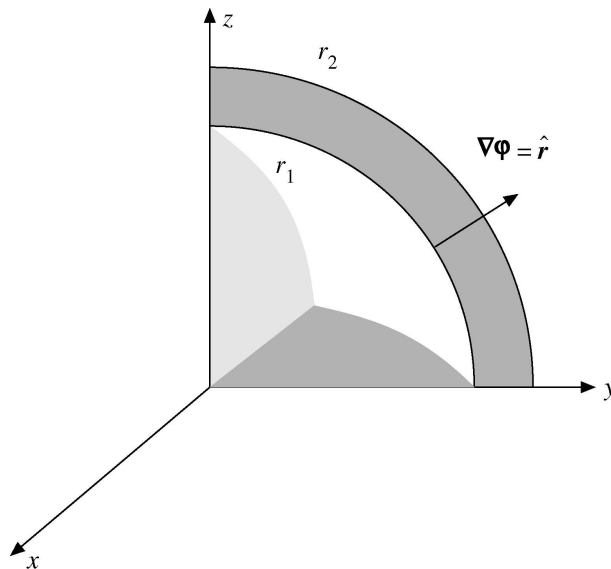


Figura 1.21: Gradiente para  $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , cascas esféricas:  $(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2} = r_2 = C_2, (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} = r_1 = C_1$ .

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r = C,$$

em que  $r$  é o raio, igual a  $C$ , nossa constante.  $\Delta C = \Delta \varphi = \Delta r$ , a distância entre duas cascas. Pelo Exemplo 1.6.1,

$$\nabla \varphi(r) = \hat{\mathbf{r}} \frac{d\varphi(r)}{dr} = \hat{\mathbf{r}}.$$

O gradiente está na direção radial e é normal à superfície esférica  $\varphi = C$ .

### Exemplo 1.6.3 INTEGRAÇÃO DE GRADIENTE POR PARTES

Vamos provar a fórmula  $\int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla f(\mathbf{r}) d^3r = - \int f(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r$ , em que  $\mathbf{A}$  ou  $f$  ou ambas se anulam no infinito de modo que as partes integradas são nulas. Essa condição é satisfeita se, por exemplo,  $\mathbf{A}$  for o potencial vetorial eletromagnético e  $f$  for uma função de onda de estado ligado  $\psi(\mathbf{r})$ .

Escrevendo o produto interno em coordenadas cartesianas, integrando cada integral unidimensional por partes e desprezando os termos integrados, obtemos

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla f(\mathbf{r}) d^3r &= \iint \left[ A_x f \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int f \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \right] dy dz + \dots \\ &= - \iiint f \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz - \iiint f \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz - \iiint f \frac{\partial A_z}{\partial z} dz dx dy \\ &= - \int f(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r. \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{A} = e^{ikz} \hat{\mathbf{e}}$  descreve um fóton saindo na direção do vetor unitário de polarização constante  $\hat{\mathbf{e}}$  e  $f = \psi(\mathbf{r})$  é uma função de onda de estado ligado que decai exponencialmente, então

$$\int e^{ikz} \hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) d^3r = -e_z \int \psi(\mathbf{r}) \frac{de^{ikz}}{dz} d^3r = -ike_z \int \psi(\mathbf{r}) e^{ikz} d^3r,$$

porque somente a componente  $z$  do gradiente contribui. ■

### Exercícios

- 1.6.1** Se  $S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ , ache  
 (a)  $\nabla S$  no ponto  $(1, 2, 3)$ ;  
 (b) o módulo do gradiente de  $S$ ,  $|\nabla S|$  em  $(1, 2, 3)$ ; e  
 (c) os co-senos diretores de  $\nabla S$  em  $(1, 2, 3)$ .

- 1.6.2** (a) Ache um vetor unitário perpendicular à superfície

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

no ponto  $(1, 1, 1)$ . Comprimentos em centímetros.

- (b) Derive a equação do plano tangente à superfície em  $(1, 1, 1)$ .

Resposta: (a)  $(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$ , (b)  $x + y + z = 3$ .

- 1.6.3** Dado um vetor  $\mathbf{r}_{12} = \hat{x}(x_1 - x_2) + \hat{y}(y_1 - y_2) + \hat{z}(z_1 - z_2)$ , mostre que  $\nabla_1 r_{12}$  (gradiente com respeito a  $x_1, y_1$  e  $z_1$  da grandeza  $r_{12}$ ) é um vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}_{12}$ .

- 1.6.4** Se uma função vetorial  $\mathbf{F}$  depender de coordenadas espaciais  $(x, y, z)$  e também do tempo  $t$ , mostre que

$$d\mathbf{F} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dt.$$

- 1.6.5** Mostre que  $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ , em que  $u$  e  $v$  são funções escalares diferenciáveis de  $x, y$  e  $z$ .

- (a) Mostre que a condição necessária e suficiente para que  $u(x, y, z)$  e  $v(x, y, z)$  sejam relacionadas por alguma função  $f(u, v) = 0$  é que  $(\nabla u) \times (\nabla v) = 0$ .

- (b) Se  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$ , mostre que a condição  $(\nabla u) \times (\nabla v) = 0$  resulta no jacobiano bidimensional

$$J\left(\begin{matrix} u, v \\ x, y \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Admite-se que as funções  $u$  e  $v$  são diferenciáveis.

### 1.7 Divergência, $\nabla$

A diferenciação de uma função vetorial é uma simples extensão da diferenciação de quantidades escalares. Suponha que  $\mathbf{r}(t)$  descreva a posição de um satélite em algum tempo  $t$ . Então, para diferenciação em relação ao tempo,

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v}, \text{ velocidade linear.}$$

Graficamente, mais uma vez temos a inclinação de uma curva órbita, ou trajetória, como mostra a Figura 1.22.

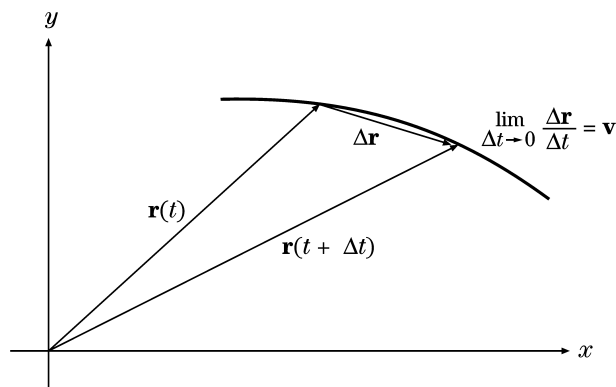


Figura 1.22: Diferenciação de um vetor.

Se resolvermos  $\mathbf{r}(t)$  em suas componentes cartesianas,  $d\mathbf{r}/dt$  sempre se reduz diretamente a uma soma vetorial de não mais do que três derivadas escalares (para o espaço tridimensional). Em outros sistemas de



coordenadas (Capítulo 2), a situação é mais complicada, pois a direção dos vetores unitários não é mais constante. A diferenciação em relação às coordenadas espaciais é resolvida do mesmo modo que a diferenciação em relação ao tempo, como veremos nos parágrafos seguintes.

Na Seção 1.6,  $\nabla$  foi definido como um operador vetorial. Agora, dando atenção às suas propriedades vetoriais e diferenciais, deixamos que ele opere sobre um vetor. Primeiro, como um vetor, fazemos seu produto escalar por um segundo vetor para obter

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (1.65a)$$

expressão conhecida como a divergência de  $\mathbf{V}$ , que é um escalar, como discutido na Seção 1.3.

### Exemplo 1.7.1 DIVERGÊNCIA DE VETOR COORDENADO

Calcule  $\nabla \cdot \mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}, \end{aligned}$$

ou  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ . ■

### Exemplo 1.7.2 DIVERGÊNCIA DE CAMPO DE FORÇA CENTRAL

Generalizando o Exemplo 1.7.1,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{r}f(r)) &= \frac{\partial}{\partial x} [x f(r)] + \frac{\partial}{\partial y} [y f(r)] + \frac{\partial}{\partial z} [z f(r)] \\ &= 3f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{y^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{z^2}{r} \frac{df}{dr} \\ &= 3f(r) + r \frac{df}{dr}. \end{aligned}$$

A manipulação das derivadas parciais que levam à segunda equação no Exemplo 1.7.2 é discutida no Exemplo 1.6.1. Em particular, se  $f(r) = r^{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{r}r^{n-1}) &= \nabla \cdot \hat{\mathbf{r}}r^n \\ &= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} \\ &= (n+2)r^{n-1}. \end{aligned} \quad (1.65b)$$

Essa divergência desaparece para  $n = -2$ , em  $r = 0$ , um fato importante na Seção 1.14. ■

### Exemplo 1.7.3 INTEGRAÇÃO POR PARTES DA DIVERGÊNCIA

Vamos provar a fórmula  $\int f(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r = - \int \mathbf{A} \cdot \nabla f d^3r$ , em que  $\mathbf{A}$  ou ambas se anulam no infinito.

Para mostrar isso faremos, como no Exemplo 1.6.3, a integração por partes após escrever o produto interno em coordenadas cartesianas. Como os termos integrados são avaliados no infinito, em que são nulos, obtemos

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r &= \int f \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz dx dy \right) \\ &= - \int \left( A_x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz + A_y \frac{\partial f}{\partial y} dy dx dz + A_z \frac{\partial f}{\partial z} dz dx dy \right) \\ &= - \int \mathbf{A} \cdot \nabla f d^3r. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Uma Interpretação Física

Para desenvolver uma percepção da significância física da divergência, considere  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$  com  $\mathbf{v}(x, y, z)$  a velocidade de um fluido compressível e  $\rho(x, y, z)$  sua densidade no ponto  $(x, y, z)$ . Se considerarmos um pequeno volume  $dx dy dz$  (Figura 1.23) em  $x = y = z = 0$ , o fluido que escoar por esse volume por unidade de tempo (direção  $x$  positiva) pela face  $EFGH$  é (taxa de fluxo em)  $EFGH = \rho v_x|_{x=0} = dy dz$ . As componentes do fluxo  $\rho v_y$  e  $\rho v_z$  tangenciais a essa face nada contribuem para o fluxo através dessa face. A taxa de fluxo de saída (ainda na direção  $x$  positiva) pela face  $ABCD$  é  $\rho v_x|_{x=dx} dy dz$ . Para comparar esses fluxos e achar o fluxo líquido de saída, expandimos esse último resultado, como a variação total na Seção 1.6.<sup>15</sup> Isso resulta

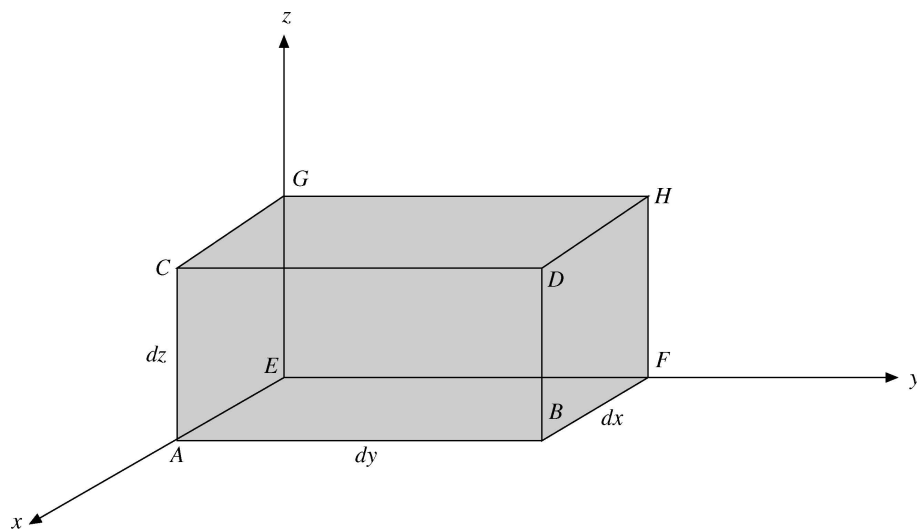


Figura 1.23: Paralelepípedo retangular diferencial (no primeiro octante).

$$\begin{aligned} (\text{taxa de fluxo de saída})_{ABCD} &= \rho v_x|_{x=dx} dy dz \\ &= \left[ \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx \right]_{x=0} dy dz. \end{aligned}$$

Aqui, o termo da derivada é um primeiro termo de correção, que leva em conta a possibilidade de densidade não-uniforme ou velocidade não-uniforme ou ambas.<sup>16</sup> O termo de ordem zero  $\rho v_x|_{x=0}$  (correspondente a um fluxo uniforme) é cancelado:

$$\text{Velocidade líquida de fluxo de saída}|_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) dx dy dz.$$

De modo equivalente, podemos chegar a esse resultado por

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho v_x(\Delta x, 0, 0) - \rho v_x(0, 0, 0)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial[\rho v_x(x, y, z)]}{\partial x} \Big|_{0,0,0}.$$

Agora, o eixo  $x$  não está recebendo nenhum tratamento preferencial. O resultado precedente para as duas faces perpendiculares ao eixo  $x$  deve valer para as duas faces perpendiculares ao eixo  $y$ , com  $x$  substituído por  $y$  e a mudanças correspondentes para  $y$  e  $z$ :  $y \rightarrow z, z \rightarrow x$ . Essa é uma permutação cíclica das coordenadas. Mais uma outra permutação cíclica dá o resultado para as duas faces restantes de nosso paralelepípedo. Adicionando a velocidade de fluxo líquida para todos os três pares de superfícies de nosso elemento de volume, temos

$$\begin{aligned} \text{Fluxo líquido} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] dx dy dz \\ (\text{por unidade de tempo}) &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dx dy dz. \end{aligned} \tag{1.66}$$

<sup>15</sup>Aqui, temos o incremento  $dx$  e mostramos que uma derivada parcial em relação a  $\rho v_x$  também pode depender de  $y$  e  $z$ .

<sup>16</sup>Em termos estritos,  $\rho v_x$  representa sobre a face  $EFGH$  e, de modo semelhante, a expressão  $\rho v_x + (\partial/\partial x)(\rho v_x) dx$  representa uma média sobre a face  $ABCD$ . Usando um volume diferencial arbitrariamente pequeno, constatamos que as médias se reduzem aos valores empregados aqui.





Por conseguinte, o fluxo de nosso fluido compressível que escoo do elemento de volume  $dx dy dz$  por volume unitário por unidade de tempo é  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ . Daí o nome **divergência**. Uma aplicação direta é na equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.67a}$$

que afirma que um fluxo líquido que escoo do volume resulta em uma diminuição densidade dentro do volume. Note que, na Equação (1.67a),  $\rho$  é considerada uma possível função de tempo, bem como do espaço. A divergência aparece em uma grande variedade de problemas físicos, abrangendo desde uma densidade de probabilidade de corrente em mecânica quântica até vazamento de nêutrons em um reator nuclear.

A combinação  $\rho(x, y, z, t)$  na qual  $f$  é uma função escalar e  $\mathbf{V}$  é uma função vetorial, pode ser escrita

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fV_z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}V_x + f\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}V_y + f\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}V_z + f\frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{1.67b}$$

que é exatamente o que esperaríamos para a derivada de um produto. Note que  $\nabla$  como um operador diferencial distingue ambas,  $f$  e  $\mathbf{V}$ ; como um vetor, ele é multiplicado escalarmente por  $\mathbf{V}$  (em cada termo).

Se tivermos o caso especial da divergência que se anula de um vetor a zero,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.68}$$

diz-se que o vetor  $\mathbf{B}$  é **solenoidal**. O termo solenoidal vem do exemplo no qual  $\mathbf{B}$  é a indução magnética e a Equação (1.68) parece com uma das equações de Maxwell. Quando um vetor é solenoidal, ele pode ser escrito como o rotacional de um outro vetor conhecido como o potencial vetorial. (Na Seção 1.13 calcularemos esse potencial vetorial.)

### Exercícios

**1.7.1** Para uma partícula que se movimenta em uma órbita circular,  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}r \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}}r \sin \omega t$ ,

- (a) avalie  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ , com  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ .
- (b) Mostre que  $\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0$  com  $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ .

O raio  $r$  e a velocidade angular  $\omega$  são constantes.

Resposta: (a)  $\hat{\mathbf{z}}\omega r^2$ .

**1.7.2** O vetor  $\mathbf{A}$  satisfaz a lei de transformação vetorial, Equação (1.15). Mostre diretamente que sua derivada em relação ao tempo  $d\mathbf{A}/dt$  também satisfaz a Equação (1.15) e é, portanto, um vetor.

**1.7.3** Mostre, por diferenciação das componentes, que

- (a)  $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$ ,
- (b)  $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$ , exatamente como a derivada do produto de duas funções algébricas.

**1.7.4** No Capítulo 2 veremos que os vetores unitários em sistemas de coordenadas não-cartesianos usualmente são funções das variáveis coordenadas,  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q_1, q_2, q_3)$  e  $|\mathbf{e}_i| = 1$ . Mostre que  $\partial \mathbf{e}_i / \partial q_j = 0$  ou  $\partial \mathbf{e}_i / \partial q_j$  é ortogonal a  $\mathbf{e}_i$ .  
Sugestão:  $\partial \mathbf{e}_i^2 / \partial q_j = 0$ .

**1.7.5** Prove que  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ .

Sugestão: Trate como um produto escalar triplo.

**1.7.6** O campo eletrostático de uma carga pontual  $q$  é

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Calcule a divergência de  $\mathbf{E}$ . O que acontece na origem?

## 1.8 Rotacional, $\nabla \times$

Uma outra operação possível com o operador vetorial  $\nabla$  é fazer o produto externo dele com um vetor. Obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \hat{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) + \hat{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) + \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

que é denominada a **rotacional** de  $\mathbf{V}$ . Ao expandir esse determinante, devemos considerar a natureza de derivada de  $\nabla$ . Especificamente,  $\mathbf{V} \times \nabla$  é definido somente como um operador, um outro operador vetorial diferencial. Certamente não é igual, em geral, a  $-\nabla \times \mathbf{V}$ .<sup>17</sup> No caso da Equação (1.69), o determinante deve ser expandido **de cima para baixo**, de modo que obtenhamos as derivadas como mostrado na parte do meio da Equação (1.69). Se introduzirmos o produto externo de  $\nabla$  no produto entre um escalar e um vetor, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{V})|_x &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} (fV_z) - \frac{\partial}{\partial z} (fV_y) \right] \\ &= \left( f \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} V_z - f \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} V_y \right) \\ &= f \nabla \times \mathbf{V}|_x + (\nabla f) \times \mathbf{V}|_x. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Se permutarmos as coordenadas  $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$  para pegar a componente  $y$  e então permutá-las uma segunda vez para pegar a componente  $z$ , então

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f \nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V}, \quad (1.71)$$

que é o produto vetorial análogo da Equação (1.67b). Mais uma vez, como um operador diferencial,  $\nabla$  diferencia ambas,  $f$  e  $\mathbf{V}$ . Como um vetor, ele faz um produto externo em  $\mathbf{V}$  (em cada termo).

### Exemplo 1.8.1 POTENCIAL VETORIAL DE UM CAMPO CONSTANTE $\mathbf{B}$

Pela eletrodinâmica sabemos que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , cuja solução geral é  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , em que  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  é denominado potencial vetor (de indução magnética), porque  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A} \equiv 0$ , como um produto escalar triplo com dois vetores idênticos. Essa última identidade não mudará se adicionarmos o gradiente de alguma função escalar ao potencial vetorial que, portanto, não é único.

Em nosso caso, queremos mostrar que um potencial vetorial é  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$ .

Usando a regra *BAC-CBA* juntamente com o Exemplo 1.7.1, constatamos que

$$2\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r} = 3\mathbf{B} - \mathbf{B} = 2\mathbf{B},$$

em que indicamos, pela ordenação do produto escalar do segundo termo, que o gradiente ainda age sobre o vetor coordenado. ■

### Exemplo 1.8.2 ROTACIONAL DE UM CAMPO DE FORÇA CENTRAL

Calcule  $\nabla \times (\mathbf{r}f(r))$ . Pela Equação (1.71),

$$\nabla \times (\mathbf{r}f(r)) = f(r)\nabla \times \mathbf{r} + [\nabla f(r)] \times \mathbf{r}. \quad (1.72)$$

Primeiro,

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0. \quad (1.73)$$

<sup>17</sup>Com esse mesmo espírito, se  $\mathbf{A}$  for um operador diferencial, não é necessariamente verdade que  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \theta$ . Especificamente, para o operador de momento angular da mecânica quântica,  $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$  encontramos que  $L \times L = iL$ . Veja Seções 4.3 e 4.4 para mais detalhes.



Segundo, usando  $\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}}(df/dr)$  (Exemplo 1.6.1), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{r}f(r) = \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0. \quad (1.74)$$

Esse produto vetorial se reduz a zero, visto que  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}r$  e  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$ . ■

Para desenvolver uma percepção melhor do significado do rotacional, consideramos a circulação de fluido ao redor de um circuito fechado diferencial no plano  $xy$ , Figura 1.24.

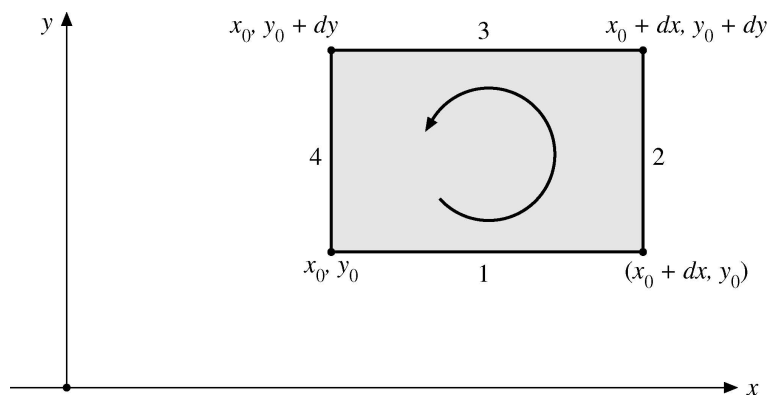


Figura 1.24: Circulação ao redor de um círculo fechado diferencial.

Embora a circulação seja dada tecnicamente por uma integral vetorial de linha  $\int \mathbf{V} \cdot d\lambda$  (Seção 1.10), podemos estabelecer aqui as integrais escalares equivalentes. Vamos admitir que a circulação seja

$$\begin{aligned} \text{circulação}_{1234} &= \int_1 V_x(x, y) d\lambda_x + \int_2 V_y(x, y) d\lambda_y \\ &\quad + \int_3 V_x(x, y) d\lambda_x + \int_4 V_y(x, y) d\lambda_y. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Os números 1, 2, 3 e 4 se referem aos segmentos de reta numerados na Figura 1.24. Na primeira integral,  $d\lambda_x = +dx$ ; mas, na terceira integral,  $d\lambda_x = -dx$  porque o terceiro segmento de reta é atravessado na direção negativa de  $x$ . De modo semelhante,  $d\lambda_y = +dy$  para a segunda integral,  $-dy$  para a quarta. Em seguida, os integrandos referem-se ao ponto  $(x_0, y_0)$  com uma expansão de Taylor<sup>18</sup> levando em conta o deslocamento do segmento de reta 3 em relação a 1 e o do segmento 2 em relação a 4. Para nossos segmentos de reta diferenciais, isso resulta em

$$\begin{aligned} \text{circulação}_{1234} &= V_x(x_0, y_0) dx + \left[ V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right] dy \\ &\quad + \left[ V_x(x_0, y_0) + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right] (-dx) + V_y(x_0, y_0) (-dy) \\ &= \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dividindo por  $dx dy$ , temos

$$\text{circulação por unidade de área} = \nabla \times \mathbf{V}|_z. \quad (1.77)$$

A circulação<sup>19</sup> ao redor de nossa área diferencial no plano  $xy$  é dada pela componente  $z$  de  $\nabla \times \mathbf{V}$ . Em princípio, o rotacional  $\nabla \times \mathbf{V}$  em  $(x_0, y_0)$  poderia ser determinado inserindo uma roda propulsora (ou roda de pás) (diferencial) no fluido em movimento no ponto  $(x_0, y_0)$ . A rotação da pequena roda de pás seria uma medida do rotacional, e seu eixo estaria ao longo da direção de  $\nabla \times \mathbf{V}$ , que é perpendicular ao plano da circulação.

Usaremos o resultado, Equação (1.76), na Seção 1.12 para derivar o teorema de Stokes. Sempre que o rotacional de um vetor  $\mathbf{V}$  se reduz a zero,

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0, \quad (1.78)$$

<sup>18</sup>Aqui,  $V_y(x_0 + dx, y_0) = V_y(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)_{x_0 y_0} dx + \dots$ . Os termos de ordem mais alta serão descartados no limite, à medida que  $dx \rightarrow 0$ . Um termo de correção para a variação de  $V_y$  com  $y$  é cancelado pelo termo correspondente na quarta integral.

<sup>19</sup>Em dinâmica dos fluidos  $\nabla \times \mathbf{V}$  é denominado “vorticidade”.

$\mathbf{V}$  é denominado **irrotacional**. Os exemplos físicos mais importantes de vetores irrotacionais são a força gravitacional e a força eletrostática. Em cada caso,

$$\mathbf{V} = C \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = C \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.79)$$

em que  $C$  é uma constante e  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário na direção radial que aponta para fora. Para o caso gravitacional, temos  $C = -Gm_1m_2$ , dado pela lei da gravitação universal de Newton. Se  $C = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$ , temos a lei da eletrostática de Coulomb (unidades mks). Pode-se demonstrar que a força  $\mathbf{V}$  dada na Equação (1.79) é irrotacional por expansão direta em componentes cartesianas, como fizemos no Exemplo 1.8.1. Uma outra abordagem é desenvolvida no Capítulo 2, no qual expressamos  $\nabla \times$ , o rotacional, em termos de coordenadas esféricas polares. Na Seção 1.13 veremos que, sempre que um vetor for irrotacional, ele pode ser escrito como o gradiente (negativo) de um potencial escalar. Na Seção 1.16, provaremos que um campo vetorial pode ser resolvido em uma parte irrotacional e em uma parte solenoidal (sujeita a condições no infinito). Em termos do campo eletromagnético isso corresponde à resolução em um campo elétrico irrotacional e em um campo magnético solenoidal.

Para ondas em um meio elástico, se o deslocamento  $\mathbf{u}$  for irrotacional,  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , ondas planas (ou ondas esféricas em grandes distâncias) se tornam longitudinais. Se  $\mathbf{u}$  for solenoidal,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , então as ondas tornam-se transversais. Uma perturbação sísmica produzirá um deslocamento que pode ser resolvido em uma parte solenoidal e em uma parte irrotacional (compare com a Seção 1.16). A parte irrotacional dá origem às ondas de terremoto longitudinais  $P$  (primárias). A parte solenoidal dá origem às ondas transversais mais lentas  $S$  (secundárias).

Usando o gradiente, a divergência e o rotacional e, é claro, a regra  $BAC-CAB$ , podemos construir ou verificar um grande número de identidades vetoriais úteis. Para verificação, a completa expansão em componentes cartesianas é sempre uma possibilidade. Às vezes, se usarmos a percepção em vez de manipulação de componentes cartesianas, o processo de verificação pode ser drasticamente encurtado.

Lembre-se de que  $\nabla$  é um operador vetorial, uma criatura híbrida que satisfaz dois conjuntos de regras:

1. regras vetoriais e
2. regras de diferenciação parcial — incluindo diferenciação de um produto.

### Exemplo 1.8.3 GRADIENTE DE UM PRODUTO ESCALAR

Verifique que

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (1.80)$$

Esse exemplo particular depende de reconhecer que  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  é o tipo de termo que aparece na expansão  $BAC-CAB$  de um produto vetorial triplo, Equação (1.55). Por exemplo,

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B},$$

com o  $\nabla$  diferenciando somente  $\mathbf{B}$ , e não  $\mathbf{A}$ . Pela comutatividade de fatores em um produto escalar, podemos permutar  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e escrever

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A},$$

agora com  $\nabla$  diferenciando somente  $\mathbf{A}$ , e não  $\mathbf{B}$ . Somando essas duas equações, obtemos  $\nabla$  diferenciando o produto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  e a identidade, Equação (1.80). Essa identidade é freqüentemente usada na teoria do eletromagnetismo. O Exercício 1.8.13 é uma ilustração simples. ■

### Exemplo 1.8.4 INTEGRAÇÃO DO ROTACIONAL POR PARTES

Vamos provar a fórmula  $\int \mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) d^3r = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{r})) d^3r$ , em que  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{C}$  ou ambas se anulam no infinito.

Para mostrar isso, utilizamos, como nos Exemplos 1.6.3 e 1.7.3, integração por partes após escrever o produto interno e o rotacional em coordenadas cartesianas. Como os termos integrados se anulam no infinito, obtemos

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) d^3r \\ &= \int \left[ C_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + C_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + C_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] d^3r \\ &= \int \left[ A_x \left( \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} \right) + A_y \left( \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} \right) + A_z \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \right] d^3r \\ &= \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{r})) d^3r, \end{aligned}$$



apenas rearranjando adequadamente os termos após a integração por partes. ■

### Exercícios

**1.8.1** Mostre, por rotação de coordenadas, que as componentes do rotacional de um vetor se transformam como um vetor.  
*Sugestão:* As identidades dos co-senos diretores da Equação (1.46) estão disponíveis conforme necessário.

**1.8.2** Mostre que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é solenoidal se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  forem, cada um, irrotacionais.

**1.8.3** Se  $\mathbf{A}$  é irrotacional, mostre que  $\mathbf{A} \times \mathbf{r}$  é solenoidal.

**1.8.4** Um corpo rígido está girando com velocidade angular constante  $\boldsymbol{\omega}$ . Mostre que a velocidade linear  $\mathbf{v}$  é solenoidal.

**1.8.5** Se uma função vetorial  $\mathbf{f}(x, y, z)$  não é irrotacional, mas o produto de  $f$ , e uma função escalar  $g(x, y, z)$  é irrotacional, mostre que, então,

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0.$$

**1.8.6** Se (a)  $\mathbf{V} = \hat{x}V_x(x, y) + \hat{y}V_y(x, y)$  e (b)  $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$ , prove que  $\nabla \times \mathbf{V}$  é perpendicular a  $\mathbf{V}$ .

**1.8.7** Classicamente, o momento angular orbital é dado por  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , em que  $\mathbf{p}$  é o momento linear. Para passar da mecânica clássica para a mecânica quântica, substitua  $\mathbf{p}$  pelo operador  $-i\nabla$  (Seção 15.6). Mostre que o operador do momento angular da mecânica quântica tem componentes cartesianas (em unidades de  $\hbar$ )

$$\begin{aligned} L_x &= -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_y &= -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ L_z &= -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

**1.8.8** Usando os operadores de momento angular dados anteriormente, mostre que eles satisfazem relações de comutação da forma

$$[L_x, L_y] \equiv L_x L_y - L_y L_x = iL_z$$

e, portanto,

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}.$$

Essas relações de comutação serão consideradas mais adiante como definindo relações de um operador de momento angular — Exercício 3.2.15, exercício seguinte e Capítulo 4.

**1.8.9** Com a notação de colchetes de comutação  $[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$ , o vetor do momento angular  $\mathbf{L}$  satisfaz  $[L_x, L_y] = iL_z$ , etc., ou  $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ .

Se dois outros vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  comutarem um com o outro e com  $\mathbf{L}$ , isto é,  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{L}] = [\mathbf{b}, \mathbf{L}] = 0$ , mostre que

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{L}] = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}.$$

**1.8.10** Para  $\mathbf{A} = \hat{x}A_x(x, y, z)$  e  $\mathbf{B} = \hat{x}B_x(x, y, z)$ , avalie cada termo no vetor identidade

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

e verifique se a identidade foi satisfeita.

**1.8.11** Verifique a identidade vetorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}).$$

**1.8.12** Como uma alternativa à identidade vetorial do Exemplo 1.8.3 mostre que

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

**1.8.13** Verifique a identidade

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla(A^2) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

**1.8.14** Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são vetores constantes, mostre que

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

**1.8.15** Uma distribuição de correntes elétricas cria um momento magnético constante  $\mathbf{m} = \text{const.}$  A força sobre  $\mathbf{m}$  em uma indução magnética externa  $\mathbf{B}$  é dada por

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}).$$

Mostre que

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}.$$

*Nota:* Admitindo nenhuma dependência temporal dos campos, as equações de Maxwell resultam  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ . Também  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

**1.8.16** Um dipolo elétrico de momento  $\mathbf{p}$  está localizado na origem. O dipolo cria uma potencial elétrico em  $\mathbf{r}$  dado por

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Ache o campo elétrico,  $\mathbf{E} = -\nabla\psi$  em  $\mathbf{r}$ .

**1.8.17** O potencial vetorial  $\mathbf{A}$  de um dipolo magnético, momento de dipolo  $\mathbf{m}$ , é dado por  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)(\mathbf{m} \times \mathbf{r}/r^3)$ . Mostre que a indução magnética  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  é dada por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3}.$$

*Nota:* O processo limitador que resulta em dipolos pontuais é discutido na Seção 12.1 para dipolos elétricos e na Seção 12.5 para dipolos magnéticos.

**1.8.18** A velocidade do fluxo bidimensional de um líquido é dada por

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{x}}u(x, y) - \hat{\mathbf{y}}v(x, y).$$

Se o líquido é incompressível e o fluxo é irrotacional, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Essas são as condições de Cauchy-Riemann da Seção 6.2.

**1.8.19** A avaliação feita nesta seção das quatro integrais para a circulação omitiu termos da série de Taylor como  $\partial V_x/\partial x$ ,  $\partial V_y/\partial y$  e todas as derivadas de segunda ordem. Mostre que  $\partial V_x/\partial x$ ,  $\partial V_y/\partial y$  se cancelam quando as quatro integrais são somadas e que os termos da derivada de segunda ordem são descartados no limite à medida que  $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$ .

*Sugestão:* Calcule a circulação por unidade de área e então tome o limite  $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$ .

## 1.9 Aplicações Sucessivas de $\nabla$

Agora já definimos gradiente, divergência e rotacional para obter vetor, escalar e quantidades vetoriais, respectivamente. Permitindo que  $\nabla$  opere sobre cada uma dessas quantidades, obtemos

$$\begin{aligned} \text{(a) } \nabla \cdot \nabla\varphi, & \quad \text{(b) } \nabla \times \nabla\varphi, & \quad \text{(c) } \nabla\nabla \cdot \mathbf{V}, \\ \text{(d) } \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V}, & \quad \text{(e) } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}), \end{aligned}$$

todas as cinco expressões envolvendo derivadas de segunda ordem e todas elas aparecendo nas equações diferenciais de segunda ordem da física matemática, em particular na teoria eletromagnética.

A primeira expressão,  $\nabla \cdot \nabla\varphi$ , a divergência do gradiente, é denominada laplaciano de  $\varphi$ . Temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla\varphi &= \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{1.81a}$$



Quando  $\varphi$  é o potencial eletrostático, temos

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (1.81b)$$

em pontos em que a densidade de carga reduz-se a zero, que é a equação de Laplace da eletrostática. Muitas vezes, a combinação  $\nabla \cdot \nabla$  é escrita  $\nabla^2$  ou  $\Delta$  na literatura européia.

### Exemplo 1.9.1 LAPLACIANO DE UM POTENCIAL

Calcule  $\nabla \cdot \nabla V(r)$ .

Referindo aos Exemplos 1.6.1 e 1.7.2,

$$\nabla \cdot \nabla V(r) = \nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{dV}{dr} = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2},$$

substituindo  $f(r)$  no Exemplo 1.7.2 por  $1/r \cdot dV/dr$ . Se  $V(r) = r^n$ , essa expressão se reduz a

$$\nabla \cdot \nabla r^n = n(n+1)r^{n-2},$$

que se reduz a zero para  $n = 0$  [ $V(r) = \text{constante}$ ] e para  $n = -1$ ; isto é,  $V(r) = 1/r$  é a solução da Equação de Laplace,  $\nabla^2 V(r) = 0$ . Isso para  $r \neq 0$ . Em  $r = 0$ , está envolvida uma função delta de Dirac (veja a Equação (1.169) e a Seção 9.7). ■

A expressão (b) pode ser escrita

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Expandindo o determinante, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \varphi &= \hat{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) \\ &+ \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.82)$$

admitindo que a ordem da diferenciação parcial pode ser permutada. Isso é verdade, contanto que essas derivadas parciais de segunda ordem de  $\varphi$  sejam funções contínuas. Então, pela Equação (1.82), o rotacional de um gradiente é identicamente zero. Por conseguinte, todos os gradientes são irrotacionais. Note que o zero na Equação (1.82) vem como uma identidade matemática, independente de qualquer física. O zero na Equação (1.81b) é uma consequência da física.

A expressão (d) é um produto escalar triplo que pode ser escrito

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \quad (1.83)$$

Novamente, admitindo continuidade de modo que a ordem de diferenciação seja irrelevante, obtemos

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0. \quad (1.84)$$

A divergência de um rotacional desaparece ou todos os rotacionais são solenoidais. Na Seção 1.16 veremos que os vetores podem ser resolvidos em partes solenoidais e partes irrotacionais pelo teorema de Helmholtz.

As duas expressões restantes satisfazem a uma relação

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}, \quad (1.85)$$

válida em coordenadas cartesianas (mas não em coordenadas curvas). Isso segue imediatamente da Equação (1.55), a regra  $BAC-CAB$  que reescrevemos, de modo que  $\mathbf{C}$  apareça na extrema direita de cada termo. O termo  $\nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$  não foi incluído em nossa lista, mas pode ser **definido** pela Equação (1.85).

### Exemplo 1.9.2 EQUAÇÃO DE ONDA ELETROMAGNÉTICA

Uma importante aplicação dessa relação vetorial (Equação 1.86) aparece na derivação da equação de onda eletromagnética. No vácuo, as equações de Maxwell tornam-se

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.86a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.86b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.86c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.86d)$$

Aqui,  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,  $\mathbf{B}$  é a indução magnética,  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética (unidades SI), portanto  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ,  $c$  sendo a velocidade da luz. A relação tem conseqüências importantes. Como  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  podem ser medidos em qualquer referencial, a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial.

Suponha que eliminemos  $\mathbf{B}$  das Equações (1.87c) e (1.87d). Podemos fazer isso tomando o rotacional de ambos os lados da Equação (1.87d) e a derivada em relação ao tempo de ambos os lados da Equação (1.87c). Visto que as derivadas de espaço e tempo comutam,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

A aplicação das Equações (1.86) e (1.87b) resulta

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.87)$$

a equação vetorial da onda eletromagnética. Novamente, se  $\mathbf{E}$  for expresso em coordenadas cartesianas, a Equação (1.87) se separa em três equações escalares de onda, cada uma envolvendo o laplaciano escalar.

Quando carga elétrica e densidades de corrente externas são mantidas como termos dominantes nas equações de Maxwell, equações de onda similares são válidas para o potencial elétrico e para o potencial vetor. Para mostrar isso, resolvemos a Equação (1.86a) escrevendo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  como uma espiral do potencial vetorial. Essa expressão é substituída na lei da indução de Faraday em forma diferencial, Equação (1.86d), para resultar  $\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ . O rotacional que desaparece implica que  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  é um gradiente e, portanto, pode ser escrito como  $-\nabla \varphi$ , em que  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  é definido como o potencial elétrico (não-estático). Esses resultados para os campos  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}, \quad (1.88)$$

resolvem as equações homogêneas de Maxwell.

Agora mostramos que as equações não-homogêneas de Maxwell,

$$\text{lei de Gauss: } \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0}, \quad \text{lei de Oersted: } \boxed{\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}}, \quad (1.89)$$

em forma diferencial levam a equações de onda para os potenciais  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$ , contanto que  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  seja determinado pela restrição  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Essa opção por fixar a divergência do potencial vetorial, denominada **calibre de Lorentz**, serve para desvincular as equações diferenciais de ambos os potenciais. Esse vínculo de calibre não é uma restrição; não tem nenhum efeito físico.

Substituindo nossa solução do campo elétrico na lei de Gauss temos

$$\boxed{\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}}, \quad (1.90)$$





a equação de onda para o potencial elétrico. Na última etapa utilizamos o calibre de Lorentz para substituir a divergência do potencial vetor pela derivada em relação ao tempo do potencial elétrico e assim desvincular  $\varphi$  de  $\mathbf{A}$ .

Por fim, substituímos  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  na lei de Oersted e usamos a Equação (1.85), que expande  $\nabla^2$  em termos de uma componente longitudinal (o termo gradiente) e de uma componente transversal (o termo rotacional). Isso resulta

$$\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \left( \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right),$$

em que usamos a solução do campo elétrico (Equação (1.88)) na última etapa. Agora vemos que a condição do calibre de Lorentz elimina os termos de gradiente, de modo que a equação de onda

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad (1.91)$$

para o potencial vetor permaneça.

Por fim, voltando à lei de Oersted, tomando a divergência da Equação (1.89), desprezando  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ , e substituindo a lei de Gauss por  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , encontramos  $\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ , em que  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ , isto é, a equação de continuidade para a densidade de corrente. Essa etapa justifica a inclusão da corrente de deslocamento de Maxwell na generalização da lei de Oersted para situações não-estacionárias. ■

## Exercícios

1.9.1 Verifique a Equação (1.85),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V},$$

por expansão direta em coordenadas cartesianas.

1.9.2 Mostre que a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

resulta da regra  $BAC-CAB$  para um produto vetorial triplo. Justifique qualquer alteração da ordem de fatores nos termos  $BAC$  e  $CAB$ .

1.9.3 Prove que  $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$ .

1.9.4 Dado que o rotacional de  $\mathbf{F}$  é igual ao rotacional de  $\mathbf{G}$ , mostre que a diferença entre  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  pode ser (a) uma constante e (b) um gradiente de uma função escalar.

1.9.5 A equação de Navier-Stokes da hidrodinâmica contém um termo não-linear  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ . Mostre que o rotacional desse termo pode ser escrito como  $-\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]$ .

1.9.6 Da equação de Navier-Stokes para o fluxo constante de um fluido viscoso incompressível, temos o termo

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})],$$

em que  $\mathbf{v}$  é a velocidade do fluido. Mostre que esse termo reduz-se a zero para o caso especial.

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}v(y, z).$$

1.9.7 Prove que  $(\nabla u) \times (\nabla v)$  é solenoidal, em que  $u$  e  $v$  são funções escalares diferenciáveis.

1.9.8  $\varphi$  é um escalar que satisfaz a equação de Laplace,  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Mostre que  $\nabla \varphi$  é solenoidal e **também** irrotacional.

1.9.9 Sendo  $\psi$  uma função escalar (de onda), mostre que

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\psi = r^2 \nabla^2 \psi - r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

(Na verdade, isso pode ser demonstrado com mais facilidade em coordenadas esféricas polares, Seção 2.5.)

**1.9.10** Em uma massa isolada (não-rotacional), tal como uma estrela, a condição para equilíbrio é

$$\nabla P + \rho \nabla \varphi = 0 .$$

Aqui,  $P$  é a pressão total,  $\rho$  é a densidade e  $\varphi$  é o potencial gravitacional. Mostre que, a qualquer ponto dado, as normais às superfícies de pressão constante e potencial gravitacional constante são paralelas.

**1.9.11** Na teoria do elétron de Pauli, encontramos a expressão

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi,$$

em que  $\psi$  é uma função (de onda) escalar e  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor magnético relacionado à indução magnética  $\mathbf{B}$  por  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Dado que  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , mostre que essa expressão se reduz a  $i e \mathbf{B} \psi$ . Mostre que isso leva ao  $g$  fator orbital  $g_L = 1$  escrevendo o momento magnético como  $\boldsymbol{\mu} = g_L \mathbf{L}$  em unidades de magnetons de Bohr e  $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ . Veja também Exercício 1.13.7.

**1.9.12** Mostre que qualquer solução da equação

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - k^2 \mathbf{A} = 0$$

satisfaz automaticamente a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$$

e a condição solenoidal

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

*Sugestão:* Deixe  $\nabla \cdot$  operar na primeira equação.

**1.9.13** A teoria da condução de calor leva a uma equação do tipo

$$\nabla^2 \Psi = k |\nabla \Phi|^2,$$

em que  $\Phi$  é um potencial que satisfaz à equação de Laplace:  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Mostre que uma solução dessa equação é

$$\Psi = \frac{1}{2} k \Phi^2.$$

## 1.10 Integração Vetorial

A etapa seguinte após a diferenciação de vetores é integrá-los. Vamos começar com integrais de linha e então prosseguir com integrais de superfície e de volume. Em cada caso, o método de ataque será reduzir as integrais vetoriais a integrais escalares, com as quais supomos que o leitor esteja familiarizado.

### Integrais de linha

Usando um incremento de comprimento  $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} dx + \hat{\mathbf{y}} dy + \hat{\mathbf{z}} dz$ , podemos encontrar as integrais de linha

$$\int_C \varphi d\mathbf{r}, \tag{1.92a}$$

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.92b}$$

$$\int_C \mathbf{V} \times d\mathbf{r}. \tag{1.92c}$$

Em cada uma dessas expressões a integral é sobre algum contorno  $C$  que pode ser aberto (ponto inicial e ponto final separados) ou fechado (formando um circuito fechado). Por causa de sua interpretação física apresentada a seguir, a segunda forma, Equação (1.92b), é, de longe, a mais importante das três.

Com  $\varphi$ , um escalar, a primeira integral se reduz imediatamente a

$$\int_C \varphi d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} \int_C \varphi(x, y, z) dx + \hat{\mathbf{y}} \int_C \varphi(x, y, z) dy + \hat{\mathbf{z}} \int_C \varphi(x, y, z) dz. \tag{1.93}$$



Essa separação empregou a relação

$$\int \hat{\mathbf{x}}\varphi dx = \hat{\mathbf{x}} \int \varphi dx, \tag{1.94}$$

que é permissível porque os vetores unitários cartesianos  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  são constantes em módulos, bem como em direção. Talvez essa relação seja óbvia nesse caso, mas não será nos sistemas não-cartesianos encontrados no Capítulo 2.

As três integrais do lado direito da Equação (1.93) são integrais escalares comuns, e, para evitar complicações, admitimos que elas são integrais de Riemann. Contudo, note que a integral em relação a  $x$  não pode ser avaliada a menos que  $y$  e  $z$  sejam conhecidos em termos de  $x$ , e o mesmo vale para as integrais em relação a  $y$  e  $z$ . Isso significa simplesmente que o trajeto de integração  $C$  deve ser especificado. A menos que o integrando tenha propriedades especiais, de modo que a integral dependa somente do valor das extremidades, o valor dependerá da escolha particular do contorno  $C$ . Por exemplo, se escolhermos o caso muito especial de  $\varphi = 1$ , a Equação (1.91a) é apenas a distância vetorial desde o início do contorno  $C$  até a extremidade, nesse caso independente da escolha de trajeto conectando as extremidades fixas. Com  $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} dx + \hat{\mathbf{y}} dy + \hat{\mathbf{z}} dz$ , a segunda e a terceira formas também se reduzem a integrais escalares e, como na Equação (1.92a), são dependentes, em geral, da escolha do trajeto. A forma (Equação (1.92b)) é exatamente a mesma encontrada quando calculamos o trabalho realizado por uma força que varia ao longo do trajeto.

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_x(x, y, z) dx + \int F_y(x, y, z) dy + \int F_z(x, y, z) dz. \tag{1.95a}$$

Nessa expressão,  $\mathbf{F}$  é a força exercida sobre uma partícula.

### Exemplo 1.10.1 TRABALHO DEPENDENTE DO TRAJETO

A força exercida sobre um corpo é  $\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x$ . O problema é calcular o trabalho realizado quando se vai da origem ao ponto  $(1, 1)$ :

$$W = \int_{0,0}^{1,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{0,0}^{1,1} (-y dx + x dy). \tag{1.95b}$$

Separando as duas integrais, obtemos

$$W = - \int_0^1 y dx + \int_0^1 x dy. \tag{1.95c}$$

A primeira integral não pode ser avaliada até que especifiquemos os valores de  $y$  quando  $x$  vai de 0 a 1. Da mesma forma, a segunda integral requer que  $x$  seja uma função de  $y$ . Considere, em primeiro lugar, o trajeto mostrado na Figura 1.25. Então

$$W = - \int_0^1 0 dx + \int_0^1 1 dy = 1, \tag{1.95d}$$

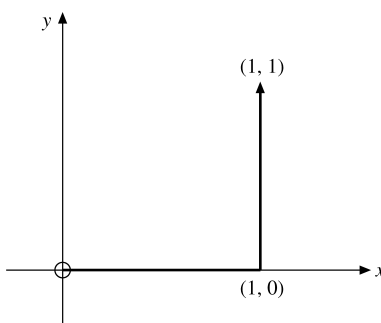


Figura 1.25: Um trajeto de integração.

$y = 0$  ao longo do primeiro segmento do trajeto e  $x = 1$  ao longo do segundo. Se selecionarmos o trajeto  $[x = 0, 0 \leq y \leq 1]$  e  $[0 \leq x \leq 1, y = 1]$ , então a Equação (1.95c) dá  $W = -1$ . Para essa força, o trabalho realizado depende da escolha do trajeto.

### Integrais de Superfície

Integrais de superfície aparecem nas mesmas formas que integrais de linha, sendo o elemento de área também um vetor,  $d\sigma$ .<sup>20</sup> Esse elemento de área costuma ser escrito  $\mathbf{n}dA$ , no qual  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário (normal) para indicar a direção positiva.<sup>21</sup> Há duas convenções para escolher a direção positiva. Na primeira, se a superfície for uma superfície fechada, concordamos em tomar a direção normal para fora como positiva. Na segunda, se a superfície for uma superfície aberta, a normal positiva depende da direção na qual o perímetro da superfície aberta é percorrido. Se os dedos da mão direita forem colocados na direção do percurso ao redor do perímetro, a normal positiva será indicada pelo polegar da mão direita. Como ilustração, o círculo no plano  $xy$  (Figura 1.26) mapeado de  $x$  para  $y$  para  $-x$  para  $-y$  e de volta para  $x$  terá sua normal positiva paralela ao eixo  $z$  positivo (para o sistema de coordenadas dextrogras).

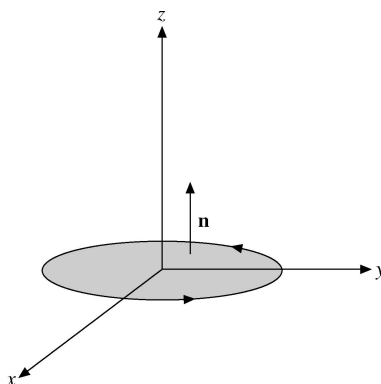


Figura 1.26: Regra da mão direita para a normal positiva.

Análogas às integrais de linha, Equações (1.92a) a (1.92c), as integrais de superfície podem aparecer nas formas

$$\int \varphi d\sigma, \quad \int \mathbf{V} \cdot d\sigma, \quad \int \mathbf{V} \times d\sigma.$$

Mais uma vez, o produto escalar é, de longe, a forma mais comumente encontrada. A integral de superfície  $\int \mathbf{V} \cdot d\sigma$  pode ser interpretada como um escoamento ou fluxo através da superfície dada. E isso foi o que realmente fizemos na Seção 1.7 para obter a significância do termo de divergência. Essa identificação reaparece na Seção 1.11 como teorema de Gauss. Note que, em termos físicos, bem como pelo produto escalar, as componentes tangenciais da velocidade nada contribuem para o fluxo através da superfície.

### Integrais de Volume

Integrais de volume são um tanto mais simples, porque o elemento de volume  $d\tau$  é uma quantidade escalar.<sup>22</sup> Temos

$$\int_V \mathbf{V} d\tau = \hat{\mathbf{x}} \int_V V_x d\tau + \hat{\mathbf{y}} \int_V V_y d\tau + \hat{\mathbf{z}} \int_V V_z d\tau, \tag{1.96}$$

novamente reduzindo a integral vetorial a uma soma vetorial de integrais escalares.

### Definições Integrais de Gradiente, Divergência e Rotacional

Uma aplicação interessante e significativa de nossas integrais de superfície e volume é sua utilização no desenvolvimento de definições alternativas de nossas relações diferenciais. Encontramos

$$\nabla \varphi = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\sigma}{\int d\tau}, \tag{1.97}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\sigma}{\int d\tau}, \tag{1.98}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int d\sigma \times \mathbf{V}}{\int d\tau}. \tag{1.99}$$

<sup>20</sup>Lembre-se de que na Seção 1.4 a área (de um paralelogramo) é representada por um **vetor** de produto externo.

<sup>21</sup>Embora  $\mathbf{n}$  sempre tenha comprimento unitário, sua direção pode perfeitamente ser uma função da posição.

<sup>22</sup>Os símbolos  $d^3r$  e  $d^3x$  costumam ser usados para denotar um elemento de volume em espaço de coordenadas ( $xyz$  ou  $x_1x_2x_3$ ).



Nessas três equações,  $\int d\tau$  é o volume de uma pequena região do espaço e  $d\sigma$  é o elemento de área vetorial desse volume. A identificação da Equação (1.98) como a divergência de  $\mathbf{V}$  foi realizada na Seção 1.7. Aqui, mostramos que a Equação (1.97) é consistente com nossa definição anterior de  $\nabla\varphi$  (Equação (1.60)). Por simplicidade, escolhemos  $d\tau$  como o volume diferencial  $dx dy dz$  (Figura 1.27). Desta vez, colocamos a origem no centro geométrico de nosso elemento de volume. A integral de área leva a seis integrais, uma para cada uma das seis faces. Lembrando que  $d\sigma$  aponta para fora,  $d\sigma \cdot \hat{\mathbf{x}} = -|d\sigma|$  para a superfície  $EFHG$  e  $+|d\sigma|$  para a superfície  $ABDC$ , temos

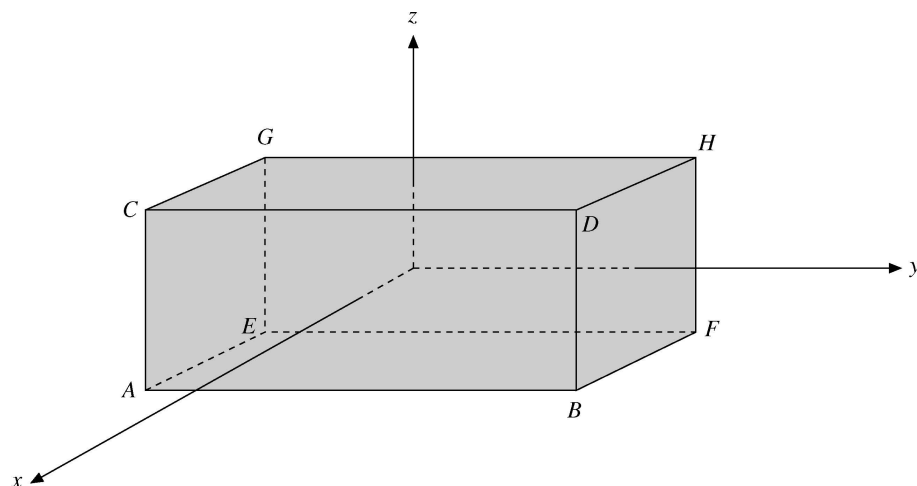


Figura 1.27: Paralelepípedo retangular diferencial (origem no centro).

$$\begin{aligned} \int \varphi d\sigma &= -\hat{\mathbf{x}} \int_{EFHG} \left( \varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \hat{\mathbf{x}} \int_{ABDC} \left( \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \\ &\quad - \hat{\mathbf{y}} \int_{AEGC} \left( \varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \hat{\mathbf{y}} \int_{BFHD} \left( \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ &\quad - \hat{\mathbf{z}} \int_{ABFE} \left( \varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy + \hat{\mathbf{z}} \int_{CDHG} \left( \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Usando as variações totais, avaliamos cada integrando na origem com uma correção incluída para corrigir o deslocamento ( $\pm dx/2$ , etc.) do centro da face em relação à origem. Tendo escolhido o volume total como de tamanho diferencial ( $\int d\tau = dx dy dz$ ), abandonamos os sinais de integral no lado direito e obtemos

$$\int \varphi d\sigma = \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (1.100)$$

Dividindo por

$$\int d\tau = dx dy dz,$$

verificamos a Equação (1.97).

Essa verificação foi supersimplificada ao ignorar outros termos de correção além das derivadas de primeira ordem. Esses termos adicionais, que são introduzidos na Seção 5.6, quando é desenvolvida a expansão de Taylor, desaparecem no limite

$$\int d\tau \rightarrow 0 \quad (dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0, dz \rightarrow 0).$$

Essa, é claro, é a razão para especificar que esse limite fosse tomado nas Equações (1.97), (1.98) e (1.99). A verificação da Equação (1.99) segue exatamente essas mesmas linhas, utilizando um volume diferencial  $dx dy dz$ .

### Exercícios

**1.10.1** O campo de força que age sobre um oscilador linear bidimensional pode ser descrito por

$$\mathbf{F} = -\hat{x}kx - \hat{y}ky.$$

Compare o trabalho realizado movimentando-se contra esse campo de força entre (1, 1) a (4, 4) pelos seguintes trajetos em linha reta:

- (a) (1, 1) → (4, 1) → (4, 4)
- (b) (1, 1) → (1, 4) → (4, 4)
- (c) (1, 1) → (4, 4) ao longo de  $x = y$ .

Isso significa avaliar

$$-\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ao longo de cada trajeto.

**1.10.2** Ache o trabalho realizado para percorrer um círculo unitário no plano  $xy$ :

- (a) no sentido anti-horário de 0 a  $\pi$ ,
- (b) no sentido horário de 0 a  $-\pi$ , realizando trabalho **contra** um campo de força dado por

$$\mathbf{F} = \frac{-\hat{x}y}{x^2 + y^2} + \frac{\hat{y}x}{x^2 + y^2}.$$

Note que o trabalho realizado depende do trajeto.

**1.10.3** Calcule o trabalho que você realiza para ir de um ponto (1, 1) a um ponto (3, 3). A força que **você exerce** é dada por

$$\mathbf{F} = \hat{x}(x - y) + \hat{y}(x + y).$$

Especifique claramente o trajeto que escolheu. Note que esse campo de força é não-conservativo.

**1.10.4** Avalie  $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ .

*Nota:* O símbolo  $\oint$  significa que o trajeto de integração é um circuito fechado.

**1.10.5** Avalie

$$\frac{1}{3} \int_s \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

sobre o cubo unitário definido pelo ponto (0, 0, 0) e as interseções unitárias sobre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  positivos. Note que (a)  $\mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  é zero para três das superfícies e (b) cada uma das três superfícies restantes contribui com a mesma quantidade para a integral.

**1.10.6** Mostre, por expansão da integral de superfície, que

$$\lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int_s d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}}{\int d\tau} = \nabla \times \mathbf{V}.$$

*Sugestão:* Escolha o volume  $\int d\tau$  como um volume diferencial  $dx dy dz$ .

## 1.11 Teorema de Gauss

Aqui derivamos uma relação útil entre uma integral de superfície de um vetor e a integral de volume da divergência daquele vetor. Vamos admitir que o vetor  $\mathbf{V}$  e suas derivadas de primeira ordem sejam contínuos sobre a região simplesmente conectada (que não tem orifício, tal como o de uma rosquinha) de interesse. Então, o teorema de Gauss afirma que

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau.} \tag{1.101a}$$

Traduzindo em palavras, a integral de superfície de um vetor sobre uma superfície fechada é igual à integral de volume da divergência daquele vetor integrada sobre o volume incluído pela superfície.

Imagine que o volume  $V$  seja subdividido em um número arbitrariamente grande de pequeninos paralelepípedos (diferenciais). Para cada paralelepípedo

$$\sum_{\text{seis superfícies}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau, \tag{1.101b}$$

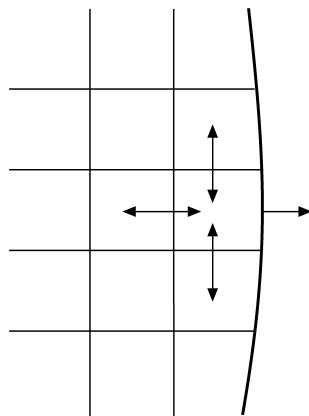


Figura 1.28: Cancelamento exato de  $d\sigma$  sobre superfícies **interiores**. Nenhum cancelamento sobre a superfície **exterior**.

pela análise da Seção 1.7, Equação (1.66), substituindo  $\rho v$  por  $\mathbf{V}$ . O somatório é executado sobre as seis faces do paralelepípedo. Fazendo o somatório para todos os paralelepípedos, constatamos que os termos  $\mathbf{V} \cdot d\sigma$  se cancelam (aos pares) para todas as faces **interiores**; somente as contribuições das superfícies **exteriores** (Figura 1.28) sobrevivem. Análogo à definição de uma integral de Riemann como o limite de uma soma, tomamos o limite no qual o número de paralelepípedos se aproxima do infinito ( $\rightarrow \infty$ ) e as dimensões de cada um se aproximam de zero ( $\rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{\text{superfícies exteriores}} \mathbf{V} \cdot d\sigma &= \sum_{\text{volumes}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau \\ \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \\ \int_S \mathbf{V} \cdot d\sigma &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{V} d\tau. \end{aligned}$$

O resultado é a Equação (1.101a), o teorema de Gauss.

De um ponto de vista físico, a Equação (1.66) determinou  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  como o fluxo líquido de saída de fluido por unidade de volume. A integral de volume então dá o fluxo de saída líquido total. Mas a integral de superfície  $\int \mathbf{V} \cdot d\sigma$  é apenas outra maneira de expressar essa mesma quantidade, que é a igualdade, o teorema de Gauss.

### Teorema de Green

Um corolário do teorema de Gauss freqüentemente usado é uma relação conhecida como teorema de Green. Se  $u$  e  $v$  são duas funções escalares, temos as identidades

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = u \nabla \cdot \nabla v + (\nabla u) \cdot (\nabla v), \tag{1.102}$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = v \nabla \cdot \nabla u + (\nabla v) \cdot (\nabla u). \tag{1.103}$$

Subtraindo a Equação (1.103) da Equação (1.102), integrando sobre um volume ( $u, v$  e suas derivadas, admitidas como contínuas) e aplicando a Equação (1.101a) (teorema de Gauss), obtemos

$$\boxed{\iiint_V (u \nabla \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \nabla u) d\tau = \iint_{\partial V} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\sigma.} \tag{1.104}$$

Esse é o teorema de Green. Nós o utilizamos para desenvolver funções de Green no Capítulo 9. Uma forma alternativa do teorema de Green, derivada apenas da Equação (1.102), é

$$\iint_{\partial V} u \nabla v \cdot d\sigma = \iiint_V u \nabla \cdot \nabla v d\tau + \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v d\tau. \tag{1.105}$$

Essa é a forma do teorema de Green usada na Seção 1.16.

### Formas alternativas do Teorema de Gauss

Embora a Equação (1.101a) envolvendo a divergência seja, de longe, a forma mais importante do teorema de Gauss, integrais de volume envolvendo o gradiente e o rotacional também podem aparecer. Suponha

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V(x, y, z)\mathbf{a}, \quad (1.106)$$

no qual  $\mathbf{a}$  é um vetor de módulo constante e direção constante, porém arbitrária. (Você escolhe a direção, porém, tão logo a escolha, conserve-a fixa.) A Equação (1.101a) torna-se

$$\mathbf{a} \cdot \oiint_{\partial V} V d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}V d\tau = \mathbf{a} \cdot \iiint_V \boldsymbol{\nabla} V d\tau \quad (1.107)$$

pela Equação (1.67b). Essa expressão pode ser reescrita como

$$\mathbf{a} \cdot \left[ \oiint_{\partial V} V d\boldsymbol{\sigma} - \iiint_V \boldsymbol{\nabla} V d\tau \right] = 0. \quad (1.108)$$

Visto que  $|\mathbf{a}| \neq 0$  e sua direção são arbitrários, significando que o co-seno do ângulo incluído **nem sempre** pode desaparecer, os termos entre colchetes devem ser zero.<sup>23</sup> O resultado é

$$\oiint_{\partial V} V d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} V d\tau. \quad (1.109)$$

De maneira semelhante, usando  $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{P}$  no qual  $\mathbf{a}$  é um vetor constante, podemos mostrar

$$\oiint_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{P} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{P} d\tau. \quad (1.110)$$

Essas duas últimas formas do teorema de Gauss são usadas na forma vetorial da teoria da difração de Kirchoff. Elas também podem ser usadas para verificar as Equações (1.97) e (1.99). O teorema de Gauss também pode ser estendido para tensores (veja a Seção 2.11).

### Exercícios

**1.11.1** Usando o teorema de Gauss, prove que

$$\oiint_S d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

Se  $S = \partial V$  for uma superfície fechada.

**1.11.2** Mostre que

$$\frac{1}{3} \oiint_S \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = V,$$

em que  $V$  é o volume contido pela superfície fechada  $S = \partial V$ .

*Nota:* Essa é uma generalização do Exercício 1.10.5.

**1.11.3** Se  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ , mostre que

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

para qualquer superfície fechada  $S$ .

**1.11.4** Sobre algum volume  $V$  seja  $\psi$  uma solução da equação de Laplace (com as derivadas aparecendo como contínuas). Prove que a integral sobre qualquer superfície fechada em  $V$  da derivada normal de  $\psi$  ( $\partial\psi/\partial n$  ou  $\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \mathbf{n}$ ) será zero.

**1.11.5** Por analogia com a definição integral de gradiente, divergência e rotacional da Seção 1.10, mostre que

$$\nabla^2 \varphi = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \boldsymbol{\nabla} \varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}.$$

<sup>23</sup>Essa exploração da natureza **arbitrária** de uma parte de um problema é uma técnica valiosa e muito utilizada. O vetor arbitrário é usado novamente nas Seções 1.12 e 1.13. Outros exemplos aparecem na Seção 1.14 (integrandos igualados) e na Seção 2.8, sobre regra do quociente.





- 1.11.6** O vetor deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  satisfaz a equação de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , em que  $\rho$  é a densidade de carga (por unidade de volume). Na fronteira entre dois meios há uma densidade de carga superficial  $\sigma$  (por unidade de área). Mostre que uma condição de fronteira para  $\mathbf{D}$  é

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma,$$

em que  $\mathbf{n}$  é um vetor normal à superfície e está fora do meio 1.

*Sugestão:* Considere uma caixinha como a mostrada na Figura 1.29.

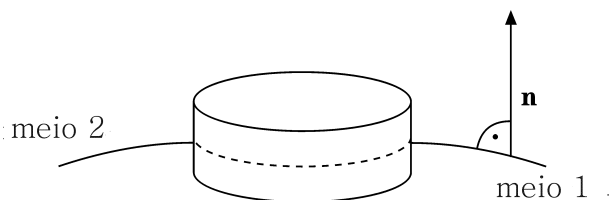


Figura 1.29: Caixinha.

- 1.11.7** Pela Equação (1.67b), com  $\mathbf{V}$  o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e  $f$  o potencial eletrostático  $\varphi$ , mostre que, para integração sobre todo o espaço,

$$\int \rho \varphi d\tau = \epsilon_0 \int E^2 d\tau.$$

Isso corresponde a uma integração tridimensional por partes.

*Sugestão:*  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ . Você pode admitir que  $\varphi$  se reduz a zero quando  $r$  é grande, pelo menos tão rapidamente quanto  $r^{-1}$ .

- 1.11.8** Uma determinada distribuição de corrente elétrica estacionária está localizada no espaço. Escolhendo uma superfície de fronteira longe o suficiente para que a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  seja zero em todos os pontos da superfície, mostre que

$$\iiint \mathbf{J} d\tau = 0.$$

*Sugestão:* Tome uma componente de  $\mathbf{J}$  por vez. Com  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , mostre que  $J_i = \nabla \cdot (x_i \mathbf{J})$  e aplique o teorema de Gauss.

- 1.11.9** Pode-se demonstrar que a criação de um sistema **localizado** de correntes elétricas estacionárias (densidade de corrente  $\mathbf{J}$ ) e campos magnéticos pode requerer uma quantidade de trabalho

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau.$$

Transforme isso em

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\tau.$$

Aqui  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor magnético:  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

*Sugestão:* Nas equações de Maxwell tome o termo corrente de deslocamento  $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$ . Se os campos e correntes forem localizados, pode-se tomar uma superfície limitadora longe o suficiente para que as integrais dos campos e correntes sobre a superfície resultem zero.

- 1.11.10** Prove a generalização do teorema de Green:

$$\iiint_V (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}v) d\tau = \iint_{\partial V} p(v\nabla u - u\nabla v) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Aqui  $\mathcal{L}$  é o operador auto-adjunto (Seção 10.1),

$$\mathcal{L} = \nabla \cdot [p(\mathbf{r})\nabla] + q(\mathbf{r})$$

e  $p, q, u$  e  $v$  são funções da posição, sendo que  $p$  e  $q$  têm derivadas de primeira ordem contínuas e  $u$  e  $v$  têm derivadas de segunda ordem contínuas.

*Nota:* Esse teorema de Green generalizado aparece na Seção 9.7.

### 1.12 Teorema de Stokes

O teorema de Gauss relaciona a integral de volume de uma derivada de uma função com uma integral da função sobre a superfície fechada que limita o volume. Aqui consideramos a relação análoga entre a integral de superfície de uma derivada de uma função com a integral de linha da função sendo o trajeto de integração o perímetro da superfície limitadora.

Vamos tomar a superfície e subdividi-la em uma rede de retângulos arbitrariamente pequenos. Na Seção 1.8 mostramos que a circulação ao redor de tal retângulo diferencial (no plano  $xy$ ) é  $\nabla \times \mathbf{V}|_z dx dy$ . Pela Equação (1.76) aplicada a um retângulo diferencial,

$$\sum_{\text{quatro lados}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.111}$$

Somamos todos os pequenos retângulos, como na definição de uma integral de Riemann. As contribuições de superfície (lado direito da Equação (1.111)) são somadas. As integrais de linha (lado esquerdo da Equação (1.111)) de todos os segmentos de reta **interiores** se cancelam identicamente. Somente a integral de linha ao redor do perímetro sobrevive (Figura 1.30). Tomando o limite usual à medida que o número de retângulos se aproxima do infinito enquanto  $dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0$ , temos

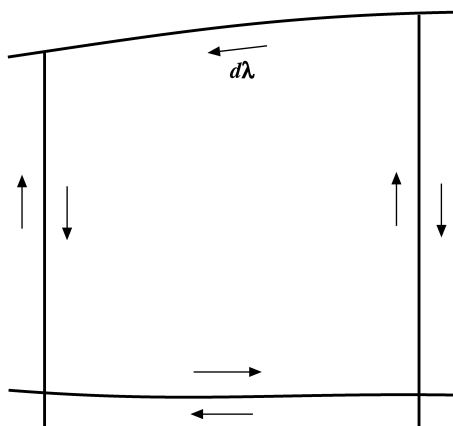


Figura 1.30: Cancelamento exato nos trajetos interiores. Nenhum cancelamento no trajeto **exterior**.

$$\begin{aligned} \sum_{\text{segmentos de reta exteriores}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda} &= \sum_{\text{retângulos}} \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ \downarrow & \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda} &= \int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Esse é o teorema de Stokes. A integral de superfície à direita é sobre a superfície limitada pelo perímetro ou contorno, para a integral de linha à esquerda. A direção do vetor que representa a área está fora do plano do papel apontando para o leitor se a direção da transversal ao redor do contorno para a integral de linha estiver no sentido matemático positivo, como mostrado na Figura 1.30.

Essa demonstração do teorema de Stokes é limitada pelo fato de termos usado uma expansão de Maclaurin de  $\mathbf{V}(x, y, z)$  ao estabelecer a Equação (1.76) na Seção 1.8. Na verdade, basta exigir que o rotacional de  $\mathbf{V}(x, y, z)$  exista e que seja integrável sobre a superfície. Uma prova do teorema da integral de Cauchy análoga ao desenvolvimento do teorema de Stokes feito aqui, porém usando essas condições menos restritivas, aparece na Seção 6.3.

É óbvio que o teorema de Stokes se aplica a uma superfície aberta. É possível considerar uma superfície fechada um caso-limite de uma superfície aberta com a abertura (e, portanto, o perímetro) decrescendo para zero. Esse é o assunto do Exercício 1.12.7.



### Formas Alternativas do Teorema de Stokes

Assim como no teorema de Gauss, outras relações entre integrais de superfície e de linha são possíveis. Encontramos

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla\varphi = \oint_{\partial S} \varphi d\boldsymbol{\lambda} \quad (1.113)$$

e

$$\int_S (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{P}. \quad (1.114)$$

A Equação (1.113) pode ser verificada com facilidade pela substituição  $\mathbf{V} = \mathbf{a}\varphi$ , na qual  $\mathbf{a}$  é um vetor de módulo constante e direção constante, como na Seção 1.11. Substituindo no teorema de Stokes, Equação (1.112),

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{a}\varphi) \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= - \int_S \mathbf{a} \times \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= -\mathbf{a} \cdot \int_S \nabla\varphi \times d\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Para a integral de linha,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a}\varphi \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a} \cdot \oint_{\partial S} \varphi d\boldsymbol{\lambda}, \quad (1.116)$$

obtemos

$$\mathbf{a} \cdot \left( \oint_{\partial S} \varphi d\boldsymbol{\lambda} + \int_S \nabla\varphi \times d\boldsymbol{\sigma} \right) = 0. \quad (1.117)$$

Uma vez que a escolha da direção de  $\mathbf{a}$  é arbitrária, a expressão entre parênteses deve se anular, verificando assim a Equação (1.113). A Equação (1.114) pode ser derivada de forma semelhante usando  $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{P}$ , na qual  $\mathbf{a}$  é, mais uma vez, um vetor constante. Podemos usar o teorema de Stokes para derivar as leis de Oersted e Faraday a partir de duas das equações de Maxwell e vice-versa, reconhecendo assim que as primeiras são uma forma integrada das últimas.

### Exemplo 1.12.1 LEIS DE OERSTED E FARADAY

Considere o campo magnético gerado por um fio elétrico que transporta uma corrente  $I$ . Partindo da lei diferencial de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , Equação (1.89) (com a corrente de deslocamento de Maxwell  $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$  para o caso de uma corrente estacionária pela lei de Ohm), integramos sobre uma área fechada  $S$  perpendicular ao fio e o envolvendo e aplicamos o teorema de Stokes para obter

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r},$$

que é a lei de Oersted. Aqui, a integral de linha é ao longo de  $\partial S$ , a curva fechada que circunda a área da seção transversal  $S$ .

De modo semelhante, podemos integrar a equação de Maxwell para  $\nabla \times \mathbf{E}$ , Equação (1.86d), para resultar a lei da indução de Faraday. Imagine movimentar um circuito fechado ( $\partial S$ ) de fio (de área  $S$ ) através de um campo de indução magnética  $\mathbf{B}$ . Integramos a equação de Maxwell e usamos o teorema de Stokes, resultando

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

que é a lei de Faraday. A integral de linha do lado esquerdo representa a voltagem induzida no circuito fechado de fio, enquanto o lado direito é a mudança ao longo do tempo do fluxo magnético  $\Phi$  através da superfície móvel  $S$  do fio. ■

Os teoremas de Stokes e de Gauss são de grande importância em uma ampla variedade de problemas que envolvem cálculo vetorial. Podemos ter uma idéia de seu poder e versatilidade pelos exercícios das Seções 1.11 e 1.12 e pelo desenvolvimento da teoria do potencial nas Seções 1.13 e 1.14.

**Exercícios**

- 1.12.1** Dado um vetor  $\mathbf{t} = -\hat{x}y + \hat{y}x$ , mostre, com a ajuda do teorema de Stokes, que a integral ao redor de uma curva fechada contínua no plano  $xy$ ,

$$\frac{1}{2} \oint \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) = A,$$

é a área limitada pela curva.

- 1.12.2** O cálculo do momento magnético de um circuito fechado de corrente leva à integral de linha

$$\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

- (a) Integre ao redor do perímetro de um circuito de corrente (no plano  $xy$ ) e mostre que a grandeza escalar dessa integral de linha é duas vezes a área da superfície envolvida.  
 (b) O perímetro de uma elipse é descrito por  $\mathbf{r} = \hat{x}a \cos \theta + \hat{y}b \sin \theta$ . Pela parte (a), mostre que a área da elipse é  $\pi ab$ .

- 1.12.3** Avalie  $\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  usando a forma alternativa do teorema de Stokes dada pela Equação (1.114):

$$\int_S (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint d\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{P}.$$

Considere que o circuito está inteiramente sobre o plano  $xy$ .

- 1.12.4** Em estado estacionário o campo magnético  $\mathbf{H}$  satisfaz à equação de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , em que  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente (por metro quadrado). Na fronteira entre dois meios há uma densidade superficial de corrente  $\mathbf{K}$ . Mostre que uma condição de fronteira em  $\mathbf{H}$  é

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

em que  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário normal à superfície e fora do meio 1.

*Sugestão:* Considere um circuito estreito perpendicular à interface, como mostrado na Figura 1.31.

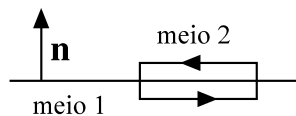


Figura 1.31: Trajeto de integração na fronteira de dois meios.

- 1.12.5** Pelas equações de Maxwell,  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , sendo que, neste caso,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente e  $\mathbf{E} = 0$ , mostre por essa relação, que

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I,$$

em que  $I$  é a corrente elétrica líquida contida pela integral do circuito fechado. Essas são as formas diferencial e integral da lei de Ampère do magnetismo.

- 1.12.6** Uma indução magnética  $\mathbf{B}$  é gerada por corrente elétrica em um anel de raio  $R$ . Mostre que o **módulo** do potencial vetor  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) no anel pode ser

$$|\mathbf{A}| = \frac{\varphi}{2\pi R},$$

em que  $\varphi$  é o fluxo magnético total que passa pelo anel.

*Nota:*  $\mathbf{A}$  é tangencial ao anel e pode ser mudado pela adição do gradiente de uma função escalar.

- 1.12.7** Prove que

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

se  $S$  for uma superfície fechada.



**1.12.8** Avalie  $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$  (Exercício 1.10.4) pelo teorema de Stokes.

**1.12.9** Prove que

$$\oint u \nabla v \cdot d\boldsymbol{\lambda} = - \oint v \nabla u \cdot d\boldsymbol{\lambda}.$$

**1.12.10** Prove que

$$\oint u \nabla v \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S (\nabla u) \times (\nabla v) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

## 1.13 Teoria do Potencial

### Potencial Escalar

Se uma força sobre uma dada região simplesmente conexa do espaço  $S$  (o que significa que ela não tem orifícios) puder ser expressa como o gradiente negativo de uma função escalar  $\varphi$ ,

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi, \tag{1.118}$$

denominamos  $\varphi$  um potencial escalar que descreve a força por uma só função em vez de três. Um potencial escalar é determinado a menos de uma constante aditiva, a qual pode ser usada para ajustar seu valor no infinito (usualmente zero) ou em algum outro ponto. A força  $\mathbf{F}$  que aparece como o gradiente negativo de um potencial escalar de valor único é denominada força **conservativa**. Queremos saber quando existe uma função potencial escalar. Para responder a esta pergunta, estabelecemos duas outras relações como equivalentes à Equação (1.118). São elas

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{1.119}$$

e

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{1.120}$$

para todo trajeto fechado em nossa região simplesmente conectada  $S$ . Vamos mostrar que cada uma dessas três equações implica as outras duas. Começemos com

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi. \tag{1.121}$$

Então

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla\varphi = 0 \tag{1.122}$$

pela Equação (1.82) ou Equação (1.118) implica Equação (1.119). Retornando à integral de linha, temos

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = - \oint d\varphi, \tag{1.123}$$

usando a Equação (1.118). Agora,  $d\varphi$  pode ser integrado para dar  $\varphi$ . Visto que especificamos um circuito fechado, as extremidades coincidem e obtemos zero para todo trajeto fechado em nossa região  $S$  para a qual a Equação (1.118) for válida. Aqui é importante notar a restrição de que o potencial tenha um valor único e que a Equação (1.118) seja válida para **todos** os pontos em  $S$ . Esse problema pode surgir ao usar um potencial magnético escalar, um procedimento perfeitamente válido, contanto que nenhuma corrente líquida esteja envolvida. Tão logo escolhamos um trajeto no espaço que envolva uma corrente líquida, o potencial magnético escalar deixa de ter um valor único e nossa análise não se aplica mais.

Continuando essa demonstração de equivalência, vamos admitir que valha a Equação (1.120). Se  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para todos os trajetos em  $S$ , vemos que o valor da integral que une dois pontos distintos  $A$  e  $B$  é independente do trajeto (Figura 1.32). Nossa premissa é que

$$\oint_{ACBDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{1.124}$$

Portanto,

$$\int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.125}$$

invertendo o sinal pela inversão da direção de integração. Em termos físicos, isso significa que o trabalho realizado para ir de  $A$  a  $B$  é independente do trajeto e que o trabalho realizado para percorrer um trajeto fechado é zero. É por essa razão que denominamos essa força conservativa: a energia é conservada.

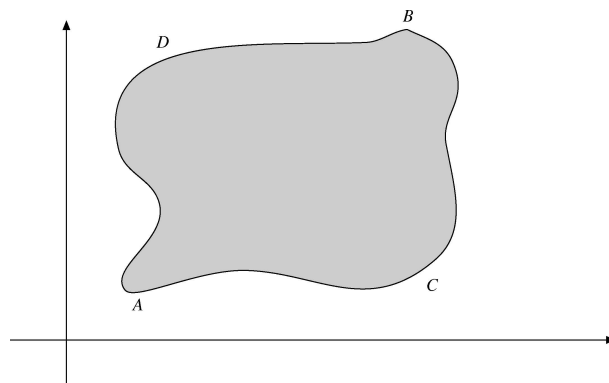


Figura 1.32: Possíveis trajetos para realizar trabalho.

Com o resultado mostrado na Equação (1.125), temos que o trabalho realizado depende somente das extremidades  $A$  e  $B$ . Isto é,

$$\text{Trabalho realizado pela força} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B). \quad (1.126)$$

A Equação (1.126) define um potencial escalar (em termos estritos, a diferença de potencial entre os pontos  $A$  e  $B$ ) e fornece um meio para calcular o potencial. Se o ponto  $B$  for tomado como uma variável, digamos  $(x, y, z)$ , então a diferenciação em relação a  $x, y$  e  $z$  recuperará a Equação (1.118).

A escolha de sinal para o lado direito é arbitrária. Aqui, a escolha é feita para obter concordância com a Equação (1.118) e para garantir que a água correrá montanha abaixo e não montanha acima. Para os pontos  $A$  e  $B$  separados por uma distância  $dr$ , a Equação (1.126) se torna

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -d\varphi = -\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.127)$$

que pode ser reescrita como

$$(\mathbf{F} + \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (1.128)$$

e, visto que  $d\mathbf{r}$  é arbitrária, a Equação (1.118) deve resultar. Se

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (1.129)$$

podemos obter a Equação (1.119) usando o teorema de Stokes (Equação (1.112)):

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (1.130)$$

Se tomarmos o trajeto de integração como o perímetro de uma área diferencial arbitrária  $d\boldsymbol{\sigma}$ , o integrando na integral de superfície deve se anular. Daí a Equação (1.120) implica a Equação (1.119).

Por fim, se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , basta inverter nosso enunciado do teorema de Stokes (Equação (1.130)) para derivar a Equação (1.120). Então, pelas Equações (1.126) a (1.128) é derivado o enunciado inicial  $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ . A tripla equivalência é demonstrada (Figura 1.33). Resumindo, uma função potencial escalar de valor único  $\varphi$  existe se e somente se  $\mathbf{F}$  for irrotacional ou o trabalho executado ao redor de todo o circuito fechado for zero. Os campos de força gravitacional e eletrostática, dados pela Equação (1.79), são irrotacionais e, portanto, conservativos. Potenciais escalares gravitacionais e eletrostáticos existem. Agora, calculando o trabalho realizado (Equação (1.126)), passamos a determinar três potenciais (Figura 1.34).

### Exemplo 1.13.1 POTENCIAL GRAVITACIONAL

Ache o potencial escalar para a força gravitacional sobre uma massa unitária  $m_1$ ,

$$\mathbf{F}_G = -\frac{Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\frac{k\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (1.131)$$

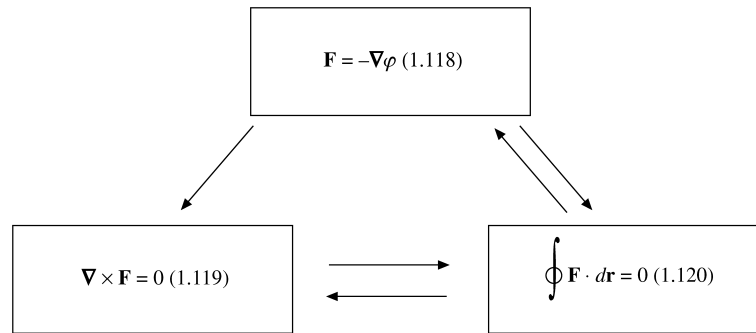


Figura 1.33: Formulações equivalentes de uma força conservativa.

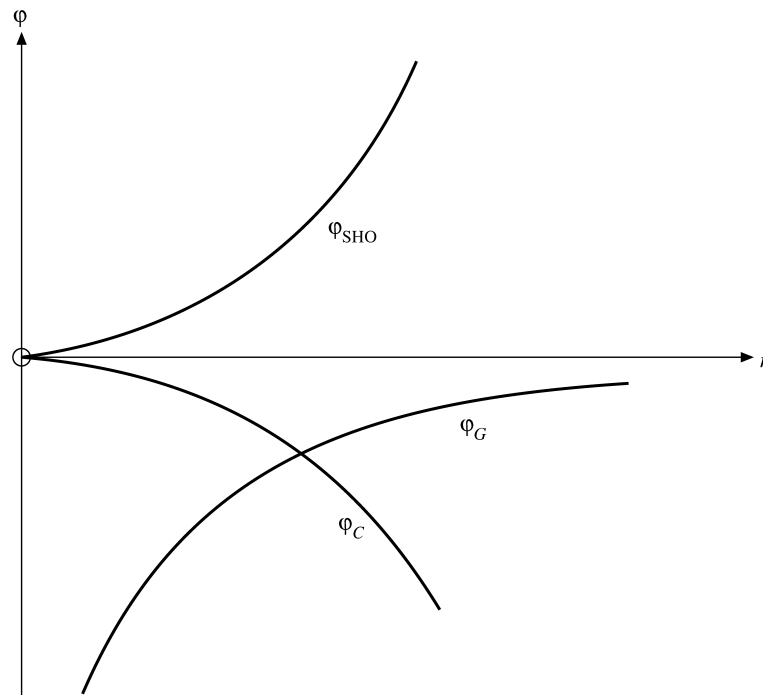


Figura 1.34: Energia potencial *versus* distância (gravitacional, centrífuga e do oscilador harmônico simples).

dirigida radialmente para **dentro**. Integrando a Equação (1.118) de infinito até a posição  $\mathbf{r}$ , obtemos

$$\varphi_G(r) - \varphi_G(\infty) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = + \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.132)$$

Utilizando  $\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}_{\text{aplicada}}$ , uma comparação com a Equação (1.95a) mostra que o potencial é o trabalho realizado para trazer a massa unitária do infinito. (Podemos definir apenas diferença de potencial. Neste caso, determinamos arbitrariamente que o potencial no infinito é zero. A integral do lado direito da Equação (1.132) é negativa, o que significa que  $\varphi_G(r)$  é negativo. Visto que  $\mathbf{F}_G$  é radial, obtemos uma contribuição para  $\varphi$  somente quando  $d\mathbf{r}$  é radial ou

$$\varphi_G(r) = - \int_r^{\infty} \frac{k \, dr}{r^2} = - \frac{k}{r} = - \frac{Gm_1m_2}{r}.$$

O sinal negativo final é uma consequência da força de atração da gravidade. ■

### Exemplo 1.13.2 POTENCIAL CENTRÍFUGO

Calcule o potencial escalar para a força **centrífuga** por massa unitária,  $\mathbf{F}_C = \omega^2 r \hat{\mathbf{r}}$ , dirigida radialmente **para fora**. Em termos físicos, você poderia sentir essa força em um grande disco giratório horizontal de um parque de diversões. Procedendo como no Exemplo 1.13.1, mas integrando da origem para fora e tomando  $\varphi_C(0) = 0$ , temos

$$\varphi_C(r) = - \int_0^r \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Se invertermos os sinais, tomando  $\mathbf{F}_{\text{SHO}} = -kr$ , obtemos  $\varphi_{\text{SHO}} = \frac{1}{2}kr^2$ , o potencial oscilador harmônico simples.

Os potenciais gravitacional, centrífugo e do oscilador harmônico simples são mostrados na Figura 1.34. Fica claro que o oscilador harmônico simples produz estabilidade e descreve uma força restauradora. O potencial centrífugo descreve uma situação instável. ■

### Termodinâmica — Diferenciais Exatas

Em termodinâmica, que às vezes é denominada uma procura por diferenciais exatas, encontramos equações da forma

$$df = P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy. \quad (1.133a)$$

O problema usual é determinar se  $\int (P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy)$  depende somente das extremidades, isto é, se  $df$  é, de fato, uma diferencial exata. A condição necessária e suficiente é que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \, dy \quad (1.133b)$$

ou que

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \partial f / \partial x, \\ Q(x, y) &= \partial f / \partial y. \end{aligned} \quad (1.133c)$$

As Equações (1.133c) dependem de satisfazer a relação

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (1.133d)$$

Contudo, isso é exatamente análogo à Equação (1.119), a exigência de que  $\mathbf{F}$  seja irrotacional. De fato, a componente  $z$  da Equação (1.119) resulta

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad (1.133e)$$

com

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$





### Potencial Vetorial

Em alguns ramos da física, em especial a eletrodinâmica, é conveniente introduzir um potencial vetor  $\mathbf{A}$ , tal que o campo (de força)  $\mathbf{B}$  seja dado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.134)$$

É claro que, se a Equação (1.134) valer,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  pela Equação (1.84) e  $\mathbf{B}$  é solenoidal. Aqui, queremos desenvolver um inverso, para mostrar que, quando  $\mathbf{B}$  é solenoidal, existe um potencial vetor  $\mathbf{A}$ . Demonstramos a existência de  $\mathbf{A}$  calculando-o. Suponha  $\mathbf{B} = \hat{x}b_1 + \hat{y}b_2 + \hat{z}b_3$  e nosso desconhecido  $\mathbf{A} = \hat{x}a_1 + \hat{y}a_2 + \hat{z}a_3$ . Pela Equação (1.134),

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1, \quad (1.135a)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = b_2, \quad (1.135b)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_3. \quad (1.135c)$$

Vamos admitir que as coordenadas foram escolhidas de modo que  $\mathbf{A}$  é paralelo ao plano  $yz$ ; isto é,  $a_1 = 0$ .<sup>24</sup> Então,

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{\partial a_3}{\partial x}, \\ b_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_{x_0}^x b_3 dx + f_2(y, z), \\ a_3 &= -\int_{x_0}^x b_2 dx + f_3(y, z), \end{aligned} \quad (1.137)$$

em que  $f_2$  e  $f_3$  são funções arbitrárias de  $y$  e  $z$  mas **não** são funções de  $x$ . Essas duas equações podem ser verificadas diferenciando e recuperando a Equação (1.136). A Equação (1.135a) se torna<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} &= -\int_{x_0}^x \left( \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial b_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.138)$$

usando  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1(x, y, z) - b_1(x_0, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}. \quad (1.139)$$

Lembrando que  $f_3$  e  $f_2$  são funções arbitrárias de  $y$  e  $z$ , escolhemos

$$\begin{aligned} f_2 &= 0, \\ f_3 &= \int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy, \end{aligned} \quad (1.140)$$

de modo que o lado esquerdo da Equação (1.139) se reduz a  $b_1(x, y, z)$ , em concordância com a Equação (1.135a). Com  $f_2$  e  $f_3$  dadas pela Equação (1.140), podemos construir  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \hat{y} \int_{x_0}^x b_3(x, y, z) dx + \hat{z} \left[ \int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy - \int_{x_0}^x b_2(x, y, z) dx \right]. \quad (1.141)$$

Contudo, isso ainda não está bem completo. Podemos adicionar qualquer constante, já que  $\mathbf{B}$  é uma derivada de  $\mathbf{A}$ . O mais importante é que podemos adicionar qualquer gradiente de uma função escalar  $\nabla\varphi$  sem afetar  $\mathbf{B}$  em nada. Por fim, as funções  $f_2$  e  $f_3$  não são únicas. Outras escolhas poderiam ter sido feitas. Em vez de estabelecer  $a_1 = 0$  para obter a Equação (1.136), qualquer permutação cíclica 1, 2, 3,  $x, y, z, x_0, y_0, z_0$  também funcionaria.

<sup>24</sup>É claro que isso pode ser feito em qualquer ponto. Mas não é nada óbvio que essa pressuposição seja válida para todos os pontos; isto é, que  $\mathbf{A}$  será bidimensional. A justificativa para essa pressuposição é que ela funciona; a Equação (1.141) satisfaz a Equação (1.134).

<sup>25</sup>A fórmula de Leibniz no Exercício 9.6.13 é útil aqui.

**Exemplo 1.13.3** UM POTENCIAL VETORIAL MAGNÉTICO PARA UM CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

Para ilustrar a construção de um potencial vetor magnético, tomamos o caso especial, se bem que importante, de uma indução magnética constante

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}B_z, \tag{1.142}$$

na qual  $B_z$  é uma constante. As Equações (1.135a a c) se tornam

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} &= B_z. \end{aligned} \tag{1.143}$$

Se admitirmos que  $a_1 = 0$ , como antes, então, pela Equação (1.141),

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{y}} \int^x B_z dx = \hat{\mathbf{y}}xB_z, \tag{1.144}$$

tomando uma constante de integração igual a zero. Pode-se verificar com facilidade que esse  $\mathbf{A}$  satisfaz a Equação (1.134).

Para mostrar que a escolha  $a_1 = 0$  não era sagrada ou ao menos não era exigida, vamos tentar estabelecer  $a_3 = 0$ . Pela Equação (1.143),

$$\frac{\partial a_2}{\partial z} = 0, \tag{1.145a}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = 0, \tag{1.145b}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = B_z. \tag{1.145c}$$

Vemos que  $a_1$  e  $a_2$  são independentes de  $z$  ou

$$a_1 = a_1(x, y), \quad a_2 = a_2(x, y). \tag{1.146}$$

A Equação (1.145c) é satisfeita se tomarmos

$$a_2 = p \int^x B_z dx = px B_z \tag{1.147}$$

e

$$a_1 = (p - 1) \int^y B_z dy = (p - 1)y B_z, \tag{1.148}$$

sendo  $p$  qualquer constante. Então,

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}(p - 1)y B_z + \hat{\mathbf{y}}px B_z. \tag{1.149}$$

Novamente, verifica-se que as Equações (1.134), (1.142) e (1.149) são consistentes. A comparação das Equações (1.144) e (1.149) mostra imediatamente que  $\mathbf{A}$  não é único. A diferença entre as Equações (1.144) e (1.149) e o aparecimento do parâmetro  $p$  na Equação (1.149) pode ser justificada reescrevendo a Equação (1.149) como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}y - \hat{\mathbf{y}}x)B_z + \left(p - \frac{1}{2}\right)(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x)B_z \\ &= -\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}y - \hat{\mathbf{y}}x)B_z + \left(p - \frac{1}{2}\right)B_z \nabla \varphi \end{aligned} \tag{1.150}$$

com

$$\varphi = xy. \tag{1.151}$$





O primeiro termo em  $\mathbf{A}$  então corresponde à forma usual

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}), \tag{1.152}$$

para  $\mathbf{B}$ , uma constante.

Adicionar um gradiente de uma função escalar, digamos  $\Lambda$  ao potencial vetor  $\mathbf{A}$  não afeta  $\mathbf{B}$ , pela Equação (1.82); isso é conhecido como transformação de calibre (veja os Exercícios 1.13.9 e 4.6.4):

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda. \tag{1.153}$$

Suponha agora que a função de onda  $\psi_0$  resolva a equação de Schrödinger da mecânica quântica sem campo de indução magnética  $\mathbf{B}$ ,

$$\left\{ \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)^2 + V - E \right\} \psi_0 = 0, \tag{1.154}$$

que descreve uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$ . Quando  $\mathbf{B}$  é ligado, a equação de onda se torna

$$\left\{ \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})^2 + V - E \right\} \psi = 0. \tag{1.155}$$

Sua solução  $\psi$  adquire um fator de fase que depende das coordenadas em geral,

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'\right] \psi_0(\mathbf{r}). \tag{1.156}$$

Pela relação

$$\begin{aligned} (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})\psi &= \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}'\right] \left\{ (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})\psi_0 - i\hbar\psi_0 \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \right\} \\ &= \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}'\right] (-i\hbar\nabla\psi_0), \end{aligned} \tag{1.157}$$

é óbvio que  $\psi$  resolve a Equação (1.153) se  $\psi_0$  resolver a Equação (1.154). A **derivada covariante de calibre**  $\nabla - i(e/\hbar)\mathbf{A}$  descreve o acoplamento de uma partícula carregada com o campo magnético. Costuma ser denominada **substituição mínima** e tem um papel central no eletromagnetismo quântico, a primeira e mais simples teoria de calibre na física.

*Resumindo essa discussão do potencial vetor: quando um vetor  $\mathbf{B}$  é solenoidal, existe um potencial vetor  $\mathbf{A}$ , tal que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .  $\mathbf{A}$  é indeterminado a menos de um gradiente aditivo, o que corresponde ao zero arbitrário de um potencial, uma constante de integração para o potencial escalar.*

Em muitos problemas o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  será obtido pela distribuição de corrente que produz a indução magnética  $\mathbf{B}$ , o que significa resolver a equação (vetor) de Poisson (veja o Exercício 1.14.4).

## Exercícios

**1.13.1** Se uma força  $\mathbf{F}$  é dada por

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z),$$

ache:

- (a)  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ .
- (b)  $\nabla \times \mathbf{F}$ .
- (c) Um potencial escalar  $\varphi(x, y, z)$  tal que  $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ .
- (d) Para qual valor do expoente  $n$  o potencial escalar diverge na origem e também no infinito?

Resposta: (a)  $(2n + 3)r^{2n}$ , (b) 0,  
 (c)  $-\frac{1}{2n+2}r^{2n+2}$ ,  $n \neq -1$ , (d)  $n = -1$ ,  
 $\varphi = -\ln r$ .

**1.13.2** Uma esfera de raio  $a$  é uniformemente carregada (por todo o seu volume). Construa o potencial eletrostático  $\varphi(r)$  para  $0 \leq r < \infty$ .

*Sugestão:* Na Seção 1.14 mostra-se que a força de Coulomb sobre uma carga de teste em  $r = r_0$  depende somente da carga para distâncias menores do que  $r_0$  e é independente da carga para distâncias maiores que  $r_0$ . Note que isso se aplica a uma distribuição de carga **esfericamente simétrica**.

**1.13.3** O problema usual da mecânica clássica é calcular o movimento de uma partícula dado o potencial. Para uma esfera maciça não-rotativa com densidade uniforme ( $\rho_0$ ), a lei de Gauss da Seção 1.14 leva a uma força gravitacional sobre uma massa unitária  $m_0$  no ponto  $r_0$  produzida pela atração da massa em  $r \leq r_0$ . A massa em  $r > r_0$  nada contribui para a força.

(a) Mostre que  $\mathbf{F}/m_0 = -(4\pi G\rho_0/3)\mathbf{r}$ ,  $0 \leq r \leq a$ , em que  $a$  é o raio da esfera.

(b) Ache o potencial gravitacional correspondente,  $0 \leq r \leq a$ .

(c) Imagine um orifício vertical atravessando completamente o centro da Terra até o lado oposto. Desprezando a rotação da Terra e admitindo uma densidade uniforme  $\rho_0 = 5,5 \text{ gm/cm}^3$ , calcule a natureza do movimento de uma partícula que cai dentro do orifício. Qual é seu período?

*Nota:* Na verdade,  $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$  é uma aproximação muito ruim. Por causa da densidade variável, a aproximação  $\mathbf{F} = \text{constante}$  ao longo da metade exterior de uma linha radial e  $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$  ao longo da metade interior é uma aproximação muito mais exata.

**1.13.4** A origem das coordenadas cartesianas está no centro da Terra. A Lua está sobre o eixo  $z$ , a uma distância fixa  $R$  (distância centro a centro). A força de maré exercida pela Lua sobre uma partícula na superfície da Terra (ponto  $x, y, z$ ) é dada por

$$F_x = -GMm \frac{x}{R^3}, \quad F_y = -GMm \frac{y}{R^3}, \quad F_z = +2GMm \frac{z}{R^3}.$$

Ache o potencial gerado por essa força de maré.

Resposta:  $-\frac{GMm}{R^3} \left( z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \right)$ .

Em termos dos polinômios de Legendre do Capítulo 12 essa expressão se torna

$$-\frac{GMm}{R^3} r^2 P_2(\cos \theta).$$

**1.13.5** Um fio longo e reto que transporta uma corrente  $I$  produz uma indução magnética  $\mathbf{B}$  com componentes

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Ache um potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ .

Resposta:  $\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{z}}(\mu_0 I/4\pi) \ln(x^2 + y^2)$ . (Essa solução não é única).

**1.13.6** Se

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right),$$

ache um vetor  $\mathbf{A}$  tal que  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Uma solução possível é

$$\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{x}}yz}{r(x^2 + y^2)} - \frac{\hat{\mathbf{y}}xz}{r(x^2 + y^2)}.$$

**1.13.7** Mostre que o par de equações

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

é satisfeito por qualquer indução magnética constante  $\mathbf{B}$ .



**1.13.8** O vetor  $\mathbf{B}$  é formado pelo produto de dois gradientes

$$\mathbf{B} = (\nabla u) \times (\nabla v),$$

em que  $u$  e  $v$  são funções escalares.

(a) Mostre que  $\mathbf{B}$  é solenoidal.

(b) Mostre que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u \nabla v - v \nabla u)$$

é um potencial vetor para  $\mathbf{B}$ , considerando que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

**1.13.9** A indução magnética  $\mathbf{B}$  está relacionada ao potencial vetor magnético potencial  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Pelo teorema de Stokes

$$\int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}.$$

Mostre que cada lado dessa equação é invariante sob a **transformação de calibre**,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\varphi$ .

*Nota:* Considere a função  $\varphi$  uma função de valor único. A transformação de calibre completa é considerada no Exercício 4.6.4.

**1.13.10** Sendo  $\mathbf{E}$  o campo elétrico e  $\mathbf{A}$  o potencial vetor magnético, mostre que  $[\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t]$  é irrotacional e que, portanto, podemos escrever

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

**1.13.11** A força total sobre uma carga  $q$  movimentando-se com velocidade  $\mathbf{v}$  é

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Usando os potenciais escalar e vetorial, mostre que

$$\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right].$$

Note que agora temos uma derivada total de tempo de  $\mathbf{A}$  em lugar da derivada parcial do Exercício 1.13.10.

## 1.14 Lei de Gauss, Equação de Poisson

### Lei de Gauss

Considere uma carga elétrica pontual  $q$  na origem de nosso sistema coordenado. Isso produz um campo elétrico  $\mathbf{E}$  dado por<sup>26</sup>

$$\mathbf{E} = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.158)$$

Agora derivamos a lei de Gauss, que afirma que a integral de superfície na Figura 1.35 é  $q/\epsilon_0$  se a superfície fechada  $S = \partial V$  incluir a origem (onde  $q$  está localizada) e zero se a superfície não incluir a origem. A superfície  $S$  é qualquer superfície fechada; não precisa ser esférica.

Usando o teorema de Gauss, Equações (1.101a) e (1.101b) (e desprezando  $q/4\pi\epsilon_0$ ), obtemos

$$\int_S \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} = \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau = 0, \quad (1.159)$$

pelo Exemplo 1.7.2, contanto que a superfície  $S$  não inclua a origem, onde os integrandos não são definidos. Isso prova a segunda parte da lei de Gauss.

A primeira parte, na qual a superfície  $S$  deve incluir a origem, pode ser resolvida cercado a origem com uma pequena esfera  $S' = \partial V'$  de raio  $\delta$  (Figura 1.36). Para não haver dúvida alguma sobre o que está dentro e o que está

<sup>26</sup>O campo elétrico  $\mathbf{E}$  é definido como a força por carga unitária sobre uma pequena carga estacionária de teste  $q_t \mathbf{E} = \mathbf{F}/q_t$ . Pela lei de Coulomb, a força sobre  $q_t$  devida a  $q$  é  $\mathbf{F} = (qq_t/4\pi\epsilon_0)(\hat{\mathbf{r}}/r^2)$ . Quando dividimos por  $q_t$ , obtemos a Equação (1.158).

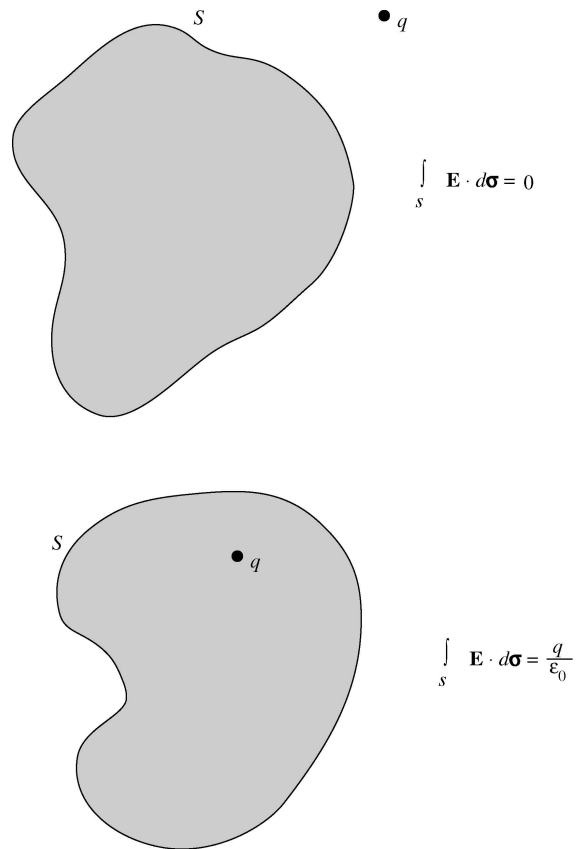


Figura 1.35: Lei de Gauss.

fora, imagine o volume fora da superfície externa  $S$  e o volume dentro da superfície  $S'$  ( $r < \delta$ ) conectados por um pequeno orifício. Isso une as superfícies  $S$  e  $S'$ , combinando-as em uma única superfície fechada simplesmente conexa. Como podemos considerar o raio do orifício imaginário tão pequeno a ponto de desaparecer, não há nenhuma contribuição adicional à integral de superfície. A superfície interna é escolhida deliberadamente como esférica, portanto poderemos integrá-la. Agora o teorema de Gauss se aplica ao volume entre  $S$  e  $S'$  sem nenhuma dificuldade. Temos

$$\int_S \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = 0. \quad (1.160)$$

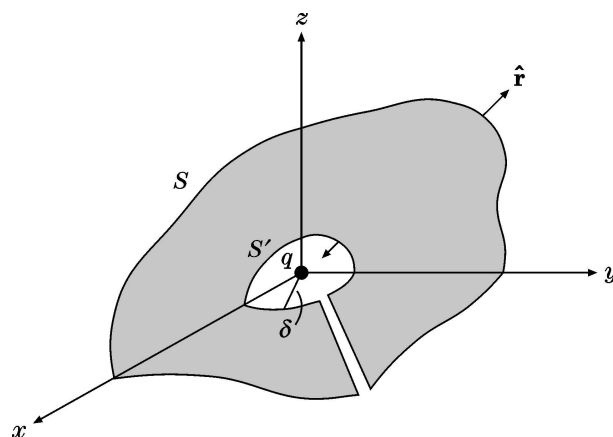


Figura 1.36: Exclusão da origem.

Podemos avaliar a segunda integral, para  $d\sigma' = -\hat{r}\delta^2 d\Omega$ , na qual  $d\Omega$  é um elemento do ângulo sólido. O sinal de menos aparece porque concordamos, na Seção 1.10, que a normal positiva  $\hat{r}'$  aponta **para fora** do volume. Nesse caso,  $\hat{r}'$  que aponta para fora está na direção radial negativa,  $\hat{r}' = -\hat{r}$ . Integrando sobre todos os ângulos, temos

$$\int_{S'} \frac{\hat{r} \cdot d\sigma'}{\delta^2} = - \int_{S'} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r} \delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -4\pi, \quad (1.161)$$

independente do raio  $\delta$ . Com as constantes da Equação (1.158), isso resulta em

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.162)$$

concluindo a prova da lei de Gauss. Note que, embora a superfície  $S$  possa ser esférica, ela **não precisa** ser esférica. Avançando um pouco mais, consideramos uma carga distribuída de modo que

$$q = \int_V \rho d\tau. \quad (1.163)$$

A Equação (1.162) ainda se aplica, agora interpretando  $q$  como a carga total distribuída encerrada pela superfície  $S$ :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\sigma = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau. \quad (1.164)$$

Usando o teorema de Gauss, temos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau. \quad (1.165)$$

Uma vez que nosso volume é completamente arbitrário, as integrandas devem ser iguais ou

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.166)$$

uma das equações de Maxwell. Se invertermos o argumento, a lei de Gauss resulta imediatamente da equação de Maxwell.

### Equação de Poisson

Se substituirmos  $\mathbf{E}$  por  $-\nabla\varphi$ , a Equação (1.166) se torna

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.167a)$$

que é a equação de Poisson. Para a condição  $\rho = 0$  essa expressão se reduz a uma equação ainda mais famosa,

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = 0, \quad (1.167b)$$

a equação de Laplace. Encontramos freqüentemente a equação de Laplace na discussão de vários sistemas coordenados (Capítulo 2) e de funções especiais da física matemática que aparecem como suas soluções. A equação de Poisson será de inestimável valor no desenvolvimento da teoria das funções de Green (Seção 9.7).

Por comparação direta entre a lei da força eletrostática de Coulomb e a lei da gravitação universal de Newton,

$$\mathbf{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Toda a teoria de potenciais desta seção se aplica igualmente bem a potenciais gravitacionais. Por exemplo, a equação gravitacional de Poisson é

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = +4\pi G \rho, \tag{1.168}$$

sendo  $\rho$  agora uma densidade de massa.

### Exercícios

**1.14.1** Desenvolva a lei de Gauss para o caso bidimensional em que

$$\varphi = -q \frac{\ln \rho}{2\pi\epsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi = q \frac{\hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0 \rho}.$$

Aqui,  $q$  é a carga na origem ou a carga da linha por comprimento unitário se o sistema bidimensional for uma fatia de espessura unitária de um sistema (cilíndrico circular) tridimensional. A variável  $\rho$  é medida radialmente para fora a partir da linha de carga  $\hat{\rho}$  é o vetor unitário correspondente (veja a Seção 2.4).

**1.14.2** (a) Mostre que a lei de Gauss resulta da equação de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Aqui,  $\rho$  é a densidade de carga usual.

(b) Admitindo que o campo elétrico de uma carga pontual  $q$  é esfericamente simétrico, mostre que a lei de Gauss implica a expressão de Coulomb inversamente proporcional ao quadrado da distância.

$$\mathbf{E} = \frac{q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

**1.14.3** Mostre que o valor do potencial eletrostático  $\varphi$  em qualquer ponto  $P$  é igual à média do potencial sobre qualquer superfície esférica centrada em  $P$ . Não há cargas elétricas sobre a esfera ou dentro dela.

*Sugestão:* Use o teorema de Green, Equação (1.104), com  $u^{-1} = r$ , a distância a partir de  $P$ , e  $v = \varphi$ . Note também a Equação (1.170) na Seção 1.15.

**1.14.4** Usando as equações de Maxwell, mostre que, para um sistema (corrente estacionária) o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  satisfaz uma equação vetorial de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J},$$

contanto que imponhamos  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

## 1.15 Função Delta de Dirac

Pelo Exemplo 1.6.1 e pelo desenvolvimento da lei de Gauss na Seção 1.14,

$$\int \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = - \int \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau = \begin{cases} -4\pi \\ 0, \end{cases} \tag{1.169}$$

dependendo de a integração incluir ou não a origem  $\mathbf{r} = 0$ . Esse resultado pode ser expresso convenientemente introduzindo a função delta de Dirac,

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}) \equiv -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z). \tag{1.170}$$





Essa função delta de Dirac é **definida** por suas propriedades atribuídas

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \tag{1.171a}$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx, \tag{1.171b}$$

em que  $f(x)$  é qualquer função bem-comportada e a integração inclui a origem. Como um caso especial da Equação (1.171b),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{1.171c}$$

Pela Equação (1.171b),  $\delta(x)$  deve ser um pico infinitamente alto, infinitamente estreito em  $x = 0$ , como na descrição de uma força impulsiva (Seção 15.9) ou a densidade de carga para uma carga pontual.<sup>27</sup> O problema é que **não existe tal função**, no sentido usual de função. Todavia, a propriedade crucial na Equação (1.171b) pode ser desenvolvida rigorosamente como o limite de uma **seqüência** de funções, uma distribuição. Por exemplo, a função delta pode ser aproximada pela seqüência de funções, Equações (1.172) a (1.175) e Figuras 1.37 a 1.40:

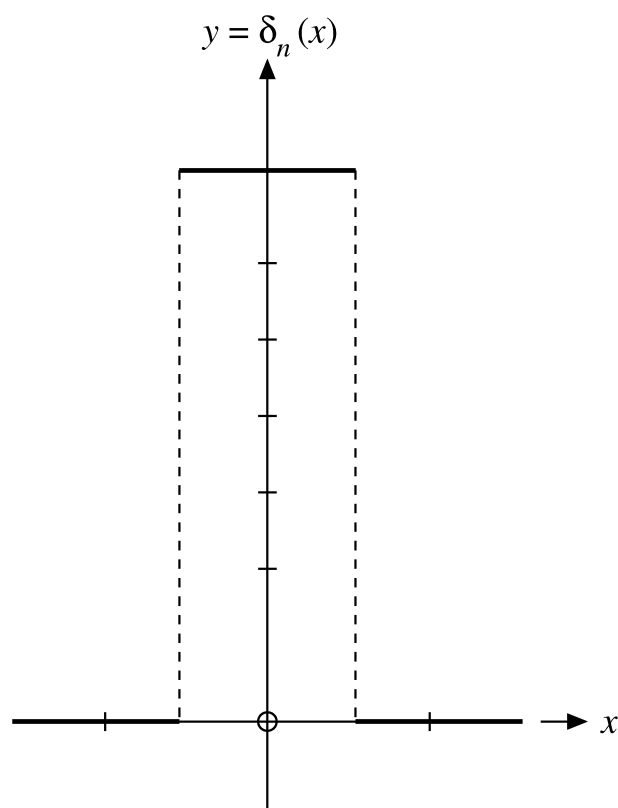


Figura 1.37: Função seqüência  $\delta$ .

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases} \tag{1.172}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \tag{1.173}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + n^2 x^2} \tag{1.174}$$

$$\delta_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt. \tag{1.175}$$

<sup>27</sup>A função delta é freqüentemente invocada para descrever forças de alcance muito curto, como forças nucleares. Ela também aparece na normalização de funções de ondas contínuas da mecânica quântica. Compare a Equação (1.193c) para funções de ondas planas.

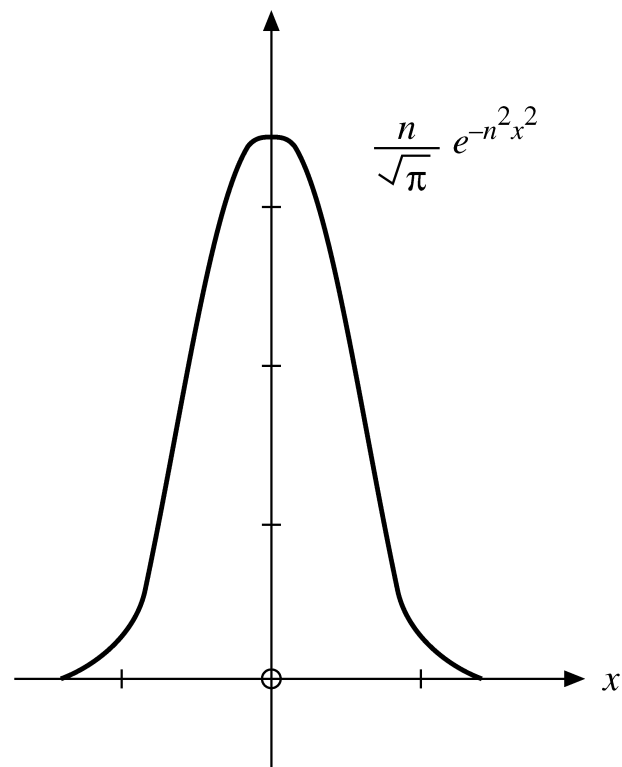


Figura 1.38: Função seqüência  $\delta$ .

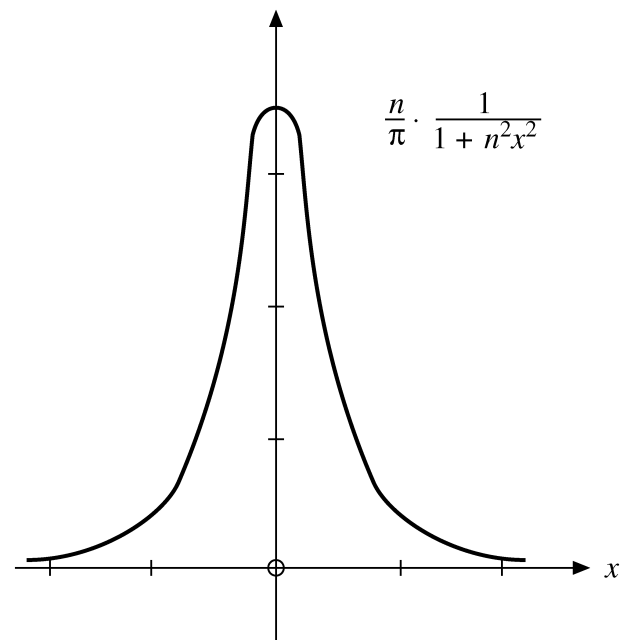


Figura 1.39: Função seqüência  $\delta$ .

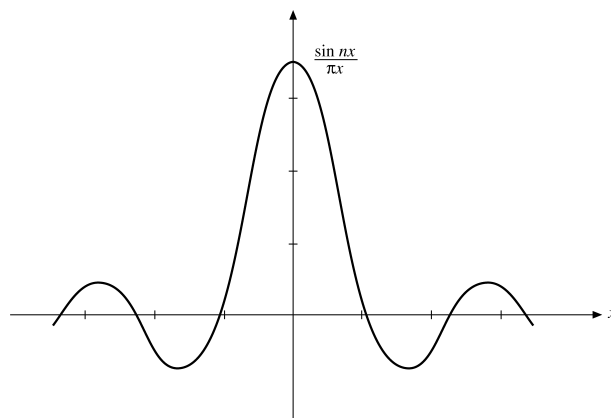


Figura 1.40: Função seqüência  $\delta$ .

Essas aproximações têm graus variados de utilidade. A Equação (1.172) é útil para prover uma derivação simples da propriedade de integral, Equação (1.171b). A Equação (1.173) é conveniente para diferenciar. Suas derivadas levam aos polinômios de Hermite. A Equação (1.175) é particularmente útil na análise de Fourier e em suas aplicações na mecânica quântica. Na teoria da série de Fourier, a Equação (1.175) muitas vezes aparece (modificada) como o “Kernel” de Dirichlet:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sen}[(n + \frac{1}{2})x]}{\text{sen}(\frac{1}{2}x)}. \quad (1.176)$$

Ao usar essas aproximações na Equação (1.171b) e mais adiante, admitimos que  $f(x)$  é bem comportada — não oferece problemas quando  $x$  é grande.

Para a maioria dos propósitos físicos, essas aproximações são bastante adequadas. De um ponto de vista matemático, a situação ainda é insatisfatória: os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$$

não existem.

Uma saída para essa dificuldade é dada pela teoria das distribuições. Reconhecendo que a Equação (1.171b) é a propriedade fundamental, focalizamos nossa atenção nela, em vez de em  $\delta(x)$  em si. As Equações (1.172) a (1.175) com  $n = 1, 2, 3, \dots$  podem ser interpretadas como seqüências de funções normalizadas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1. \quad (1.177)$$

A seqüência de integrais tem o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0). \quad (1.178)$$

Note que a Equação (1.178) é o limite de uma seqüência de integrais. Novamente, o limite de  $\delta_n(x)$ , com  $n \rightarrow \infty$ , não existe. (Os limites para todas as quatro formas de  $\delta_n(x)$  divergem em  $x = 0$ .)

Podemos tratar  $\delta(x)$  consistentemente na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx. \quad (1.179)$$

$\delta(x)$  é denominada distribuição (não uma função) definida pelas seqüências  $\delta_n(x)$ , como indicado na Equação (1.179). Poderíamos enfatizar que a integral do lado esquerdo da Equação (1.179) não é uma integral de Riemann.<sup>28</sup> É um limite.

Essa distribuição  $\delta(x)$  é somente uma dentre a infinidade de distribuições possíveis, mas é a distribuição em que estamos interessados por causa da Equação (1.171b).

Por essas seqüências de funções, vemos que a função delta de Dirac deve ser par em  $x$ ,  $\delta(-x) = \delta(x)$ .

A propriedade da integral, Equação (1.171b), é útil em casos em que o argumento da função delta é uma função

<sup>28</sup>Ela pode ser tratada como uma integral de Stieltjes, se desejado.  $\delta(x) dx$  é substituída por  $du(x)$ , em que  $u(x)$  é a função degrau de Heaviside (compare com o Exercício 1.15.13).

$g(x)$  com zeros simples nos eixos reais, o que leva às regras

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x), \quad a > 0, \quad (1.180)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{a, \\ g(a)=0, \\ g'(a)\neq 0}} \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}. \quad (1.181a)$$

A Equação (1.180) pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y) dy = \frac{1}{a}f(0),$$

aplicando a Equação (1.171b). A Equação (1.180) pode ser escrita como  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$  para  $a < 0$ . Para provar a Equação (1.181a) decompos a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x)) dx = \sum_a \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta((x-a)g'(a)) dx \quad (1.181b)$$

em uma soma de integrais sobre pequenos intervalos contendo os zeros de  $g(x)$ . Nesses intervalos,  $g(x) \approx g(a) + (x-a)g'(a) = (x-a)g'(a)$ . Usando a Equação (1.180) do lado direito da Equação (1.181b), obtemos a integral da Equação (1.181a).

Usando integração por partes, também podemos **definir a derivada**  $\delta'(x)$  da função delta de Dirac pela relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x') dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-x') dx = -f'(x'). \quad (1.182)$$

Usamos  $\delta(x)$  frequentemente e a denominamos função delta de Dirac<sup>29</sup> — por razões históricas. Lembre-se de que ela, na verdade, não é uma função. É, em essência, uma notação abreviada, definida implicitamente como o limite de integrais em uma seqüência,  $\delta_n(x)$ , conforme a Equação (1.179). Deve ficar entendido que nossa função delta de Dirac tem significado apenas como parte de um integrando. Nesse espírito, o operador linear  $\int dx \delta(x-x_0)$  opera sobre  $f(x)$  e resulta  $f(x_0)$ :

$$\mathcal{L}(x_0)f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x) dx = f(x_0). \quad (1.183)$$

Ela também pode ser classificada como um mapeamento linear ou simplesmente como uma função generalizada. Transferindo nossa singularidade para o ponto  $x = x'$ , escrevemos a função delta de Dirac como  $\delta(x-x')$ . A Equação (1.171b) se torna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x') dx = f(x'). \quad (1.184)$$

Como descrição de uma singularidade em  $x = x'$ , a função delta de Dirac pode ser escrita como  $\delta(x-x')$  ou como  $\delta(x'-x)$ . Partindo para três dimensões e usando coordenadas esféricas polares, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \delta(\mathbf{r})r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1. \quad (1.185)$$

Essa expressão corresponde a uma singularidade (ou fonte) na origem. Novamente, se nossa fonte estiver em  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , a Equação (1.185) se torna

$$\iiint \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)r_2^2 dr_2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 = 1. \quad (1.186)$$

<sup>29</sup>Dirac introduziu a função delta na mecânica quântica. Na verdade, a função delta pode ser rastreada até Kirchhoff, 1882. Se quiser mais detalhes, consulte M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. Nova York: McGraw-Hill (1966), p. 301.



### Exemplo 1.15.1 CARGA TOTAL DENTRO DE UMA ESFERA

Considere o fluxo elétrico total  $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  que sai de uma esfera de raio  $R$  ao redor da origem e que circunda  $n$  cargas  $e_j$ , localizadas nos pontos  $\mathbf{r}_j$  com  $r_j < R$ , isto é, dentro da esfera. A força do campo elétrico  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$ , em que o potencial

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

é a soma dos potenciais de Coulomb gerados por cada carga e a densidade de carga total é  $\rho(\mathbf{r}) = \sum_j e_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ . A função delta é usada aqui como uma abreviatura de uma densidade semelhante à pontual. Agora, usamos o teorema de Gauss para

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \oint \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int \nabla^2\varphi d\tau = \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d\tau = \frac{\sum_j e_j}{\epsilon_0}$$

em conjunção com a forma diferencial da lei de Gauss,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho/\epsilon_0$ , e

$$\sum_j e_j \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\tau = \sum_j e_j.$$

■

### Exemplo 1.15.2 ESPAÇO DE FASE

Na teoria da dispersão de partículas relativistas usando diagramas de Feynman, encontramos a seguinte integral sobre a energia da partícula dispersa (consideramos a velocidade da luz  $c = 1$ ):

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) f(p) &\equiv \int d^3p \int dp_0 \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) f(p) \\ &= \int_{E>0} \frac{d^3p f(E, \mathbf{p})}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} + \int_{E<0} \frac{d^3p f(E, \mathbf{p})}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}}, \end{aligned}$$

em que usamos a Equação (1.181a) nos zeros  $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  do argumento da função delta. O significado físico de  $\delta(p^2 - m^2)$  é que a partícula de massa  $m$  e quadrimomento  $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$  está sobre sua camada de massa, porque  $p^2 = m^2$  é equivalente a  $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Então, o elemento de volume sobre a camada de massa no espaço dos momentos é o invariante de Lorentz  $\frac{d^3p}{2E}$ , em contraste com o elemento não-relativista  $d^3p$  do espaço de momento. O fato de ocorrer uma energia negativa é uma peculiaridade da cinemática relativista que é relacionada à antipartícula. ■

### Representação da Função Delta por Funções Ortogonais

A função delta de Dirac<sup>30</sup> pode ser expandida em termos de qualquer base de funções ortogonais reais  $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ . Essas funções aparecerão no Capítulo 10 como soluções de equações diferenciais ordinárias da forma Sturm-Liouville.

Elas satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = \delta_{mn}, \tag{1.187}$$

em que o intervalo  $(a, b)$  pode ser infinito em qualquer extremidade ou em ambas. [Por conveniência, admitimos que  $\varphi_n$  foi definido de modo a incluir  $(w(x))^{1/2}$  se as relações de ortogonalidade contiverem uma função de peso positiva adicional  $w(x)$ .] Usamos o conjunto de  $\varphi_n$  para expandir a função delta como

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x), \tag{1.188}$$

<sup>30</sup>Esta seção é opcional aqui. Não será necessária até o Capítulo 10.

em que os coeficientes  $a_n$  são funções da variável  $t$ . Multiplicando por  $\varphi_m(x)$  e integrando sobre o intervalo de ortogonalidade (Equação (1.187)), temos

$$a_m(t) = \int_a^b \delta(x-t)\varphi_m(x) dx = \varphi_m(t) \tag{1.189}$$

ou

$$\delta(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_n(x) = \delta(t-x). \tag{1.190}$$

Essa série é, com certeza, não-uniformemente convergente (veja o Capítulo 5), mas pode ser usada como parte de um integrando no qual a integração resultante a tornará convergente (compare com a Seção 5.5).

Suponha que formemos a integral  $\int F(t)\delta(t-x) dx$ , em que admitimos que  $F(t)$  pode ser expandida em uma série de funções ortogonais  $\varphi_p(t)$ , uma propriedade denominada *completude*. Então, obtemos

$$\begin{aligned} \int F(t)\delta(t-x) dt &= \int \sum_{p=0}^{\infty} a_p\varphi_p(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(t) dt \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p\varphi_p(x) = F(x), \end{aligned} \tag{1.191}$$

e os produtos cruzados  $\int \varphi_p\varphi_n dt$  ( $n \neq p$ ) desaparecem por ortogonalidade (Equação (1.187)). Referindo-nos à definição da função delta de Dirac, Equação (1.171b), vemos que nossa representação da série, Equação (1.190), satisfaz a propriedade definidora da função delta de Dirac e, portanto, é uma representação dela. Essa representação da função delta de Dirac é denominada **fechamento**. A admissão de completude de um conjunto de funções para expansão de  $\delta(x-t)$  dá a relação de fechamento. O inverso, ou seja, fechamento implica completude, é o tópico do Exercício 1.15.16.

### Representações Integrais para a Função Delta

Transformadas integrais, tais como a integral de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt$$

do Capítulo 15, levam a representações integrais correspondentes da função delta de Dirac. Por exemplo, tome

$$\delta_n(t-x) = \frac{\text{sen } n(t-x)}{\pi(t-x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \exp(i\omega(t-x)) d\omega, \tag{1.192}$$

usando a Equação (1.175). Temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_n(t-x) dt, \tag{1.193a}$$

em que  $\delta_n(t-x)$  é a seqüência na Equação (1.192), que define a distribuição  $\delta(t-x)$ . Note que a Equação (1.193a) admite que  $f(t)$  é contínua em  $t = x$ . Se substituirmos a Equação (1.192) na Equação (1.193a), obtemos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-n}^n \exp(i\omega(t-x)) d\omega dt. \tag{1.193b}$$

Permutando a ordem de integração e então tomando o limite, à medida que  $n \rightarrow \infty$ , temos o teorema da integral de Fourier, Equação (15.20).

Entendendo que está certo apresentá-la sob um sinal de integral como na Equação (1.193a), a identificação

$$\boxed{\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega(t-x)) d\omega} \tag{1.193c}$$

provê uma representação integral muito útil da função delta. Quando a transformada de Laplace (veja as Seções 15.1 e 15.9)

$$L_{\delta}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)\delta(t-t_0) = \exp(-st_0), \quad t_0 > 0 \tag{1.194}$$



é invertida, obtemos a representação complexa

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \exp(s(t - t_0)) ds, \quad (1.195)$$

que é essencialmente equivalente à representação prévia da função delta de Dirac.

### Exercícios

**1.15.1** Seja

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n}, \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}, \\ 0, & \frac{1}{2n} < x. \end{cases}$$

Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0),$$

admitindo que  $f(x)$  é contínua em  $x = 0$ .

**1.15.2** Verifique que a seqüência  $\delta_n(x)$ , baseada na função

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ne^{-nx}, & x > 0, \end{cases}$$

é uma seqüência delta (que satisfaz a Equação (1.178)). Note que a singularidade está em  $+0$ , o lado positivo da origem.

*Sugestão:* Substitua o limite superior ( $\infty$ ) por  $c/n$ , em que  $c$  é grande mas finito, e use o teorema do valor médio do cálculo integral.

**1.15.3** Para

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + n^2 x^2},$$

(Equação (1.174)), mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1.$$

**1.15.4** Demonstre que  $\delta_n = \text{sen } nx/\pi x$  é uma distribuição delta, mostrando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\text{sen } nx}{\pi x} dx = f(0).$$

Admita que  $f(x)$  é contínua em  $x = 0$  e se anula quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

*Sugestão:* Substitua  $x$  por  $y/n$  e considere  $\lim n \rightarrow \infty$  **antes** de integrar.

**1.15.5** O método de Fejer para somar séries é associado com a função

$$\delta_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left[ \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right]^2.$$

Mostre que  $\delta_n(t)$  é uma distribuição delta, no sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{\text{sen}(nt/2)}{\text{sen}(t/2)} \right]^2 dt = f(0).$$

**1.15.6** Prove que

$$\delta[a(x - x_1)] = \frac{1}{a} \delta(x - x_1).$$

*Nota:* Se  $\delta[a(x - x_1)]$  for considerada par em relação a  $x_1$ , a relação vale para  $a$  negativo se  $1/a$  pode ser substituído por  $1/|a|$ .

**1.15.7** Mostre que

$$\delta[(x - x_1)(x - x_2)] = [\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)]/|x_1 - x_2|.$$

*Sugestão:* Procure usar o Exercício 1.15.6.

**1.15.8** Usando a seqüência delta da curva de erro de Gauss ( $\delta_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ ), mostre que

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x),$$

tratando  $\delta(x)$  e sua derivada como na Equação (1.179).

**1.15.9** Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0).$$

Aqui, admitimos que  $f'(x)$  é contínua em  $x = 0$ .

**1.15.10** Prove que

$$\delta(f(x)) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}^{-1} \delta(x - x_0),$$

em que  $x_0$  é escolhido de modo que  $f(x_0) = 0$ .

*Sugestão:* Note que  $\delta(f) df = \delta(x) dx$ .

**1.15.11** Mostre que em coordenadas esféricas polares,  $(r, \cos \theta, \varphi)$ , a função delta  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  se torna

$$\frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Generalize isso para as coordenadas curvilíneas  $(q_1, q_2, q_3)$  da Seção 2.1 com fatores de escala  $h_1, h_2$  e  $h_3$ .

**1.15.12** Um desenvolvimento rigoroso de transformadas de Fourier<sup>31</sup> inclui, como um teorema as relações

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} f(u+x) \frac{\text{sen } ax}{x} dx = \begin{cases} f(u+0) + f(u-0), & x_1 < 0 < x_2 \\ f(u+0), & x_1 = 0 < x_2 \\ f(u-0), & x_1 < 0 = x_2 \\ 0, & x_1 < x_2 < 0 \text{ or } 0 < x_1 < x_2. \end{cases}$$

Verifique esses resultados usando a função delta de Dirac.

**1.15.13** (a) Se definirmos uma seqüência  $\delta_n(x) = n/(2 \cosh^2 nx)$ , mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1, \quad \text{independente de } n.$$

(b) Continuando essa análise, mostre que<sup>32</sup>

$$\int_{-\infty}^x \delta_n(x) dx = \frac{1}{2} [1 + \tanh nx] \equiv u_n(x),$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Esta é a função degrau unitário de Heaviside (Figura 1.41).

**1.15.14** Mostre que uma função degrau unitário  $u(x)$  pode ser representada por

$$u(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \frac{dt}{t},$$

em que  $P$  significa o valor principal de Cauchy (Seção 7.1).

<sup>31</sup>I.N. Sneddon, *Fourier Transforms*. Nova York: McGraw-Hill (1951).

<sup>32</sup>Muitos outros símbolos são usados para essa função. Essa é a notação AMS-55 (veja a nota de rodapé 4 no Capítulo 5 como referência):  $u$  para unidade.



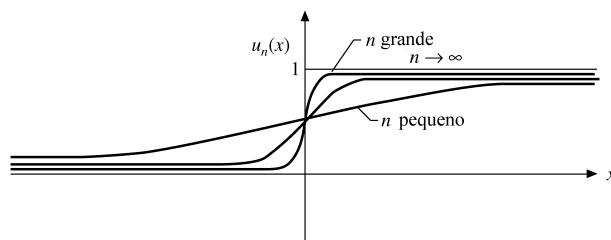


Figura 1.41:  $\frac{1}{2}[1 + \tanh nx]$  e a função degrau unitário de Heaviside.

**1.15.15** Como variação da Equação (1.175), considere

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt - |t|/n} dt.$$

Mostre que essa expressão se reduz a  $(n/\pi)1/(1 + n^2x^2)$ , Equação (1.174), e que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1.$$

*Nota:* Em termos de transformadas integrais, a equação inicial aqui pode ser interpretada como uma transformada exponencial de Fourier de  $e^{-|t|/n}$  ou como uma transformada de Laplace de  $e^{ixt}$ .

**1.15.16** (a) A representação da função delta de Dirac dada pela Equação (1.190),

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(t),$$

é freqüentemente denominada **relação de fechamento**. Para um conjunto ortonormal de funções reais,  $\varphi_n$ , mostre que fechamento implica completude, isto é, a Equação (1.191) resulta da Equação (1.190).

*Sugestão:* Podemos considerar

$$F(x) = \int F(t)\delta(x - t) dt.$$

(b) Seguindo a sugestão da parte (a), você encontra a integral  $\int F(t)\varphi_n(t) dt$ . Como você sabe que essa integral é finita?

**1.15.17** Para o intervalo finito  $(-\pi, \pi)$  escreva a função delta de Dirac  $\delta(x - t)$  como uma série de senos e co-senos:  $\sin nx, \cos nx, n = 0, 1, 2, \dots$ . Note que, embora essas funções sejam ortogonais, elas não são normalizadas à unidade.

**1.15.18** No intervalo  $(-\pi, \pi)$ ,  $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2x^2)$ .

- (a) Escreva  $\delta_n(x)$  como uma série de Fourier de co-senos.
- (b) Mostre que sua série de Fourier está de acordo com uma expansão de Fourier de  $\delta(x)$  no limite quando  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Confirme a natureza de função delta de sua série de Fourier mostrando que, para qualquer  $f(x)$  que seja finito no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e contínuo em  $x = 0$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\text{expansão de Fourier de } \delta_{\infty}(x)] dx = f(0).$$

**1.15.19** (a) Escreva  $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2x^2)$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$  como uma integral de Fourier e compare o limite  $n \rightarrow \infty$  com a Equação (1.193c).

(b) Escreva  $\delta_n(x) = n \exp(-nx)$  como uma transformada de Laplace e compare o limite  $n \rightarrow \infty$  com a Equação (1.195).

*Sugestão:* Veja as Equações (15.22) e (15.23) para (a) e a Equação (15.212) para (b).

- 1.15.20** (a) Mostre que a função delta de Dirac  $\delta(x - a)$ , expandida em uma série de Fourier de senos no meio-intervalo  $(0, L)$ ,  $(0 < a < L)$ , é dada por

$$\delta(x - a) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Note que, na verdade, essa série descreve

$$-\delta(x + a) + \delta(x - a) \quad \text{no intervalo } (-L, L).$$

- (b) Integrando ambos os lados da equação precedente de 0 a  $x$ , mostre que a expansão do co-seno da onda quadrada

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ 1, & a < x < L, \end{cases}$$

é, para  $0 \leq x < L$ ,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} \left( \frac{n\pi a}{L} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

- (c) Verifique que o termo

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \quad \text{é} \quad \langle f(x) \rangle \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

- 1.15.21** Verifique a expansão de Fourier de co-seno da onda quadrada, Exercício 1.15.20(b), por cálculo direto dos coeficientes de Fourier.

- 1.15.22** Podemos definir uma seqüência

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < 1/2n, \\ 0, & |x| > 1/2n. \end{cases}$$

(Essa é a Equação (1.172).) Expresse  $\delta_n(x)$  como uma integral de Fourier (via o teorema da integral de Fourier, transformada inversa etc.). Por fim, mostre que podemos escrever

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

- 1.15.23** Usando a seqüência

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2),$$

mostre que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

*Nota:* Lembre que  $\delta(x)$  é definida em termos de seu comportamento como parte de um integrando — em especial as Equações (1.178) e (1.189).

- 1.15.24** Derive representações de seno e co-seno de  $\delta(t - x)$  que são comparáveis com a representação exponencial, Equação (1.193c).

$$\text{Resposta: } \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen } \omega t \text{sen } \omega x d\omega, \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t \cos \omega x d\omega.$$

## 1.16 Teorema de Helmholtz

Na Seção 1.13 foi enfatizado que a escolha de um potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  não era única. A divergência de  $\mathbf{A}$  ainda era indeterminada. Nesta seção são desenvolvidos dois teoremas sobre a divergência e o rotacional de um vetor. O primeiro teorema tem o seguinte enunciado:

*Um vetor é unicamente especificado dando sua divergência e sua espiral dentro de uma região simplesmente conexa (sem orifícios) e seu componente normal sobre a fronteira.*

Note que as sub-regiões, onde a divergência e o rotacional são definidos (muitas vezes em termos de funções delta de Dirac), são parte de nossa região e não se espera que sejam removidas aqui ou no teorema de Helmholtz



que vem em seguida. Vamos considerar

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= s, \\ \nabla \times \mathbf{V}_1 &= \mathbf{c},\end{aligned}\tag{1.196}$$

em que  $s$  pode ser interpretada como uma densidade de fonte (carga) e  $\mathbf{c}$  como uma densidade de circulação (corrente). Admitindo também que a componente normal  $V_{1n}$  na fronteira é dada, queremos mostrar que  $\mathbf{V}_1$  é único. Fazemos isso admitindo a existência de um segundo vetor,  $\mathbf{V}_2$ , que satisfaz a Equação (1.196) e tem a mesma componente normal na fronteira, e então mostrando que  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$ . Seja

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2.$$

Então

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0\tag{1.197}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{W} = 0.\tag{1.198}$$

Visto que  $\mathbf{W}$  é irrotacional, podemos escrever (pela Seção (1.13))

$$\mathbf{W} = -\nabla\varphi.\tag{1.199}$$

Substituindo essa expressão na Equação (1.197), obtemos

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = 0,\tag{1.200}$$

a equação de Laplace.

Agora nos utilizamos do teorema de Green na forma dada na Equação (1.105), com  $u$  e  $v$  cada um igual a  $\varphi$ . Visto que

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0\tag{1.201}$$

na fronteira, o teorema de Green se reduz a

$$\int_V (\nabla\varphi) \cdot (\nabla\varphi) d\tau = \int_V \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} d\tau = 0.\tag{1.202}$$

A quantidade  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = W^2$  é não-negativa, e portanto devemos ter

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0\tag{1.203}$$

em tudo. Assim,  $\mathbf{V}_1$  é único, o que prova o teorema.

Para nosso potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  a relação  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  especifica o rotacional de  $\mathbf{A}$ . Muitas vezes, por conveniência, estabelecemos  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (compare com o Exercício 1.14.4). Então (com condições de fronteira),  $\mathbf{A}$  é fixo.

Esse teorema pode ser escrito como um teorema de unicidade para soluções da equação de Laplace, Exercício 1.16.1. Nessa forma, esse teorema de unicidade é de grande importância para a solução de problemas de valores de fronteira eletrostáticos e da equação de Laplace. Se pudermos encontrar uma solução da equação de Laplace que satisfaça as condições necessárias de fronteira, então nossa solução é a solução completa. Esses problemas de valor de fronteira são discutidos nas Seções 12.3 e 12.5.

### Teorema de Helmholtz

O segundo teorema que provaremos é o teorema de Helmholtz.

*Um vetor  $\mathbf{V}$  que satisfaça a Equação (1.196) com ambas as densidades de fonte e de circulação desaparecendo no infinito pode ser escrito como a soma de duas partes, uma das quais é irrotacional e a outra solenoidal.*

Note que, por simplicidade, nossa região é simplesmente conexa, sendo toda espaço. O teorema de Helmholtz será claramente satisfeito se pudermos escrever  $\mathbf{V}$  como

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A},\tag{1.204a}$$

sendo  $-\nabla\varphi$  irrotacional e  $\nabla \times \mathbf{A}$  solenoidal. Passamos a justificar a Equação (1.204a).

$\mathbf{V}$  é um vetor conhecido. Consideramos a divergência e o rotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = s(\mathbf{r})\tag{1.204b}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{c}(\mathbf{r})\tag{1.204c}$$

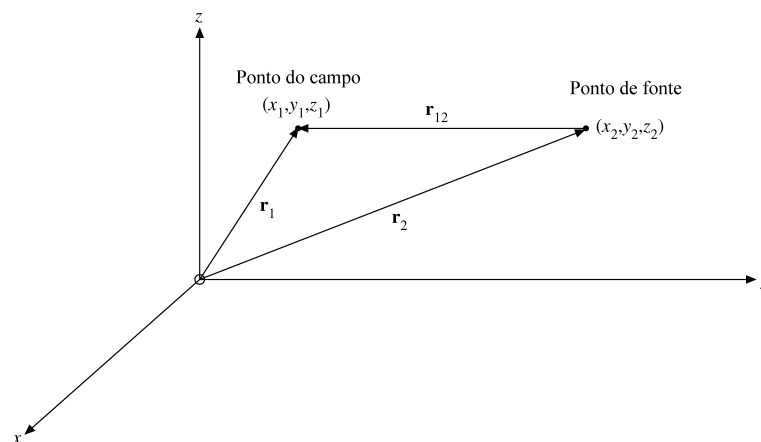


Figura 1.42: Pontos de fonte e de campo.

sendo  $s(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{c}(\mathbf{r})$  agora funções conhecidas da posição. Por essas duas funções construímos um potencial escalar  $\varphi(\mathbf{r}_1)$ ,

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2, \quad (1.205a)$$

e um potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2. \quad (1.205b)$$

Se  $s = 0$ , então  $\mathbf{V}$  é solenoidal e a Equação (1.205a) implica  $\varphi = 0$ . Pela Equação (1.204a),  $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{A}$  como dado na Equação (1.141), que é consistente com a Seção 1.13. Além disso, se  $\mathbf{c} = 0$ , então  $\mathbf{V}$  é irrotacional e a Equação (1.205b) implica  $\mathbf{A} = 0$ , e a Equação (1.204a) implica  $\mathbf{V} = -\nabla\varphi$ , consistente com a teoria do potencial escalar da Seção 1.13.

Aqui, o argumento  $\mathbf{r}_1$  indica  $(x_1, y_1, z_1)$ , o ponto do campo;  $\mathbf{r}_2$ , as coordenadas do ponto da fonte  $(x_2, y_2, z_2)$ , enquanto

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (1.206)$$

Quando uma direção é associada com  $r_{12}$ , a direção positiva é considerada afastando-se da fonte e dirigida ao ponto de campo. Em termos vetoriais,  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , como mostra a Figura 1.42. É claro que  $s$  e  $\mathbf{c}$  devem se anular com suficiente rapidez em grandes distâncias para que as integrais existam. A expansão e a avaliação propriamente ditas de integrais como as Equações (1.205a) e (1.205b) são tratadas na Seção 12.1.

Pelo teorema da unicidade no início desta seção,  $\mathbf{V}$  é unicamente especificado por sua divergência,  $s$ , e rotacional,  $\mathbf{c}$  (e condições de fronteira). Voltando à Equação (1.204a), temos

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla\varphi, \quad (1.207a)$$

a divergência do rotacional que se anula, e

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (1.207b)$$

o rotacional do gradiente que se anula. Se pudermos mostrar que

$$-\nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}_1) = s(\mathbf{r}_1) \quad (1.207c)$$

e

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_1)) = \mathbf{c}(\mathbf{r}_1), \quad (1.207d)$$

então  $\mathbf{V}$ , como dado na Equação (1.204a), terá a divergência e o rotacional adequados. Nossa descrição será internamente consistente, e a Equação (1.204a) será justificada.<sup>33</sup>

Primeiro, consideramos a divergência de  $\mathbf{V}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2. \quad (1.208)$$

<sup>33</sup>Alternativamente, poderíamos resolver a Equação (1.207c), equação de Poisson, e comparar a solução com o potencial construído, Equação (1.205a). A solução da Equação de Poisson é desenvolvida na Seção 9.7.



O operador laplaciano,  $\nabla \cdot \nabla$  ou  $\nabla^2$  opera sobre as coordenadas do campo  $(x_1, y_1, z_1)$  e, assim, comuta com a integração em relação a  $(x_2, y_2, z_2)$ . Temos

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}_2) \nabla_1^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2. \quad (1.209)$$

Devemos fazer duas pequenas modificações na Equação (1.169) antes de aplicá-la. Primeiro, nossa fonte está em  $r_2$ , e não na origem. Isso significa que um resultado não-zero da lei de Gauss aparece se, e somente se, a superfície  $S$  incluir o ponto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ . Para mostrar isso, reescrevemos a Equação (1.170):

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1.210)$$

Esse deslocamento da fonte para  $\mathbf{r}_2$  pode ser incorporado à equação de definição (1.171b) como

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0, \quad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2, \quad (1.211a)$$

$$\int f(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\tau_1 = f(\mathbf{r}_2). \quad (1.211b)$$

Em segundo lugar, notando que diferenciar  $r_{12}^{-1}$  duas vezes em relação a  $x_2, y_2, z_2$  é o mesmo que diferenciar **duas vezes** em relação a  $x_1, y_1, z_1$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) &= \nabla_2^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= -4\pi \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (1.212)$$

Reescrevendo a Equação (1.209) e usando a função delta de Dirac, Equação (1.212), podemos integrar para obter

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= -\frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}_2) \nabla_2^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}_2) (-4\pi) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) d\tau_2 \\ &= s(\mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (1.213)$$

A etapa final resulta da Equação (1.211b), com os índices 1 e 2 permutados. Nosso resultado, Equação (1.213), mostra que as formas admitidas de  $\mathbf{V}$  e do potencial escalar  $\varphi$  estão de acordo com a divergência dada (Equação (1.204b)).

Para concluir a prova do teorema de Helmholtz, precisamos mostrar que o que admitimos é consistente com a Equação (1.204c), isto é, que o rotacional de  $\mathbf{V}$  é igual a  $\mathbf{c}(\mathbf{r}_1)$ . Pela Equação (1.204a),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.214)$$

O primeiro termo,  $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}$ , leva a

$$4\pi \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \cdot \nabla_1 \nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2 \quad (1.215)$$

pela Equação (1.205b). Novamente substituindo as derivadas de segunda ordem em relação a  $x_1, y_1, z_1$  por derivadas de segunda ordem em relação a  $x_2, y_2, z_2$ , integramos cada componente<sup>34</sup> da Equação (1.215) por partes:

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}|_x &= \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \cdot \nabla_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2 \\ &= \int \nabla_2 \cdot \left[ \mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) \right] d\tau_2 \\ &\quad - \int [\nabla_2 \cdot \mathbf{c}(\mathbf{r}_2)] \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2. \end{aligned} \quad (1.216)$$

<sup>34</sup> Isso evita criar o tensor  $\mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \nabla_2$ .

A segunda integral desaparece porque a densidade de circulação  $\mathbf{c}$  é solenoidal.<sup>35</sup> A primeira integral pode ser transformada em uma integral de superfície pelo teorema de Gauss. Se  $\mathbf{c}$  for limitado no espaço ou se anular mais rapidamente do que  $1/r$  para  $r$  grande, de modo que a integral na Equação (1.205b) existe, então, escolhendo uma superfície suficientemente grande, a primeira integral do lado direito da Equação (1.216) também se anula.

Com  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , a Equação (1.214) agora se reduz a

$$\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \nabla_1^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2. \quad (1.217)$$

Isso é exatamente como a Equação (1.209), exceto que o escalar  $s(\mathbf{r}_2)$  é substituído pela densidade de circulação vetorial  $\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)$ . Introduzindo a função delta de Dirac, como antes, como um modo conveniente de realizar a integração, constatamos que a Equação (1.217) é reduzida à Equação (1.196). Vemos que as formas que admitimos para  $\mathbf{V}$ , dadas pela Equação (1.204a), e para o potencial vetor  $\mathbf{A}$ , dadas pela Equação (1.205b), estão de acordo com a Equação (1.196) que especifica o rotacional de  $\mathbf{V}$ .

Isso conclui a prova do teorema de Helmholtz, mostrando que um vetor pode ser resolvido em partes irrotacional e solenoidal. Aplicado ao campo eletromagnético, resolvemos nosso campo vetorial  $\mathbf{V}$  em um campo elétrico irrotacional  $\mathbf{E}$ , derivado de um potencial escalar  $\varphi$ , e um campo de indução magnética solenoidal  $\mathbf{B}$ , derivado de um potencial vetor  $\mathbf{A}$ . A densidade de fonte  $s(\mathbf{r})$  pode ser interpretada como uma densidade de carga elétrica (dividida pela permissividade  $\epsilon$ ), enquanto a densidade de circulação  $\mathbf{c}(\mathbf{r})$  se torna densidade de corrente elétrica (vezes a permeabilidade magnética  $\mu$ ).

## Exercícios

**1.16.1** Implícita nesta seção está uma prova de que uma função  $\psi(\mathbf{r})$  é unicamente especificada exigindo-se que (1) satisfaça a equação de Laplace e (2) satisfaça um conjunto completo de condições de fronteira. Desenvolva essa prova explicitamente.

**1.16.2** (a) Admitindo que  $\mathbf{P}$  é uma solução da equação vetorial de Poisson,  $\nabla_1^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{V}(\mathbf{r}_1)$ , desenvolva uma prova alternativa do teorema de Helmholtz, mostrando que  $\mathbf{V}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A},$$

em que

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{P},$$

e

$$\varphi = \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

(b) Resolvendo a equação vetorial de Poisson, encontramos

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2.$$

Mostre que esta solução, substituída em  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  da parte (a) leva às expressões dadas para  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  na Seção 1.16.

## Leituras Adicionais

Borisenko, A. I., e I. E. Taropov, *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1968). Nova tiragem, Dover (1980).

Davis, H. F., e A. D. Snider, *Introduction to Vector Analysis*, 7<sup>a</sup> ed. Boston: Allyn & Bacon (1995).

Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*. Nova York: Dover (1953). Publicada originalmente em 1929. O texto clássico sobre a teoria do potencial.

Lewis, P. E., e J. P. Ward, *Vector Analysis for Engineers and Scientists*. Reading, MA: Addison-Wesley (1989).

Marion, J. B., *Principles of Vector Analysis*. Nova York: Academic Press (1965). Uma apresentação moderadamente avançada da análise vetorial orientada para a análise de tensores. Rotações e outras transformações são descritas com as matrizes apropriadas.

Spiegel, M.R. *Vector Analysis*, Nova York: McGraw-Hill (1989).

Tai, C.-T., *Generalized Vector and Dyadic Analysis*. Oxford: Oxford University Press (1996).

<sup>35</sup>Lembre-se de que  $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{V}$  é conhecido.



Wrede, R. C., *Introduction to Vector and Tensor Analysis*. Nova York: Wiley (1963). Nova tiragem, Nova York: Dover (1972). Bela introdução histórica. Excelente discussão de diferenciação de vetores e aplicações à mecânica.

## 2

# Análise Vetorial em Coordenadas Curvas e Tensores

No Capítulo 1 nos restringimos quase completamente a sistemas retangulares ou de coordenadas cartesianas. Um sistema de coordenadas cartesianas oferece uma vantagem única: todos os três vetores unitários,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ , têm direção e módulos constantes. Introduzimos a distância radial  $r$ , mas até ela foi tratada como uma função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Infelizmente, nem todos os problemas físicos se adaptam bem a uma solução em coordenadas cartesianas. Por exemplo, no caso de um problema de força central,  $\mathbf{F} = \hat{r}F(r)$ , tal como uma força gravitacional ou eletrostática, as coordenadas cartesianas podem ser extraordinariamente inadequadas. Um problema como este exige a utilização de um sistema de coordenadas no qual a distância radial é tomada como uma das coordenadas, isto é, coordenadas polares esféricas.

A questão é que o sistema de coordenadas deve ser escolhido para se ajustar ao problema, explorar qualquer restrição ou simetria nele presente. Então, é provável que seja resolvido com mais facilidade do que se o forçarmos a se ajustar a uma estrutura cartesiana.

Naturalmente há um preço a pagar pela utilização de um sistema de coordenadas não-cartesiano. Ainda não escrevemos expressões para gradiente, divergência ou rotacional em qualquer dos sistemas de coordenadas não-cartesianos. Essas expressões são desenvolvidas de forma geral na Seção 2.2. Em primeiro lugar, desenvolvemos um sistema de coordenadas curvilíneas, um sistema geral que pode ser particularizado para qualquer dos sistemas particulares de interesse. Nós o particularizaremos para coordenadas cilíndricas circulares na Seção 2.4, e para coordenadas polares esféricas na Seção (2.5).

### 2.1 Coordenadas Ortogonais em $\mathbb{R}^3$

Em coordenadas cartesianas tratamos com três famílias de planos mutuamente perpendiculares:  $x = \text{constante}$ ,  $y = \text{constante}$ , e  $z = \text{constante}$ . Imagine que sobreposmos a esse sistema três outras famílias de superfícies  $q_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . As superfícies de qualquer uma das famílias  $q_i$  não precisam ser paralelas umas às outras e não precisam ser planas. Se isso for difícil de visualizar, a figura de um sistema de coordenadas específico como o da Figura (2.3) talvez possa ajudar. As três novas famílias de superfícies não precisam ser mutuamente perpendiculares mas, por simplicidade, impomos essa condição (Equação (2.7)) porque coordenadas ortogonais são comuns em aplicações físicas. Essa ortogonalidade tem muitas vantagens: coordenadas ortogonais são quase iguais a coordenadas cartesianas quando áreas e volumes infinitesimais são produtos de diferenciais de coordenadas.

Nesta seção desenvolvemos o formalismo geral de coordenadas ortogonais, derivamos da geometria e das coordenadas diferenciais e os usamos para elementos de linha, de área e de volume em integrais múltiplas e operadores vetoriais. Podemos descrever qualquer ponto  $(x, y, z)$  como a interseção de três planos em coordenadas cartesianas ou como a interseção das três superfícies que formam nossas novas coordenadas cilíndricas. Descrevendo as superfícies coordenadas curvilíneas por  $q_1 = \text{constante}$ ,  $q_2 = \text{constante}$ ,  $q_3 = \text{constante}$ , podemos identificar nosso ponto por  $(q_1, q_2, q_3)$  bem como por  $(x, y, z)$ :

Coordenadas curvilíneas gerais	Coordenadas cilíndricas circulares	
$q_1, q_2, q_3$	$\rho, \varphi, z$	
$x = x(q_1, q_2, q_3)$	$-\infty < x = \rho \cos \varphi < \infty$	(2.1)
$y = y(q_1, q_2, q_3)$	$-\infty < y = \rho \sin \varphi < \infty$	
$z = z(q_1, q_2, q_3)$	$-\infty < z = z < \infty$	





especificando  $x, y, z$  em termos de  $q_1, q_2, q_3$  e das relações inversas

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) & 0 \leq \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2} < \infty \\ q_2 &= q_2(x, y, z) & 0 \leq \varphi &= \arctg(y/x) < 2\pi \\ q_3 &= q_3(x, y, z) & -\infty < z &= z < \infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como uma ilustração específica das superfícies gerais e abstratas,  $q_1, q_2, q_3$ , as equações de transformação para coordenadas cilíndricas circulares (Seção 2.4) são incluídas nas Equações (2.1) e (2.2). Com cada família de superfícies  $q_i = \text{constante}$  podemos associar um vetor unitário  $\hat{\mathbf{q}}_i$  normal à superfície  $q_i = \text{constante}$  e na direção de  $q_i$  crescente. Em geral, esses vetores unitários dependerão da posição no espaço. Então, um vetor  $\mathbf{V}$  pode ser escrito

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{q}}_1 V_1 + \hat{\mathbf{q}}_2 V_2 + \hat{\mathbf{q}}_3 V_3, \quad (2.3)$$

mas o vetor de coordenadas ou de posição é em geral diferente,

$$\mathbf{r} \neq \hat{\mathbf{q}}_1 q_1 + \hat{\mathbf{q}}_2 q_2 + \hat{\mathbf{q}}_3 q_3,$$

como demonstram os casos especiais  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ , para coordenadas polares esféricas, e  $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ , para coordenadas cilíndricas. Os  $\hat{\mathbf{q}}_i$  são normalizados a  $\hat{\mathbf{q}}_i^2 = 1$  e formam um sistema de coordenadas dextrogiro com volume  $\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{q}}_3) > 0$ .

A diferenciação de  $x$  nas Equações (2.1) leva à variação total ou diferencial

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \quad (2.4)$$

e, de modo semelhante, por diferenciação de  $y$  e  $z$ . Em notação vetorial,  $d\mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i$ . Pelo teorema de Pitágoras em coordenadas cartesianas, o quadrado da distância entre dois pontos vizinhos é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Substituir  $d\mathbf{r}$  mostra que em nosso espaço de coordenadas curvilíneo o quadrado do elemento de distância pode ser escrito como uma forma quadrática nas diferenciais  $dq_i$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r}^2 = \sum_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j \\ &= g_{11} dq_1^2 + g_{12} dq_1 dq_2 + g_{13} dq_1 dq_3 \\ &\quad + g_{21} dq_2 dq_1 + g_{22} dq_2^2 + g_{23} dq_2 dq_3 \\ &\quad + g_{31} dq_3 dq_1 + g_{32} dq_3 dq_2 + g_{33} dq_3^2 \\ &= \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que termos mistos não-zero  $dq_i dq_j$  com  $i \neq j$  sinalizam que essas coordenadas não são ortogonais, isto é, que as direções tangenciais  $\hat{\mathbf{q}}_i$  não são mutuamente ortogonais. Espaços para os quais a Equação (2.5) é uma expressão legítima são denominados *métricos* ou *riemannianos*.

Escrevendo a Equação (2.5) mais explicitamente, vemos que

$$g_{ij}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \quad (2.6)$$

são produtos escalares dos **vetores tangentes**  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$  às curvas  $\mathbf{r}$  para  $q_j = \text{constante}$ ,  $j \neq i$ . Podemos considerar que essas funções de coeficientes  $g_{ij}$ , que agora passaremos a investigar, especificam a natureza do sistema de coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$ . Esses coeficientes são denominados coletivamente como **métrica** e mostraremos na Seção (2.10) que formam um tensor simétrico de segunda ordem.<sup>1</sup> Na relatividade geral os componentes métricos são

<sup>1</sup>A natureza tensorial do conjunto  $g_{ij}$  resulta da regra do quociente (Seção 2.8). Então, a lei de transformação tensorial dá a Equação (2.5).

determinados pelas propriedades da matéria; isto é, as  $g_{ij}$  são soluções das equações de campo de Einstein com o tensor energia-momento como termo condutor. Podemos chamar isso de “geometria e física são imbricadas.”

Habitualmente nos limitamos a sistemas de coordenadas ortogonais (superfícies mutuamente perpendiculares), o que significa (veja o Exercício 2.1.1)<sup>2</sup>

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (2.7)$$

e  $\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_j = \delta_{ij}$ . (Sistemas de coordenadas não-ortogonais são considerados com mais detalhes nas Seções 2.10 e 2.11 na estrutura da análise tensorial). Agora, para simplificar a notação, escrevemos  $g_{ii} = h_i^2 > 0$ , portanto,

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 = \sum_i (h_i dq_i)^2. \quad (2.8)$$

Os sistemas de coordenadas ortogonais específicos são descritos em seções subseqüentes especificando esses fatores de escala (positivos)  $h_1$ ,  $h_2$ , e  $h_3$ . Inversamente, os fatores de escala podem ser convenientemente identificados pela relação

$$ds_i = h_i dq_i, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{\mathbf{q}}_i \quad (2.9)$$

para qualquer  $dq_i$ , mantendo todas as outras  $q$  constantes. Aqui,  $ds_i$  é um comprimento diferencial ao longo da direção  $\hat{\mathbf{q}}_i$ . Note que as três coordenadas curvilíneas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  não precisam ter comprimentos. Os fatores de escala  $h_i$  podem depender de  $q$  e podem ter dimensões. O **produto**  $h_i dq_i$  deve ter uma dimensão de comprimento. O vetor de distância diferencial  $d\mathbf{r}$  pode ser escrito

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \hat{\mathbf{q}}_1 + h_2 dq_2 \hat{\mathbf{q}}_2 + h_3 dq_3 \hat{\mathbf{q}}_3 = \sum_i h_i dq_i \hat{\mathbf{q}}_i.$$

Usando essa forma de componente curvilínea, constatamos que uma integral de linha se torna

$$\int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \int V_i h_i dq_i.$$

Pela Equação (2.9) podemos desenvolver imediatamente os elementos de área e volume

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \quad (2.10)$$

e

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (2.11)$$

As expressões nas Equações (2.10) e (2.11) concordam, é claro, com os resultados da utilização das Equações de transformação, Equação (2.1) e de jacobianos (descritos resumidamente; veja também o Exercício 2.1.5).

Pela Equação (2.10) um elemento de área pode ser expandido:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= ds_2 ds_3 \hat{\mathbf{q}}_1 + ds_3 ds_1 \hat{\mathbf{q}}_2 + ds_1 ds_2 \hat{\mathbf{q}}_3 \\ &= h_2 h_3 dq_2 dq_3 \hat{\mathbf{q}}_1 + h_3 h_1 dq_3 dq_1 \hat{\mathbf{q}}_2 \\ &\quad + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \hat{\mathbf{q}}_3. \end{aligned}$$

Uma integral de superfície se torna

$$\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \int V_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1 + \int V_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2.$$

(Exemplos dessas integrais de linha e de superfície aparecem nas Seções 2.4 e 2.5.)

Antecipando novas formas de equações para **cálculo** vetorial que aparecem na próxima seção, vamos enfatizar que a **álgebra** vetorial é a mesma em coordenadas curvilíneas ortogonais e em coordenadas cartesianas.

<sup>2</sup>Em cosmologia relativista os elementos não-diagonais da métrica  $g_{ij}$  costumam ser igualados a zero como consequência de hipóteses físicas tais como nenhuma rotação, como acontece em  $d\varphi dt, d\theta dt$ .



Especificamente para o produto escalar,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{ik} A_i \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_k B_k = \sum_{ik} A_i B_k \delta_{ik} \\ &= \sum_i A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que os índices inferiores indicam componentes curvilíneas. Para o produto externo,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \quad (2.13)$$

como na Equação (1.40).

Antes, particularizamos para coordenadas localmente retangulares que são adaptadas para simetrias especiais. Agora vamos examinar brevemente o caso mais geral em que as coordenadas não são necessariamente ortogonais. Elementos de superfície e volume são parte de integrais múltiplas que são comuns em aplicações físicas, tais como determinações de centro de massa e momentos de inércia. Normalmente escolhemos coordenadas conforme a simetria do problema particular. No Capítulo 1 usamos o teorema de Gauss para transformar uma integral de volume em uma integral de superfície e o teorema de Stokes para transformar uma integral de superfície em uma integral de linha. No caso de coordenadas ortogonais, os elementos de superfície e de volume são simplesmente produtos dos elementos de linha  $h_i dq_i$  (veja as equações (2.10) e 2.11)). Para o caso geral, usamos o significado geométrico de  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$  na Equação (2.5) como vetores tangentes. Começamos com o elemento de superfície cartesiano  $dx dy$ , que se torna um retângulo infinitesimal nas novas coordenadas  $q_1, q_2$  formadas pelos dois vetores incrementais

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}(q_1 + dq_1, q_2) - \mathbf{r}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1, \\ d\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}(q_1, q_2 + dq_2) - \mathbf{r}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

cuja área é a componente  $z$  de seu produto externo, ou

$$\begin{aligned} dx dy &= d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 \Big|_z = \left[ \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_1} \right] dq_1 dq_2 \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix} dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

O coeficiente de transformação em forma de determinante é denominado **jacobiano**.

De maneira semelhante, o elemento de volume  $dx dy dz$  se torna o produto escalar triplo dos três vetores de deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{r}_i = dq_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$  ao longo das  $q_i$  direções  $\hat{\mathbf{q}}_i$ , que, de acordo com a Seção 1.5, toma a forma

$$dx dy dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (2.16)$$

Aqui, o determinante também é denominado jacobiano, e assim por diante em dimensões mais altas.

Para coordenadas ortogonais, os jacobianos simplificam-se para produtos dos vetores ortogonais na Equação (2.9). Resulta que eles são produtos exatos dos  $h_i$ ; por exemplo, do volume jacobiano se torna

$$h_1 h_2 h_3 (\hat{\mathbf{q}}_1 \times \hat{\mathbf{q}}_2) \cdot \hat{\mathbf{q}}_3 = h_1 h_2 h_3,$$

e assim por diante.

**Exemplo 2.1.1** JACOBIANOS PARA COORDENADAS POLARES

Vamos ilustrar a transformação do elemento de volume cartesiano bidimensional  $dx dy$  para coordenadas polares  $\rho, \varphi$ , com  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . (Veja também a Seção 2.4. Aqui,

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi.$$

De modo semelhante, em coordenadas esféricas (veja a Seção 2.5) obtemos, de  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , o jacobiano

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) = r^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

expandindo o determinante ao longo da terceira linha. Daí o elemento de volume se torna  $dx dy dz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ . A integral de volume pode ser escrita como

$$\int f(x, y, z) dx dy dz = \int f(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi. \quad \blacksquare$$

*Resumindo, desenvolvemos o formalismo geral para análise vetorial em coordenadas curvilíneas ortogonais em  $\mathbb{R}^3$ . Para a maioria das aplicações, podem ser escolhidas coordenadas localmente ortogonais para as quais os elementos de superfície e de volume em integrais múltiplas são produtos de elementos de linha. Para o caso não-ortogonal geral, os determinantes jacobianos se aplicam.*

**Exercícios**

**2.1.1** Mostre que limitar nossa atenção a sistemas de coordenadas ortogonais implica que  $g_{ij} = 0$  será  $i \neq j$  (Equação (2.7)).

*Sugestão:* Construa um triângulo de lados  $ds_1$ ,  $ds_2$  e  $ds_3$ . A Equação (2.9) deve valer independentemente de  $g_{ij} = 0$  ou não. Então compare  $ds^2$  da Equação (2.5) com um cálculo que utilize a lei dos co-senos. Mostre que  $\cos \theta_{12} = g_{12} / \sqrt{g_{11}g_{22}}$ .

**2.1.2** No sistema coordenado polar esférico,  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$ . As equações de transformação correspondentes à Equação (2.1) são

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

- (a) Calcule os fatores de escala de coordenadas polares esféricas:  $h_r$ ,  $h_\theta$  e  $h_\varphi$ .
- (b) Verifique os fatores de escala que calculou pela relação  $ds_i = h_i dq_i$ .

**2.1.3** O sistema de coordenadas  $u, v, z$  usado com muita frequência em eletrostática e hidrodinâmica é definido por

$$xy = u, \quad x^2 - y^2 = v, \quad z = z.$$

Esse sistema  $u, v, z$  é ortogonal.

- (a) Com suas próprias palavras, faça uma breve descrição da natureza de cada uma das três famílias de superfícies coordenadas.
- (b) Esboce o sistema no plano  $xy$  mostrando as interseções de superfícies de  $u$  constante e superfícies de  $v$  constante com o plano  $xy$ .
- (c) Indique as direções dos vetores unitários  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$  em todos os quatro quadrantes.
- (d) Por fim, esse sistema  $u, v, z$  é dextrogiro ( $\hat{u} \times \hat{v} = +\hat{z}$ ) ou levogiro ( $\hat{u} \times \hat{v} = -\hat{z}$ )?

**2.1.4** O sistema de coordenadas cilíndrico elíptico consiste em três famílias de superfícies:

$$1) \frac{x^2}{a^2 \cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 u} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1; \quad 3) z = z.$$



Esboce as superfícies coordenadas  $u = \text{constante}$  e  $v = \text{constante}$  na interseção com o primeiro quadrante do plano  $xy$ . Mostre os vetores unitários  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ . O intervalo de  $u$  é  $0 \leq u < \infty$ . O intervalo de  $v$  é  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

**2.1.5** Um sistema ortogonal bidimensional é descrito pelas coordenadas  $q_1$  e  $q_2$ . Mostre que o jacobiano

$$J\left(\begin{matrix} x, y \\ q_1, q_2 \end{matrix}\right) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(q_1, q_2)} \equiv \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_1} = h_1 h_2$$

está de acordo com a Equação (2.10).

*Sugestão:* É mais fácil trabalhar com o quadrado de cada lado dessa equação.

**2.1.6** No espaço de Minkowski definimos  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  e  $x_0 = ct$ . Fazemos isso para que o intervalo métrico se torne  $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$  (com  $c =$  velocidade da luz). Mostre que a métrica no espaço de Minkowski é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usamos o espaço de Minkowski nas Seções 4.5 e 4.6 para descrever as transformações de Lorentz.

## 2.2 Operadores Vetoriais Diferenciais

Voltamos à nossa restrição a sistemas coordenados ortogonais.

### Gradiente

O ponto de partida para desenvolver os operadores de gradiente, de divergência e de rotacional em coordenadas curvilíneas é a interpretação geométrica do gradiente como o vetor que tem a grandeza e a direção da máxima taxa de mudança espacial (compare com a Seção 1.6). Por essa interpretação, a componente de  $\nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$  na direção normal à família de superfícies  $q_1 = \text{constante}$  é dada por<sup>3</sup>

$$\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot \nabla\psi = \nabla\psi|_1 = \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \quad (2.17)$$

uma vez que essa é a taxa de mudança de  $\psi$  variando  $q_1$  e mantendo  $q_2$  e  $q_3$  fixas. A quantidade  $ds_1$  é um comprimento diferencial na direção de  $q_1$  crescente (compare com as Equações (2.9)). Na Seção 2.1 apresentamos um vetor unitário  $\hat{\mathbf{q}}_1$  para indicar essa direção. Repetindo a Equação (2.17) para  $q_2$  e novamente para  $q_3$  e fazendo a adição vetorial, vemos que o gradiente se torna

$$\begin{aligned} \nabla\psi(q_1, q_2, q_3) &= \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{\partial\psi}{\partial s_3} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3} \\ &= \sum_i \hat{\mathbf{q}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O Exercício 2.2.4 oferece uma alternativa matemática independente dessa interpretação física do gradiente. A variação total de uma função,

$$d\psi = \nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial q_i} ds_i = \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial q_i} dq_i$$

é consistente com a Equação (2.18), é claro.

<sup>3</sup>Evitamos aqui a utilização de  $\varphi$  para rotular uma função porque, por convenção, esse símbolo é usado para denotar uma coordenada azimutal.

## Divergência

O operador de divergência pode ser obtido da segunda definição da Equação (1.98), do Capítulo 1 ou também pelo teorema de Gauss, Seção 1.11. Vamos usar a Equação (1.98),

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{\int d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau}, \quad (2.19)$$

com um volume diferencial  $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$  (Figura 2.1). Note que as direções positivas foram escolhidas de modo que  $(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \hat{\mathbf{q}}_3)$  formem um conjunto dextrogiro,  $\hat{\mathbf{q}}_1 \times \hat{\mathbf{q}}_2 = \hat{\mathbf{q}}_3$ .

A diferença de integrais de áreas para as duas faces  $q_1 = \text{constante}$  é dada por

$$\begin{aligned} & \left[ V_1 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 \right] dq_2 dq_3 - V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3, \end{aligned} \quad (2.20)$$

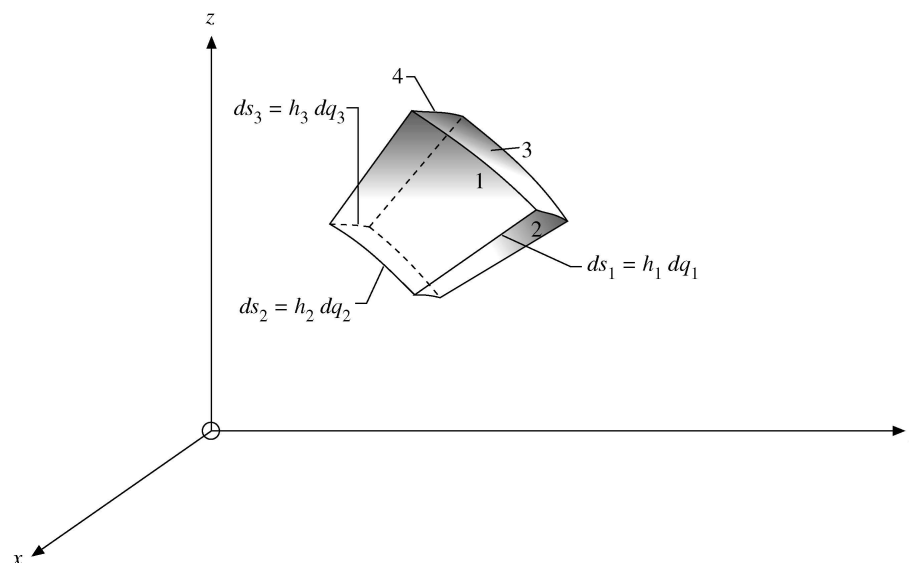


Figura 2.1: Elemento de volume curvilíneo.

exatamente como nas Seções 1.7 e 1.10.<sup>4</sup> Aqui,  $V_i = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{q}}_i$  é a projeção de  $\mathbf{V}$  sobre a direção  $\hat{\mathbf{q}}_i$ . Somando os resultados semelhantes para os outros dois pares de superfícies, obtemos

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Agora, usando a Equação (2.19), a divisão por nosso volume diferencial resulta em

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right]. \quad (2.21)$$

Podemos obter o laplaciano combinando as Equações (2.18) e (2.21), usando  $\mathbf{V} = \nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$ . Isso leva a

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \nabla\psi(q_1, q_2, q_3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

<sup>4</sup>Uma vez que tomamos o limite  $dq_1, dq_2, dq_3 \rightarrow 0$ , as derivadas de segunda ordem e de ordens mais altas serão descartadas.



### Rotacional

Por fim, para desenvolver  $\nabla \times \mathbf{V}$ , vamos aplicar o teorema de Stokes (Seção 1.12) e, como fizemos com a divergência, tomar o limite, à medida que a área da superfície torna-se cada vez menor, tendendo a zero. Trabalhando com uma componente por vez, consideramos um elemento de superfície diferencial na superfície curvilínea  $q_1 = \text{constante}$ . De

$$\int_s \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) h_2 h_3 dq_2 dq_3 \quad (2.23)$$

(teorema do valor médio do cálculo integral), o teorema de Stokes resulta

$$\hat{\mathbf{q}}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.24)$$

com a integral de linha sobre a superfície  $q_1 = \text{constante}$ . Acompanhando o circuito fechado (1, 2, 3, 4) da Figura 2.2,

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\mathbf{r} &= V_2 h_2 dq_2 + \left[ V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 h_3) dq_2 \right] dq_3 \\ &\quad - \left[ V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 h_2) dq_3 \right] dq_2 - V_3 h_3 dq_3 \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 V_2) \right] dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Escolhemos um sinal positivo quando percorremos a direção positiva nas partes 1 e 2 e um sinal negativo nas partes 3 e 4 porque aqui estamos indo na direção negativa. (Termos de ordens mais altas foram omitidos em expansões de Maclaurin ou Taylor. Eles se anularão à medida que a superfície ficar cada vez menor, tendendo a zero ( $dq_2 \rightarrow 0, dq_3 \rightarrow 0$ ).)

Pela Equação (2.24),

$$\nabla \times \mathbf{V}|_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 V_2) \right]. \quad (2.26)$$

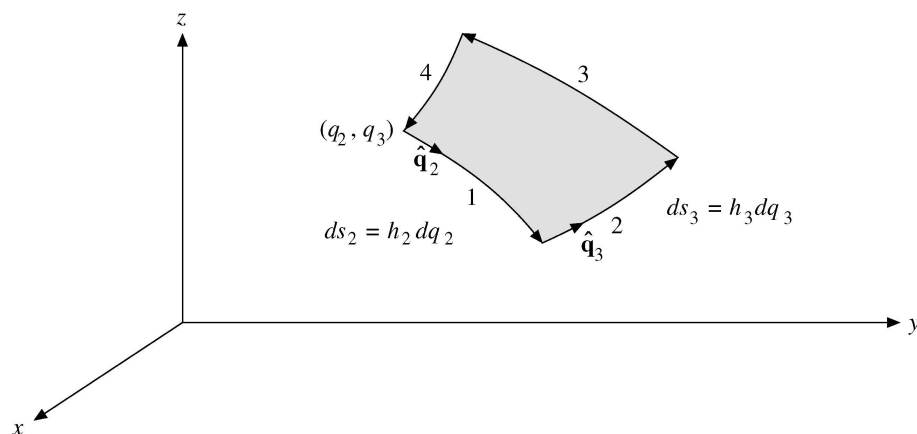


Figura 2.2: Elemento de superfície curvilínea com  $q_1 = \text{constante}$ .

As duas componentes restantes de  $\nabla \times \mathbf{V}$  podem ser obtidas por permutação cíclica dos índices. Como no Capítulo 1, muitas vezes é conveniente escrever o rotacional em forma de determinante:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 h_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 h_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Lembre-se de que, por causa da presença dos operadores diferenciais, esse determinante deve ser expandido de cima para baixo. Note que essa equação **não** é idêntica à forma para o produto externo de dois vetores (Equação (2.13)).  $\nabla$  não é um vetor comum; é um **operador** vetorial.

Nossa interpretação geométrica do gradiente e a utilização dos teoremas de Gauss e de Stokes (ou definições integrais de divergência e rotacional) nos habilitaram a obter essas quantidades **sem ter de diferenciar os vetores unitários**  $\hat{\mathbf{q}}_i$ . Existem modos alternativos para determinar grad, div e rot com base em diferenciação direta dos  $\hat{\mathbf{q}}_i$ . Uma dessas abordagens expressa os  $\hat{\mathbf{q}}_i$  de um sistema de coordenadas específico em suas componentes cartesianas (Exercícios 2.4.1 e 2.5.1) e diferencia essa forma cartesiana (Exercícios 2.4.3 e 2.5.2). A questão aqui é que as derivadas dos  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  cartesianos desaparecem, visto que a direção bem como o módulo de  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  são constantes. Uma segunda abordagem [L. J. Kijewski, *Am. J. Phys.* **33**: 816 (1965)] admite a igualdade de  $\partial^2 \mathbf{r} / \partial q_i \partial q_j$  e  $\partial^2 \mathbf{r} / \partial q_j \partial q_i$  e desenvolve as derivadas de  $\hat{\mathbf{q}}_i$  em uma forma curvilínea geral. Os Exercícios 2.2.3 e 2.2.4 são baseados nesse método.

### Exercícios

**2.2.1** Desenvolva argumentos para mostrar que produtos escalares e vetoriais (que não envolvam  $\nabla$ ) em coordenadas curvilíneas ortogonais em  $\mathbb{R}^3$  são calculados, como em coordenadas cartesianas, **sem nenhum envolvimento de fatores escalares**.

**2.2.2** Tendo  $\hat{\mathbf{q}}_1$  como um vetor unitário na direção crescente de  $q_1$ , mostre que

$$(a) \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial q_1}$$

$$(b) \quad \nabla \times \hat{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{h_1} \left[ \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right].$$

Note que, mesmo que  $\hat{\mathbf{q}}_1$  seja um vetor unitário, sua divergência e rotacional **não desaparecem necessariamente**.

**2.2.3** Mostre que os vetores unitários ortogonais  $\hat{\mathbf{q}}_j$  podem ser definidos por

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}. \quad (a)$$

Em particular, mostre que  $\hat{\mathbf{q}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i = 1$  leva a uma expressão para  $h_i$  de acordo com as Equações (2.9). A Equação (a) pode ser tomada como um ponto de partida para derivar

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_i}{\partial q_j} = \hat{\mathbf{q}}_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i}, \quad i \neq j$$

e

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_i}{\partial q_i} = - \sum_{j \neq i} \hat{\mathbf{q}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j}.$$

**2.2.4** Derive

$$\nabla \psi = \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{\mathbf{q}}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

por aplicação direta da Equação (1.97),

$$\nabla \psi = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\int \psi d\sigma}{\int d\tau}.$$

*Sugestão:* A avaliação da integral de superfície resultará em termos como  $(h_1 h_2 h_3)^{-1} (\partial / \partial q_1) \times (\hat{\mathbf{q}}_1 h_2 h_3)$ . Os resultados listados no Exercício 2.2.3 são úteis. O cancelamento de termos indesejados ocorre quando as contribuições de todos os três pares de superfícies são somadas.

## 2.3 Sistemas de Coordenadas Especiais: Introdução

Há pelo menos 11 sistemas de coordenadas nos quais a equação tridimensional de Helmholtz pode ser desmembrada em três equações diferenciais comuns. Alguns desses sistemas de coordenadas conseguiram proeminência no desenvolvimento histórico da mecânica quântica. Outros sistemas, tal como o de coordenadas





bipolares, satisfazem necessidades especiais. Em parte porque as necessidades não são muito freqüentes, mas principalmente porque o desenvolvimento de computadores e de técnicas de programação eficientes reduziu a necessidade desses sistemas de coordenadas, a discussão neste capítulo é limitada a (1) coordenadas cartesianas, (2) coordenadas polares esféricas e (3) coordenadas cilíndricas circulares. Especificações e detalhes dos outros sistemas coordenados podem ser encontrados nas duas primeiras edições desta obra e nas Leituras Adicionais ao final deste capítulo (Morse e Feshbach, Margenau e Murphy).

## 2.4 Coordenadas Cilíndricas Circulares

No sistema de coordenadas cilíndricas circulares as três coordenadas curvilíneas  $(q_1, q_2, q_3)$  são rotuladas  $(\rho, \varphi, z)$ . Estamos usando  $\rho$  para a distância perpendicular em relação ao eixo  $z$  e guardando  $r$  para a distância a partir da origem. Os limites de  $\rho, \varphi$  e  $z$  são

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \text{e} \quad -\infty < z < \infty.$$

Para  $\rho = 0$ ,  $\varphi$  não é bem definido. As superfícies coordenadas (mostradas na Figura 2.3) são:

1. Cilindros circulares para a direita (dextrogiros) que têm o eixo  $z$  como um eixo em comum,

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = \text{constante}.$$

2. Semiplanos que passam pelo eixo  $z$ ,

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{constante}$$

3. Planos paralelos ao plano  $xy$  como no sistema cartesiano,

$$z = \text{constante}$$

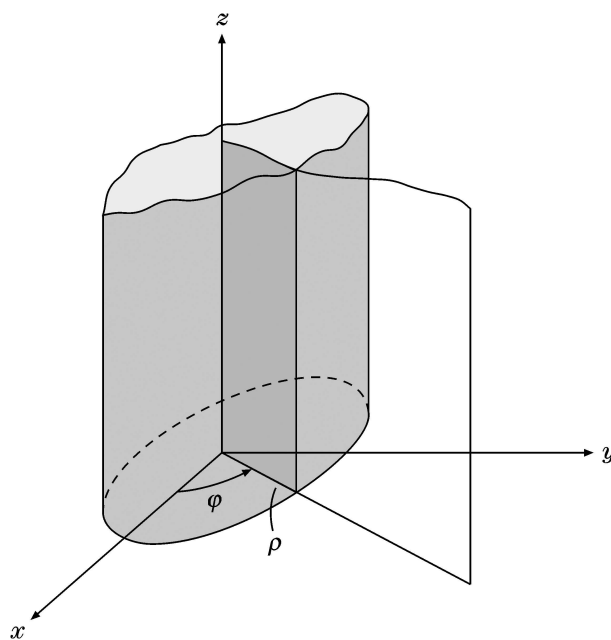


Figura 2.3: Coordenadas cilíndricas circulares.

Invertendo as equações precedentes para  $\rho$  e  $\varphi$  (ou indo diretamente à Figura 2.3), obtemos as relações de transformação

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2.28)$$

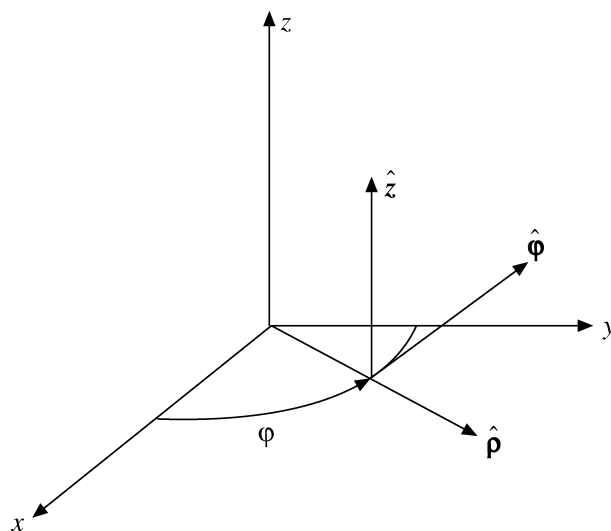


Figura 2.4: Vetores unitários em coordenadas cilíndricas circulares.

O eixo  $z$  permanece inalterado. Este é, em essência, um sistema curvilíneo bidimensional com a adição de um eixo cartesiano  $z$  para formar um sistema tridimensional.

Conforme a Equação (2.5) ou pelos elementos de comprimento  $ds_i$ , os fatores de escala são

$$h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\varphi = \rho, \quad h_3 = h_z = 1. \quad (2.29)$$

Os vetores unitários  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$  recebem novas denominações  $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ , como na Figura 2.4. O vetor unitário  $\hat{\rho}$  é normal à superfície cilíndrica, apontando na direção do raio crescente  $\rho$ . O vetor unitário  $\hat{\varphi}$  é tangencial à superfície cilíndrica, perpendicular ao semiplano  $\varphi = \text{constante}$  e aponta na direção do ângulo azimutal crescente  $\varphi$ . O terceiro vetor unitário,  $\hat{z}$ , é o vetor unitário cartesiano usual. Eles são mutuamente ortogonais,

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0,$$

e o vetor coordenado e um vetor geral  $\mathbf{V}$  são expressos como

$$\mathbf{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z, \quad \mathbf{V} = \hat{\rho}V_\rho + \hat{\varphi}V_\varphi + \hat{z}V_z.$$

Um deslocamento diferencial  $d\mathbf{r}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \hat{\rho} ds_\rho + \hat{\varphi} ds_\varphi + \hat{z} dz \\ &= \hat{\rho} d\rho + \hat{\varphi} \rho d\varphi + \hat{z} dz. \end{aligned} \quad (2.30)$$

### Exemplo 2.4.1 LEI DA ÁREA PARA MOVIMENTO PLANETÁRIO

Em primeiro lugar derivamos a lei de Kepler em coordenadas cilíndricas dizendo que o vetor raio abrange áreas iguais em tempos iguais, pela conservação do momento angular.

Consideramos o Sol localizado na origem como uma fonte da força gravitacional **central**  $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ . Então, o momento angular orbital  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  de um planeta de massa  $m$  e velocidade  $\mathbf{v}$  é conservado porque o torque

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0.$$

Por conseguinte,  $\mathbf{L} = \text{constante}$ . Agora podemos determinar que o eixo  $z$  se estende ao longo da direção do vetor do momento angular orbital,  $\mathbf{L} = L\hat{z}$ , e trabalhar em coordenadas cilíndricas  $\mathbf{r} = (\rho, \varphi, z) = \rho\hat{\rho}$  com  $z = 0$ . O planeta se move no plano  $xy$  porque  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  são perpendiculares a  $\mathbf{L}$ . Assim, expandimos sua velocidade como segue:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt}.$$



Por

$$\hat{\rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) = \hat{\varphi},$$

constatamos que  $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}$  usando a regra da cadeia, portanto  $\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi}$ . Quando substituímos as expansões de  $\hat{\rho}$  e  $\mathbf{v}$  em coordenadas polares, obtemos

$$\mathbf{L} = m \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} = m \rho (\rho \dot{\varphi}) (\hat{\rho} \times \hat{\varphi}) = m \rho^2 \dot{\varphi} \hat{\mathbf{z}} = \text{constante.}$$

A área triangular abrangida pelo vetor raio  $\boldsymbol{\rho}$  no tempo  $dt$  (**lei da área**), quando integrada sobre uma revolução, é dada por

$$A = \frac{1}{2} \int \rho (\rho d\varphi) = \frac{1}{2} \int \rho^2 \dot{\varphi} dt = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L\tau}{2m}, \quad (2.31)$$

se substituirmos  $m\rho^2 \dot{\varphi} = L = \text{constante}$ . Aqui,  $\tau$  é o período, isto é, o tempo para uma revolução do planeta em sua órbita.

A primeira lei de Kepler afirma que a órbita é uma elipse. Agora derivamos a equação orbital  $\rho(\varphi)$  da elipse em coordenadas polares, em que na Figura 2.5 o Sol está em um foco, que é a origem de nossas coordenadas cilíndricas. A partir da construção geométrica da elipse sabemos que  $\rho' + \rho = 2a$ , em que  $a$  é o semi-eixo maior; mostraremos que isso equivale à forma convencional da equação da elipse. A distância entre ambos os focos é  $0 < 2a\epsilon < 2a$ , em que  $0 < \epsilon < 1$  é denominado excentricidade da elipse. Para um círculo,  $\epsilon = 0$  porque ambos os focos coincidem com o centro. Há um ângulo, como mostra a Figura 2.5, em que as distâncias  $\rho' = \rho = a$  são iguais e o teorema de Pitágoras aplicado a esse triângulo retângulo dá  $b^2 + a^2\epsilon^2 = a^2$ . Como resultado,  $\sqrt{1 - \epsilon^2} = b/a$  é a razão entre o semi-eixo menor ( $b$ ) e o semi-eixo maior  $a$ .

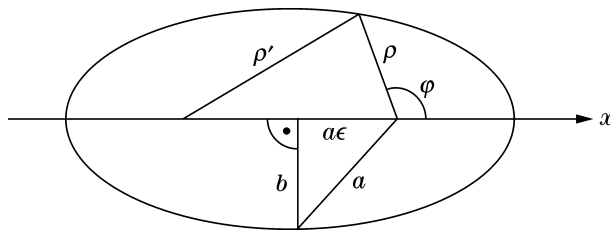


Figura 2.5: Elipse em coordenadas polares.

Agora considere o triângulo de lados denominados  $\rho'$ ,  $\rho$ ,  $2a\epsilon$  na Figura 2.5 e ângulo oposto  $\rho'$  igual a  $\pi - \varphi$ . Então, aplicando a lei dos co-senos, obtemos

$$\rho'^2 = \rho^2 + 4a^2\epsilon^2 + 4\rho a\epsilon \cos \varphi.$$

Agora, substituindo  $\rho' = 2a - \rho$ , cancelando  $\rho^2$  em ambos os lados e dividindo por  $4a$ , temos

$$\rho(1 + \epsilon \cos \varphi) = a(1 - \epsilon^2) \equiv p, \quad (2.32)$$

**a equação da órbita de Kepler em coordenadas polares.**

Alternativamente, revertamos às coordenadas cartesianas para constatar, pela Equação (2.32) com  $x = \rho \cos \varphi$ , que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (p - x\epsilon)^2 = p^2 + x^2\epsilon^2 - 2px\epsilon,$$

portanto, a familiar equação da elipse em coordenadas cartesianas,

$$(1 - \epsilon^2) \left( x + \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 = p^2 + \frac{p^2\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2},$$

continua em vigor. Se compararmos este resultado com a forma padrão da elipse,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

confirmamos que

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = a\sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad a = \frac{p}{1 - \epsilon^2},$$

e a distância  $x_0$  entre o centro e o foco é  $a\epsilon$ , como mostra a Figura 2.5.

As operações diferenciais envolvendo  $\nabla$  resultam das Equações (2.18), (2.21), (2.22) e (2.27):

$$\begin{aligned} \nabla\psi(\rho, \varphi, z) &= \hat{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z}, & (2.33) \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, & (2.34) \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, & (2.35) \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}. & (2.36) \end{aligned}$$

Por fim, para problemas como guias de ondas circulares e ressonadores de cavidade cilíndrica, o vetor  $\nabla^2\mathbf{V}$  laplaciano resolvido em coordenadas cilíndricas circulares é

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{V}|_\rho &= \nabla^2V_\rho - \frac{1}{\rho^2}V_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \\ \nabla^2\mathbf{V}|_\varphi &= \nabla^2V_\varphi - \frac{1}{\rho^2}V_\varphi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}, \\ \nabla^2\mathbf{V}|_z &= \nabla^2V_z, \end{aligned} \tag{2.37}$$

que resulta da Equação (1.85). A razão básica para esta forma particular da componente  $z$  é que o eixo  $z$  é um eixo cartesiano; isto é,

$$\begin{aligned} \nabla^2(\hat{\rho}V_\rho + \hat{\varphi}V_\varphi + \hat{z}V_z) &= \nabla^2(\hat{\rho}V_\rho + \hat{\varphi}V_\varphi) + \hat{z}\nabla^2V_z \\ &= \hat{\rho}f(V_\rho, V_\varphi) + \hat{\varphi}g(V_\rho, V_\varphi) + \hat{z}\nabla^2V_z. \end{aligned}$$

Finalmente, o operador  $\nabla^2$  que opera sobre os vetores unitários  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\varphi}$  permanece no plano  $\hat{\rho}\hat{\varphi}$ .

### Exemplo 2.4.2 UM TERMO DE NAVIER-STOKES

As Equações de Navier-Stokes da hidrodinâmica contêm um termo não-linear

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})],$$

em que  $\mathbf{v}$  é a velocidade do fluido. Para um fluido que escoar por um cano cilíndrico na direção  $z$ ,

$$\mathbf{v} = \hat{z}v(\rho).$$

Pela Equação (2.36),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(\rho) \end{vmatrix} = -\hat{\varphi}\frac{\partial v}{\partial\rho} \\ \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & v \\ 0 & -\frac{\partial v}{\partial\rho} & 0 \end{vmatrix} = \hat{\rho}v(\rho)\frac{\partial v}{\partial\rho}. \end{aligned}$$



Finalmente,

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v \frac{\partial v}{\partial \rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

portanto, para este caso particular, o termo não-linear se anula.

### Exercícios

- 2.4.1** Decomponha os vetores unitários cilíndricos circulares em suas componentes cartesianas (Figura 2.6).

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } \hat{\rho} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi, \\ \hat{z} &= \hat{z}. \end{aligned}$$

- 2.4.2** Decomponha os vetores unitários cartesianos em suas componentes cilíndricas circulares (Figura 2.6).

$$\begin{aligned} \text{RESP. } \hat{x} &= \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi, \\ \hat{y} &= \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi, \\ \hat{z} &= \hat{z}. \end{aligned}$$

- 2.4.3** Pelos resultados do Exercício 2.4.1 mostre que

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho}$$

e que todas as outras derivadas de primeira ordem dos vetores unitários cilíndricos circulares em relação às coordenadas cilíndricas circulares se anulam.

- 2.4.4** Compare  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  (Equação (2.34)) com o operador gradiente

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

(Equação (2.33)) multiplicado escalarmente por  $\mathbf{V}$ . Note que os operadores diferenciais de  $\nabla$  diferenciam **ambos** os vetores unitários e as componentes de  $\mathbf{V}$ .

*Sugestão:*  $\hat{\varphi}(1/\rho)(\partial/\partial\varphi) \cdot \hat{\rho}V_\rho$  se torna  $\hat{\varphi} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{\rho}V_\rho)$  e **não** se anula.

- 2.4.5** (a) Mostre que  $\mathbf{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z$ .  
(b) Trabalhando inteiramente em coordenadas cilíndricas circulares, mostre que

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0.$$

- 2.4.6** (a) Mostre que a operação de paridade (reflexão passando pela origem) sobre um ponto  $(\rho, \varphi, z)$  relativa aos eixos **fixos**  $x, y, z$  consiste na transformação

$$\rho \rightarrow \rho, \quad \varphi \rightarrow \varphi \pm \pi, \quad z \rightarrow -z.$$

(b) Mostre que  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\varphi}$  têm paridade ímpar (reversão de direção) e que  $\hat{z}$  tem paridade par.

*Nota:* Os vetores unitários cartesianos  $\hat{x}, \hat{y}$  e  $\hat{z}$  permanecem constantes.

- 2.4.7** Um corpo rígido está em rotação ao redor de um eixo fixo com uma velocidade angular constante  $\omega$ . Admita que  $\omega$  está ao longo do eixo  $z$ . Expresse o vetor posição  $\mathbf{r}$  em coordenadas cilíndricas circulares e, usando coordenadas cilíndricas circulares,

(a) calcule  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ , (b) calcule  $\nabla \times \mathbf{v}$ .

$$\begin{aligned} \text{RESP. (a)} \quad \mathbf{v} &= \hat{\varphi}\omega\rho, \\ \text{(b)} \quad \nabla \times \mathbf{v} &= 2\omega. \end{aligned}$$

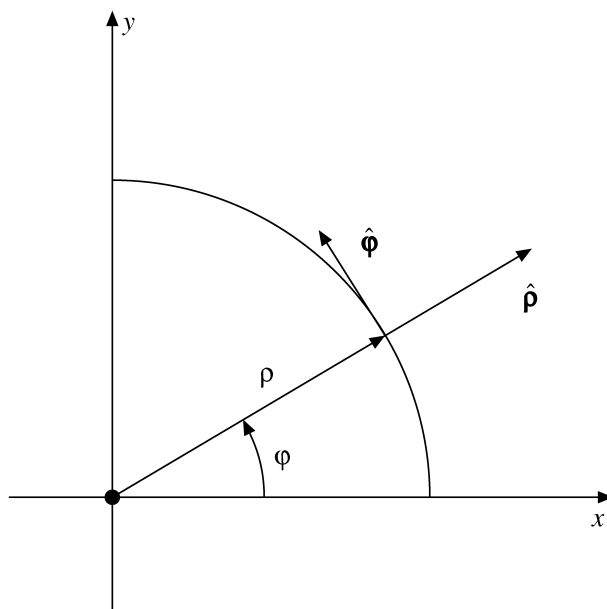


Figura 2.6: Coordenadas polares planas.

**2.4.8** Ache as componentes cilíndricas circulares da velocidade e da aceleração de uma partícula em movimento,

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{\rho}, & a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \\ v_\varphi &= \rho\dot{\varphi}, & a_\varphi &= \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \\ v_z &= \dot{z}, & a_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

*Sugestão:*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \hat{\rho}(t)\rho(t) + \hat{z}z(t) \\ &= [\hat{x}\cos\varphi(t) + \hat{y}\sin\varphi(t)]\rho(t) + \hat{z}z(t). \end{aligned}$$

*Nota:*  $\dot{\rho} = d\rho/dt$ ,  $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$ , e assim por diante.

**2.4.9** Resolva a Equação de Laplace,  $\nabla^2\psi = 0$ , em coordenadas cilíndricas para  $\psi = \psi(\rho)$ .

Resposta:  $\psi = k \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ .

**2.4.10** Em coordenadas cilíndricas circulares voltadas para a direita, uma determinada função vetorial é dada por

$$\mathbf{V}(\rho, \varphi) = \hat{\rho}V_\rho(\rho, \varphi) + \hat{\varphi}V_\varphi(\rho, \varphi).$$

Mostre que  $\nabla \times \mathbf{V}$  tem somente uma componente  $z$ . Note que esse resultado valerá para qualquer vetor confinado à superfície  $q_3 = \text{constante}$ , contanto que cada um dos produtos  $h_1V_1$  e  $h_2V_2$  seja independente de  $q_3$ .

**2.4.11** Para o escoamento de um fluido viscoso incompressível, as equações de Navier-Stokes levam a

$$-\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Aqui,  $\eta$  é a densidade do fluido. Para escoamento axial em um cano cilíndrico admitimos que a velocidade  $\mathbf{v}$  é

$$\mathbf{v} = \hat{z}v(\rho).$$

Pelo Exemplo 2.4.2,

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = 0$$

para essa escolha de  $\mathbf{v}$ .



Mostre que

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

e que essa expressão leva à equação diferencial

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{dv}{d\rho} = 0$$

e que essa expressão é satisfeita por

$$v = v_0 + a_2 \rho^2.$$

- 2.4.12** Um fio condutor ao longo do eixo  $z$  transporta uma corrente  $I$ . O potencial vetor magnético resultante é dado por

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Mostre que a indução magnética  $\mathbf{B}$  é dada por

$$\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\mu I}{2\pi\rho}.$$

- 2.4.13** Uma força é descrita por

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}} \frac{y}{x^2 + y^2} + \hat{\mathbf{y}} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(a) Expresse  $\mathbf{F}$  em coordenadas cilíndricas circulares.

Operando inteiramente em coordenadas cilíndricas circulares para (b) e (c),

(b) calcule o rotacional de  $\mathbf{F}$  e

(c) calcule o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  para percorrer o círculo unitário uma vez em sentido anti-horário.

(d) Como você concilia os resultados de (b) e (c)?

- 2.4.14** Uma onda eletromagnética transversal (*transverse electromagnetic wave* – TEM) em um guia de onda coaxial tem um campo elétrico  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho, \varphi)e^{i(kz - \omega t)}$  e um campo de indução magnética  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, \varphi)e^{i(kz - \omega t)}$ . Uma vez que a onda é transversal, nem  $\mathbf{E}$  nem  $\mathbf{B}$  têm uma componente  $z$ . Os dois campos satisfazem a equação **vetorial** de Laplace

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\rho, \varphi) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\rho, \varphi) = 0.$$

(a) Mostre que  $\mathbf{E} = \hat{\boldsymbol{\rho}} E_0(a/\rho)e^{i(kz - \omega t)}$  e  $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} B_0(a/\rho)e^{i(kz - \omega t)}$  são soluções. Aqui,  $a$  é o raio do condutor interno e  $E_0$  e  $B_0$  são amplitudes constantes.

(b) Admitindo um vácuo dentro do guia de onda, verifique que as equações de Maxwell são satisfeitas com

$$B_0/E_0 = k/\omega = \mu_0 \epsilon_0 (\omega/k) = 1/c.$$

- 2.4.15** Um cálculo do efeito de pinçamento (*pinch*) magneto-hidrodinâmico envolve a avaliação de  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ . Se a indução magnética  $\mathbf{B}$  for considerada  $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} B_\varphi(\rho)$ , mostre que

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} B_\varphi^2/\rho.$$

- 2.4.16** A velocidade linear de partículas em um corpo rígido que está em rotação com velocidade angular  $\omega$  é dada por

$$\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \rho \omega.$$

Integre  $\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$  ao redor de um círculo no plano  $xy$  e verifique que

$$\frac{\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\lambda}}{\text{área}} = \nabla \times \mathbf{v}|_z.$$

- 2.4.17** Um próton de massa  $m$ , carga  $+e$  e momento (assintótico)  $p = mv$  incide sobre um núcleo de carga  $+Ze$  a um parâmetro de impacto  $b$ . Determine a distância de maior aproximação do próton.

## 2.5 Coordenadas Polares Esféricas

Designando  $(q_1, q_2, q_3)$  por  $(r, \theta, \varphi)$ , vemos que o sistema de coordenadas polares esféricas consiste no seguinte:

1. Esferas concêntricas centradas na origem,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{constante.}$$

2. Cones circulares retos centrados no eixo (polar)  $z$  com vértices na origem,

$$\theta = \arccos \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \text{constante.}$$

3. Semiplanos que passam pelo eixo polar  $z$ ,

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \text{constante}$$

Por causa de nossa escolha arbitrária de definições de  $\theta$ , o ângulo polar, e  $\varphi$ , o ângulo azimutal, o eixo  $z$  merece tratamento especial. As equações de transformação correspondentes à Equação (2.1) são

$$x = r \text{sen } \theta \cos \varphi, \quad y = r \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.38)$$

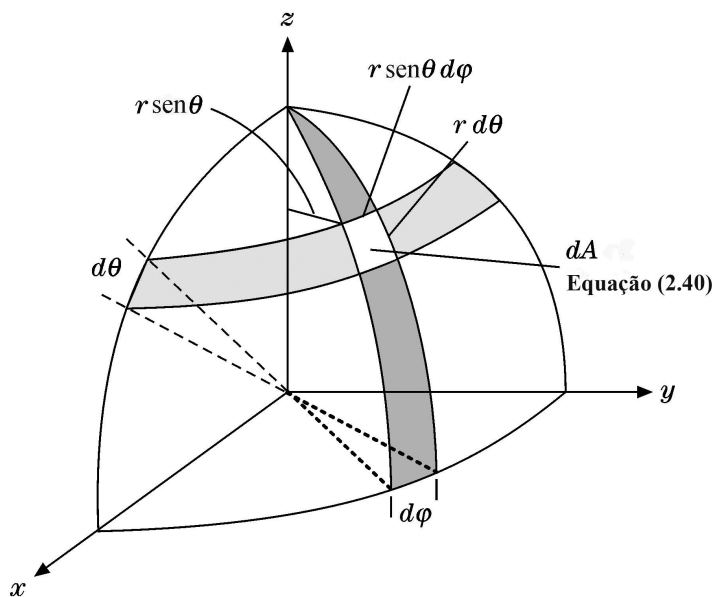


Figura 2.7: Elementos de área em coordenadas polares esféricas.

medindo  $\theta$  a partir do eixo  $z$  positivo e no plano  $xy$  a partir do eixo  $x$  positivo. As faixas de valores são  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Em  $r = 0$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  são indefinidos. Por diferenciação da Equação (2.38),

$$\begin{aligned} h_1 &= h_r = 1, \\ h_2 &= h_\theta = r, \\ h_3 &= h_\varphi = r \text{sen } \theta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Isso dá um elemento de linha

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} dr + \hat{\boldsymbol{\theta}} r d\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} r \text{sen } \theta d\varphi,$$

portanto

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2,$$





e as coordenadas são obviamente ortogonais. Nesse sistema coordenado esférico, o elemento de área (para  $r = \text{constante}$ ) é

$$dA = d\sigma_{\theta\varphi} = r^2 \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{2.40}$$

a área clara, não-sombreada, na Figura 2.7. Integrando sobre o azimute  $\varphi$ , constatamos que o elemento de área se transforma no anel de largura  $d\theta$ ,

$$dA_\theta = 2\pi r^2 \text{sen } \theta \, d\theta. \tag{2.41}$$

Essa forma aparecerá repetidas vezes em problemas em coordenadas polares esféricas com simetria azimutal, tal como a dispersão de um feixe de partículas não-polarizado. Por definição de radianos sólidos, ou estereorradianos, um elemento de ângulo sólido  $d\Omega$  é dado por

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{2.42}$$

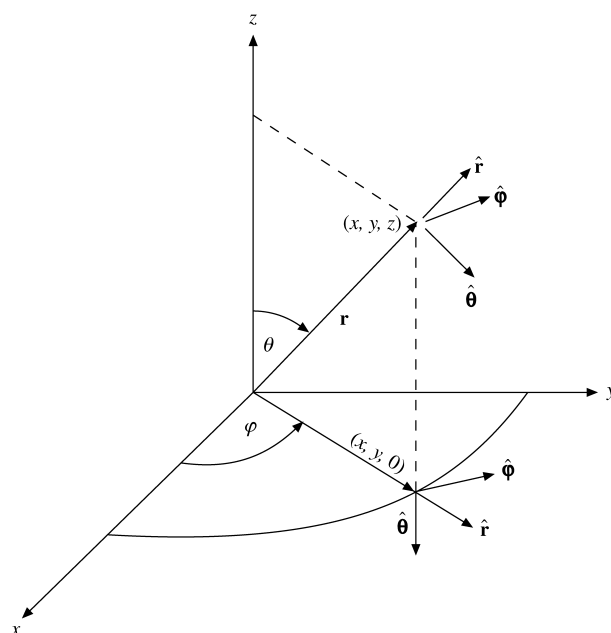


Figura 2.8: Coordenadas polares esféricas.

Integrando sobre toda a superfície, obtemos

$$\int d\Omega = 4\pi.$$

Pela Equação (2.11) o elemento de volume é

$$d\tau = r^2 \, dr \, \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi = r^2 \, dr \, d\Omega. \tag{2.43}$$

Os vetores unitários em coordenadas polares esféricas são mostrados na Figura 2.8.

É preciso salientar que **a direção dos vetores unitários  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\varphi}$  varia à medida que os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  variam.** Especificamente, as derivadas  $\theta$  e  $\varphi$  desses vetores unitários em coordenadas polares esféricas não desaparecem (Exercício 2.5.2). Quando diferenciamos vetores em um sistema polar esférico (ou em qualquer sistema não-cartesiano), essa variação dos vetores unitários com a posição não deve ser desprezada. Em termos dos vetores unitários cartesianos de direção fixa  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  (cf. Equação (2.38)),

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \text{sen } \theta \cos \varphi + \hat{y} \text{sen } \theta \text{sen } \varphi + \hat{z} \cos \theta, \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \text{sen } \varphi - \hat{z} \text{sen } \theta = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}, \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \text{sen } \varphi + \hat{y} \cos \varphi = \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

que resultam de

$$0 = \frac{\partial \hat{r}^2}{\partial \theta} = 2\hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}, \quad 0 = \frac{\partial \hat{r}^2}{\partial \varphi} = 2\hat{r} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}.$$

Note que o Exercício 2.5.5 dá a transformação inversa e que um determinado vetor agora pode ser expresso de vários modos diferentes (porém equivalentes). Por exemplo, o vetor posição  $\mathbf{r}$  pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \hat{r}r = \hat{r}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \\ &= \hat{x}r \sin \theta \cos \varphi + \hat{y}r \sin \theta \sin \varphi + \hat{z}r \cos \theta. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Selecione a forma que for mais útil para seu problema particular.

Pela Seção 2.2, denominando os vetores unitários coordenados curvilíneos  $\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2$  e  $\hat{\mathbf{q}}_3$  como  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, & (2.46) \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right], & (2.47) \\ \nabla \cdot \nabla \psi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right], & (2.48) \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{vmatrix}. & (2.49) \end{aligned}$$

Há ocasiões em que precisamos do laplaciano vetorial  $\nabla^2 \mathbf{V}$  em coordenadas polares esféricas. O melhor modo de obtê-lo é usar o vetor identidade (Equação (1.85)) do Capítulo 1. Como referência

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{V}|_r &= \left( -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) V_r \\ &\quad + \left( -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \right) V_\theta + \left( -\frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) V_\varphi \\ &= \nabla^2 V_r - \frac{2}{r^2} V_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} V_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\nabla^2 \mathbf{V}|_\theta = \nabla^2 V_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \tag{2.51}$$

$$\nabla^2 \mathbf{V}|_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}. \tag{2.52}$$

Não se pode negar que essas expressões para as componentes de  $\nabla^2 \mathbf{V}$  são confusas, mas às vezes são necessárias.

### Exemplo 2.5.1 $\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$ PARA UMA FORÇA CENTRAL

Usando as Equações (2.46) a (2.49), podemos reproduzir por inspeção alguns dos resultados derivados no Capítulo 1 pela trabalhosa aplicação de coordenadas cartesianas.

Pela Equação (2.46),

$$\begin{aligned} \nabla f(r) &= \hat{\mathbf{r}} \frac{df}{dr}, \\ \nabla r^n &= \hat{\mathbf{r}} n r^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Para o potencial de Coulomb  $V = Ze/(4\pi\epsilon_0 r)$ , o campo elétrico é  $\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$ .

Pela Equação (2.47),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} f(r) &= \frac{2}{r} f(r) + \frac{df}{dr}, \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} r^n &= (n+2)r^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.54}$$



Para  $r > 0$ , a densidade de carga do campo elétrico do potencial de Coulomb é  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 0$  porque  $n = -2$ .

Pela Equação (2.48),

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}, \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}, \quad (2.56)$$

em contraste com a derivada de segunda ordem radial ordinária de  $r^n$  que envolve  $n - 1$  em vez de  $n + 1$ .

Por fim, pela Equação (2.49),

$$\nabla \times \hat{\mathbf{r}}f(r) = 0. \quad (2.57)$$

### Exemplo 2.5.2 POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

O cálculo do potencial vetor magnético de um único circuito de corrente no plano  $xy$  usa a lei de Oersted,  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , em conjunção com  $\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  (veja os Exemplos 1.9.2 e 1.12.1) e envolve a avaliação de

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times [\nabla \times \hat{\varphi} A_\varphi(r, \theta)].$$

Em coordenadas polares esféricas, essa expressão se reduz a

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \frac{1}{r^2 \text{sen } \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\text{sen } \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r\text{sen } \theta A_\varphi(r, \theta) \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times \frac{1}{r^2 \text{sen } \theta} \left[ \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\text{sen } \theta A_\varphi) - r\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial r} (r\text{sen } \theta A_\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Tomando o rotacional uma segunda vez, obtemos

$$\mu_0 \mathbf{J} = \frac{1}{r^2 \text{sen } \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\text{sen } \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2 \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\text{sen } \theta A_\varphi) & -\frac{1}{r\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r\text{sen } \theta A_\varphi) & 0 \end{vmatrix}.$$

Expandindo o determinante ao longo da linha superior, temos

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen } \theta A_\varphi) \right] \right\} \\ &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}} \left[ \nabla^2 A_\varphi(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} A_\varphi(r, \theta) \right]. \quad (2.58) \end{aligned}$$

### Exercícios

**2.5.1** Expresse os vetores unitários polares esféricos em vetores unitários cartesianos.

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \text{sen } \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \text{sen } \theta \text{sen } \varphi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \text{sen } \varphi - \hat{\mathbf{z}} \text{sen } \theta, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \text{sen } \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi. \end{aligned}$$

**2.5.2** (a) Pelos resultados do Exercício 2.5.1, calcule as derivadas parciais  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  em relação a  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ .  
(b) Com  $\nabla$  dado por

$$\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

(maior taxa de mudança espacial), use os resultados da parte (a) para calcular  $\nabla \cdot \nabla \psi$ . Essa é uma derivação alternativa do laplaciano.

*Nota:* As derivadas do  $\nabla$  da esquerda operam sobre os vetores unitários do  $\nabla$  antes da multiplicação escalar dos vetores unitários.

**2.5.3** Um corpo rígido está em rotação ao redor de um eixo fixo com uma velocidade angular constante  $\omega$ . Admita  $\omega$  ao longo do eixo  $z$ . Usando coordenadas polares esféricas,

(a) Calcule

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}.$$

(b) Calcule

$$\nabla \times \mathbf{v}.$$

Resposta: (a)  $\mathbf{v} = \hat{\varphi} \omega r \sin \theta,$   
 (b)  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega.$

**2.5.4** O sistema coordenado  $(x, y, z)$  é rotacionado através de um ângulo  $\Phi$  em sentido anti-horário ao redor de um eixo definido pelo vetor unitário  $\mathbf{n}$  no sistema  $(x', y', z')$ . Em termos das novas coordenadas, o vetor raio se torna

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{r} \times \mathbf{n} \sin \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \Phi).$$

(a) Derive essa expressão partindo de considerações geométricas.

(b) Mostre que ela se reduz, como esperado,  $\mathbf{n} = \hat{z}$ . A resposta, em forma de matriz, aparece na Equação (3.90).

(c) Verifique que  $r'^2 = r^2$ .

**2.5.5** Resolvas os vetores unitários cartesianos para suas componentes polares esféricas:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi, \\ \hat{y} &= \hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi, \\ \hat{z} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

**2.5.6** A direção de um vetor é dada pelos ângulos  $\theta_1$  e  $\varphi_1$ . Para um segundo vetor, os ângulos correspondentes são  $\theta_2$  e  $\varphi_2$ . Mostre que o co-seno do ângulo incluído  $\gamma$  é dado por

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Veja Figura 12.15.

**2.5.7** Um certo vetor  $\mathbf{V}$  não tem nenhuma componente radial. Seu rotacional não tem nenhuma componente tangencial. O que isso implica no que se refere à dependência radial das componentes tangenciais de  $\mathbf{V}$ ?

**2.5.8** A física moderna dá grande realce à propriedade de paridade — quer uma quantidade permaneça invariante ou mude de sinal sob uma inversão do sistema coordenado. Em coordenadas cartesianas isso quer dizer  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$  e  $z \rightarrow -z$ .

(a) Mostre que a inversão (reflexão passando pela origem) de um ponto  $(r, \theta, \varphi)$  relativa aos eixos **fixos**  $x, y, z$  consiste na transformação

$$r \rightarrow r, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \varphi \rightarrow \varphi \pm \pi.$$

(b) Mostre que  $\hat{r}$  e  $\hat{\varphi}$  têm paridade ímpar (reversão de direção) e que  $\hat{\theta}$  tem paridade par.

**2.5.9** Sendo  $\mathbf{A}$  um vetor qualquer,

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{A}.$$

(a) Verifique esse resultado em coordenadas cartesianas.

(b) Verifique esse resultado usando coordenadas polares esféricas. (A Equação (2.46) dá  $\nabla$ .)



- 2.5.10** Ache as componentes coordenadas esféricas da velocidade e da aceleração de uma partícula em movimento:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\theta &= r\dot{\theta}, \\ v_\varphi &= r\text{sen } \theta \dot{\varphi}, \\ a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\text{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\text{sen } \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= r\text{sen } \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\text{sen } \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

*Sugestão:*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \hat{\mathbf{r}}(t)r(t) \\ &= [\hat{\mathbf{x}}\text{sen } \theta(t) \cos \varphi(t) + \hat{\mathbf{y}}\text{sen } \theta(t)\text{sen } \varphi(t) + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta(t)]r(t). \end{aligned}$$

*Nota:* Usando as técnicas lagrangianas da Seção 17.3, podemos obter esses resultados de um modo mais elegante. O ponto em  $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$  significa derivada em relação ao tempo,  $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt, \dot{\varphi} = d\varphi/dt$ . Newton é que deu origem a essa notação.

- 2.5.11** Uma partícula  $m$  entra em movimento reagindo a uma força central conforme a segunda lei de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}f(r).$$

Mostre que  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}$ , uma constante, e que a interpretação geométrica dessa expressão leva à segunda lei de Kepler.

- 2.5.12** Expresse  $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$  em coordenadas polares esféricas.

$$\begin{aligned} \text{RESP. } \frac{\partial}{\partial x} &= \text{sen } \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\text{sen } \varphi}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ [10pt] \frac{\partial}{\partial y} &= \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \text{sen } \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ [10pt] \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \text{sen } \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

*Sugestão:* Iguale  $\nabla_{xyz}$  e  $\nabla_{r\theta\varphi}$ .

- 2.5.13** Pelo Exercício 2.5.12 mostre que

$$-i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Este é o operador da mecânica quântica correspondente à componente  $z$  do momento angular orbital.

- 2.5.14** Definido o operador do momento angular da mecânica quântica como  $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ , mostre que

$$\begin{aligned} \text{(a) } L_x + iL_y &= e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \text{(b) } L_x - iL_y &= -e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

(Esses são os operadores de levantamento e abaixamento da Seção 4.3.)

- 2.5.15** Verifique que  $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$  em coordenadas polares esféricas.  $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ , o operador de momento angular orbital da mecânica quântica.

*Sugestão:* Use coordenadas polares esféricas para  $\mathbf{L}$  mas componentes cartesianas para o produto vetorial.

- 2.5.16** (a) Pela Equação (2.46) mostre que

$$\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla) = i \left( \hat{\theta} \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

- (b) Resolva  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\varphi}$  para componentes cartesianas e determine  $L_x, L_y$  e  $L_z$  em termos de  $\theta, \varphi$  e suas derivadas.  
 (c) Por  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , mostre que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= -r^2 \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Esta última identidade é útil para relacionar o momento angular orbital e a equação diferencial de Legendre, Exercício 9.3.8.

**2.5.17** Sendo  $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ , verifique as identidades de operador

- (a)  $\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{L}}{r^2}$ ,  
 (b)  $\mathbf{r} \nabla^2 - \nabla \left( 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) = i \nabla \times \mathbf{L}$ .

**2.5.18** Mostre que as três formas seguintes (coordenadas esféricas) de  $\nabla^2 \psi(r)$  são equivalentes:

- (a)  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right]$ ; (b)  $\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\psi(r)]$ ; (c)  $\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr}$ .

A segunda forma é particularmente conveniente para estabelecer a correspondência entre as descrições polares esféricas e as descrições cartesianas de um problema.

**2.5.19** Um modelo da coroa solar admite que a equação de estado estável de fluxo de calor,

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0,$$

é satisfeita. Aqui,  $k$ , a condutividade térmica é proporcional a  $T^{5/2}$ . Admitindo que a temperatura  $T$  é proporcional a  $r^n$ , mostre que a equação de fluxo de calor é satisfeita por  $T = T_0(r_0/r)^{2/7}$ .

**2.5.20** Um certo campo de força é dado por

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \frac{2P \cos \theta}{r^3} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{P}{r^3} \sin \theta, \quad r \geq P/2$$

(em coordenadas polares esféricas).

- (a) Examine  $\nabla \times \mathbf{F}$  para ver se existe um potencial.  
 (b) Calcule  $\oint \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$  para um círculo unitário no plano  $\theta = \pi/2$ . O que isso indica em relação à força ser conservativa ou não-conservativa?  
 (c) Se você acredita que  $\mathbf{F}$  pode ser descrita por  $\mathbf{F} = -\nabla \psi$ , ache  $\psi$ . Caso contrário, afirme, simplesmente, que não existe nenhum potencial aceitável.  
**2.5.21** (a) Mostre que  $\mathbf{A} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cot \theta / r$  é uma solução de  $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} / r^2$ .  
 (b) Mostre que essa solução em coordenadas polares esféricas está de acordo com a solução dada para o Exercício 1.13.6:

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} \frac{yz}{r(x^2 + y^2)} - \hat{\mathbf{y}} \frac{xz}{r(x^2 + y^2)}.$$

Note que a solução diverge para  $\theta = 0, \pi$  correspondendo a  $x, y = 0$ .

- (c) Por fim, mostre que  $\mathbf{A} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \varphi \sin \theta / r$  é uma solução. Note que, embora esta solução não divirja ( $r \neq 0$ ), ela não é mais de valor único para todos os possíveis ângulos azimutais.  
**2.5.22** Um potencial vetor magnético é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Mostre que isso leva à indução magnética  $\mathbf{B}$  de um dipolo magnético pontual com momento dipolar  $\mathbf{m}$ .



RESP. para  $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{z}}m$ ,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}.$$

Compare com as Equações (12.133) e (12.134)

**2.5.23** Quando as distâncias em relação à fonte são grandes, a radiação dipolar elétrica tem campos

$$\mathbf{E} = a_E \sin \theta \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{B} = a_B \sin \theta \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Mostre que as equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

são satisfeitas se tomarmos

$$\frac{a_E}{a_B} = \frac{\omega}{k} = c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}.$$

*Sugestão:* Uma vez que  $r$  é grande, termos de ordem  $r^{-2}$  podem ser descartados.

**2.5.24** O potencial vetor magnético para uma casca esférica girante uniformemente carregada é

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\mu_0 a^4 \sigma \omega}{3} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2}, & r > a \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\mu_0 a \sigma \omega}{3} \cdot r \cos \theta, & r < a. \end{cases}$$

( $a$  = raio da casca esférica,  $\sigma$  = densidade superficial de carga e  $\omega$  = velocidade angular). Ache a indução magnética  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

$$\text{RESP. } B_r(r, \theta) = \frac{2\mu_0 a^4 \sigma \omega}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{r^3}, \quad r > a,$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 a^4 \sigma \omega}{3} \cdot \frac{\sin \theta}{r^3}, \quad r > a,$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \frac{2\mu_0 a \sigma \omega}{3}, \quad r < a.$$

- 2.5.25** (a) Explique por que  $\nabla^2$  em coordenadas polares planas resulta de  $\nabla^2$  em coordenadas cilíndricas circulares com  $z = \text{constante}$ .  
 (b) Explique por que usar  $\nabla^2$  em coordenadas polares esféricas e restringir  $\theta$  a  $\pi/2$  **não** leva à forma polar plana de  $\nabla$ .

*Nota:*

$$\nabla^2(\rho, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

## 2.6 Análise Tensorial

### Introdução, Definições

Tensores são importantes em muitas áreas da física, incluindo relatividade geral e eletrodinâmica. Escalares e vetores são casos especiais de tensores. No Capítulo 1, uma quantidade que não mudava sob rotações do sistema de coordenadas em um espaço tridimensional, uma invariante, era denominada escalar. Um **escalar** é especificado por um número real e é um **tensor de ordem 0**. Uma quantidade cujas componentes se transformavam sob rotações como as da distância de um ponto a partir de uma origem escolhida (Equação (1.9), Seção 1.2) era denominada vetor. A transformação das componentes do vetor sob uma rotação das coordenadas preserva o vetor como uma entidade geométrica (tal como uma seta no espaço), independentemente da orientação da estrutura de referência. Em um espaço tridimensional, um **vetor** é especificado por  $3 = 3^1$  números reais, por exemplo, suas componentes cartesianas, e é um **tensor de ordem 1**. Um **tensor de ordem  $n$**  tem  $3^n$  componentes que se transformam de uma maneira definida.<sup>5</sup> Essa filosofia de transformação é de crucial importância para a análise tensorial e obedece ao conceito de vetor e de espaço vetorial (ou linear) dos matemáticos e à noção dos físicos de que observáveis físicos não dependem da escolha de estruturas coordenadas. Há uma base física para tal filosofia: descrevemos o

<sup>5</sup>Em um espaço  $N$  dimensional, um tensor de ordem  $n$  tem  $N^n$  componentes.

mundo físico pela matemática, mas quaisquer previsões físicas que fazemos devem ser independentes de nossas convenções matemáticas, tal como um sistema de coordenadas com sua origem arbitrária e orientação de seus eixos.

Há uma possível ambigüidade na lei de transformação de um vetor

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j, \quad (2.59)$$

na qual  $a_{ij}$  é o co-seno do ângulo entre o eixo  $x'_i$  e o eixo  $x_j$ . Se partirmos de um vetor distância diferencial  $dr$ , então, tomando  $dx'_i$  como uma função das variáveis “sem linha”,

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2.60)$$

por diferenciação parcial. Se estabelecermos

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}, \quad (2.61)$$

as Equações (2.59) e (2.60) são consistentes. Qualquer conjunto de quantidades  $A^j$ , transformando-se de acordo com

$$A'^i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A^j, \quad (2.62a)$$

é definido como um vetor **contravariante** cujos índices escrevemos como **índices superiores (sobrescritos)**; isso inclui o vetor de coordenadas cartesianas  $x^i = x_i$  de agora em diante.

Contudo, já encontramos um tipo ligeiramente diferente de transformação vetorial. O gradiente de um escalar  $\nabla\varphi$ , definido por

$$\nabla\varphi = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}, \quad (2.63)$$

usando  $x^1, x^2, x^3$  para  $x, y, z$ , se transforma em

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'^i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \quad (2.64)$$

usando  $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z') = \varphi'$ ,  $\varphi$  definido como uma quantidade escalar. Note que isso é diferente da Equação (2.62) considerando que temos  $\partial x^j / \partial x'^i$  em vez de  $\partial x'^i / \partial x^j$ . A Equação (2.64) é tomada como a definição de um vetor **covariante** com o gradiente como protótipo. O covariante análogo da Equação (2.62a) é

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j. \quad (2.62b)$$

Somente em coordenadas cartesianas é

$$\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = a_{ij}, \quad (2.65)$$

de modo que não há nenhuma diferença entre transformações contravariantes e covariantes. Em outros sistemas, a Equação (2.65) em geral não se aplica, e a distinção entre contravariante e covariante é real e deve ser observada. Isso é de extrema importância no espaço riemanniano curvo da relatividade geral.

No restante desta seção as componentes de qualquer vetor **contravariante** são denotadas por um **índice superior (sobrescrito)**,  $A^i$ , enquanto um **índice inferior (subscrito)** é usado para as componentes de um vetor **covariante**  $A_i$ .<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Isso significa que as coordenadas  $(x, y, z)$  são escritas  $(x^1, x^2, x^3)$ , uma vez que  $\mathbf{r}$  se transforma em um vetor contravariante. A ambigüidade de ter  $x^2$  representando  $x$  ao quadrado e também  $y$  é o preço que pagamos.





## Definição de Tensores de Ordem 2

Agora passamos a definir **tensores contravariantes, mistos e covariantes de ordem 2** pelas seguintes equações para suas componentes sob transformações de coordenadas:

$$\begin{aligned} A'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A^{kl}, \\ B'^i{}_j &= \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B^{kl}, \\ C'_{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} C_{kl}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

É claro que a ordem segue o número de derivadas parciais (ou co-senos direcionais) na definição: 0 para um escalar, 1 para um vetor, 2 para um tensor de ordem 2, e assim por diante. Cada índice (superior ou inferior) abrange o número de dimensões do espaço. O número de índices (igual à ordem do tensor) é independente das dimensões do espaço. Vemos que  $A^{kl}$  é contravariante em relação a ambos os índices,  $C_{kl}$  é covariante em relação a ambos os índices e  $B^k{}_l$  se transforma de modo contravariante em relação ao primeiro índice  $k$ , mas de modo covariante em relação ao segundo índice  $l$ . Mais uma vez, se estivermos usando coordenadas cartesianas, todas as três formas dos tensores contravariantes, mistos e covariantes de segunda ordem são as mesmas.

Assim como as componentes de um vetor, as leis de transformação para as componentes de um tensor, Equação (2.66), resultam em entidades (e propriedades) que são independentes da escolha da estrutura de referência. É isso que torna a análise tensorial importante em física. A independência em relação à estrutura de referência (invariância) é ideal para expressar e investigar leis físicas universais.

O tensor de segunda ordem  $\mathbf{A}$  (componentes  $A^{kl}$ ) pode ser convenientemente representado escrevendo suas componentes em um arranjo quadrado ( $3 \times 3$ , se estivermos em espaço tridimensional):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Isso não significa que qualquer arranjo quadrado de números ou funções forme um tensor. A condição essencial é que as componentes se transformem segundo a Equação (2.66).

No contexto da análise matricial, as equações de transformação precedentes tornam-se (para coordenadas cartesianas) uma transformação de similaridade ortogonal; veja a Seção 3.3. Na Seção 3.5 desenvolvemos uma interpretação geométrica de um tensor de segunda ordem (tensor de inércia).

*Resumindo, tensores são sistemas de componentes organizados por um ou mais índices que se transformam de acordo com regras específicas sob um conjunto de transformações. O número de índices é denominado ordem do tensor. Se as transformações forem rotações de coordenadas em um espaço tridimensional, então a análise tensorial equivale ao que fizemos nas seções sobre coordenadas curvilíneas e coordenadas cartesianas no Capítulo 1. Nas quatro dimensões do espaço-tempo de Minkowski, as transformações são transformações de Lorentz, e tensores de ordem 1 são denominados quadrivetores.*

## Adição e Subtração de Tensores

A adição e a subtração de tensores são definidas em termos dos elementos individuais, exatamente como para vetores. Se

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \tag{2.68}$$

então

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij}.$$

É claro que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  devem ser tensores da mesma ordem e ambos expressos em espaço com o mesmo número de dimensões.

## Convenção de Soma

Em análise tensorial costuma-se adotar uma convenção para a soma, que é colocar a Equação (2.66) e as equações tensoriais subsequentes sob uma forma mais compacta. Contanto que estejamos distinguindo entre contravariância

e covariância, vamos concordar que, quando um índice aparecer de um lado de uma equação, uma vez como índice superior e outra vez como índice inferior (exceto para as coordenadas em que ambos são índices inferiores), automaticamente somamos sobre aquele índice. Então podemos escrever a segunda expressão na Equação (2.66) como

$$B'^i{}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B^k{}_l, \quad (2.69)$$

subentendendo-se que a soma do lado direito é executada sobre  $k$  e  $l$ . Essa é a convenção da soma de Einstein.<sup>7</sup> O índice  $i$  é superior porque está associado com o contravariante  $x'^i$ ; da mesma forma,  $j$  é um índice inferior porque está relacionado com o gradiente covariante.

Para ilustrar a utilização da convenção da soma e algumas das técnicas de análise tensorial, vamos mostrar que o nosso conhecido delta de Kronecker,  $\delta_{kl}$ , é na realidade um tensor misto de ordem 2,  $\delta^k{}_l$ .<sup>8</sup> A questão é:  $\delta^k{}_l$  se transforma de acordo com a Equação (2.66)? Este é nosso critério para chamá-lo de tensor. Usando a convenção de soma, temos,

$$\delta^k{}_l \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}, \quad (2.70)$$

pela definição do delta de Kronecker. Agora,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j}, \quad (2.71)$$

por diferenciação parcial do lado direito (regra da cadeia). Contudo,  $x'^i$  e  $x'^j$  são coordenadas independentes e, por conseguinte, a variação de uma delas em relação à outra deve ser zero se elas forem diferentes, unidade ou coincidirem; isto é,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta^i{}_j. \quad (2.72)$$

Por conseqüência,

$$\delta'^i{}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \delta^k{}_l,$$

mostrando que os  $\delta^k{}_l$  são, de fato, as componentes de um tensor misto de segunda ordem. Note que esse resultado é independente do número de dimensões de nosso espaço. A razão para o índice superior  $i$  e o índice inferior  $j$  é a mesma que na Equação (2.69). O delta de Kronecker tem mais uma propriedade interessante. Ele tem as mesmas componentes em todos os nossos sistemas coordenados rotacionados e, portanto, é denominado **isotrópico**. Na Seção 2.9 encontraremos um tensor isotrópico de terceira ordem e três tensores isotrópicos de quarta ordem. Não existe nenhum tensor (vetor) isotrópico de primeira ordem.

### Simetria – Anti-simetria

A ordem na qual os índices aparecem em nossa descrição de um tensor é importante. Em geral,  $A^{mn}$  é independente de  $A^{nm}$ , mas há alguns casos de especial interesse. Se, para todos  $m$  e  $n$ ,

$$A^{mn} = A^{nm}, \quad (2.73)$$

denominamos o tensor **simétrico**. Se, por outro lado,

$$A^{mn} = -A^{nm}, \quad (2.74)$$

o tensor é **anti-simétrico**. É claro que todo tensor (de segunda ordem) pode ser decomposto em partes simétrica e anti-simétrica pela identidade

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}), \quad (2.75)$$

sendo o primeiro termo à direita um tensor simétrico e o segundo um tensor anti-simétrico. Uma decomposição similar de funções em partes simétrica e anti-simétrica é de extrema importância em mecânica quântica.

<sup>7</sup>Neste contexto, seria melhor escrever  $\partial x'^i/\partial x^k$  como  $a_k^i$  e  $\partial x^l/\partial x'^j$  como  $b_j^l$ .

<sup>8</sup>Na prática é comum nos referirmos a um tensor como **A** especificando uma componente típica,  $A_{ij}$ . Contudo que o leitor evite escrever absurdos como  $\mathbf{A} = A_{ij}$ , não há mal nenhum.



## Espinoros

Houve época em que se pensava que o sistema de escalares, vetores, tensores (segunda ordem), e assim por diante, formava um sistema matemático completo, um sistema adequado para descrever uma física independente da escolha de estrutura de referência. Mas o universo e a física matemática não são tão simples assim. No reino das partículas elementares, por exemplo, partículas de spin zero<sup>9</sup> (mésons  $\pi$ , partículas  $\alpha$ ) podem ser descritas com escalares, partículas de spin 1 (dêuterons) por vetores e partículas de spin 2 (grávitons) por tensores. Essa listagem omite as partículas mais comuns: elétrons, prótons e nêutrons, todas com spin  $\frac{1}{2}$ . Elas são adequadamente descritas por **espinoros**. Um espinor não é um escalar, vetor ou tensor. Uma breve introdução aos espinoros no contexto da teoria de grupo ( $J = 1/2$ ) aparece na Seção 4.3.

## Exercícios

- 2.6.1** Mostre que, se todas as componentes de qualquer tensor de qualquer ordem se anulam em um determinado sistema coordenado particular, elas se anulam em qualquer sistema de coordenadas. *Nota:* Esta questão adquire especial importância no espaço quadridimensional curvo da relatividade geral. Se uma quantidade, expressa como um tensor, existir em um sistema de coordenadas, ela existirá em todos os sistemas de coordenadas e não é apenas uma consequência da **escolha** de um sistema de coordenadas (como são as forças centrífugas e de Coriolis em mecânica newtoniana).

- 2.6.2** As componentes do tensor **A** são iguais às componentes correspondentes do tensor **B** em um determinado sistema de coordenadas, denotado pelo índice superior 0; isto é,

$$A_{ij}^0 = B_{ij}^0.$$

Mostre que aquele tensor **A** é igual ao tensor **B**,  $A_{ij} = B_{ij}$ , em todos os sistemas de coordenadas.

- 2.6.3** As últimas três componentes de um vetor quadridimensional se anulam em cada um de dois sistemas de referência. Se o segundo sistema de referência não for uma mera rotação do primeiro ao redor do eixo  $x_0$ , isto é, se ao menos um dos coeficientes  $a_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $\neq 0$ , mostre que a componente de ordem zero se anula em todos os sistemas de referência. Traduzindo para mecânica relativista, isso significa que, se o momento for conservado em dois referenciais de Lorentz, então a energia será conservada em todos os referenciais de Lorentz.

- 2.6.4** Pela análise do comportamento de um tensor geral de segunda ordem sob rotações de  $90^\circ$  e  $180^\circ$  ao redor dos eixos de coordenadas, mostre que um tensor isotrópico de segunda ordem em um espaço tridimensional deve ser um múltiplo de  $\delta_{ij}$ .

- 2.6.5** O tensor de curvatura quadridimensional de quarta ordem de Riemann-Christoffel da relatividade geral,  $R_{iklm}$ , satisfaz as relações de simetria

$$R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}.$$

Com índices variando de 0 a 3, mostre que o número de componentes independentes é reduzido de 256 a 36 e que a condição

$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

reduz ainda mais o número de componentes independentes para 21. Por fim, se as componentes satisfizerem uma identidade  $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$ , mostre que o número de componentes independentes é reduzido para 20.

*Nota:* A identidade final, de três termos, fornece novas informações somente se todos os quatro índices forem diferentes. Então, ela reduz de um terço o número de componentes independentes.

- 2.6.6**  $T_{iklm}$  é anti-simétrico em relação a todos os pares de índices. Quantas componentes independentes ele tem (em um espaço tridimensional)?

## 2.7 Contração, Produto Direto

### Contração

Quando tratamos de vetores, formamos um produto escalar (Seção 1.3) somando produtos de componentes correspondentes:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (\text{convenção de soma}). \quad (2.76)$$

<sup>9</sup>O spin de partículas é o momento angular intrínseco (em unidades de  $\hbar$ ). É distinto do momento angular orbital clássico devido ao movimento.

A generalização dessa expressão em análise tensorial é um processo conhecido como contração. Dois índices, um covariante e o outro contravariante, são igualados um ao outro, e então (como subentendido pela convenção de soma) somamos sobre esse índice repetido. Por exemplo, vamos contrair o tensor misto de segunda ordem  $B'^i_j$ ,

$$B'^i_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} B^k_l = \frac{\partial x^l}{\partial x^k} B^k_l \quad (2.77)$$

usando a Equação (2.71) e, então, pela Equação (2.72),

$$B'^i_i = \delta^l_k B^k_l = B^k_k. \quad (2.78)$$

Nosso tensor misto de segunda ordem contraído é invariante e, por conseguinte, um escalar.<sup>10</sup> Isso é exatamente o que obtivemos na Seção 1.3 para o produto escalar de dois vetores e na Seção 1.7 para a divergência de um vetor. Em geral, a operação de contração reduz em 2 a ordem de um tensor. Um exemplo da utilização da contração aparece no Capítulo 4.

### Produto Direto

As componentes de um vetor covariante (tensor de primeira ordem)  $a_i$  e as de um vetor contravariante (tensor de primeira ordem)  $b^j$  podem ser multiplicadas componente por componente para dar o termo geral  $a_i b^j$ . Essa operação, pela Equação (2.66), é na verdade um tensor de segunda ordem porque

$$a'_i b'^j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} b^l = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} (a_k b^l). \quad (2.79)$$

Contraíndo, obtemos

$$a'_i b'^i = a_k b^k, \quad (2.80)$$

como nas Equações (2.77) e (2.78), para dar o produto escalar regular.

Para o caso de dois vetores, o produto direto é um tensor de segunda ordem. Nesse sentido, podemos atribuir significado a  $\nabla \mathbf{E}$ , que não foi definido dentro da estrutura da análise vetorial. Em geral, o produto direto de dois tensores é um tensor de ordem igual à soma das duas ordens iniciais, isto é,

$$A^i_j B^{kl} = C^i_j{}^{kl}, \quad (2.81a)$$

em que  $C^i_j{}^{kl}$  é um tensor de quarta ordem. Pelas Equações (2.66),

$$C'^i_j{}^{kl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^p} \frac{\partial x'^l}{\partial x^q} C^m_n{}^{pq}. \quad (2.81b)$$

**O produto direto é uma técnica para criar novos tensores, de ordens mais altas.** O Exercício 2.7.1 é uma forma do produto direto na qual o primeiro fator é  $\nabla$ . Aplicações aparecem na Seção 4.6.

Quando  $\mathbf{T}$  é um tensor cartesiano de  $n$ ésima ordem,  $(\partial/\partial x^i)T_{jkl} \dots$ , uma componente de  $\nabla \mathbf{T}$ , é um tensor cartesiano de ordem  $n + 1$  (Exercício 2.7.1). Contudo,  $(\partial/\partial x^i)T_{jkl} \dots$  não é um tensor em espaços mais gerais. Em sistemas não-cartesianos,  $\partial/\partial x^i$  agirá sobre as derivadas parciais  $\partial x^p/\partial x'^q$  e destruirá a simples relação de transformação de tensor (veja a Equação (2.129)).

Até aqui, a distinção entre uma transformação covariante e uma transformação contravariante foi mantida porque ela não existe em um espaço não-euclidiano e porque é de grande importância na relatividade geral. Nas Seções 2.10 e 2.11 desenvolveremos relações diferenciais para tensores gerais. Entretanto, por causa da simplificação conseguida, muitas vezes nos restringimos a tensores cartesianos. Como observamos na Seção 2.6, a distinção entre contravariância e covariância desaparece.

### Exercícios

**2.7.1** Se  $T_{\dots i}$  é um tensor de ordem  $n$ , mostre que  $\partial T_{\dots i}/\partial x^j$  é um tensor de ordem  $n + 1$  (coordenadas cartesianas).

*Nota:* Em sistemas de coordenadas não-cartesianas os coeficientes  $a_{ij}$  são, em geral, funções das coordenadas, e a derivada simples de um tensor de ordem  $n$  não é um tensor exceto no caso especial de  $n = 0$ . Neste caso, a derivada realmente resulta em um vetor covariante (tensor de ordem 1) pela Equação (2.64).

<sup>10</sup>Em análise matricial, este escalar é o **traço** da matriz, Seção 3.2.



**2.7.2** Se  $T_{ijk\dots}$  é um tensor de ordem  $n$ , mostre que  $\sum_j \partial T_{ijk\dots} / \partial x^j$  é um tensor de ordem  $n - 1$  (coordenadas cartesianas).

**2.7.3** O operador

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

usando  $x_4 = ict$ . Este é o laplaciano quadridimensional, às vezes denominado o d’alembertiano e denotado por  $\square^2$ . Mostre que ele é um operador **escalar**, ou seja, é invariante sob transformações de Lorentz.

## 2.8 Regra do Quociente

Se  $A_i$  e  $B_j$  são vetores, como vimos na Seção 2.7, é fácil mostrar que  $A_i B_j$  é um tensor de segunda ordem. Aqui, estamos preocupados com uma variedade de relações inversas. Considere equações como

$$K_i A_i = B \tag{2.82a}$$

$$K_{ij} A_j = B_i \tag{2.82b}$$

$$K_{ij} A_{jk} = B_{ik} \tag{2.82c}$$

$$K_{ijkl} A_{ij} = B_{kl} \tag{2.82d}$$

$$K_{ij} A_k = B_{ijk}. \tag{2.82e}$$

De acordo com nossa restrição a sistemas cartesianos, escrevemos todos os índices como índices inferiores e, a menos que outra coisa seja especificada, índices de soma repetidos.

Em cada uma dessas expressões, **A** e **B** são tensores conhecidos de ordem indicada pelo número de índices e **A** é arbitrário. Em cada caso,  $K$  é uma quantidade desconhecida. Desejamos estabelecer as propriedades de transformação de  $K$ . A regra do quociente afirma que, se a Equação de interesse for válida em todos os sistemas de coordenadas cartesianas (rotacionadas),  $K$  é um tensor da ordem indicada. A importância, na teoria da física, é que a regra do quociente pode estabelecer a natureza tensorial das quantidades. O Exercício 2.8.1 é uma ilustração simples disso. A regra do quociente (Equação (2.82b)) mostra que a matriz de inércia que aparece na equação do momento angular  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , Seção 3.5, é um tensor.

Ao provar a regra do quociente, consideramos a Equação (2.82b) um caso típico. Em nosso sistema de coordenadas “linha”,

$$K'_{ij} A'_j = B'_i = a_{ik} B_k, \tag{2.83}$$

usando as propriedades de transformação vetorial de **B**. Uma vez que a equação é válida em todos os sistemas de coordenadas cartesianas rotacionadas,

$$a_{ik} B_k = a_{ik} (K_{kl} A_l). \tag{2.84}$$

Agora, transformando **A** volta para o sistema de coordenadas “linha”<sup>11</sup> (compare com a Equação (2.62)), temos

$$K'_{ij} A'_j = a_{ik} K_{kl} a_{jl} A'_j. \tag{2.85}$$

Rearranjando, obtemos

$$(K'_{ij} - a_{ik} a_{jl} K_{kl}) A'_j = 0. \tag{2.86}$$

Isso deve ser válido para cada valor do índice  $i$  e para cada sistema de coordenadas “linha”. Visto que  $A'_j$  é arbitrário,<sup>12</sup>concluimos que

$$K'_{ij} = a_{ik} a_{jl} K_{kl}, \tag{2.87}$$

<sup>11</sup>Note a ordem dos índices do co-seno direcional  $a_{j1}$  nesta transformação **inversa**. Temos

$$A_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} A'_j = \sum_j a_{jl} A'_j.$$

<sup>12</sup>Poderíamos, por exemplo, tomar  $A'_1 = 1$  e  $A'_m = 0$  para  $m \neq 1$ . Então, a Equação  $K'_{i1} = a_{ik} a_{1l} K_{kl}$  resultaria imediatamente. O restante da Equação (2.87) vem de outras escolhas especiais do  $A'_j$  arbitrário.

que é a nossa definição de tensor de segunda ordem.

As outras equações podem ser tratadas de modo semelhante, dando origem à outras formas da regra do quociente. Devemos observar uma pequena armadilha: a regra do quociente não se aplica necessariamente se  $B$  for zero. As propriedades de transformação de zero são indeterminadas.

### Exemplo 2.8.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E EQUAÇÕES DE CAMPO

Em mecânica clássica, as equações de movimento de Newton  $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$  nos dizem, com base na regra do quociente, que, se a massa é um escalar e a força um vetor, então a aceleração  $\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}}$  é um vetor. Em outras palavras, o caráter de vetor da força como o termo essencial impõe seu caráter de vetor sobre a aceleração, contanto que o fator de escala  $m$  seja escalar.

A equação de onda da eletrodinâmica  $\partial^2 A^\mu = J^\mu$  envolve a versão quadridimensional do laplaciano  $\partial^2 = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2$ , um escalar de Lorentz, e a corrente quadrivetorial externa  $J^\mu$  como seu termo essencial. Pela regra do quociente, inferimos que o potencial vetorial  $A^\mu$  também é quadrivetorial. Se a corrente essencial é um quadrivetor, o potencial vetorial deve ser de ordem 1 pela regra do quociente. ■

*A regra do quociente é uma substituta para a divisão ilegal de vetores.*

### Exercícios

**2.8.1** O somatório duplo  $K_{ij}A_iB_j$  é invariante para quaisquer dois vetores  $A_i$  e  $B_j$ . Prove que  $K_{ij}$  é um tensor de segunda ordem.

*Nota:* Na forma  $ds^2$  (invariante) =  $g_{ij} dx^i dx^j$ , este resultado mostra que a matriz  $g_{ij}$  é um tensor.

**2.8.2** A Equação  $K_{ij}A_{jk} = B_{ik}$  é válida para todas as orientações do sistema de coordenadas. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são tensores arbitrários de segunda ordem, mostre que  $\mathbf{K}$  também é um tensor de segunda ordem.

**2.8.3** A exponencial em uma onda plana é  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ . Reconhecemos  $x^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3)$  como um vetor protótipo em um espaço de Minkowski. Se  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  é um escalar sob transformações de Lorentz (Seção 4.5), mostre que  $k^\mu = (\omega/c, k_1, k_2, k_3)$  é um vetor em um espaço de Minkowski.

*Nota:* A multiplicação por  $\hbar$  leva a  $(E/c, \mathbf{p})$  como um vetor em um espaço de Minkowski.

## 2.9 Pseudotensores, Tensores Duais

Até aqui nossas transformações de coordenadas se restringiram às rotações passivas puras. Agora consideramos o efeito de reflexões ou inversões.

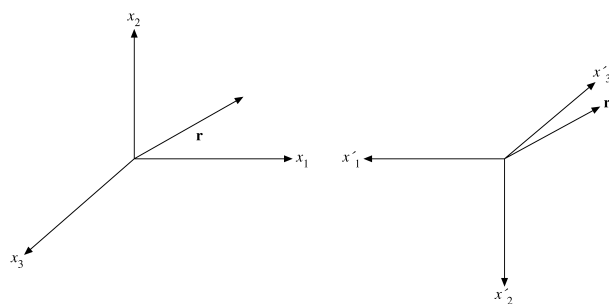


Figura 2.9: Inversão de coordenadas cartesianas – vetor polar.

Se tivermos coeficientes de transformação  $a_{ij} = -\delta_{ij}$ , então, pela Equação (2.60),

$$x^i = -x'^i, \tag{2.88}$$

que é uma inversão ou transformação de paridade. Note que essa transformação muda nosso sistema de coordenadas inicial dextrogiro em um sistema de coordenadas levogiro.<sup>13</sup> Nosso vetor protótipo  $\mathbf{r}$  com componentes  $(x^1, x^2, x^3)$  se transforma em

$$\mathbf{r}' = (x'^1, x'^2, x'^3) = (-x^1, -x^2, -x^3).$$

<sup>13</sup>Esta é uma inversão do sistema de coordenadas ou dos eixos coordenados; objetos no mundo físico permanecem fixos.



Esse novo vetor  $\mathbf{r}'$  tem componentes negativas em relação ao novo conjunto transformado de eixos. Como mostra a Figura 2.9, inverter as direções dos eixos coordenados e inverter os sinais das componentes resulta em  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . O vetor (uma seta no espaço) fica exatamente como era antes da execução da transformação. O vetor posição  $\mathbf{r}$  e todos os outros vetores cujas componentes se comportam dessa maneira (invertendo o sinal com a inversão dos eixos coordenados) são denominados **vetores polares** e têm paridade ímpar.

Uma diferença fundamental aparece quando encontramos um vetor definido como o produto externo de dois vetores polares. Seja  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , em que ambos,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , são vetores polares. Pela Equação (1.33), as componentes de  $\mathbf{C}$  são dadas por

$$C^1 = A^2 B^3 - A^3 B^2, \quad (2.89)$$

e assim por diante. Agora, quando os eixos coordenados são invertidos,  $A^i \rightarrow -A'^i$ ,  $B_j \rightarrow -B'_j$ , mas, por sua definição,  $C^k \rightarrow +C'^k$ ; isto é, nosso vetor produto externo, vetor  $\mathbf{C}$ , **não** se comporta como um vetor polar sob inversão. Para distinguir, nós o rotulamos como um pseudovetor ou vetor axial (veja a Figura 2.10)) que tem paridade par. O termo **vetor axial** é freqüentemente usado porque esses produtos externos costumam aparecer a partir de uma descrição de rotação.

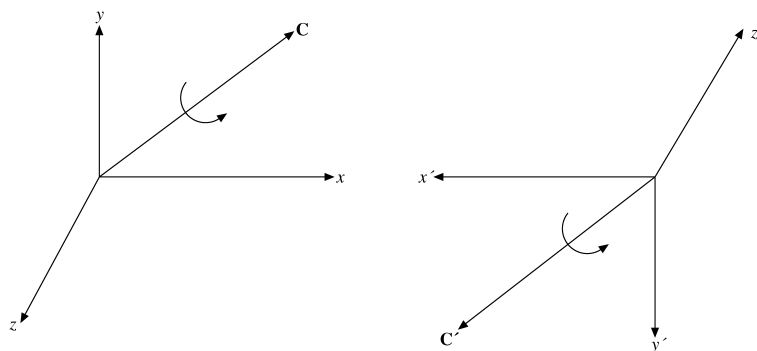


Figura 2.10: Inversão das coordenadas cartesianas — vetor axial.

Eis alguns exemplos:

velocidade angular	$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ,
momento angular orbital	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ,
torque, força = $\mathbf{F}$ ,	$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ,
campo de indução magnética $\mathbf{B}$ ,	$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ .

Em  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , o vetor axial é a velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ , e  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  são vetores polares. É claro que vetores axiais ocorrem com freqüência em física, embora, em geral, esse fato não seja destacado. Em um sistema de coordenadas dextrogiro, um vetor axial  $\mathbf{C}$  tem um sentido de rotação associado a ele dado por uma regra da mão direita (compare com a Seção 1.4). No sistema invertido, levogiro, o sentido de rotação é para o lado esquerdo, o que é indicado pelas setas curvas na Figura 2.10.

A distinção entre vetores polares e axiais também pode ser ilustrada por uma reflexão. Um vetor polar se reflete em um espelho como uma seta física real, Figura 2.11a. Nas Figuras 2.9 e 2.10 as coordenadas são invertidas; o mundo físico continua fixo. Aqui, os eixos coordenados permanecem fixos; o mundo é refletido, como em um espelho no plano  $xz$ . Especificamente nessa representação, mantemos os eixos fixos e associamos uma troca de sinal com a componente do vetor. Para um espelho no plano  $xz$ ,  $P_y \rightarrow -P_y$ . Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (P_x, P_y, P_z) \\ \mathbf{P}' &= (P_x, -P_y, P_z) \quad \text{vetor polar.} \end{aligned}$$

Um vetor axial, tal como um campo magnético  $\mathbf{H}$  ou um momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  (= corrente  $\times$  área do circuito de corrente) comporta-se de maneira bem diferente sob reflexão. Considere o campo magnético  $\mathbf{H}$  e o momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  que serão produzidos por uma carga elétrica que se movimenta por uma trajetória circular (Exercício 5.8.4 e Exemplo 12.5.3). A reflexão inverte o sentido de rotação da carga.

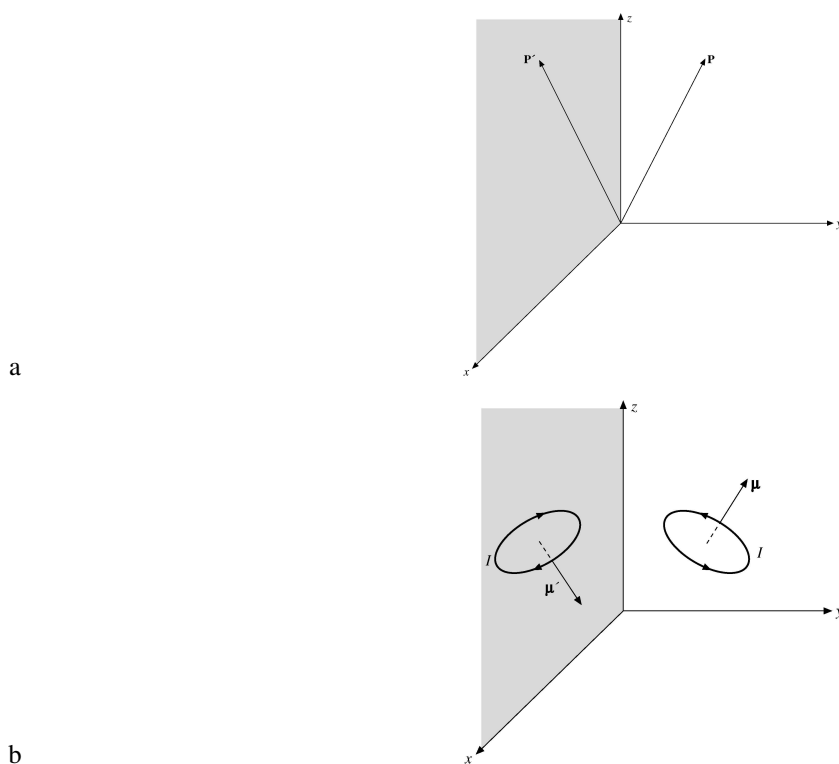


Figura 2.11: (a) Espelho no plano  $xz$ ; (b) espelho no plano  $yz$ .

Os dois circuitos fechados de corrente e os momentos magnéticos resultantes são mostrados na Figura 2.11b. Temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= (\mu_x, \mu_y, \mu_z) \\ \boldsymbol{\mu}' &= (-\mu_x, \mu_y, -\mu_z) \quad \text{vetor axial refletido.} \end{aligned}$$

Se concordamos que o universo não se importa se usamos um sistema coordenado dextrogiro ou levogiro, então não tem sentido adicionar um vetor axial a um vetor polar. Na Equação vetorial  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são ou vetores polares ou vetores axiais.<sup>14</sup> Restrições semelhantes se aplicam a escalares e pseudotensores e, em geral, aos tensores e pseudotensores considerados a seguir.

Em geral, pseudo-escalares, pseudovetores e pseudotensores se transformarão em

$$S' = JS, \quad C'_i = Ja_{ij}C_j, \quad A'_{ij} = Ja_{ik}a_{jl}A_{kl}, \quad (2.90)$$

em que  $J$  é o determinante<sup>15</sup> do arranjo de coeficientes  $a_{mn}$ , o jacobiano da transformação de paridade. Em nossa inversão, o jacobiano é

$$J = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \quad (2.91)$$

Para uma reflexão de um eixo, o eixo  $x$ ,

$$J = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad (2.92)$$

e, mais uma vez, o jacobiano  $J = -1$ . Por outro lado, para todas as rotações puras, o jacobiano  $J$  é sempre  $+1$ . Matrizes de rotação são discutidas com mais detalhes na Seção 3.3.

No Capítulo 1 mostramos que o produto escalar triplo  $S = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  é um escalar (sob rotações). Agora, considerando a transformação de paridade dada pela Equação (2.88), vemos que  $S \rightarrow -S$ , provando que o produto

<sup>14</sup>A grande exceção a essa regra está no decaimento beta, nas interações fracas. Neste caso, o universo distingue entre sistemas dextrogiros e levogiro e adicionamos interações vetoriais polares e axiais.

<sup>15</sup>Determinantes são descritos na Seção 3.1.





escalar triplo é, na verdade, um pseudo-escalar: esse comportamento foi prenunciado pela analogia geométrica de um volume. Se todos os três parâmetros de volume — comprimento, profundidade e altura — mudarem de distâncias positivas para distâncias negativas, o produto dos três será negativo.

### Símbolo de Levi-Civita

Para utilização futura é conveniente introduzir o símbolo tridimensional de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$ , definido por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\ \text{todos os outros } \varepsilon_{ijk} &= 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Note que  $\varepsilon_{ijk}$  é anti-simétrico em relação a todos os pares de índices. Agora suponha que temos um pseudotensor de terceira ordem que, em um determinado sistema de coordenadas, é igual a  $\delta_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$ . Então,

$$\delta'_{ijk} = |a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr} \quad (2.94)$$

pela definição de pseudotensor. Agora,

$$a_{1p} a_{2q} a_{3r} \varepsilon_{pqr} = |a| \quad (2.95)$$

por expansão direta do determinante, mostrando que  $\delta'_{123} = |a|^2 = 1 = \varepsilon_{123}$ . Considerando as outras possibilidades uma por uma, encontramos

$$\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (2.96)$$

para rotações e reflexões. Por conseguinte,  $\varepsilon_{ijk}$  é um pseudotensor.<sup>16,17</sup> Além do mais, ele é visto como um pseudotensor isotrópico com as mesmas componentes em todos os sistemas coordenados cartesianos.

### Tensores duais

Podemos associar qualquer tensor **anti-simétrico** de segunda ordem **C** (em um espaço tridimensional) um pseudovetor dual  $C_i$  definido por

$$C_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} C^{jk}. \quad (2.97)$$

Aqui, o anti-simétrico **C** pode ser escrito como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & C^{12} & -C^{31} \\ -C^{12} & 0 & C^{23} \\ C^{31} & -C^{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Sabemos que  $C_i$  deve se transformar em um vetor sob rotações a partir da dupla contração do (pseudo) tensor de quinta ordem  $\varepsilon_{ijk} C_{mn}$ , mas que, na verdade, ele é um pseudovetor pela natureza de  $\varepsilon_{ijk}$ . Especificamente, as componentes de **C** são dadas por

$$(C_1, C_2, C_3) = (C^{23}, C^{31}, C^{12}). \quad (2.99)$$

Note a ordem cíclica dos índices que resulta da ordem cíclica das componentes de  $\varepsilon_{ijk}$ . A Equação (2.99) significa que nosso produto vetorial tridimensional pode ser literalmente tomado como um pseudovetor ou um tensor anti-simétrico de segunda ordem, dependendo de como preferirmos escrevê-lo.

Se tomarmos três vetores (polares) **A**, **B** e **C**, podemos definir o produto direto

$$V^{ijk} = A^i B^j C^k. \quad (2.100)$$

Por uma extensão da análise da Seção (2.6),  $V^{ijk}$  é um tensor de terceira ordem. A quantidade dual

$$V = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} V^{ijk} \quad (2.101)$$

<sup>16</sup>A utilidade de  $\varepsilon_{pqr}$  vai muito além desta seção. Por exemplo, as matrizes  $M_k$  do Exercício 3.2.16 são derivadas de  $(M_r)_{pq} = -i\varepsilon_{pqr}$ . Grande parte da análise vetorial elementar pode ser escrita sob uma forma muito compacta usando  $\varepsilon_{ijk}$  e a identidade do Exercício 2.9.4. Veja A. A. Evett, “Permutation symbol approach to elementary vector analysis”. *Am. J. Phys.* **34**: 503 (1966).

<sup>17</sup>O valor numérico de  $\varepsilon_{pqr}$  é dado pelo produto escalar triplo de vetores unitários de coordenadas:

$$\hat{\mathbf{x}}_p \cdot \hat{\mathbf{x}}_q \times \hat{\mathbf{x}}_r.$$

Deste ponto de vista, cada elemento de  $\varepsilon_{pqr}$  é um pseudo-escalar, mas os  $\varepsilon_{pqr}$  formam, coletivamente, um pseudotensor de terceiro grau.

é claramente um pseudo-escalar. Por expansão, verificamos que

$$V = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix} \quad (2.102)$$

é nosso familiar produto escalar triplo.

Para utilização na escrita das equações de Maxwell em forma covariante, Seção 4.6, é interessante estender essa análise vetorial dual para espaço quadridimensional e, em particular, indicar que o elemento de volume quadridimensional  $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  é um pseudo-escalar.

Introduzimos o símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijkl}$ , o análogo quadridimensional de  $\varepsilon_{ijk}$ . Essa quantidade  $\varepsilon_{ijkl}$  é definida como totalmente anti-simétrica em todos os quatro índices. Se  $(ijkl)$  for uma permutação par<sup>18</sup> de  $(0, 1, 2, 3)$ , então  $\varepsilon_{ijkl}$  é definido como  $+1$ ; se for uma permutação ímpar, então  $\varepsilon_{ijkl}$  é  $-1$ , e é  $0$  se quaisquer dois índices forem iguais. Pode-se provar que o  $\varepsilon_{ijkl}$  de Levi-Civita é um pseudotensor de ordem 4 por análise semelhante à usada para determinar a natureza de tensor de  $\varepsilon_{ijk}$ . Introduzindo o produto direto de quatro vetores como tensor de quarta ordem com componentes

$$H^{ijkl} = A^i B^j C^k D^l, \quad (2.103)$$

construídas a partir dos vetores polares **A**, **B**, **C** e **D**, podemos definir a quantidade dual

$$H = \frac{1}{4!} \varepsilon_{ijkl} H^{ijkl}, \quad (2.104)$$

um pseudo-escalar por causa da quádrupla contração com o pseudotensor  $\varepsilon_{ijkl}$ . Agora, sejam **A**, **B**, **C** e **D** deslocamentos infinitesimais ao longo dos quatro eixos coordenados (espaço de Minkowski),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (dx^0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{B} &= (0, dx^1, 0, 0), \quad \text{e assim por diante,} \end{aligned} \quad (2.105)$$

e

$$H = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (2.106)$$

O elemento de volume quadridimensional agora é identificado como um pseudo-escalar. Usamos esse resultado na Seção 4.6. Esse resultado podia ser esperado dos resultados da teoria especial da relatividade. A contração de Lorentz-Fitzgerald de  $dx^1 dx^2 dx^3$  apenas equilibra a dilatação do tempo de  $dx^0$ .

Entramos nesse espaço quadridimensional como uma simples extensão matemática do espaço tridimensional e, na verdade, poderíamos ter discutido espaços de 5, 6 ou  $N$  dimensões com essa mesma facilidade. Isso é típico do poder da análise das componentes. Em termos físicos, esse espaço quadridimensional pode ser tomado como espaço de Minkowski,

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (2.107)$$

em que  $t$  é tempo. Esta é a fusão de espaço e tempo conseguida na relatividade especial. As transformações que descrevem as rotações em espaço quadridimensional são as transformações de Lorentz da relatividade especial. Encontramos essas transformações de Lorentz na Seção 4.6.

### Tensores Irredutíveis

Para algumas aplicações, em particular em teoria quântica do momento angular, nossos tensores cartesianos não são particularmente convenientes. Em linguagem matemática, nosso tensor geral de segunda ordem  $A_{ij}$  é redutível, o que significa que pode ser decomposto em partes de tensores de ordem mais baixa. Na verdade, já fizemos isso. Pela Equação (2.78),

$$A = A^i_i \quad (2.108)$$

é uma quantidade escalar, o traço de  $A_{ij}$ .<sup>19</sup>

Acabamos de mostrar que a porção anti-simétrica,

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}), \quad (2.109)$$

<sup>18</sup>Uma permutação é ímpar se envolver um número ímpar de trocas de índices adjacentes, tal como  $(0\ 1\ 2\ 3) \rightarrow (0\ 2\ 1\ 3)$ . Permutações pares surgem de um número par de transposições de índices adjacentes. (Na verdade, a palavra *adjacente* é desnecessária.)  $\varepsilon_{0123} = +1$ .

<sup>19</sup>Uma abordagem alternativa, usando matrizes, é dada na Seção 3.3 (veja o Exercício 3.3.9).



é equivalente a um (pseudo)vetor ou

$$B_{ij} = C_k \quad \text{permutação cíclica de } i, j, k. \quad (2.110)$$

Subtraindo o escalar  $A$  e o vetor  $C_k$  de nosso tensor original, temos um tensor de segunda ordem irreduzível, simétrico, de traço zero,  $S_{ij}$ , no qual

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3}A\delta_{ij}, \quad (2.111)$$

com cinco componentes independentes. Então, finalmente, nosso tensor cartesiano original pode ser escrito

$$A_{ij} = \frac{1}{3}A\delta_{ij} + C_k + S_{ij}. \quad (2.112)$$

As três quantidades  $A$ ,  $C_k$  e  $S_{ij}$  formam tensores esféricos de ordens 0, 1 e 2, respectivamente, transformando-se harmônicos esféricos  $Y_L^M$  (Capítulo 12) para  $L = 0, 1$  e  $2$ . Mais detalhes sobre esses tensores esféricos e suas utilizações serão encontrados no Capítulo 4 e nos livros de autoria de Rose e Edmonds lá citados.

Um exemplo específico da redução precedente é dado pelo tensor quadripolo elétrico simétrico

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x_1, x_2, x_3) d^3x.$$

O termo  $-r^2 \delta_{ij}$  representa uma subtração do traço escalar (os três termos  $i = j$ ). Os  $Q_{ij}$  resultantes têm traço zero.

## Exercícios

**2.9.1** Um arranjo quadrado anti-simétrico é dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C^{12} & C^{13} \\ -C^{12} & 0 & C^{23} \\ -C^{13} & -C^{23} & 0 \end{pmatrix},$$

em que  $(C_1, C_2, C_3)$  formam um pseudovetor. Admitindo que a relação

$$C_i = \frac{1}{2!} \varepsilon_{ijk} C^{jk}$$

vale em todos os sistemas de coordenadas, prove que  $C^{jk}$  é um tensor. (Essa é uma outra forma do teorema do quociente.)

**2.9.2** Mostre que o produto vetorial é exclusivo do espaço tridimensional; isto é, somente em três dimensões podemos estabelecer uma correspondência um - para - um entre as componentes de um tensor anti-simétrico (segunda ordem) e as componentes de um vetor.

**2.9.3** Mostre que em  $\mathbb{R}^3$

- (a)  $\delta_{ii} = 3$ ,
- (b)  $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$ ,
- (c)  $\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$ ,
- (d)  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$ .

**2.9.4** Mostre que em  $\mathbb{R}^3$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}.$$

**2.9.5** (a) Expresse as componentes de vetor produto externo  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , em termos de  $\varepsilon_{ijk}$  e das componentes de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

(b) Use a anti-simetria de  $\varepsilon_{ijk}$  para mostrar que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ .

Resposta: (a)  $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$ .

**2.9.6** (a) Mostre que o tensor de inércia (matriz) pode ser escrito

$$I_{ij} = m(x_i x_j \delta_{ij} - x_i x_j)$$

para uma partícula de massa  $m$  em  $(x_1, x_2, x_3)$ .

(b) Mostre que

$$I_{ij} = -M_{il}M_{lj} = -m\varepsilon_{ilk}x_k\varepsilon_{ljm}x_m,$$

em que  $M_{il} = m^{1/2}\varepsilon_{ilk}x_k$ . Esta é a contração de dois tensores de segunda ordem e é idêntica ao produto matricial da Seção 3.2.

2.9.7 Escreva  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$  e  $\nabla \times \nabla \varphi$  em tensorial de tensor (com índices) em  $\mathbb{R}^3$ , de modo que fique óbvio que cada expressão se anula.

$$\text{RESP. } \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} A^k,$$

$$(\nabla \times \nabla \varphi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi.$$

2.9.8 Expressando produtos externos em termos de símbolos de Levi-Civita ( $\varepsilon_{ijk}$ ), derive a regra  $BAC-CAB$ , Equação (1.55).

Sugestão: A relação do Exercício 2.9.4 é útil.

2.9.9 Verifique que cada um dos seguintes tensores de quarta ordem é isotrópico, isto é, tem a mesma forma independente de qualquer rotação dos sistemas coordenados.

(a)  $A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ ,

(b)  $B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ ,

(c)  $C_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ .

2.9.10 Mostre que o símbolo de Levi-Civita de dois índices  $\varepsilon_{ij}$  é um pseudotensor de segunda ordem (em um espaço bidimensional). Isso contradiz a unicidade de  $\delta_{ij}$  (Exercício 2.6.4)?

2.9.11 Represente  $\varepsilon_{ij}$  por uma matriz  $2 \times 2$  e, usando a rotação de matriz  $2 \times 2$  da Seção 3.3, mostre que  $\varepsilon_{ij}$  é invariante sob transformações de similaridade ortogonais.

2.9.12 Dado  $A_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B^{ij}$  com  $B^{ij} = -B^{ji}$ , anti-simétrico, mostre que

$$B^{mn} = \varepsilon^{mnk} A_k.$$

2.9.13 Mostre que a identidade vetorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

(Exercício 1.5.12) resulta diretamente da descrição de um produto externo de  $\varepsilon_{ijk}$  e a identidade do Exercício 2.9.4.

2.9.14 Generalize o produto externo de dois vetores para um espaço  $n$  dimensional para  $n = 4, 5, \dots$ . Verifique a consistência de sua construção e discuta exemplos concretos. Veja o Exercício 1.4.17 para o caso  $n = 2$ .

## 2.10 Tensores Gerais

A distinção entre transformações contravariantes e covariantes foi estabelecida na Seção 2.6. Então, por conveniência, restringimos nossa atenção às coordenadas cartesianas (nas quais a distinção desaparece). Agora, nestas duas seções finais, voltamos às coordenadas não-cartesianas e resuscitamos a dependência contravariante e covariante. Assim como na Seção 2.6, será usado um índice superior (sobrescrito) para denotar dependência contravariante e um índice inferior (subscrito) para denotar dependência covariante. O tensor métrico da Seção 2.1 será usado para relacionar índices contravariantes e covariantes.

Nesta seção, damos ênfase à diferenciação, culminando na construção da **derivada covariante**. Vimos na Seção 2.7 que a derivada de um vetor resulta em um tensor de segunda ordem, em coordenadas cartesianas. Em sistemas de coordenadas não-cartesianas, é a derivada covariante de um vetor, em vez da derivada ordinária, que dá um tensor de segunda ordem por diferenciação de um vetor.

### Tensor Métrico

Vamos começar com a transformação de vetores de um conjunto de coordenadas  $(q^1, q^2, q^3)$  para outro  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ . As novas coordenadas são funções (em geral **não-lineares**)  $x^i(q^1, q^2, q^3)$  das antigas, tais como coordenadas polares esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . Mas suas **diferenciais** obedecem à lei da transformação **linear**

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j, \tag{2.113a}$$



ou

$$d\mathbf{r} = \varepsilon_j dq^j \quad (2.113b)$$

em notação vetorial. Por conveniência, tomamos os vetores de base  $\varepsilon_1 = (\frac{\partial x^1}{\partial q^1}, \frac{\partial x^1}{\partial q^2}, \frac{\partial x^1}{\partial q^3})$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  para formar um conjunto dextrogiro. Esses vetores não são necessariamente ortogonais. Além disso, será imposta uma limitação ao espaço tridimensional somente para as discussões de produtos externos e rotacionais. Exceto nesses casos, esses  $\varepsilon_i$  podem estar em espaço  $N$  dimensional, incluindo o espaço-tempo quadridimensional da relatividade geral e especial. Os vetores de base  $\varepsilon_i$  podem ser expressos por

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad (2.114)$$

como no Exercício 2.2.3. Todavia, note que, aqui, o  $\varepsilon_i$  **não** tem necessariamente grandeza unitária. Pelo Exercício 2.2.3, vetores unitários são

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad (\text{sem somatório}),$$

e, portanto,

$$\varepsilon_i = h_i \mathbf{e}_i \quad (\text{sem somatório}). \quad (2.115)$$

Os  $\varepsilon_i$  estão relacionados aos vetores unitários  $\mathbf{e}_i$  pelos fatores de escala  $h_i$  da Seção 2.2. Os  $\mathbf{e}_i$  não têm dimensões; os  $\varepsilon_i$  têm as dimensões de  $h_i$ . Dando um exemplo específico, em coordenadas polares esféricas,

$$\varepsilon_r = \mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{r}}, \quad \varepsilon_\theta = r \mathbf{e}_\theta = r \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \varepsilon_\varphi = r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (2.116)$$

Em espaços euclidianos, ou em um espaço de Minkowski da relatividade especial, as derivadas parciais na Equação (2.113) são constantes que definem as novas coordenadas em termos das antigas. Nós as usamos para definir as leis de transformação de vetores nas Equações (2.59) e (2.62) e de tensores na Equação (2.66). Generalizando, definimos um vetor **contravariante**  $V^i$  sob transformações de coordenadas **gerais** se suas componentes se transformam segundo

$$V'^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} V^j, \quad (2.117a)$$

ou

$$\mathbf{V}' = V^j \varepsilon_j \quad (2.117b)$$

em notação vetorial. Para vetores **covariantes** inspecionamos a transformação do operador gradiente

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial q^j} \quad (2.118)$$

usando a regra da cadeia. Por

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial x^k} = \delta^i_k \quad (2.119)$$

fica claro que a Equação (2.118) é relacionada com a transformação **inversa** da Equação (2.113),

$$dq^j = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} dx^i. \quad (2.120)$$

Por conseguinte, definimos um vetor **covariante**  $V_i$  se

$$V'_i = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} V_j \quad (2.121a)$$

for válida ou, em notação vetorial,

$$\mathbf{V}' = V_j \varepsilon^j, \quad (2.121b)$$

em que  $\varepsilon^j$  são os vetores contravariantes  $g^{ji} \varepsilon_i = \varepsilon^j$ .

Tensores de segunda ordem são definidos como na Equação (2.66),

$$A'^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^j}{\partial q^l} A^{kl}, \quad (2.122)$$

e tensores de ordem mais alta são definidos de modo semelhante.

Como na Seção 2.1, construímos o quadrado de um deslocamento diferencial

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\varepsilon_i dq^i)^2 = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j dq^i dq^j. \quad (2.123)$$

Comparando essa expressão com  $(ds)^2$  da Seção 2.1, Equação (2.5), identificamos  $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j$  como o tensor métrico covariante

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = g_{ij}. \quad (2.124)$$

Fica claro que  $g_{ij}$  é simétrico. A natureza de tensor de  $g_{ij}$  resulta da regra do quociente, Exercício 2.8.1. Tomamos a relação

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \quad (2.125)$$

para definir o tensor contravariante correspondente  $g^{ik}$ . O contravariante  $g^{ik}$  entra como o inverso<sup>20</sup> do covariante  $g_{kj}$ . Usamos esse contravariante  $g^{ik}$  para elevar índices, convertendo um índice covariante em um índice contravariante, como mostramos a seguir. De maneira semelhante, o covariante  $g_{kj}$  será usado para reduzir índices. A escolha de  $g^{ik}$  e  $g_{kj}$  para essa operação de elevação-redução é arbitrária. Qualquer tensor de segunda ordem (e seu inverso) serviria. Especificamente, temos

$$\begin{aligned} g^{ij} \varepsilon_j &= \varepsilon^i && \text{vetores básicos covariantes} \\ &&& \text{contravariantes relacionados,} \\ g^{ij} F_j &= F^i && \text{componentes vetoriais covariantes e} \\ &&& \text{contravariantes relacionadas.} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Então,

$$\begin{aligned} g_{ij} \varepsilon^j &= \varepsilon_i && \text{como o índice correspondente} \\ g_{ij} F^j &= F_i && \text{reduzindo relações.} \end{aligned} \quad (2.127)$$

É preciso enfatizar mais uma vez que os  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon^j$  **não** têm grandeza unitária. Isso pode ser visto nas Equações (2.116) e no tensor métrico  $g_{ij}$  para coordenadas polares esféricas e sua inversa  $g^{ij}$ :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

### Símbolos de Christoffel

Vamos formar a diferencial de um escalar  $\psi$ ,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} dq^i. \quad (2.128)$$

Visto que  $dq^i$  são as componentes de um vetor contravariante, as derivadas parciais  $\partial \psi / \partial q^i$  devem formar um vetor covariante, pela regra do quociente. O gradiente de um escalar se torna

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \varepsilon^i. \quad (2.129)$$

Note que  $\partial \psi / \partial q^i$  não são as componentes de gradiente da Seção 2.2, porque  $\varepsilon^i \neq \mathbf{e}_i$  da Seção 2.2.

Passando para as derivadas de um vetor, constatamos que a situação é muito mais complicada, porque os vetores de base  $\varepsilon_i$  são, em geral, não-constant. Lembre-se de que não estamos mais nos restringindo às coordenadas cartesianas e aos agradáveis e convenientes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ ! A diferenciação direta da Equação (2.117a) resulta em

$$\frac{\partial V^k}{\partial q^j} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial q^j \partial q^i} V^i, \quad (2.130a)$$

ou, em notação vetorial,

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \varepsilon_i + V^i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^j}. \quad (2.130b)$$

<sup>20</sup>Se o tensor  $g_{kj}$  for escrito como uma matriz, o tensor  $g^{ik}$  é dado pela matriz inversa.



O lado direito da Equação (2.130a) difere da lei da transformação para um tensor misto de segunda ordem no segundo termo, que contém derivadas de segunda ordem das coordenadas  $x^k$ . Estas últimas são não-zero para transformações de coordenadas não-lineares.

Agora,  $\partial \varepsilon_i / \partial q^j$  será alguma combinação linear dos  $\varepsilon_k$ , sendo que o coeficiente depende dos índices  $i$  e  $j$  da derivada parcial e do índice  $k$  do vetor de base. Escrevemos

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \varepsilon_k. \quad (2.131a)$$

Multiplicando por  $\varepsilon^m$  e usando  $\varepsilon^m \cdot \varepsilon_k = \delta_k^m$  do Exercício 2.10.2, temos

$$\Gamma_{ij}^m = \varepsilon^m \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^j}. \quad (2.131b)$$

$\Gamma_{ij}^k$  é um símbolo de Christoffel da **segunda espécie**. Também é denominado *coeficiente de conexão*. Esses  $\Gamma_{ij}^k$  **não** são tensores de terceira ordem e as  $\partial V^i / \partial q^j$  da Equação (2.130a) não são tensores de segunda ordem. As Equações (2.131) devem ser comparadas com os resultados citados no Exercício 2.2.3 (lembrando-se de que, em geral,  $\varepsilon_i \neq \mathbf{e}_i$ ). Em coordenadas cartesianas,  $\Gamma_{ij}^k = 0$  para todos os valores dos índices  $i, j$  e  $k$ . Esses símbolos de Christoffel com três índices podem ser calculados pelas técnicas da Seção 2.2. Este é o tópico do Exercício 2.10.8. A Equação (2.138) oferece um método mais fácil. Usando a Equação (2.114), obtemos

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial q^i} = \Gamma_{ji}^k \varepsilon_k. \quad (2.132)$$

Por conseqüência, os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices mais baixos:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (2.133)$$

### Símbolos de Christoffel como Derivadas do Tensor Métrico

Muitas vezes é conveniente ter uma expressão explícita para os símbolos de Christoffel em termos de derivadas do tensor métrico. Como etapa inicial, definimos o símbolo de Christoffel da **primeira espécie**  $[ij, k]$  por

$$[ij, k] \equiv g_{mk} \Gamma_{ij}^m, \quad (2.134)$$

do qual resulta a simetria  $[ij, k] = [ji, k]$ . Mais uma vez, esse  $[ij, k]$  não é um tensor de terceira ordem. Pela Equação (2.131b),

$$\begin{aligned} [ij, k] &= g_{mk} \varepsilon^m \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^j} \\ &= \varepsilon_k \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^j}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Agora diferenciamos  $g_{ij} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j$ , Equação (2.124):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} &= \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial q^k} \cdot \varepsilon_j + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial q^k} \\ &= [ik, j] + [jk, i] \end{aligned} \quad (2.136)$$

pela Equação (2.135). Então,

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}, \quad (2.137)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^s &= g^{ks} [ij, k] \\ &= \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Esses símbolos de Christoffel são aplicados na próxima seção.

## Derivada Covariante

Com os símbolos de Christoffel, a Equação (2.130b) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \frac{\partial V^i}{\partial q^j} \boldsymbol{\varepsilon}_i + V^i \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{\varepsilon}_k. \quad (2.139)$$

Agora,  $i$  e  $k$  no último termo são índices mudos. Permutando  $i$  e  $k$  (apenas neste único termo), temos

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \left( \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (2.140)$$

A quantidade entre parênteses é denominada **derivada covariante**,  $V_{;j}^i$ . Temos

$$V_{;j}^i \equiv \frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{kj}^i. \quad (2.141)$$

O índice inferior  $;j$  indica diferenciação em relação a  $q^j$ . A diferencial  $d\mathbf{V}'$  se torna

$$d\mathbf{V}' = \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} dq^j = [V_{;j}^i dq^j] \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (2.142)$$

Uma comparação com as Equações (2.113) ou (2.122) mostra que a quantidade entre colchetes é a  $i$ -ésima componente contravariante de um vetor. Visto que  $dq^j$  é a  $j$ -ésima componente contravariante de um vetor (novamente, Equação (2.113)),  $V_{;j}^i$  deve ser a  $ij$ -ésima componente de um tensor (misto) de segunda ordem (regra do quociente). As derivadas covariantes das componentes contravariantes de um vetor formam um tensor misto de segunda ordem,  $V_{;j}^i$ .

Uma vez que símbolos de Christoffel se anulam em coordenadas cartesianas, a derivada covariante e a derivada parcial ordinária coincidem:

$$\frac{\partial V^i}{\partial q^j} = V_{;j}^i \quad (\text{coordenadas cartesianas}) \quad (2.143)$$

A derivada covariante de um vetor covariante  $V_i$  é dada por (Exercício 2.10.9)

$$V_{i;j} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k. \quad (2.144)$$

Assim como  $V_{;j}^i$ ,  $V_{i;j}$  é um tensor de segunda ordem.

A importância da derivada covariante na física é que: “Uma substituição constante de derivadas parciais regulares por derivadas covariantes transporta as leis da física (sob a forma de componente) do espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo (riemanniano) da relatividade geral. De fato, esta substituição pode ser tomada como um enunciado matemático do princípio da equivalência de Einstein”.<sup>21</sup>

## Geodésicas, Transporte Paralelo

A derivada covariante de vetores-tensores e os símbolos de Christoffel também podem ser abordados a partir de geodésicas. Uma geodésica em espaço euclidiano é uma linha reta. Em geral, é a curva de comprimento mais curto entre dois pontos e a curva ao longo da qual se movimenta uma partícula em queda livre. As elipses dos planetas são geodésicas ao redor do Sol, e a Lua está em queda livre ao redor da Terra sobre uma geodésica. Visto que podemos lançar uma partícula em qualquer direção, uma geodésica pode ter qualquer direção passando por um dado ponto. Por consequência, a equação da geodésica pode ser obtida do princípio variacional da óptica de Fermat (consulte o Capítulo 17 para a equação de Euler),

$$\delta \int ds = 0, \quad (2.145)$$

em que  $ds^2$  é a métrica, Equação (2.123), de nosso espaço. Usando a variação de  $ds^2$ ,

$$2 ds \delta ds = dq^i dq^j \delta g_{ij} + g_{ij} dq^i \delta dq^j + g_{ij} dq^j \delta dq^i, \quad (2.146)$$

<sup>21</sup>C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman (1973), p. 387.





na Equação (2.145), obtemos

$$\frac{1}{2} \int \left[ \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} \delta g_{ij} + g_{ij} \frac{dq^i}{ds} \frac{d}{ds} \delta dq^j + g_{ij} \frac{dq^j}{ds} \frac{d}{ds} \delta dq^i \right] ds = 0, \quad (2.147)$$

em que  $ds$  mede o comprimento sobre a geodésica. Expressando as variações

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \delta dq^k \equiv (\partial_k g_{ij}) \delta dq^k$$

em termos das **variações independentes**  $\delta dq^k$ , deslocando suas derivadas nos outros dois termos da Equação (2.147), integrando por partes e renomeando os índices de somatório obtemos

$$\frac{1}{2} \int \left[ \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} \partial_k g_{ij} - \frac{d}{ds} \left( g_{ik} \frac{dq^i}{ds} + g_{kj} \frac{dq^j}{ds} \right) \right] \delta dq^k ds = 0. \quad (2.148)$$

O integrando da Equação (2.148), igualado a zero, é a equação geodésica. É a equação de Euler de nosso problema variacional. Expandindo

$$\frac{dg_{ik}}{ds} = (\partial_j g_{ik}) \frac{dq^j}{ds}, \quad \frac{dg_{kj}}{ds} = (\partial_i g_{kj}) \frac{dq^i}{ds} \quad (2.149)$$

ao longo da geodésica, encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} (\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) - g_{ik} \frac{d^2 q^i}{ds^2} = 0. \quad (2.150)$$

Multiplicando a Equação (2.150) por  $g^{kl}$  e usando a Equação (2.125), encontramos a equação **geodésica**

$$\frac{d^2 q^l}{ds^2} + \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = 0, \quad (2.151)$$

em que o coeficiente das velocidades é o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{ij}^l$  da Equação (2.138).

Geodésicas são curvas que independem da escolha de coordenadas. Elas podem ser desenhadas passando por qualquer ponto do espaço em várias direções. Visto que o comprimento  $ds$  medido ao longo da geodésica é um escalar, as velocidades  $dq^i/ds$  (de uma partícula em queda livre ao longo da geodésica, por exemplo) formam um vetor contravariante. Por consequência,  $V_k dq^k/ds$  é um escalar bem definido sobre qualquer geodésica, que podemos diferenciar de modo a definir a derivada covariante de qualquer vetor covariante  $V_k$ . Usando a Equação (2.151), obtemos, do escalar

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( V_k \frac{dq^k}{ds} \right) &= \frac{dV_k}{ds} \frac{dq^k}{ds} + V_k \frac{d^2 q^k}{ds^2} \\ &= \frac{\partial V_k}{\partial q^i} \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^k}{ds} - V_k \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} \\ &= \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^k}{ds} \left( \frac{\partial V_k}{\partial q^i} - \Gamma_{ik}^l V_l \right). \end{aligned} \quad (2.152)$$

Quando o teorema do quociente é aplicado à Equação (2.152), ele nos diz que

$$V_{k;i} = \frac{\partial V_k}{\partial q^i} - \Gamma_{ik}^l V_l \quad (2.153)$$

é um tensor covariante que define a derivada covariante de  $V_k$ , consistente com a Equação (2.144). Tensores de ordens mais elevadas podem ser derivados de maneira semelhante.

O segundo termo da Equação (2.153) define o **transporte paralelo ou deslocamento**,

$$\delta V_k = \Gamma_{ki}^l V_l \delta q^i, \quad (2.154)$$

do vetor covariante  $V_k$  desde o ponto de coordenadas  $q^i$  até  $q^i + \delta q^i$ . O transporte paralelo,  $\delta U^k$ , de um vetor covariante  $U^k$  pode ser encontrado pela invariância do produto escalar  $U^k V_k$  sob o transporte paralelo,

$$\delta(U^k V_k) = \delta U^k V_k + U^k \delta V_k = 0, \quad (2.155)$$

em conjunção com o teorema do quociente.

*Em suma, quando deslocamos um vetor até um ponto vizinho, o transporte paralelo impede que ele fique para fora de nosso espaço. Isso pode ser visto com clareza na superfície de uma esfera em uma geometria esférica, em que um vetor tangente deve permanecer tangente quando transladado ao longo de alguma trajetória sobre a esfera. Isso explica por que a derivada covariante de um vetor ou tensor é naturalmente definida transladando-a ao longo de uma geodésica na direção desejada.*

### Exercícios

**2.10.1** As Equações (2.115) e (2.116) usam o fator de escala  $h_i$ , citando o Exercício 2.2.3. Na Seção 2.2 tínhamos nos restringido a sistemas de coordenadas ortogonais, embora a Equação (2.115) seja válida para sistemas não-ortogonais. Justifique a utilização da Equação (2.115) para sistemas não-ortogonais.

**2.10.2** (a) Mostre que  $\epsilon^i \cdot \epsilon_j = \delta_j^i$ .  
 (b) Pelo resultado da parte (a), mostre que

$$F^i = \mathbf{F} \cdot \epsilon^i \quad \text{e} \quad F_i = \mathbf{F} \cdot \epsilon_i.$$

**2.10.3** Para o caso especial do espaço tridimensional, sendo que  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  definem um sistema de coordenadas dextrogiro, não necessariamente ortogonal, mostre que

$$\epsilon^i = \frac{\epsilon_j \times \epsilon_k}{\epsilon_j \times \epsilon_k \cdot \epsilon_i}, \quad i, j, k = 1, (2, 3 \text{ e permutações cíclicas}).$$

*Nota:* Esses vetores de base contravariantes  $\epsilon^i$  definem o espaço do reticulado recíproco da Seção 1.5.

**2.10.4** Prove que o tensor métrico contravariante é dado por

$$g^{ij} = \epsilon^i \cdot \epsilon^j.$$

**2.10.5** Se os vetores covariantes  $\epsilon_i$  são ortogonais, mostre que

- (a)  $g_{ij}$  é diagonal,
- (b)  $g^{ii} = 1/g_{ii}$  (sem somatório),
- (c)  $|\epsilon^i| = 1/|\epsilon_i|$ .

**2.10.6** Derive os tensores métricos covariantes e contravariantes para coordenadas cilíndricas circulares.

**2.10.7** Transforme o lado direito da Equação (2.129),

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \epsilon^i,$$

para a base  $e_i$  e verifique que essa expressão está de acordo com o gradiente desenvolvido na Seção 2.2 (para coordenadas ortogonais).

**2.10.8** Avalie  $\partial\epsilon_i/\partial q^j$  para coordenadas polares esféricas e, a partir desses resultados, calcule  $\Gamma_{ij}^k$  para coordenadas polares esféricas.

*Nota:* O Exercício 2.5.2 oferece uma maneira de calcular as derivadas parciais necessárias. Lembre-se de que

$$\epsilon_1 = \hat{r} \quad \text{mas} \quad \epsilon_2 = r\hat{\theta} \quad \text{e} \quad \epsilon_3 = r\text{sen } \theta\hat{\phi}.$$

**2.10.9** Mostre que a derivada covariante de um vetor covariante é dada por

$$V_{i;j} \equiv \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k.$$

*Sugestão:* Diferencie

$$\epsilon^i \cdot \epsilon_j = \delta_j^i.$$

**2.10.10** Verifique que  $V_{i;j} = g_{ik} V_{;j}^k$ , mostrando que

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_s \Gamma_{ij}^s = g_{ik} \left\{ \frac{\partial V^k}{\partial q^j} + V^m \Gamma_{mj}^k \right\}.$$



- 2.10.11** Pelo tensor métrico cilíndrico circular  $g_{ij}$ , calcule o  $\Gamma_{ij}^k$  para coordenadas cilíndricas circulares. *Nota:* Há somente três  $\Gamma$  não-nulos.
- 2.10.12** Usando o  $\Gamma_{ij}^k$  do Exercício 2.10.11, escreva as derivadas covariantes  $V_{;j}^i$  de um vetor  $\mathbf{V}$  em coordenadas cilíndricas circulares.
- 2.10.13** Um cristal tricliníco é descrito usando um sistema de coordenadas oblíquo. Os três vetores covariantes de base são

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 1, 5\hat{x}, \\ \varepsilon_2 &= 0, 4\hat{x} + 1, 6\hat{y}, \\ \varepsilon_3 &= 0, 2\hat{x} + 0, 3\hat{y} + 1, 0\hat{z}.\end{aligned}$$

- (a) Calcule os elementos do tensor métrico covariante  $g_{ij}$ .  
 (b) Calcule os símbolos de Christoffel de três índices,  $\Gamma_{ij}^k$ . (Esse é um cálculo “por inspeção”).  
 (c) Pela forma do produto externo do Exercício 2.10.3 calcule o vetor de base contravariante  $\varepsilon^3$ .  
 (d) Usando as formas explícitas  $\varepsilon^3$  e  $\varepsilon_i$ , verifique que  $\varepsilon^3 \cdot \varepsilon_i = \delta^3_i$ .

*Nota:* Se fosse necessário, o tensor métrico covariante poderia ser determinado achando o inverso de  $g_{ij}$  ou achando  $\varepsilon^i$  e usando  $g^{ij} = \varepsilon^i \cdot \varepsilon^j$ .

- 2.10.14** Verifique que

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}.$$

*Sugestão:* Substitua a Equação (2.135) no lado direito e mostre que resulta uma identidade.

- 2.10.15** Mostre que, para o tensor métrico  $g_{ij;k} = 0$ ,  $g^{ij};_k = 0$ .
- 2.10.16** Mostre que o deslocamento paralelo  $\delta dq^i = d^2 q^i$  ao longo de uma geodésica. Construa uma geodésica por deslocamento paralelo de  $\delta dq^i$ .
- 2.10.17** Construa a derivada covariante de um vetor  $V^i$  por transporte paralelo partindo do procedimento limitador

$$\lim_{dq^j \rightarrow 0} \frac{V^i(q^j + dq^j) - V^i(q^j)}{dq^j}.$$

## 2.11 Operadores de Derivadas de Tensores

Nesta seção a diferenciação covariante da Seção 2.10 é aplicada para derivar novamente as operações diferenciais de vetores da Seção 2.2 sob forma de tensor geral.

### Divergência

Substituindo a derivada parcial pela derivada covariante, admitimos que a divergência é

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V^i_{;i} = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i. \quad (2.156)$$

Expressando  $\Gamma_{ik}^i$  pela Equação (2.138), temos

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left\{ \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \right\}. \quad (2.157)$$

Quando contraídos com  $g^{im}$  os dois últimos termos da chave se cancelam, visto que

$$g^{im} \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} = g^{mi} \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^m} = g^{im} \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m}. \quad (2.158)$$

Então,

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}. \quad (2.159)$$

Pela teoria dos determinantes, Seção 3.1,

$$\frac{\partial g}{\partial q^k} = g g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}, \quad (2.160)$$

em que  $g$  é o determinante da métrica,  $g = \det(g_{ij})$ . Substituindo esse resultado na Equação (2.158), obtemos

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial q^k} = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial g^{1/2}}{\partial q^k}. \quad (2.161)$$

Isso resulta em

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V_{;i}^i = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} (g^{1/2} V^k). \quad (2.162)$$

Para comparar esse resultado com a Equação (2.21), note que  $h_1 h_2 h_3 = g^{1/2}$  e  $V^i$  (coeficiente contravariante de  $\epsilon_i$ ) =  $V_i/h_i$  (sem somatório), em que  $V_i$  é o coeficiente de  $e_i$ .

### Laplaciano

Na Seção 2.2, a substituição do vetor  $\mathbf{V}$  em  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  por  $\nabla \psi$  levou ao laplaciano  $\nabla \cdot \nabla \psi$ . Aqui, temos um contravariante  $V^i$ . Usando o tensor métrico para criar um contravariante  $\nabla \psi$ , fazemos a substituição

$$V^i \rightarrow g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial q^k}.$$

Então, o laplaciano  $\nabla \cdot \nabla \psi$  torna-se

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left( g^{1/2} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \right). \quad (2.163)$$

Para os sistemas **ortogonais** da Seção 2.2 o tensor métrico é diagonal e o contravariante  $g^{ii}$  (sem somatório) se torna

$$g^{ii} = (h_i)^{-2}.$$

A Equação (2.163) se reduz a

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right),$$

de acordo com a Equação (2.22).

### Rotacional

A diferença de derivadas que aparece no rotacional (Equação (2.27)) será escrita como

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i}.$$

Mais uma vez, lembre-se de que, aqui, as componentes  $V_i$  são coeficientes dos vetores de base (não-unitários) contravariantes  $\epsilon^i$ . Os  $V_i$  da Seção 2.2 são coeficientes de vetores unitários  $e_i$ . Somando e subtraindo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} &= \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} + V_k \Gamma_{ji}^k \\ &= V_{i;j} - V_{j;i}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

usando a simetria dos símbolos de Christoffel. A diferença característica de derivadas do rotacional se torna uma diferença de derivadas covariantes e, portanto, é um tensor de segunda ordem (covariante em ambos os índices). Como enfatizado na Seção 2.9, a forma vetorial especial do rotacional existe somente em espaço tridimensional.

Pela Equação (2.138) fica claro que todos os três símbolos de Christoffel com três índices se anulam no espaço de Minkowski e no espaço-tempo real da relatividade especial com

$$g_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aqui,

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad \text{e} \quad x_3 = z.$$

Isso conclui o desenvolvimento de operadores diferenciais em forma de tensor geral. (O gradiente foi dado na Seção 2.10.) Além de suas aplicações nos campos de elasticidade e eletromagnetismo, esses diferenciais também encontram aplicação na mecânica (mecânica lagrangiana, mecânica hamiltoniana e nas equações de Euler para rotação de corpo rígido); na mecânica dos fluidos; e talvez o mais importante, no espaço-tempo curvo de modernas teorias da gravidade.



## Exercícios

2.11.1 Verifique a Equação (2.160),

$$\frac{\partial g}{\partial q^k} = g g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k},$$

para o caso específico de coordenadas polares esféricas.

2.11.2 Começando com a divergência em notação de tensor, Equação (2.162), desenvolva a divergência de um vetor em coordenadas polares esféricas, Equação (2.47).

2.11.3 O vetor covariante  $A_i$  é o gradiente de um escalar. Mostre que a diferença de derivadas covariantes  $A_{i;j} - A_{j;i}$  se anula.

## Leituras Adicionais

Dirac, P. A. M., *General Theory of Relativity*. Princeton, NJ: Princeton University Press (1996).

Hartle, J. B., *Gravity*, San Francisco: Addison-Wesley, 2003. Este texto usa um mínimo de análise tensorial.

Jeffreys, H., *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge University Press (1952). Esta é uma excelente discussão de tensores cartesianos e sua aplicação a uma ampla variedade de campos da física clássica.

Lawden, D. F., *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*, 3<sup>a</sup> ed. Nova York: Wiley (1982).

Margenau, H., e G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 2<sup>a</sup>, Princeton, NJ: Van Nostrand (1956). O Capítulo 5 cobre coordenadas curvilíneas, e o 13, sistemas coordenados específicos.

Misner, C. W., K. S. Thorne, e J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman (1973), p. 387.

Moller, C., *The Theory of Relativity*. Oxford: Oxford University Press 1955. Reimpresso 1972. Nova tiragem 1972. A maioria dos textos sobre relatividade geral inclui uma discussão de análise tensorial. O Capítulo 4 desenvolve cálculo de tensores, incluindo o tópico de tensores duais. A extensão para sistemas não-cartesianos, como exigida pela relatividade geral, é apresentada no Capítulo 9.

Morse, P. M., e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill (1953). Nova York: McGraw-Hill (1953). O Capítulo 5 inclui uma descrição de diferentes sistemas coordenados. Note que Morse e Feshbach não se furtam de usar sistemas coordenados levogiros nem mesmo para coordenadas cartesianas. Dispersos por este excelente e difícil livro há muitos exemplos da utilização dos vários sistemas coordenados na resolução de problemas de física. Mais 11 sistemas de coordenadas ortogonais fascinantes, porém pouco encontrados, são discutidos na segunda edição 1970 de *Mathematical Methods for Physicists*.

Ohanian, H. C., e R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Norton & Co. (1994). Uma introdução bem escrita à geometria riemanniana.

Sokolnikoff, I. S., *Tensor Analysis – Theory and Applications*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Wiley (1964). Particularmente útil por sua extensão da análise tensorial para geometrias não-euclidianas.

Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Nova York: Wiley (1972). Este livro e o escrito por Misner, Thorne e Wheeler são os dois textos principais sobre relatividade geral e cosmologia (com tensores em espaço não-cartesiano.)

Young, E. C., *Vector and Tensor Analysis*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Marcel Dekker (1993).

## 3

# Determinantes e Matrizes

### 3.1 Determinantes

Iniciamos o estudo de matrizes resolvendo equações lineares que nos levarão a determinantes e matrizes. O conceito de determinante e a sua notação foram introduzidos pelo célebre matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz.

#### Equações Lineares Homogêneas

Uma das maiores aplicações de determinantes é no estabelecimento de uma condição para a existência de uma solução não-trivial para um conjunto de equações algébricas lineares homogêneas. Suponha que temos três incógnitas  $x_1, x_2, x_3$  (ou  $n$  equações com  $n$  incógnitas):

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

O problema é determinar sob que condições há qualquer solução à parte da trivial  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ . Se usarmos notação vetorial  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  para a solução e três linhas  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  de coeficientes, então as três Equações (3.1) tornam-se

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 0. \tag{3.2}$$

A interpretação **geométrica** dessas três equações vetoriais é que  $\mathbf{x}$  é ortogonal a  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Se o volume abrangido por  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  dado pelo determinante (ou produto escalar triplo, veja a Equação (1.50) da Seção 1.5)

$$D_3 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

não for zero, então existe apenas a solução trivial  $\mathbf{x} = 0$ .

Ao contrário, se o citado determinante de coeficientes for nulo, então um dos vetores linha é uma combinação linear dos outros dois. Vamos admitir que  $\mathbf{c}$  encontre-se no plano definido por  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , isto é, que a terceira equação seja uma combinação linear das duas primeiras e não-independente. Então,  $\mathbf{x}$  é ortogonal àquele plano, de modo que  $\mathbf{x} \sim \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Uma vez que equações homogêneas podem ser multiplicadas por números arbitrários, somente razões dos  $x_i$  são relevantes, para os quais então obtemos razões de determinantes  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_3} &= \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{x_2}{x_3} &= -\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

a partir dos componentes do produto externo  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , contanto que  $x_3 \sim a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . Essa é a **regra de Cramer** para três equações lineares homogêneas.

#### Equações lineares não-homogêneas

O caso mais simples de duas equações com duas incógnitas,

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3, \quad b_1x_1 + b_2x_2 = b_3, \tag{3.5}$$



pode ser reduzido ao caso anterior inserindo-a em um espaço tridimensional com um vetor solução  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, -1)$  e vetores linha  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Como antes, as Equações (3.5) em notação vetorial,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$  e  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0$ , implicam que  $\mathbf{x} \sim \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , portanto a análoga das Equações (3.4) é válida. Entretanto, para que isso se aplique, a terceira componente de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  não deve ser zero, isto é,  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ , porque a terceira componente de  $\mathbf{x}$  é  $-1 \neq 0$ . O resultado disso são os  $x_i$  sob a forma

$$x_1 = \frac{a_3 b_2 - b_3 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad (3.6a)$$

$$x_2 = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (3.6b)$$

O determinante no numerador de  $x_1(x_2)$  é obtido do determinante dos coeficientes  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}$  pela substituição do primeiro (segundo) vetor coluna pelo vetor  $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$  do lado não-homogêneo da Equação (3.5). Essa é **regra de Cramer** para um conjunto de duas equações lineares não-homogêneas com duas incógnitas.

Essas soluções de equações lineares em termos de determinantes podem ser generalizadas para  $n$  dimensões. O determinante é um arranjo quadrado

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

de números (ou funções), aqui, em nosso caso, os coeficientes de  $n$  equações lineares. O número  $n$  de colunas (e de linhas) no arranjo costuma ser denominado **ordem** do determinante. A generalização da expansão na Equação (1.48) do produto escalar triplo (de vetores linhas de três equações lineares) leva ao seguinte valor do determinante  $D_n$  em  $n$  dimensões

$$D_n = \sum_{i,j,k,\dots} \varepsilon_{ijk\dots} a_i b_j c_k \cdots, \quad (3.8)$$

em que  $\varepsilon_{ijk\dots}$ , análogo ao símbolo de Levi-Civita da Seção 2.9, é  $+1$  para permutações pares<sup>1</sup> ( $ijk\dots$ ) de  $(123 \cdots n)$ ,  $-1$  para permutações ímpares e zero se algum índice for repetido.

Especificamente, para o determinante de terceira ordem  $D_3$  da Equação (3.3), a Equação (3.8) leva a

$$D_3 = +a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1. \quad (3.9)$$

Então, o determinante de terceira ordem é essa combinação linear particular de produtos. Cada produto contém um e somente um elemento de cada linha e de cada coluna. Cada produto é adicionado se as colunas (índices) representarem uma permutação par e subtraído se tivermos uma permutação ímpar. A Equação (3.3) pode ser considerada a notação abreviada para a Equação (3.9). O número de termos no somatório (Equação (3.8)) é 24 para um determinante de quarta ordem,  $n!$  para um determinante de ordem  $n$ . Por causa da aparição dos sinais negativos na Equação (3.9) (e possivelmente também nos elementos individuais), pode haver considerável cancelamento. É bem possível que um determinante de grandes elementos tenha um valor muito pequeno.

Diversas propriedades de determinantes de ordem  $n$  resultam da Equação (3.8). Mais uma vez, para sermos específicos, a Equação (3.9) para determinantes de terceira ordem é usada para ilustrar essas propriedades.

### Desenvolvimento Laplaciano por Menores

A Equação (3.9) pode ser escrita

$$\begin{aligned} D_3 &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>Em uma seqüência linear,  $abcd \cdots$ , qualquer transposição única, simples, de elementos adjacentes dá como resultado uma permutação **ímpar** da seqüência original:  $abcd \rightarrow bacd$ . Duas dessas transposições resultam em uma permutação par. Em geral, um número ímpar dessas trocas de elementos adjacentes resulta em uma permutação ímpar; um número par dessas transposições resulta em uma permutação par.

Em geral, o determinante de ordem  $n$  pode ser expandido como uma combinação linear dos produtos dos elementos de qualquer linha (ou de qualquer coluna) e dos determinantes de ordem  $(n - 1)$  formados pela eliminação da linha e da coluna do determinante original no qual o elemento aparece. Esse arranjo reduzido ( $2 \times 2$  neste exemplo específico) é denominado **menor**. Se o elemento estiver na  $i$ -ésima linha da  $j$ -ésima coluna, o sinal associado com o produto é  $(-1)^{i+j}$ . O menor que tem esse sinal é denominado **co-fator**. Se  $M_{ij}$  for usado para designar o menor formado omitindo-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna e  $C_{ij}$  for o co-fator correspondente, a Equação (3.10) se torna

$$D_3 = \sum_{j=1}^3 (-1)^{j+1} a_j M_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_j C_{1j}. \quad (3.11)$$

Neste caso, expandindo ao longo da primeira linha, temos  $i = 1$  e o somatório sobre  $j$  as colunas.

Esta expansão de Laplace pode ser usada com vantagem na avaliação de determinantes de ordens mais elevadas nos quais vários elementos são zero. Por exemplo, para achar o valor do determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.12)$$

expandimos através da linha superior para obter

$$D = (-1)^{1+2} \cdot (1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Novamente, expandindo pela linha superior, obtemos

$$D = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \quad (3.14)$$

(Este determinante  $D$  – Equação (3.12) é formado a partir de uma das matrizes de Dirac que aparecem na teoria relativista do elétron de Dirac na Seção 3.4.)

### Anti-Simetria

O determinante muda de sinal se quaisquer duas linhas forem permutadas ou se quaisquer duas colunas forem permutadas. Isso resulta do caráter par-ímpar do  $\varepsilon$  de Levi-Civita na Equação (3.8) ou, explicitamente, da forma das Equações (3.9) e (3.10).<sup>2</sup>

Essa propriedade foi usada na Seção 2.9 para desenvolver uma combinação linear totalmente anti-simétrica. Também é usada com frequência em mecânica quântica na construção de uma função de onda de muitas partículas que, de acordo com os princípios de exclusão de Pauli, será anti-simétrica sob a permutação de quaisquer duas partículas idênticas de spin  $\frac{1}{2}$  (elétrons, prótons, nêutrons etc.).

- Como um caso especial de anti-simetria, qualquer determinante com duas linhas iguais ou com duas colunas iguais é igual a zero.
- Se cada elemento em uma linha ou cada elemento em uma coluna for zero, o determinante é igual a zero.
- Se cada elemento em uma linha ou cada elemento em uma coluna for multiplicado por uma constante, o determinante é multiplicado por aquela constante.
- O valor de um determinante não se altera se um múltiplo de uma linha for adicionado (coluna por coluna) a uma outra linha ou se um múltiplo de uma coluna for adicionado (linha por linha) a uma outra coluna.<sup>3</sup>

Temos

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

<sup>2</sup>A inversão de sinal é razoavelmente óbvia para a permutação de duas linhas (ou colunas) adjacentes, porque essa é uma permutação claramente ímpar. Mostre que a permutação de **quaisquer** duas linhas ainda é uma permutação ímpar.

<sup>3</sup>Isso deriva do significado geométrico do determinante como o volume do paralelepípedo abrangido por seus vetores coluna. Deslocar o paralelepípedo para o lado sem mudar sua altura não modifica o volume.





Usando o desenvolvimento de Laplace no lado direito, obtemos

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

então, pela propriedade de anti-simetria, o segundo determinante do lado direito de Equação (3.16) se anula, verificando a Equação (3.15).

Como um caso especial, um determinante é igual a zero se quaisquer duas linhas forem proporcionais ou quaisquer duas colunas forem proporcionais.

Algumas relações úteis envolvendo determinantes ou matrizes aparecem nos Exercícios das Seções 3.2 e 3.4.

Voltando às Equações (3.1) homogêneas e multiplicando o determinante dos coeficientes por  $x_1$ , e então somando  $x_2$  vezes a segunda coluna e  $x_3$  vezes a terceira coluna, podemos estabelecer diretamente a condição para a presença de uma solução não-trivial para as Equações (3.1):

$$\begin{aligned} x_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto,  $x_1$  (e  $x_2$  e  $x_3$ ) devem ser zero **a menos que o determinante de coeficientes se anule**. Ao contrário (veja o texto após da Equação (3.3)), podemos mostrar que, se o determinante dos coeficientes desaparecer, existe, de fato, uma solução não-trivial. Isso é usado na Seção 9.6 para estabelecer a dependência ou independência linear de um conjunto de funções.

Se nossas equações lineares forem **não-homogêneas**, isto é, assim como nas Equações (3.5), se os zeros no lado direito das Equações (3.1) forem substituídos por  $a_4$ ,  $b_4$  e  $c_4$ , respectivamente, então, pela Equação (3.17), obtemos

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad (3.18)$$

que generaliza a Equação (3.6a) para  $n = 3$  dimensões etc. Se o determinante dos coeficientes se anular, o conjunto não-homogêneo de equações não tem nenhuma solução — a menos que os numeradores também desapareçam. Nesse caso, podem existir soluções, mas elas não são únicas (veja um exemplo específico no Exercício 3.1.3).

Para trabalho numérico essa solução por determinante, Equação (3.18), é extremamente difícil de manejar. O determinante pode envolver números grandes com sinais alternados, e na subtração de dois números grandes o erro relativo pode se elevar a ponto de o resultado ficar sem sentido. Além disso, embora o método do determinante seja ilustrado aqui com três equações e três incógnitas, não seria difícil termos 200 equações com 200 incógnitas que, por envolver até 200! termos em cada determinante, representam um desafio até mesmo para computadores de alta velocidade. Tem de haver um modo melhor.

Na verdade, há modos melhores. Um dos melhores é um processo direto que costuma ser denominado **eliminação de Gauss**. Para ilustrar essa técnica, considere o seguinte conjunto de equações.

### Exemplo 3.1.1 ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Resolva

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 11 \\ 2x + 3y + z &= 13 \\ x + y + 4z &= 12. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O determinante das equações lineares não-homogêneas (3.19) é 18, portanto existe uma solução.

Por conveniência e para a acurácia numérica ótima, as equações são rearranjadas de modo que os maiores

coeficientes fiquem ao longo da diagonal principal (do canto superior esquerdo ao canto inferior direito). Isso já foi feito no conjunto precedente.

A técnica de Gauss é usar a primeira equação para eliminar a primeira incógnita,  $x$ , das equações restantes. Então, a segunda (nova) equação é usada para eliminar  $y$  da última equação. Em geral, prosseguimos de cima para baixo por todo o conjunto de equações e, então, após determinarmos uma das incógnitas, continuamos de baixo para cima para resolver para cada uma das outras incógnitas sucessivamente.

Dividindo cada linha por seu coeficiente inicial, vemos que as Equações (3.19) se tornam

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z &= \frac{13}{2} \\ x + y + 4z &= 12. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Agora, usando a primeira equação, eliminamos  $x$  da segunda e terceira equações:

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z &= \frac{17}{6} \\ \frac{1}{3}y + \frac{11}{3}z &= \frac{25}{3} \end{aligned} \tag{3.21}$$

e

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ y + \frac{1}{5}z &= \frac{17}{5} \\ y + 11z &= 25. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Repetindo a técnica, usamos a nova segunda equação para eliminar  $y$  da terceira equação:

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ y + \frac{1}{5}z &= \frac{17}{5} \\ 54z &= 108, \end{aligned} \tag{3.23}$$

ou

$$z = 2.$$

Por fim, prosseguindo de baixo para cima, obtemos

$$y + \frac{1}{5} \times 2 = \frac{17}{5},$$

ou

$$y = 3.$$

Então, tendo determinado  $z$  e  $y$ ,

$$x + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 2 = \frac{11}{3},$$

e

$$x = 1.$$

A técnica talvez não pareça tão elegante quanto a Equação (3.18), mas se adapta bem a computadores e é muito mais rápida do que o tempo gasto com determinantes.

Essa técnica de Gauss pode ser usada para converter um determinante para a forma triangular

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$$

para um determinante de terceira ordem cujos elementos não devem ser confundidos com os da Equação (3.3). Nessa forma,  $D = a_1 b_2 c_3$ . Para um determinante de ordem  $n$  a avaliação da forma triangular requer somente multiplicações, em comparação com as  $n!$  requeridas para o caso geral.

Uma variação dessa eliminação progressiva é conhecida como eliminação de Gauss-Jordan. Começamos como na eliminação de Gauss, que já examinamos, mas cada nova equação considerada é usada para eliminar uma



variável de **todas** as outras equações e não apenas das que estão abaixo dela. Se tivéssemos usado essa eliminação de Gauss-Jordan, a Equação (3.23) teria se tornado

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{5}z &= \frac{7}{5} \\ y + \frac{1}{5}z &= \frac{17}{5} \\ z &= 2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

usando a segunda equação das Equações (3.22) para eliminar  $y$  da primeira e da terceira equações. Então, a terceira equação das Equações (3.24) é usada para eliminar  $z$  da primeira e da segunda, resultando em

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= 2. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Voltaremos a essa técnica de Gauss-Jordan na Seção 3.2 para inverter matrizes.

Uma outra técnica adequada para uso em computador é a técnica de iteração de Gauss-Seidel. Cada técnica tem suas vantagens e desvantagens. Os métodos de Gauss e de Gauss-Jordan podem apresentar problemas de precisão para grandes determinantes. Isso também é um problema para inversão de matriz (Seção 3.2). O método Gauss-Seidel, por ser iterativo, pode apresentar problemas de convergência. O pacote Scientific Subroutine Package (SSP) da IBM usa as técnicas de Gauss e Gauss-Jordan. O método iterativo de Gauss-Seidel e os métodos de eliminação de Gauss e Gauss-Jordan são discutidos com considerável detalhe por Ralston e Wilf e também por Pennington.<sup>4</sup> Códigos para computadores em FORTRAN e em outras linguagens de programação e literatura extensiva para a eliminação de Gauss-Jordan e outras também são dados por Press *et al.*<sup>5</sup> ■

### Dependência Linear de Vetores

Dois vetores bidimensionais não-zero

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

são definidos como **linearmente dependentes** se for possível encontrar dois números  $x_1, x_2$  que não sejam ambos zero, de modo que a relação linear  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = 0$  seja válida. São **linearmente independentes** se  $x_1 = 0 = x_2$  for a única solução dessa relação linear. Escrevendo-a em componentes cartesianas, obtemos duas equações lineares homogêneas

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = 0, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0$$

das quais extraímos o seguinte critério para independência linear de dois vetores usando a regra de Cramer. **Se  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  abrangerem uma área não-zero, isto é, seu determinante  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ , então o conjunto de equações lineares homogêneas tem somente a solução  $x_1 = 0 = x_2$ . Se o determinante for zero, então existe uma solução não-trivial  $x_1, x_2$ , e nossos vetores são linearmente dependentes.** Em particular, os vetores unitários nas direções  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes, sendo que a relação linear  $x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  tem somente a solução trivial  $x_1 = 0 = x_2$ .

Três ou mais vetores em um espaço bidimensional são sempre linearmente dependentes. Assim, o número máximo de vetores linearmente independentes em espaço bidimensional é 2. Por exemplo, dados  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ,  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = 0$ , a relação linear sempre tem soluções não-triviais. Se um dos vetores for zero, a dependência linear é óbvia porque o coeficiente do vetor zero pode ser escolhido como não-zero e os coeficientes dos outros vetores como zero. Portanto, admitimos que todos eles sejam não-zero. Se  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são linearmente independentes, escrevemos a relação linear

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = -a_{31}x_3, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{32}x_3,$$

como um conjunto de duas equações lineares não-homogêneas e aplicamos a regra de Cramer. Visto que o determinante é não-zero, podemos achar uma solução não-trivial  $x_1, x_2$  para qualquer  $x_3$  não-zero. Esse argumento

<sup>4</sup>A. Ralston e H. Wilf, editores, *Mathematical Methods for Digital Computers*. Nova York: Wiley 1960; R. H. Pennington, *Introductory Computer Methods and Numerical Analysis*. Nova York: Macmillan 1970.

<sup>5</sup>W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky e W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, 2ª ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1992), Capítulo 2.

vale para qualquer par de vetores linearmente independentes. Se todos os pares forem linearmente dependentes, qualquer dessas relações lineares é uma relação entre os três vetores e damos tudo por terminado. Se houver mais do que três vetores, escolhamos quaisquer três deles e aplicamos o raciocínio precedente e colocamos os coeficientes dos outros vetores,  $x_j = 0$ , na relação linear.

- Vetores mutuamente ortogonais são linearmente independentes.

Admita uma relação linear  $\sum_i c_i \mathbf{v}_i = 0$ . Introduzindo o produto direto de  $\mathbf{v}_j$  nessa expressão usando  $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = 0$  para  $j \neq i$ , obtemos  $c_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j = 0$ , portanto, todo  $c_j = 0$  porque  $\mathbf{v}_j^2 \neq 0$ .

A extensão desses teoremas é direta para  $n$  ou mais vetores em um espaço euclidiano dimensional  $n$ . Assim, **o número máximo de vetores linearmente independentes em espaço  $n$  dimensional é  $n$** . Os vetores unitários de coordenadas são linearmente independentes porque abrangem um paralelepípedo não-zero em um espaço  $n$  dimensional e seu determinante é unitário.

### Procedimento de Gram-Schmidt

Em um espaço vetorial dimensional  $n$  com um produto interno (ou escalar), sempre podemos construir uma base ortonormal de  $n$  vetores  $\mathbf{w}_i$  com  $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = \delta_{ij}$  partindo de  $n$  vetores linearmente independentes  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Começamos normalizando  $\mathbf{v}_0$  para a unidade, definindo  $\mathbf{w}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{\sqrt{\mathbf{v}_0^2}}$ . Então projetamos  $\mathbf{v}_1$  formando  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + a_{10} \mathbf{w}_0$ , escolhendo o coeficiente de mistura  $a_{10}$ , de modo que  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ . Fazendo o produto escalar de  $\mathbf{v}_0$  em  $\mathbf{u}_1$  temos  $a_{10} = -\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{\sqrt{\mathbf{v}_0^2}} = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_0$ . Mais uma vez normalizamos  $\mathbf{u}_1$  definindo  $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\sqrt{\mathbf{u}_1^2}}$ . Aqui,  $\mathbf{u}_1^2 \neq 0$  porque  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$  são linearmente independentes. Essa primeira etapa se generaliza para

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j + a_{j0} \mathbf{w}_0 + a_{j1} \mathbf{w}_1 + \dots + a_{j,j-1} \mathbf{w}_{j-1},$$

com coeficientes  $a_{ji} = -\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{w}_i$ . A normalização de  $\mathbf{w}_j = \frac{\mathbf{u}_j}{\sqrt{\mathbf{u}_j^2}}$  conclui nossa construção.

Devemos observar que, embora esse procedimento de Gram-Schmidt seja uma maneira possível de construir um conjunto ortogonal ou ortonormal, os vetores  $\mathbf{w}_i$  não são únicos. Há um número infinito de conjuntos ortonormais possíveis.

Como ilustração da liberdade envolvida, considere dois vetores (não-paralelos)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  no plano  $xy$ . Podemos normalizar  $\mathbf{A}$  para grandeza unitária e então formar  $\mathbf{B}' = a\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , de modo que  $\mathbf{B}'$  seja perpendicular a  $\mathbf{A}$ . Normalizando  $\mathbf{B}'$  concluímos a ortogonalização de Gram-Schmidt para dois vetores. Mas quaisquer dois vetores unitários perpendiculares, tais como  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , poderiam ter sido escolhidos como nosso conjunto ortonormal. Novamente, com um número infinito de possíveis rotações de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  ao redor do eixo  $z$ , temos um número infinito de possíveis conjuntos ortonormais.

### Exemplo 3.1.2 VETORES POR ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Para ilustrar o método, consideramos dois vetores

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

que não são nem ortogonais nem normalizados. Normalizando o primeiro vetor  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_0/\sqrt{2}$ , construímos  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + a_{10} \mathbf{w}_0$  de modo que seja ortogonal a  $\mathbf{v}_0$ . Isso nos dá

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_0 = 0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{a_{10}}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_0^2 = -1 + a_{10} \sqrt{2},$$

portanto, o coeficiente ajustável de mistura  $a_{10} = 1/\sqrt{2}$ . O resultado é

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

portanto, o segundo vetor ortonormal se torna

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verificamos que  $\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{w}_1 = 0$ . Os dois vetores  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$  formam um conjunto ortonormal de vetores, uma base de espaço euclidiano bidimensional. ■



### Exercícios

**3.1.1** Avalie os seguintes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad (c) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}.$$

**3.1.2** Teste o conjunto de equações lineares homogêneas

$$x + 3y + 3z = 0, \quad x - y + z = 0, \quad 2x + y + 3z = 0$$

para verificar se ele possui uma solução não-trivial e ache uma solução.

**3.1.3** Dado o par de equações

$$x + 2y = 3, \quad 2x + 4y = 6,$$

- (a) Mostre que o determinante dos coeficientes se anulam.
- (b) Mostre que os determinantes do numerador (Equação (3.18)) também se anulam.
- (c) Ache ao menos duas soluções.

**3.1.4** Expresse as **componentes** de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  como determinantes  $2 \times 2$ . Então mostre que o produto escalar  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  resulta em uma expansão laplaciana de um determinante  $3 \times 3$ . Por fim, note que duas linhas do determinante  $3 \times 3$  são idênticas e, por conseguinte, que  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ .

**3.1.5** Se  $C_{ij}$  é o co-fator do elemento  $a_{ij}$  (formado pela eliminação da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna e inclusão de um sinal  $(-1)^{i+j}$ ), mostre que

- (a)  $\sum_i a_{ij} C_{ij} = \sum_i a_{ji} C_{ji} = |A|$ , em que  $|A|$  é o determinante com os elementos  $a_{ij}$ ,
- (b)  $\sum_i a_{ij} C_{ik} = \sum_i a_{ji} C_{ki} = 0, j \neq k$ .

**3.1.6** Um determinante com todos os elementos de ordem unitária pode ser surpreendentemente pequeno. O determinante de Hilbert  $H_{ij} = (i + j - 1)^{-1}, i, j = 1, 2, \dots, n$  é notório por seus valores pequenos.

- (a) Calcule o valor dos determinantes de Hilbert de ordem  $n$  para  $n = 1, 2$  e  $3$ .
- (b) Se houver uma sub-rotina disponível, ache os determinantes de Hilbert de ordem  $n$  para  $n = 4, 5$  e  $6$ .

Resposta:	$n$	$\text{Det}(H_n)$
	1	1.
	2	$8,33333 \times 10^{-2}$
	3	$4,62963 \times 10^{-4}$
	4	$1,65344 \times 10^{-7}$
	5	$3,74930 \times 10^{-12}$
	6	$5,36730 \times 10^{-18}$

**3.1.7** Resolva o seguinte conjunto de equações lineares simultâneas. Os resultados devem ter cinco casas decimais.

$$\begin{aligned} 1,0x_1 + 0,9x_2 + 0,8x_3 + 0,4x_4 + 0,1x_5 &= 1,0 \\ 0,9x_1 + 1,0x_2 + 0,8x_3 + 0,5x_4 + 0,2x_5 + 0,1x_6 &= 0,9 \\ 0,8x_1 + 0,8x_2 + 1,0x_3 + 0,7x_4 + 0,4x_5 + 0,2x_6 &= 0,8 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 + 0,7x_3 + 1,0x_4 + 0,6x_5 + 0,3x_6 &= 0,7 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 + 1,0x_5 + 0,5x_6 &= 0,6 \\ 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 1,0x_6 &= 0,5. \end{aligned}$$

*Nota:* Essas equações também podem ser resolvidas por inversão de matriz, Seção 3.2.

**3.1.8** Resolva as equações lineares  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = c, \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b} = 0$  para  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  com vetores constantes  $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b}$  e constante  $c$ .

Resposta:  $\mathbf{x} = \frac{c}{a^2} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})/a^2$ .

**3.1.9** Resolva as equações lineares  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = d$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = e$ ,  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = f$ , para  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  com vetores constantes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e constantes  $d$ ,  $e$ ,  $f$  de modo que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$ .

Resposta:  $[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}] \mathbf{x} = d(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + e(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + f(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .

**3.1.10** Expresse em forma vetorial a solução  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbf{a}x_1 + \mathbf{b}x_2 + \mathbf{c}x_3 + \mathbf{d} = 0$  com vetores constantes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$ , de modo que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$ .

### 3.2 Matrizes

A análise matricial pertence à álgebra linear porque matrizes são operadores lineares ou mapas, tais como rotações. Suponha, por exemplo, que rotacionamos as coordenadas cartesianas de um espaço bidimensional, como na Seção 1.2, de modo que, em notação vetorial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ -x_2 \sin \varphi + x_1 \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \sum_j a_{2j} x_j \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Denominamos o arranjo de elementos  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  matriz  $2 \times 2$   $A$  consistindo em duas linhas e duas colunas e consideramos os vetores  $x$ ,  $x'$  matrizes  $2 \times 1$ . **Tomamos o somatório de produtos na Equação (3.26) como uma definição de multiplicação de matrizes envolvendo o produto escalar de cada vetor linha de  $A$  com o vetor coluna  $x$ .** Assim, em notação matricial, a Equação (3.26) se torna

$$x' = Ax. \quad (3.27)$$

Para estender essa definição de multiplicação de uma matriz por um vetor coluna ao produto de duas matrizes  $2 \times 2$ , vamos fazer a rotação de coordenadas e, em seguida, uma segunda rotação dada pela matriz  $B$ , tal que

$$x'' = Bx'. \quad (3.28)$$

Em forma de componente,

$$x''_i = \sum_j b_{ij} x'_j = \sum_j b_{ij} \sum_k a_{jk} x_k = \sum_k \left( \sum_j b_{ij} a_{jk} \right) x_k. \quad (3.29)$$

O somatório em relação a  $j$  é a multiplicação matricial que define uma matriz  $C = BA$ , tal que

$$x''_i = \sum_k c_{ik} x_k, \quad (3.30)$$

ou  $x'' = Cx$  em notação matricial. Mais uma vez, essa definição envolve os produtos escalares de vetores linhas de  $B$  com vetores colunas de  $A$ . Essa definição de multiplicação matricial é generalizada para matrizes  $m \times n$  e é útil; na verdade, **essa utilidade é a justificativa de sua existência**. A interpretação geométrica é que o produto matricial das duas matrizes  $BA$  é a rotação que leva o sistema “sem linha” diretamente para o sistema de coordenadas “duas linhas”. Antes de passarmos para definições formais, você deve notar que o operador  $A$  é descrito por seu efeito sobre as coordenadas ou vetores de base. Os elementos de matriz  $a_{ij}$  constituem uma **representação** do operador, uma representação que depende da escolha de uma base.

O caso especial de uma matriz de uma só coluna e  $n$  linhas é denominado vetor coluna,  $|x\rangle$ , com componentes  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $A$  for uma matriz  $n \times n$ ,  $|x\rangle$  um vetor coluna de  $n$  componentes,  $A|x\rangle$  é definida como nas Equações (3.26) e (3.27). De modo semelhante, se uma matriz tiver uma linha e  $n$  colunas, é denominada vetor linha,  $\langle x|$  com componentes  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Está claro que  $\langle x|$  resulta de  $|x\rangle$  pela permutação de linhas e colunas, uma operação matricial denominada **transposição**. A transposição para qualquer matriz  $A$ ,  $\tilde{A}$  é denominada<sup>6</sup> “ $A$  transposta” com elementos de matriz  $(\tilde{A})_{ik} = A_{ki}$ . Transpor um produto de matrizes  $AB$  inverte a ordem e dá  $\tilde{B}\tilde{A}$ ; de modo semelhante,  $A|x\rangle$  transposta é  $\langle x|A$ . O produto escalar toma a forma de  $\langle x|y\rangle = \sum_i x_i y_i$  ( $x_i^*$  em um espaço vetorial complexo. Essa **notação “bra-ket” de Dirac** é usada extensivamente em mecânica quântica e no Capítulo 10, e também passaremos a usá-la aqui.

De um modo mais abstrato, podemos definir o **espaço dual  $\tilde{V}$  de funcionais lineares  $F$**  em um espaço vetorial  $V$ , em que cada funcional linear  $F$  de  $\tilde{V}$  atribui um número  $F(\mathbf{v})$ , de modo que

$$F(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 F(\mathbf{v}_1) + c_2 F(\mathbf{v}_2),$$

<sup>6</sup>Alguns textos (incluindo o nosso, às vezes) denotam  $A$  transposta por  $A^T$ .



para quaisquer vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  de nosso espaço vetorial  $V$  e números  $c_1, c_2$ . Se definirmos a soma de dois funcionais por linearidade como

$$(F_1 + F_2)(\mathbf{v}) = F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v}),$$

então  $\tilde{V}$  é um espaço linear por construção.

O **teorema de Riesz** diz que há uma correspondência um - para um - entre funcionais lineares  $F$  em  $\tilde{V}$  e vetores  $\mathbf{f}$  em um espaço vetorial  $V$  que tenha um produto interno (ou escalar)  $\langle \mathbf{f} | \mathbf{v} \rangle$  definido para qualquer par de vetores  $\mathbf{f}, \mathbf{v}$ .

A prova depende do produto escalar por definição de uma funcional linear  $F$  para qualquer vetor  $\mathbf{f}$  de  $V$ , tal como  $F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f} | \mathbf{v} \rangle$  para qualquer  $\mathbf{v}$  de  $V$ . A linearidade do produto escalar em  $\mathbf{f}$  mostra que esses funcionais formam um espaço vetorial (necessariamente contido em  $\tilde{V}$ ). Note que um funcional linear é completamente especificado quando é definido para todo vetor  $\mathbf{v}$  de um dado espaço vetorial.

Por outro lado, partindo de qualquer funcional linear não-trivial  $F$  de  $\tilde{V}$ , construímos agora um vetor único  $\mathbf{f}$  de  $V$ , de modo que  $F(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  é dada por um produto interno. Começamos a partir de uma base ortonormal  $\mathbf{w}_i$  de vetores em  $V$  usando o procedimento de Gram-Schmidt (veja a Seção 3.2). Tome qualquer vetor  $\mathbf{v}$  de  $V$  e expanda-o como  $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v} \mathbf{w}_i$ . Então, o funcional linear  $F(\mathbf{v}) = \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v} F(\mathbf{w}_i)$  é bem definido em  $V$ . Se definirmos o vetor específico  $\mathbf{f} = \sum_i F(\mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i$ , então seu produto interno com um vetor arbitrário  $\mathbf{v}$  é dado por  $\langle \mathbf{f} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \sum_i F(\mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v} = F(\mathbf{v})$ , que prova o teorema de Riesz.

### Definições Básicas

Uma matriz é definida como um arranjo quadrado ou retangular de números ou funções que obedece a certas leis. Essa é um extensão perfeitamente lógica de conceitos matemáticos familiares. Em aritmética lidamos com números únicos. Na teoria de variáveis complexas (Capítulo 6) lidamos com pares ordenados de números,  $(1, 2) = 1 + 2i$ , para os quais a ordem é importante. Agora, consideramos números (ou funções) ordenadas em um arranjo quadrado ou retangular. Por conveniência, em nosso trabalho mais adiante os números são diferenciados por dois índices inferiores (subscritos), sendo que o primeiro indica a linha (horizontal) e o segundo indica a coluna (vertical) na qual o número aparece. Por exemplo,  $a_{13}$  é o elemento da matriz na primeira linha, terceira coluna. Por conseguinte, se  $A$  é uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Talvez o fato mais importante a notar é que os elementos  $a_{ij}$  não são combinados um com o outro. Uma matriz não é um determinante. É um arranjo ordenado de números, não um número único.

A matriz  $A$ , até aqui apenas um arranjo de números, tem as propriedades que a ela atribuímos. Literalmente, isso quer dizer construir uma nova forma de matemática. Definimos que matrizes  $A, B$ , com elementos  $a_{ij}, b_{ij}$ , respectivamente, se combinam conforme as regras a seguir.

### Ordem

Voltando às equações lineares homogêneas, Equação (3.1), notamos que a matriz de coeficientes,  $A$ , é composta de três vetores linhas, sendo que cada um representa uma equação linear do conjunto. Se seu produto escalar triplo não for zero, então elas abrangem um volume não-zero e são linearmente independentes, e as equações lineares homogêneas têm somente a solução trivial. Nesse caso, diz-se que a matriz é de **ordem 3**. Em  $n$  dimensões o volume representado pelo produto escalar triplo torna-se o determinante,  $\det(A)$ , para uma matriz quadrada. Se  $\det(A) \neq 0$ , a matriz  $n \times n$  matrix  $A$  é de **ordem  $n$** . O caso da Equação (3.1), em que o vetor  $\mathbf{c}$  encontra-se no plano varrido por  $a$  e  $b$ , por corresponder à ordem 2 da matriz de coeficientes porque somente dois de seus vetores linhas  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , correspondentes a duas equações) são independentes. Em geral, a **ordem  $r$  de uma matriz é o número máximo de vetores linhas ou vetores colunas independentes** que ela tem, com  $0 \leq r \leq n$ .

### Igualdade

Matriz  $A =$  Matriz  $B$  se, e somente se,  $a_{ij} = b_{ij}$  para todos os valores de  $i$  e  $j$ . Isso, é claro, requer que cada uma,  $A$  e  $B$ , seja arranjo  $m \times n$  ( $m$  linhas,  $n$  colunas).

### Adição, Subtração

$A \pm B = C$  se, e somente se,  $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$  para todos os valores de  $i$  e  $j$ , sendo que os elementos são combinados conforme as leis da álgebra ordinária (ou da aritmética se forem números simples). Isso significa que

$A + B = B + A$ , comutação. Além disso, a lei associativa é satisfeita  $(A + B) + C = A + (B + C)$ . Se todos os elementos são zero, a matriz, denominada **matriz nula**, é denotada por  $O$ . Para toda  $A$ ,

$$A + O = O + A = A,$$

com

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Essas matrizes  $m \times n$  formam um espaço linear em relação à adição e à subtração.

### Multiplicação (por um Escalar)

A multiplicação da matriz  $A$  pela quantidade escalar  $\alpha$  é definida como

$$\alpha A = (\alpha A), \tag{3.33}$$

na qual os elementos  $\alpha A$  são  $\alpha a_{ij}$ ; isto é, cada elemento da matriz  $A$  é multiplicado pelo fator escalar. Isto é um surpreendente contraste com o comportamento de determinantes no qual o fator  $\alpha$  multiplica apenas uma coluna ou uma linha e não todo elemento do determinante inteiro. Uma consequência dessa multiplicação escalar é que

$$\alpha A = A\alpha, \quad \text{comutação.}$$

Se  $A$  for uma matriz quadrada, então

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

### Multiplicação de Matrizes, Produto Interno

$$\boxed{AB = C} \quad \text{se, e somente se,}^7 \quad \boxed{c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}}. \tag{3.34}$$

O elemento  $ij$  de  $C$  é formado como um produto escalar da  $i$ -ésima fila de  $A$  com a  $j$ -ésima coluna de  $B$  (o que exige que  $A$  tenha o número de colunas ( $n$ ) igual ao número de linhas de  $B$ ). O índice mudo  $k$  assume todos os valores  $1, 2, \dots, n$ , sucessivamente; isto é,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}, \tag{3.35}$$

para  $n = 3$ . É obvio que o índice mudo  $k$  pode ser substituído por qualquer outro símbolo que não esteja em uso sem alterar a Equação (3.34). Talvez a situação possa ser esclarecida afirmando que a Equação (3.34) define o método de combinar certas matrizes. Para ilustrar que tenha um rótulo, esse método de combinação é denominado **multiplicação de matrizes**. Para ilustrar considere duas matrizes (denominadas matrizes de Pauli):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

O elemento  $11$  do produto,  $(\sigma_1\sigma_3)_{11}$ , é dado pela soma dos produtos de elementos da primeira **fila** de  $\sigma_1$  com os elementos correspondentes da primeira **coluna**  $\sigma_3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Continuando, temos

$$\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Aqui

$$(\sigma_1\sigma_3)_{ij} = \sigma_{1i1}\sigma_{31j} + \sigma_{1i2}\sigma_{32j}.$$

<sup>7</sup>Aqui, alguns autores seguem a convenção do somatório (compare com a Seção 2.6).





A aplicação direta da definição de multiplicação de matrizes mostra que

$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

e pela Equação (3.37)

$$\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3. \quad (3.39)$$

Exceto em casos especiais, a multiplicação de matrizes não é comutativa:<sup>8</sup>

$$AB \neq BA. \quad (3.40)$$

Contudo, pela definição de multiplicação de matrizes, podemos mostrar<sup>9</sup> que uma lei associativa é válida,  $(AB)C = A(BC)$ . Há também uma lei distributiva,  $A(B + C) = AB + AC$ .

A matriz unitária  $1$  tem elementos  $\delta_{ij}$ , de Kronecker, e a propriedade de que  $1A = A1 = A$  para todo  $A$ ,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Deve-se notar que é possível que o produto de duas matrizes seja a matriz nula sem que nenhuma delas seja uma matriz nula. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$AB = O$ . Isso é diferente da multiplicação de números reais ou complexos, que formam um **campo**, ao passo que a estrutura aditiva e multiplicativa de matrizes é denominada **anel** pelos matemáticos. Veja também o Exercício 3.2.6(a), pelo qual fica evidente que, se  $AB = O$ , ao menos uma das matrizes deve ter um determinante zero (ou seja, ser singular como definido após a Equação (3.50) nesta seção).

Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  com determinante  $|A| \neq 0$ , então ela tem uma única inversa  $A^{-1}$  que satisfaz  $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$ . Se  $B$  é também uma matriz  $n \times n$  com inversa  $B^{-1}$ , então o produto  $AB$  tem a inversa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (3.42)$$

porque  $ABB^{-1}A^{-1} = 1 = B^{-1}A^{-1}AB$  (veja também Exercícios 3.2.31 e 3.2.32).

**O teorema do produto**, que diz que o determinante do produto,  $|AB|$ , de duas matrizes  $A$  e  $B$  é igual ao produto dos determinantes,  $|A||B|$ , liga matrizes com determinantes. Para provar isso, considere os  $n$  vetores colunas  $\mathbf{c}_k = (\sum_j a_{ij}b_{jk}, i = 1, 2, \dots, n)$  da matriz produto  $C = AB$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Cada  $\mathbf{c}_k = \sum_{j_k} b_{j_k k} \mathbf{a}_{j_k}$  é uma soma de  $n$  vetores colunas  $\mathbf{a}_{j_k} = (a_{ij_k}, i = 1, 2, \dots, n)$ . Note que agora estamos usando um índice  $j_k$  diferente de somatório de produto para cada coluna  $\mathbf{c}_k$ . Uma vez que qualquer determinante  $D(b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2) = b_1D(\mathbf{a}_1) + b_2D(\mathbf{a}_2)$  é linear em seus vetores colunas, podemos retirar o sinal de somatório que está na frente do determinante de cada vetor coluna em  $C$  juntamente com o fator  $b_{j_k k}$  comum da coluna, de modo que

$$|C| = \sum_{j'_k s} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} \det(\mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_n}). \quad (3.43)$$

Se rearranjarmos os vetores colunas  $\mathbf{a}_{j_k}$  do fator determinante na Equação (3.43) na ordem correta, então podemos puxar o fator comum  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = |A|$  à frente dos  $n$  sinais de somatório na Equação (3.43). Essas permutações de colunas geram o sinal correto  $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}$  para produzir na Equação (3.43) a expressão presente na Equação (3.8) para  $|B|$ , de modo que

$$|C| = |A| \sum_{j'_k s} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} = |A||B|, \quad (3.44)$$

o que prova o teorema do produto.

<sup>8</sup>Comutação, ou falta de comutação, é descrita de modo conveniente pelo símbolo de comutador, o colchete,  $[A, B] = AB - BA$ . A Equação (3.40) torna-se  $[A, B] \neq 0$ .

<sup>9</sup>Note que as definições básicas de igualdade, adição e multiplicação são dadas em termos dos elementos da matriz, os  $a_{ij}$ . Todas as nossas operações matriciais podem ser executadas em termos dos elementos da matriz. Contudo, também podemos tratar uma matriz como um operador algébrico único, como na Equação (3.40). Elementos de matrizes e operadores únicos, cada um tem suas vantagens, como veremos na próxima seção. Usaremos as duas abordagens.

### Produto Direto

Em seguida, apresentamos um segundo procedimento para multiplicar matrizes, conhecido como tensor **direto** ou **produto** de Kronecker. Se  $A$  é uma matriz  $m \times m$  e  $B$  é uma matriz  $n \times n$ , então o produto direto é

$$A \otimes B = C. \tag{3.45}$$

$C$  é uma matriz  $mn \times mn$  com elementos

$$C_{\alpha\beta} = A_{ij}B_{kl}, \tag{3.46}$$

com

$$\alpha = m(i - 1) + k, \quad \beta = n(j - 1) + l.$$

Por exemplo, se  $A$  e  $B$  forem ambas matrizes  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

O produto direto é associativo, mas não comutativo. Como exemplo do produto direto, as matrizes de Dirac da Seção 3.4 podem ser desenvolvidas como produtos diretos das matrizes de Pauli e da matriz unitária. Outros exemplos aparecem na construção de grupos (veja o Capítulo 4) e em espaço vetorial ou espaço de Hilbert da teoria quântica.

#### Exemplo 3.2.1 PRODUTO DIRETO DE VETORES

O produto direto de dois vetores bidimensionais é um vetor de quatro componentes,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0y_0 \\ x_0y_1 \\ x_1y_0 \\ x_1y_1 \end{pmatrix};$$

enquanto o produto direto de três desses vetores,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0y_0z_0 \\ x_0y_0z_1 \\ x_0y_1z_0 \\ x_0y_1z_1 \\ x_1y_0z_0 \\ x_1y_0z_1 \\ x_1y_1z_0 \\ x_1y_1z_1 \end{pmatrix},$$

é um vetor de ( $2^3 = 8$ ) dimensões. ■

### Matrizes Diagonais

Um tipo especial importante de matriz é a matriz quadrada na qual todos os elementos não-diagonais são zero. Especificamente, se uma matriz  $3 \times 3$   $A$  for diagonal, então

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Uma interpretação física de tais matrizes diagonais e o método para reduzir matrizes a essa forma diagonal são considerados na Seção 3.5. Aqui, nos limitamos a destacar uma propriedade significativa de matrizes diagonais — a multiplicação de matrizes diagonais é comutativa,

$$AB = BA, \quad \text{se cada uma } A \text{ e } B \text{ for diagonal.}$$



A multiplicação por uma matriz diagonal  $[d_1, d_2, \dots, d_n]$  que tenha somente elementos não-zero na diagonal é particularmente simples:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix};$$

enquanto a ordem oposta dá

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Assim, **uma matriz diagonal não comuta com uma outra matriz a menos que ambas sejam diagonais ou que a matriz diagonal seja proporcional à matriz unitária**. Isso é confirmado pela forma mais geral

$$\begin{aligned} [d_1, d_2, \dots, d_n]A &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} A[d_1, d_2, \dots, d_n] &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \dots & d_n a_{1n} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 a_{n1} & d_2 a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aqui, denominamos  $[d_1, \dots, d_n]$  a matriz diagonal com elementos diagonais  $d_1, \dots, d_n$ . No caso especial de multiplicação de duas matrizes diagonais, simplesmente multiplicamos os elementos correspondentes da matriz diagonal que, obviamente, é comutativa.

### Traço

Em qualquer matriz quadrada, a soma dos elementos diagonais é denominada **traço**.

É claro que o traço é uma operação linear:

$$\text{traço}(A - B) = \text{traço}(A) - \text{traço}(B).$$

Uma de suas propriedades interessantes e úteis é que o traço de um produto de duas matrizes A e B é independente da ordem da multiplicação:

$$\begin{aligned} \text{traço}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} \\ &= \text{traço}(BA). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Isso vale mesmo que  $AB \neq BA$ . A Equação (3.48) significa que o traço de qualquer comutador  $[A, B] = AB - BA$  é zero. Pela Equação (3.48) obtemos

$$\text{traço}(ABC) = \text{traço}(BCA) = \text{traço}(CAB),$$

que mostra que o traço é invariante sob permutação cíclica das matrizes em um produto.

Para uma matriz simétrica real ou uma matriz hermitiana complexa (veja a Seção 3.4), o traço é a soma, e o determinante é o produto de seus autovalores e ambos são coeficientes do polinômio característico. No Exercício 3.4.23 a operação de tomar o traço seleciona um termo de uma soma de 16 termos. O traço servirá a uma função semelhante em relação a matrizes, assim como a ortogonalidade serve a vetores e funções.

Em termos de tensores (Seção 2.7), o traço é uma contração e, assim como o tensor contraído de segunda ordem, é um escalar (invariante).

Matrizes são extensivamente usadas para representar os elementos de grupos (compare com o Exercício 3.2.7 e o Capítulo 4). Na teoria de grupo, o traço da matriz que representa o elemento de grupo é conhecido como **caráter**. A razão para o nome especial e para a atenção especial é que o traço ou caráter permanece invariante sob transformações de similaridade (compare com o Exercício 3.3.9).

### Inversão de Matriz

No início desta seção, a matriz  $A$  é introduzida como a representação de um operador que transforma (linearmente) os eixos coordenados. Uma rotação seria um exemplo de tal transformação linear. Agora procuramos a transformação inversa  $A^{-1}$  que irá restaurar os eixos coordenados originais. Isso quer dizer: como matriz ou como equação de operador,<sup>10</sup>

$$\text{Com } (A^{-1})_{ij} \equiv a_{ij}^{(-1)}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = 1. \quad (3.49)$$

$$a_{ij}^{(-1)} \equiv \frac{C_{ji}}{|A|}, \quad (3.50)$$

sendo  $C_{ji}$  o co-fator (veja a discussão anterior da Equação (3.11)) de  $a_{ij}$  e a suposição de que o determinante de  $A$ ,  $|A| \neq 0$ . Se for zero, é dita singular. Não existe inversa.

Há uma grande variedade de técnicas alternativas. Uma das melhores e mais comumente usadas é a técnica de inversão de matriz de Gauss-Jordan. A teoria é baseada nos resultados dos Exercícios 3.2.34 e 3.2.35, que mostram que existem matrizes  $M_L$  tais que o produto  $M_L A$  será  $A$ , mas com

- a. uma fila multiplicada por uma constante ou
- b. uma fila substituída pela fila original menos um múltiplo de uma outra fila ou
- c. filas permutadas.

Outras matrizes  $M_R$  operando pela direita a  $(AM_R)$  podem executar as mesmas operações nas **colunas** de  $A$ .

Isso quer dizer que as filas e colunas da matriz podem ser alteradas (por multiplicação de matrizes) como se estivéssemos lidando com determinantes. Portanto, podemos aplicar as técnicas de eliminação de Gauss-Jordan da Seção 3.1 a elementos da matriz. Por conseguinte, existe uma matriz  $M_L$  (ou  $M_R$ ) tal que<sup>11</sup>

$$M_L A = 1. \quad (3.51)$$

Então,  $M_L = A^{-1}$ . Determinamos  $M_L$  executando as operações de eliminação idênticas sobre a matriz unitária. Então,

$$M_L 1 = M_L. \quad (3.52)$$

Para esclarecer isso, consideramos um exemplo específico.

### Exemplo 3.2.2 INVERSÃO DE MATRIZ DE GAUSS-JORDAN

Queremos inverter a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Por conveniência escrevemos  $A$  e  $1$  lado a lado e executamos operações idênticas em cada uma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

<sup>10</sup>Aqui, e em todo este capítulo, nossas matrizes têm ordem finita. Se  $A$  for uma matriz de ordem infinita ( $n \times n$  com  $n \rightarrow \infty$ ), então a vida fica mais difícil. Para que  $A^{-1}$  seja a inversa, é preciso exigir que

$$AA^{-1} = 1 \quad \text{e} \quad A^{-1}A = 1.$$

Uma relação não implica mais a outra.

<sup>11</sup>Lembre-se de que  $\det(A) \neq 0$ .



Para sermos sistemáticos, multiplicamos cada linha para obter  $a_{k1} = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Subtraindo a primeira linha da segunda e da terceira linhas, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Então dividimos a segunda linha (de **ambas** as matrizes) por  $\frac{5}{6}$  e subtraímos  $\frac{2}{3}$  vezes ela da primeira linha e  $\frac{1}{3}$  vezes ela da terceira linha. Os resultados para ambas as matrizes são

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{18}{5} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Dividimos a terceira linha (de **ambas** as matrizes) por  $\frac{18}{5}$ . Então, como última etapa, subtraímos  $\frac{1}{5}$  vezes a terceira linha de cada uma das duas primeiras linhas (de ambas as matrizes). Nosso par final é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} & -\frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{11}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

A verificação é multiplicar a A original pela  $A^{-1}$  calculada para ver se realmente obtemos a matriz unitária 1. ■

Assim como a solução de Gauss-Jordan para equações algébricas lineares simultâneas, essa técnica se adapta bem a computadores. De fato, essa técnica de inversão de matriz de Gauss-Jordan provavelmente constará da biblioteca de programas como uma sub-rotina (veja as Seções 2.3 e 2.4 de Press et al., loc. cit.).

Para **matrizes de forma especial, a matriz inversa pode ser dada em forma fechada**. Por exemplo, para

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & e \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

a matriz inversa tem uma forma similar, porém ligeiramente mais geral,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta & \beta_2 \\ \gamma & \beta_2 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

com elementos de matriz dados por

$$\begin{aligned} D\alpha &= ed - b^2, & D\gamma &= -(cd - b^2), & D\beta_1 &= (c - e)b, & D\beta_2 &= (c - a)b, \\ D\delta &= ae - c^2, & D\epsilon &= ad - b^2, & D &= b^2(2c - a - e) + d(ae - c^2), \end{aligned}$$

em que  $D = \det(A)$  é o determinante da matriz A. Se  $e = a$  em A, então a matriz inversa  $A^{-1}$  também é simplificada para

$$\beta_1 = \beta_2, \quad \epsilon = \alpha, \quad D = (a^2 - c^2)d + 2(c - a)b^2.$$

Como prova, vamos elaborar o elemento matricial 11 do produto  $AA^{-1} = 1$ . Encontramos

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta_1 + c\gamma &= \frac{1}{D} [a(ed - b^2) + b^2(c - e) - c(cd - b^2)] \\ &= \frac{1}{D} (-ab^2 + aed + 2b^2c - b^2e - c^2d) = \frac{D}{D} = 1. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, verificamos que o elemento matricial 12 se anula,

$$a\beta_1 + b\delta + c\beta_2 = \frac{1}{D} [ab(c - e) + b(ae - c^2) + cb(c - a)] = 0,$$

e assim por diante.

Entretanto, note que nem sempre podemos achar uma inversa de  $A^{-1}$  resolvendo para os elementos matriciais  $a, b, \dots$  de  $A$ , porque nem toda matriz inversa  $A^{-1}$  da forma que aparece na Equação (3.60) tem uma  $A$  correspondente da forma especial que aparece na Equação (3.59), como mostra com clareza o Exemplo 3.2.2.

*Matrizes são arranjos quadrados ou retangulares de números que definem transformações lineares, tais como rotações de um sistema de coordenadas. Como tal, elas são operadores lineares. Matrizes quadradas podem ser invertidas quando seu determinante não for nulo. Quando uma matriz define um sistema de equações lineares, a matriz inversa o resolve. Matrizes que têm o mesmo número de linhas e colunas podem ser somadas e subtraídas. Elas formam o que os matemáticos denominam anel com uma matriz unitária e uma matriz zero. Matrizes também são úteis para representar operações de grupo e operadores em espaços de Hilbert.*

### Exercícios

**3.2.1** Mostre que a multiplicação de matrizes é associativa,  $(AB)C = A(BC)$ .

**3.2.2** Mostre que

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

se, e somente se,  $A$  e  $B$  comutarem,

$$[A, B] = 0.$$

**3.2.3** Demonstre que a matriz  $A$  é um **operador linear** mostrando que

$$A(c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2) = c_1A\mathbf{r}_1 + c_2A\mathbf{r}_2.$$

Pode-se mostrar que uma matriz  $n \times n$  é o operador linear **mais geral** em um espaço vetorial  $n$  dimensional. Isso significa que todo operador linear nesse espaço vetorial  $n$  dimensional é equivalente a uma matriz.

**3.2.4** (a) Números complexos,  $a + ib$ , com  $a$  e  $b$  reais, podem ser representados por (ou são isomórficos com) matrizes  $2 \times 2$ :

$$a + ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Mostre que essa representação matricial é válida para (i) adição e (ii) multiplicação.

(b) Ache a matriz correspondente  $(a + ib)^{-1}$ .

**3.2.5** Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , mostre que

$$\det(-A) = (-1)^n \det A.$$

**3.2.6** (a) A equação matricial  $A^2 = 0$  não implica  $A = 0$ . Mostre que a matriz mais geral  $2 \times 2$  cujo quadrado é zero pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix},$$

em que  $a$  e  $b$  são números reais ou complexos.

(b) Se  $C = A + B$ , em geral

$$\det C \neq \det A + \det B.$$

Construa um exemplo numérico específico para ilustrar essa desigualdade.

**3.2.7** Dadas as três matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ache todos os produtos possíveis de  $A, B$  e  $C$ , dois por vez, incluindo quadrados. Expresse suas respostas em termos de  $A, B$  e  $C$ , e  $1$ , a matriz unitária. Essas três matrizes, juntamente com a matriz unitária, formam uma representação de um grupo matemático, o **Vierergruppe** (veja a Capítulo 4).



**3.2.8** Dada

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mostre que

$$K^n = KKK \cdots (n \text{ fatores}) = 1$$

(com a escolha adequada de  $n, n \neq 0$ ).

**3.2.9** Verifique a **identidade de Jacobi**,

$$[A, [B, C]] = [B, [A, C]] - [C, [A, B]].$$

Isso é útil em descrições matriciais de partículas elementares (veja a Equação (4.16)). Como recurso mnemônico, você poderia observar que a identidade de Jacobi tem a mesma forma que a regra  $BAC-CAB$  da Seção 1.5.

**3.2.10** Mostre que as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfazem as relações de comutação.

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = 0, \quad \text{e} \quad [B, C] = 0.$$

**3.2.11** Seja

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que

- (a)  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ , em que 1 é a matriz unitária.
- (b)  $ij = -ji = k$ ,  
 $jk = -kj = i$ ,  
 $ki = -ik = j$ .

Essas três matrizes ( $i, j$  e  $k$ ) mais a matriz unitária 1 formam uma base para **quatérnions**. Uma base alternativa é dada pelas quatro matrizes  $2 \times 2$   $i\sigma_1, i\sigma_2, -i\sigma_3, 1$ , em que os sigma são as matrizes de spin de Pauli do Exercício 3.2.13.

**3.2.12** Uma matriz com elementos  $a_{ij} = 0$  para  $j < i$  pode ser denominada triangular direita superior. Os elementos à esquerda inferior (embaixo e à esquerda da diagonal principal) se anulam. São exemplos as matrizes nos Capítulos 12 e 13, Exercício 13.1.21, relativas a séries de potências e expansões de autofunções. Mostre que o produto de duas matrizes triangulares superiores direitas é uma matriz triangular superior direita.

**3.2.13** As três matrizes de spin de Pauli são

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que

- (a)  $(\sigma_i)^2 = 1_2$ ,
- (b)  $\sigma_j \sigma_k = i\sigma_l, (j, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$  (permutação cíclica),

(c)  $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} 1_2$ ;  $1_2$  é a matriz  $2 \times 2$  unitária.

Essas matrizes foram usadas por Pauli na teoria não-relativista de spin do elétron.

**3.2.14** Usando as  $\sigma_i$  de Pauli do Exercício 3.2.13, mostre que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} 1_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Aqui,

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \hat{x}\boldsymbol{\sigma}_1 + \hat{y}\boldsymbol{\sigma}_2 + \hat{z}\boldsymbol{\sigma}_3,$$

$\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores ordinários e  $1_2$  é a matriz unitária  $2 \times 2$ .

**3.2.15** Uma descrição de partículas de spin 1 usa as matrizes

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que

(a)  $[M_x, M_y] = iM_z$ , e assim por diante<sup>12</sup> (permutação cíclica de índices). Usando o símbolo de Levi-Civita da Seção 2.9, podemos escrever

$$[M_p, M_q] = i\varepsilon_{pqr} M_r.$$

(b)  $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2 1_3$ , em que  $1_3$  é a matriz unidade  $3 \times 3$ .

(c)  $[M^2, M_i] = 0$ ,  
 $[M_z, L^+] = L^+$ ,  
 $[L^+, L^-] = 2M_z$ ,  
 em que  
 $L^+ \equiv M_x + iM_y$ ,  
 $L^- \equiv M_x - iM_y$ .

**3.2.16** Repita o Exercício 3.2.15 usando uma representação alternativa,

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No Capítulo 4 essas matrizes aparecem como os **geradores** do grupo de rotação.

**3.2.17** Mostre que a equação matricial-vetorial

$$\left( \mathbf{M} \cdot \nabla + 1_3 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0$$

reproduz as equações de Maxwell no vácuo. Aqui,  $\psi$  é um vetor coluna com componentes  $\psi_j = B_j - iE_j/c$ ,  $j = x, y, z$ .  $\mathbf{M}$  é um vetor cujos elementos são as **matrizes** de momento angular do Exercício 3.2.16. Note que  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ,  $1_3$  é a matriz unitária  $3 \times 3$ .

Do Exercício 3.2.15(b),

$$M^2 \psi = 2\psi.$$

Uma comparação com a equação relativista de elétrons de Dirac sugere que a “partícula” de radiação eletromagnética, o fóton, tem massa de repouso zero e um spin de 1 (em unidades de  $\hbar$ ).

<sup>12</sup> $[A, B] = AB - BA$ .





**3.2.18** Repita o Exercício 3.2.15, usando as matrizes para um spin de  $3/2$ ,

$$M_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$M_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**3.2.19** Um operador  $P$  comuta com  $J_x$  e  $J_y$ , as componentes  $x$  e  $y$  de um operador de momento angular. Mostre que  $P$  comuta com a terceira componente do momento angular, isto é, que

$$[P, J_z] = 0.$$

*Sugestão:* As componentes do momento angular devem satisfazer a relação de comutação do Exercício 3.2.15(a).

**3.2.20** As matrizes  $L^+$  e  $L^-$  do Exercício 3.2.15 são operadores progressivos (veja o Capítulo 4):  $L^+$  operando em um sistema de projeção de spin  $m$  elevará a projeção de spin para  $m + 1$  se  $m$  estiver abaixo de seu máximo.  $L^+$  operando sobre  $m_{\text{máx}}$  dá zero.  $L^-$  reduz a projeção de spin em etapas unitárias de uma maneira semelhante. Dividindo por  $\sqrt{2}$ , temos

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} L^+|-1\rangle &= |0\rangle, L^-|-1\rangle = \text{vetor coluna nulo}, \\ L^+|0\rangle &= |1\rangle, L^-|0\rangle = |-1\rangle, \\ L^+|1\rangle &= \text{vetor coluna nulo}, L^-|1\rangle = |0\rangle, \end{aligned}$$

em que

$$|-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

representam estados de projeção de spin  $-1, 0$ , e  $1$ , respectivamente.

*Nota:* Operadores diferenciais análogos a esses operadores progressivos aparecem no Exercício 12.6.7.

**3.2.21** Os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são relacionados pelo tensor  $T$ ,

$$\mathbf{B} = T\mathbf{A}.$$

Dados  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , mostre que não há **nenhuma solução única** para as componentes de  $T$ . É por isso que a divisão vetorial  $\mathbf{B}/\mathbf{A}$  é indefinida (à parte o caso especial de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  paralelos, e  $T$ , então um escalar).

**3.2.22** Poderíamos pedir um vetor  $\mathbf{A}^{-1}$ , um inverso de um dado vetor  $\mathbf{A}$  no sentido de que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = 1.$$

Mostre que essa relação não é suficiente para definir  $\mathbf{A}^{-1}$  unicamente; então,  $\mathbf{A}$  teria um número infinito de inversos.

**3.2.23** Se  $A$  é uma matriz diagonal, com todos os elementos diagonais diferentes, e  $A$  e  $B$  comutam, mostre que  $B$  é diagonal.

- 3.2.24 Se A e B são diagonais, mostre que A e B comutam.  
 3.2.25 Mostre que o traço  $(ABC) = \text{traço}(CBA)$  se qualquer das três matrizes comutam.  
 3.2.26 Matrizes de momento angular satisfazem uma relação de comutação

$$[M_j, M_k] = iM_l, \quad j, k, l \text{ cíclicos.}$$

Mostre que o traço de cada matriz de momento angular se anula.

- 3.2.27 (a) O operador traço substitui uma matriz A por seu traço; isto é,

$$\text{traço}(A) = \sum_i a_{ii}.$$

Mostre que o traço é um operador **linear**.

- (b) O operador det substitui uma matriz A por seu determinante; isto é,

$$\det(A) = \text{determinante de } A.$$

Mostre que det **não** é um operador linear.

- 3.2.28 A e B anticomutam:  $BA = -AB$ . Além disso,  $A^2 = 1$ ,  $B^2 = 1$ . Mostre que  $\text{traço}(A) = \text{traço}(B) = 0$ .

*Nota:* As matrizes de Pauli e Dirac (Seção 3.4) são exemplos específicos.

- 3.2.29 Sendo  $|x\rangle$  um vetor coluna  $N$  dimensional e  $\langle y|$  um vetor linha  $N$  dimensional, mostre que

$$\text{traço}(|x\rangle\langle y|) = \langle y|x\rangle.$$

*Nota:*  $|x\rangle\langle y|$  significa produto direto de vetor coluna  $|x\rangle$  com vetor  $\langle y|$ . O resultado é uma matriz quadrada  $N \times N$ .

- 3.2.30 (a) Se duas matrizes não-singulares anticomutarem, mostre que o traço de cada uma é zero. *Não-singular* significa que o determinante da matriz é não-zero.  
 (b) Para que as condições da parte (a) sejam válidas, A e B devem ser matrizes  $n \times n$  com  $n$  **par**. Mostre que, se  $n$  for **ímpar**, resulta uma contradição.

- 3.2.31 Se uma matriz tiver uma inversa, mostre que a inversa é única.

- 3.2.32 Se  $A^{-1}$  tem elementos

$$(A^{-1})_{ij} = a_{ij}^{(-1)} = \frac{C_{ji}}{|A|},$$

em que  $C_{ji}$  é o co-fator de ordem  $ji$  de  $|A|$ , mostre que

$$A^{-1}A = 1.$$

Por conseqüência, se  $A^{-1}$  é a inversa de A (if  $|A| \neq 0$ ).

- 3.2.33 Mostre que  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ .

*Nota:* Se  $\det A$  é zero, então A não tem nenhuma inversa. A é singular.

- 3.2.34 Ache as matrizes  $M_L$ , tais que o produto  $M_L A$  será A, porém com:

- (a) a  $i$ -ésima linha multiplicada por uma constante  $k$  ( $a_{ij} \rightarrow ka_{ij}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ );  
 (b) a  $i$ -ésima linha substituída pela  $i$ -ésima linha original, menos um múltiplo da  $m$ -ésima linha ( $a_{ij} \rightarrow a_{ij} - Ka_{mj}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ );  
 (c) a  $i$ -ésima e a  $m$ -ésima linhas permutadas ( $a_{ij} \rightarrow a_{mj}$ ,  $a_{mj} \rightarrow a_{ij}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

- 3.2.35 Ache as matrizes  $M_R$ , tais que o produto  $AM_R$  será A, porém com

- (a) a  $i$ -ésima coluna multiplicada por uma constante  $k$  ( $a_{ji} \rightarrow ka_{ji}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ );  
 (b) a  $i$ -ésima coluna substituída pela  $i$ -ésima coluna original, menos um múltiplo da  $m$ -ésima coluna ( $a_{ji} \rightarrow a_{ji} - ka_{jm}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ );  
 (c) a  $i$ -ésima e a  $m$ -ésima colunas permutadas ( $a_{ji} \rightarrow a_{jm}$ ,  $a_{jm} \rightarrow a_{ji}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

- 3.2.36 Ache a inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$



- 3.2.37** (a) Reescreva a Equação (2.4) do Capítulo 2 (e as equações correspondentes para  $dy$  e  $dz$ ) como uma única equação matricial

$$|dx_k\rangle = J|dq_j\rangle.$$

$J$  é uma matriz de derivadas, a matriz **jacobiana**. Mostre que

$$\langle dx_k|dx_k\rangle = \langle dq_i|G|dq_j\rangle,$$

sendo que a (matriz) métrica  $G$  tem elementos  $g_{ij}$  dados pela Equação (2.6).

- (b) Mostre que

$$\det(J) dq_1 dq_2 dq_3 = dx dy dz,$$

sendo  $\det(J)$  o Jacobiano usual.

- 3.2.38** Matrizes têm uma utilidade muito grande para permanecer como propriedade exclusiva dos físicos. Elas podem aparecer onde quer que haja relações lineares. Por exemplo, em um estudo de movimento populacional, a fração inicial de uma população fixa em cada uma das  $n$  áreas (ou indústrias ou religiões etc.) é representada por um vetor coluna de  $n$  componentes  $\mathbf{P}$ . O movimento de pessoas de uma área para outra em um tempo dado é descrito por uma matriz (estocástica)  $n \times n$   $T$ . Aqui,  $T_{ij}$  é a fração da população na  $j$ -ésima área que passa para a  $i$ -ésima área. (As frações que não passam são cobertas por  $i = j$ .) Com  $\mathbf{P}$  descrevendo a distribuição inicial da população, a distribuição final da população é dada pela equação matricial  $\mathbf{TP} = \mathbf{Q}$ . Por essa definição,  $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ .

- (a) Mostre que a conservação de pessoas requer que

$$\sum_{i=1}^n T_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

- (b) Prove que

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 1$$

preserva a conservação de pessoas.

- 3.2.39** Dada uma matriz  $A$   $6 \times 6$  com elementos  $a_{ij} = 0.5^{|i-j|}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, 5$ , ache  $A^{-1}$ . Liste seus elementos matriciais até a quinta casa decimal.

$$\text{Resposta : } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 3.2.40** O Exercício 3.1.7 pode ser escrito sob forma de matriz:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}.$$

Ache  $A^{-1}$  e calcule  $\mathbf{X}$  como  $A^{-1}\mathbf{C}$ .

- 3.2.41** (a) Escreva uma **sub-rotina** que multiplicará matrizes **complexas**. Admita que as matrizes complexas estão em uma forma geral retangular.  
 (b) Teste sua sub-rotina multiplicando pares das matrizes  $4 \times 4$  de Dirac, Seção 3.4.
- 3.2.42** (a) Escreva uma sub-rotina que chamará a sub-rotina de multiplicação de matrizes complexa do Exercício 3.2.41 e calculará o comutador bracket das duas matrizes complexas.  
 (b) Teste sua sub-rotina de comutador bracket complexo com as matrizes do Exercício 3.2.16.
- 3.2.43** *Polinômio interpolador* é o nome dado ao polinômio de grau  $(n - 1)$  determinado por (e que passa através de)  $n$  pontos,  $(x_i, y_i)$  com todos os  $x_i$  distintos. Esse polinômio interpolador forma uma base para quadraturas numéricas.

- (a) Mostre que exigir que um polinômio de grau  $(n - 1)$  em  $x$  passe por cada um dos  $n$  pontos  $(x_i, y_i)$  com todos os  $x_i$  distintos resulta em  $n$  equações simultâneas da forma

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- (b) Escreva um programa de computador que lerá  $n$  pontos de dados e retornará os  $n$  coeficientes  $a_j$ . Se houver uma sub-rotina disponível, use-a para resolver equações simultâneas.  
 (c) Reescreva o conjunto de equações simultâneas como uma equação matricial

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{Y}.$$

- (d) Repita o cálculo de computador da parte (b), mas, desta vez, resolva para o vetor  $\mathbf{A}$  invertendo a matriz  $\mathbf{X}$  (novamente, usando uma sub-rotina).

**3.2.44** Um cálculo dos valores de potencial eletrostático dentro de um cilindro leva a

$$\begin{aligned} V(0, 0) &= 52,640 & V(0, 6) &= 25,844 \\ V(0, 2) &= 48,292 & V(0, 8) &= 12,648 \\ V(0, 4) &= 38,270 & V(1, 0) &= 0.0. \end{aligned}$$

O problema é determinar os valores do argumento para o qual  $V = 10, 20, 30, 40$  e  $50$ . Expresse  $V(x)$  como uma série  $\sum_{n=0}^5 a_{2n} x^{2n}$ . (Requisitos de simetria do problema original exigem que  $V(x)$  seja uma função par de  $x$ .) Determine os coeficientes  $a_{2n}$ . Agora que  $V(x)$  é uma função conhecida de  $x$ , ache a raiz de  $V(x) - 10 = 0, 0 \leq x \leq 1$ . Repita para  $V(x) - 20$ , e assim por diante.

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } a_0 &= 52,640, \\ a_2 &= -117,676, \\ V(0, 6851) &= 20. \end{aligned}$$

### 3.3 Matrizes Ortogonais

O espaço tridimensional ordinário pode ser descrito com as coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$ . Consideramos um segundo conjunto de coordenadas cartesianas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , cuja origem e orientação (para a direita ou para a esquerda) coincidem com as do primeiro conjunto, mas cuja orientação é diferente (Figura 3.1). Podemos dizer que os eixos coordenados “com linha” foram rotacionados em relação aos eixos coordenados iniciais, “sem linha”. Uma vez que essa rotação é uma operação **linear**, esperamos uma equação matricial que relacione a base “com linha” com a base “sem linha”.

Esta seção repete partes dos Capítulos 1 e 2 em um contexto ligeiramente diferente e com uma ênfase diferente. Antes, a atenção estava voltada para vetor ou tensor. No caso do tensor, as propriedades de transformação eram fortemente destacadas e muito críticas. Aqui a ênfase recai sobre a descrição da rotação de coordenadas em si — a matriz. Propriedades de transformação, o comportamento da matriz quando a base é trocada, aparecem no final desta seção. As Seções 3.4 e 3.5 continuam com propriedades de transformação em espaços vetoriais complexos.

#### Co-senos Diretores

Um vetor unitário ao longo do eixo  $x'_1$  ( $\hat{x}'_1$ ) pode ser decomposto em componentes ao longo dos eixos  $x_1, x_2$  e  $x_3$  pela técnica usual de projeção:

$$\hat{x}'_1 = \hat{x}_1 \cos(x'_1, x_1) + \hat{x}_2 \cos(x'_1, x_2) + \hat{x}_3 \cos(x'_1, x_3). \tag{3.61}$$

A Equação (3.61) é um exemplo específico das relações lineares discutidas no início da Seção 3.2.

Por conveniência, esses co-senos, que são os co-senos direcionais, são rotulados

$$\begin{aligned} \cos(x'_1, x_1) &= \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_1 = a_{11}, \\ \cos(x'_1, x_2) &= \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_2 = a_{12}, \\ \cos(x'_1, x_3) &= \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_3 = a_{13}. \end{aligned} \tag{3.62a}$$

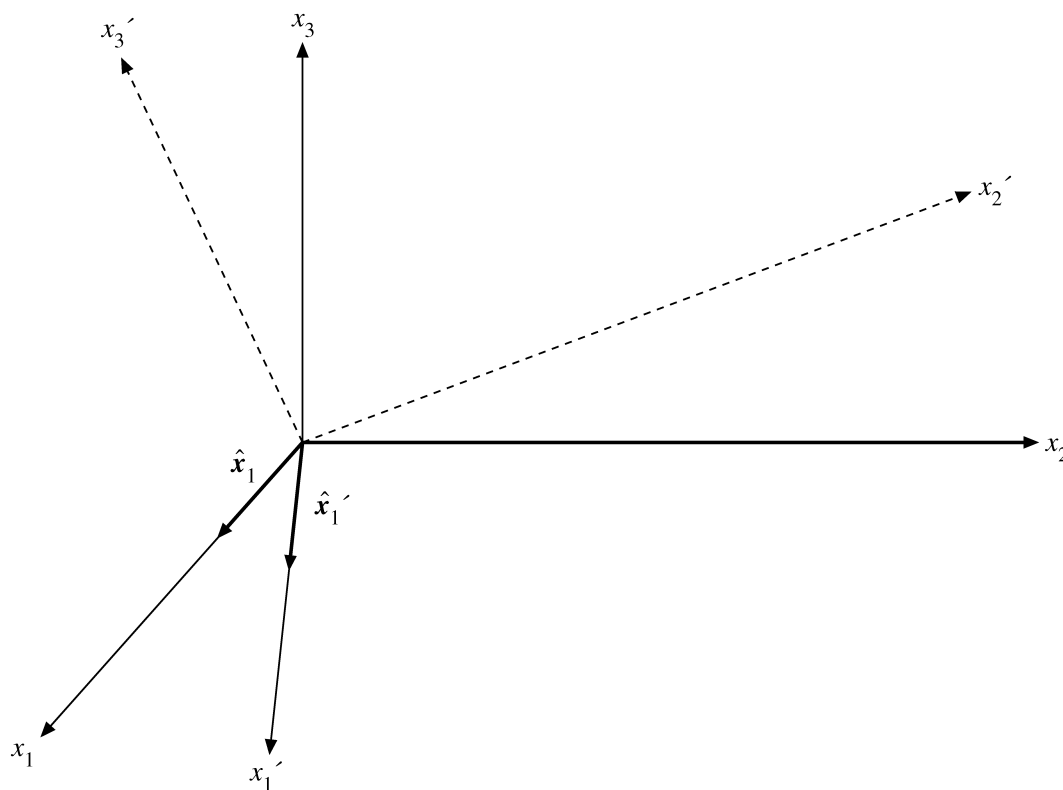


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas cartesianas.

Continuando, temos

$$\begin{aligned} \cos(x'_2, x_1) &= \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_1 = a_{21}, \\ \cos(x'_2, x_2) &= \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_2 = a_{22}, \end{aligned} \quad (3.62b)$$

e assim por diante, em que  $a_{21} \neq a_{12}$  em geral. Agora, a Equação (3.62) pode ser reescrita como

$$\hat{x}'_1 = \hat{x}_1 a_{11} + \hat{x}_2 a_{12} + \hat{x}_3 a_{13}, \quad (3.62c)$$

e também

$$\begin{aligned} \hat{x}'_2 &= \hat{x}_1 a_{21} + \hat{x}_2 a_{22} + \hat{x}_3 a_{23}, \\ \hat{x}'_3 &= \hat{x}_1 a_{31} + \hat{x}_2 a_{32} + \hat{x}_3 a_{33}. \end{aligned} \quad (3.62d)$$

Também podemos seguir por outro caminho resolvendo  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  e  $\hat{x}_3$  em componentes no sistema “com linha”. Então

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}'_1 a_{11} + \hat{x}'_2 a_{21} + \hat{x}'_3 a_{31}, \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}'_1 a_{12} + \hat{x}'_2 a_{22} + \hat{x}'_3 a_{32}, \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}'_1 a_{13} + \hat{x}'_2 a_{23} + \hat{x}'_3 a_{33}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Associando  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}'_1$  com o índice inferior 1,  $\hat{x}_2$  e  $\hat{x}'_2$  com o índice inferior 2,  $\hat{x}_3$  e  $\hat{x}'_3$  com o índice inferior 3, vemos que em cada caso o primeiro índice inferior de  $a_{ij}$  refere-se ao vetor unitário “com linha” ( $\hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3$ ), enquanto o segundo índice inferior se refere ao vetor unitário “sem linha” ( $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ ).

### Aplicações a Vetores

Se considerarmos um vetor cujas componentes são funções da posição no espaço, então

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3) &= \hat{x}_1 V_1 + \hat{x}_2 V_2 + \hat{x}_3 V_3, \\ \mathbf{V}'(x'_1, x'_2, x'_3) &= \hat{x}'_1 V'_1 + \hat{x}'_2 V'_2 + \hat{x}'_3 V'_3, \end{aligned} \quad (3.64)$$

uma vez que o ponto pode ser dado tanto pelas coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  quanto pelas coordenadas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Note que, em termos geométricos,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$  são o mesmo vetor (porém com componentes diferentes). Os eixos coordenados estão sendo rotacionados; o vetor permanece fixo. Usando as Equações (3.62) para eliminar  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  e  $\hat{x}_3$ , podemos decompor a Equação (3.64) em três equações escalares,

$$\begin{aligned} V'_1 &= a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + a_{13}V_3, \\ V'_2 &= a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + a_{23}V_3, \\ V'_3 &= a_{31}V_1 + a_{32}V_2 + a_{33}V_3. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Em particular, essas relações serão válidas para as coordenadas de um ponto  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , dando

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \quad (3.66)$$

e, de modo semelhante, para as coordenadas “com linha”. Com essa notação o conjunto das três Equações (3.66) pode ser escrito como

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j, \quad (3.67)$$

em que  $i$  assume os valores 1, 2 e 3 e o resultado são três equações **separadas**.

Agora vamos deixar de lado esses resultados e tentar uma abordagem diferente para o mesmo problema. Consideramos dois sistemas de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  com uma origem comum em um ponto  $(x_1, x_2, x_3)$  no sistema “sem linha”,  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  no sistema “com linha”. Note a ambigüidade usual. O mesmo símbolo  $x$  denota o eixo coordenado e também uma distância particular ao longo desse eixo. Uma vez que nosso sistema é linear,  $x'_i$  deve ser uma combinação linear do  $x_i$ . Seja

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j. \quad (3.68)$$

Os  $a_{ij}$  podem ser identificados como os co-senos diretores. Mais adiante essa identificação é efetuada para o caso bidimensional.

Se tivermos dois conjuntos de quantidades  $(V_1, V_2, V_3)$  no sistema sem linha e  $(V'_1, V'_2, V'_3)$  no sistema com linha, relacionados da mesma forma que as coordenadas de um ponto em dois sistemas diferentes (Equação (3.68)),

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}V_j, \quad (3.69)$$

então, assim como na Seção 1.2, as quantidades  $(V_1, V_2, V_3)$  são definidas como as componentes de um vetor que permanece fixo enquanto as coordenadas sofrem rotação; isto é, um vetor é definido em termos de propriedades de transformação de suas componentes sob uma rotação dos eixos coordenados. Em certo sentido, as coordenadas de um ponto foram usadas como vetor representativo. A eficiência e a utilidade dessa definição ficaram aparentes no capítulo 2, em que ela foi estendida para definir pseudovetores e tensores.

Pela Equação (3.67) podemos derivar informações interessantes sobre os  $a_{ij}$  que descrevem a orientação do sistema de coordenadas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  em relação ao sistema  $(x_1, x_2, x_3)$ . O comprimento desde a origem até o ponto é o mesmo em ambos os sistemas. Elevando ao quadrado, por conveniência,<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i'^2 = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}x_j \right) \left( \sum_k a_{ik}x_k \right) \\ &= \sum_{j,k} x_j x_k \sum_i a_{ij} a_{ik}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Essa expressão pode valer para todos os pontos se, e somente se,

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.71)$$

<sup>13</sup>Note que são usados **dois** índices independentes:  $j$  e  $k$ .



Note que a Equação (3.71) é equivalente à equação matricial (3.83); veja também as Equações (3.87a) até (3.87d).

A verificação da Equação (3.71), se necessária, pode ser obtida voltando à Equação (3.70) e estabelecendo  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)$ , e assim por diante, para avaliar as nove relações dadas pela Equação (3.71). Este processo é válido, já que a Equação (3.70) deve ser válida para todos os  $\mathbf{r}$  para um dado conjunto de  $a_{ij}$ . A Equação (3.71), uma consequência de se exigir que o comprimento permaneça constante (invariante) sob rotação do sistema de coordenadas, é denominada **condição de ortogonalidade**. Os  $a_{ij}$ , escritos como uma matriz  $A$  sujeita à Equação (3.71), formam uma matriz ortogonal, uma primeira definição de uma matriz ortogonal. Note que a Equação (3.71) **não** é multiplicação de matrizes. Mais exatamente, é interpretada mais adiante como um produto escalar de duas colunas de  $A$ .

Em notação matricial, a Equação (3.67) se torna

$$|x'\rangle = A|x\rangle. \quad (3.72)$$

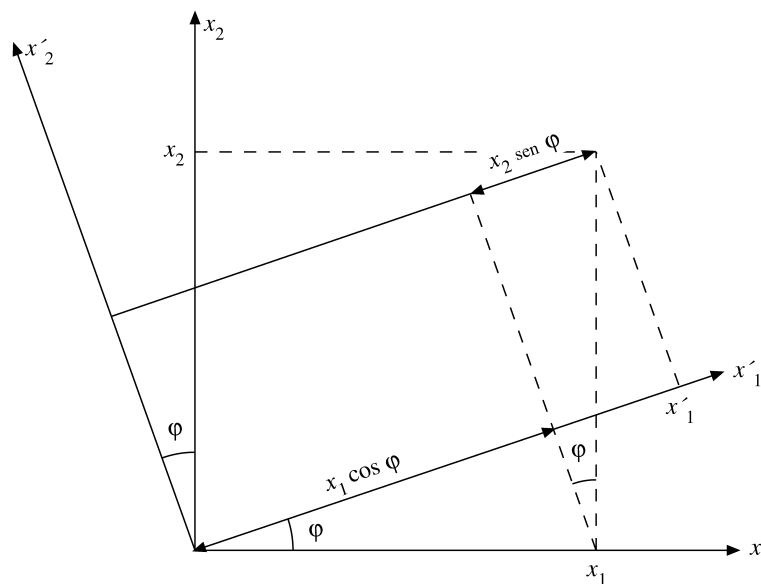


Figura 3.2: Rotação de coordenadas.

### Condições de Ortogonalidade – Caso Bidimensional

Podemos entender melhor os  $a_{ij}$  e a condição de ortogonalidade considerando mais detalhadamente a rotação em duas dimensões (que pode ser imaginada como um sistema tridimensional com os eixos  $x_1, x_2$  rotacionados ao redor de  $x_3$ ). Pela Figura 3.2,

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Portanto, pela Equação (3.72)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Note que  $A$  se reduz à matriz unitária para  $\varphi = 0$ . Um ângulo de rotação zero significa que nada mudou. Fica claro pela Figura 3.2 que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi = \cos(x'_1, x_1), \\ a_{12} &= \sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(x'_1, x_2), \end{aligned} \quad (3.75)$$

e assim por diante, identificando os elementos matriciais  $a_{ij}$  como os co-senos diretores. A Equação (3.71), a condição de ortogonalidade, se torna

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi &= 1, \\ \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

A extensão para três dimensões (rotação das coordenadas através de um ângulo  $\varphi$  em sentido anti-horário ao redor de  $x_3$ ) é simplesmente

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

O  $a_{33} = 1$  expressa o fato de que  $x'_3 = x_3$ , uma vez que a rotação foi executada ao redor do eixo  $x_3$ . Os zeros garantem que  $x'_1$  e  $x'_2$  não dependem de  $x_3$  e que  $x'_3$  não depende de  $x_1$  e  $x_2$ .

### Matriz Inversa $A^{-1}$

Voltando à matriz de transformação geral  $A$ , a matriz inversa  $A^{-1}$  é definida de modo tal que

$$|x\rangle = A^{-1}|x'\rangle. \quad (3.78)$$

Isto é,  $A^{-1}$  descreve o inverso da rotação dada por  $A$  e retorna o sistema coordenado à sua posição original. Simbolicamente, as Equações (3.72) e (3.78) se combinam e resultam em

$$|x\rangle = A^{-1}A|x\rangle, \quad (3.79)$$

e, uma vez que  $|x\rangle$  é arbitrário,

$$A^{-1}A = 1, \quad (3.80)$$

a matriz unitária. De modo semelhante,

$$AA^{-1} = 1, \quad (3.81)$$

usando as Equações (3.72) e (3.78) e eliminando  $|x\rangle$  em vez de  $|x'\rangle$ .

### Matriz Transposta, $\tilde{A}$

Podemos determinar os elementos de nossa matriz inversa postulada  $A^{-1}$  utilizando a condição de ortogonalidade. A Equação (3.71), a condição de ortogonalidade, não está de acordo com nossa definição de multiplicação de matrizes, mas pode ser colocada na forma requerida **definindo-se** uma nova matriz  $\tilde{A}$ , tal que

$$\tilde{a}_{ji} = a_{ij}. \quad (3.82)$$

A Equação (3.71) se torna

$$\tilde{A}A = 1. \quad (3.83)$$

Esta é uma reafirmação da condição de ortogonalidade e pode ser tomada como a restrição que define uma matriz ortogonal, uma segunda definição de uma matriz ortogonal. Multiplicando a Equação (3.83) por  $A^{-1}$  partindo da direita e usando a Equação (3.81), temos

$$\tilde{A} = A^{-1}, \quad (3.84)$$

uma terceira definição de matriz ortogonal. Esse resultado importante, isto é, a inversa é igual à transposta, vale somente para matrizes ortogonais e, na verdade, pode ser tomado como mais uma reafirmação da condição de ortogonalidade.

Multiplicando a Equação (3.84) por  $A$  partindo da esquerda, obtemos

$$A\tilde{A} = 1 \quad (3.85)$$

ou

$$\sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}, \quad (3.86)$$

que é mais outra forma da condição de ortogonalidade.

Resumindo, a condição de ortogonalidade pode ser enunciada de vários modos equivalentes:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (3.87a)$$

$$\sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}, \quad (3.87b)$$

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = 1, \quad (3.87c)$$

$$\tilde{A} = A^{-1}. \quad (3.87d)$$





Qualquer dessas relações é uma condição necessária e suficiente para que  $A$  seja ortogonal.

Agora é possível ver e entender por que o termo *ortogonal* é adequado para essas matrizes. Temos a forma geral

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

uma matriz de co-senos direcionais na qual  $a_{ij}$  é o co-seno do ângulo entre  $x'_i$  e  $x_j$ . Por consequência,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  são as direções dos co-senos de  $x'_1$  relativas a  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Esses três elementos de  $A$  **definem** uma unidade de comprimento ao longo de  $x'_1$ , isto é, um vetor unitário  $\hat{x}'_1$ ,

$$\hat{x}'_1 = \hat{x}_1 a_{11} + \hat{x}_2 a_{12} + \hat{x}_3 a_{13}.$$

A relação de ortogonalidade (Equação (3.86)) é simplesmente uma afirmação de que os vetores unitários  $\hat{x}'_1$ ,  $\hat{x}'_2$  e  $\hat{x}'_3$  são mutuamente perpendiculares ou ortogonais. Nossa matriz de transformação ortogonal  $A$  transforma um sistema de coordenadas ortogonal em um segundo sistema de coordenadas ortogonal por rotação e/ou reflexão.

Como um exemplo do uso de matrizes, os vetores unitários em coordenadas polares esféricas podem ser escritos como

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

em que  $C$  é dado no Exercício 2.5.1. Essa expressão é equivalente às Equações (3.62) com  $\mathbf{x}'_1$ ,  $\mathbf{x}'_2$  e  $\mathbf{x}'_3$  substituídos por  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\varphi}$ . Pela análise precedente,  $C$  é ortogonal. Por conseguinte, a relação inversa se torna

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

e o Exercício 2.5.5 é resolvido por inspeção. Aplicações similares de matrizes inversas aparecem em conexão com a transformação de uma série de potências para uma série de funções ortogonais (ortogonalização de Gram-Schmidt na Seção 10.3) e com a solução numérica de equações integrais.

### Ângulos de Euler

Nossa matriz de transformação  $A$  contém nove co-senos diretores. É claro que somente três deles são independentes, sendo que a Equação (3.71) provê seis restrições. De modo equivalente, podemos dizer que são necessários dois parâmetros ( $\theta$  e  $\varphi$  coordenadas polares esféricas) para fixar o eixo de rotação. Então, um parâmetro adicional descreve a quantidade de rotação ao redor do eixo especificado. (Na formulação lagrangiana da mecânica (Seção 17.3) é necessário descrever  $A$  usando algum conjunto de três parâmetros independentes em vez dos co-senos diretores redundantes). A escolha usual de parâmetros são os ângulos de Euler.<sup>14</sup>

O objetivo é descrever a orientação de um sistema rotacionado final ( $x'''_1, x'''_2, x'''_3$ ) relativa a algum sistema coordenado inicial ( $x_1, x_2, x_3$ ). O sistema final é desenvolvido em três etapas, sendo que cada uma delas envolve uma rotação descrita por um ângulo de Euler (Figura 3.3):

1. As coordenadas são rotacionadas ao redor do eixo  $x_3$  através de um ângulo  $\alpha$  em sentido anti-horário até os novos eixos denotados por  $x'_1, x'_2, x'_3$ . (Os eixos  $x_3$  e  $x'_3$  coincidem.)
2. As coordenadas são rotacionadas ao redor do eixo  $x'_2$ .<sup>15</sup> Através de um ângulo  $\beta$  em sentido anti-horário até os novos eixos denotados por  $x''_1, x''_2, x''_3$ . (Os eixos  $x'_2$  e  $x''_2$  coincidem.)
3. A terceira e última rotação é através de um ângulo  $\gamma$  em sentido anti-horário ao redor do eixo  $x''_1$ , resultando no sistema  $x'''_1, x'''_2, x'''_3$ . (Os eixos  $x''_3$  e  $x'''_3$  coincidem.)

As três matrizes que descrevem essas rotações são

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

<sup>14</sup>Há quase tantas definições de ângulos de Euler quanto autores. Aqui seguimos a opção que costuma ser adotada pelos que trabalham nas áreas da teoria de grupo e da teoria quântica do momento angular (compare com as Seções 4.3 e 4.4).

<sup>15</sup>Alguns autores escolhem esta segunda rotação ao redor do eixo  $x'_1$ .

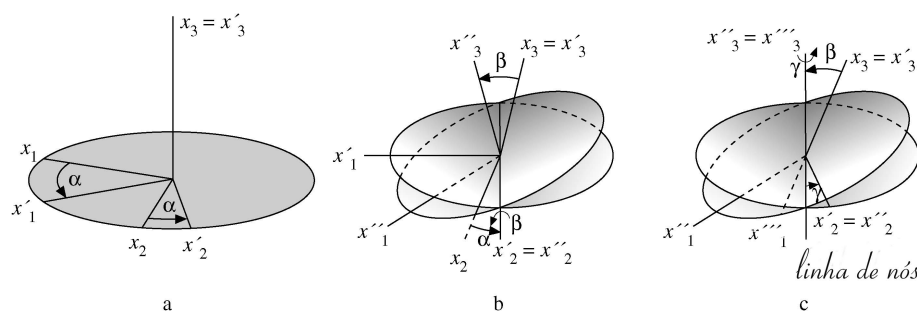


Figura 3.3: (a) Rotação ao redor de  $x_3$  através do ângulo  $\alpha$ ; (b) Rotação ao redor de  $x'_2$  através do ângulo  $\beta$ ; (c) Rotação ao redor de  $x''_3$  através do ângulo  $\gamma$ ,

exatamente como a Equação (3.77),

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

e

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 \\ -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

A rotação total é descrita pelo produto matricial triplo,

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha). \quad (3.93)$$

Note a ordem:  $R_z(\alpha)$  opera em primeiro lugar, em seguida,  $R_y(\beta)$  e, por fim,  $R_z(\gamma)$ . A multiplicação direta resulta

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \text{sen } \gamma \text{sen } \alpha & \cos \gamma \cos \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \text{sen } \beta \\ -\text{sen } \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \text{sen } \alpha & -\text{sen } \gamma \cos \beta \text{sen } \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \text{sen } \gamma \text{sen } \beta \\ \text{sen } \beta \cos \alpha & \text{sen } \beta \text{sen } \alpha & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Igualar  $A(a_{ij})$  a  $A(\alpha, \beta, \gamma)$ , elemento por elemento, resulta nos co-senos direcionais em termos dos três ângulos de Euler. Poderíamos usar essa identificação do ângulo de Euler para verificar as identidades dos co-senos direcionais, Equação (1.46) da Seção 1.4, mas a abordagem do Exercício 3.3.3 é muito mais elegante.

### Propriedades de Simetria

Nossa descrição de matriz leva ao grupo de rotação  $SO(3)$  no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , e a descrição de rotações por ângulos de Euler forma uma base para o desenvolvimento do grupo de rotação no Capítulo 4. Rotações também podem ser descritas pelo grupo unitário  $SU(2)$  em espaço bidimensional  $\mathbb{C}^2$  sobre os números complexos. O conceito de grupos como  $SU(2)$  e suas generalizações e técnicas teóricas de grupo são encontrados com frequência na moderna física de partículas, em que propriedades de simetria desempenham um importante papel. O grupo  $SU(2)$  também é considerado no Capítulo 4. O poder e a flexibilidade das matrizes condenaram os quatérnions à obscuridade no início do século XX.<sup>16</sup>

Devemos observar que as matrizes foram tratadas de duas maneiras na discussão anterior: por seus componentes e como entidades separadas. Cada técnica tem suas próprias vantagens e ambas são úteis.

A matriz transporta é útil para uma discussão de propriedades de simetria. Se

$$A = \tilde{A}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (3.95)$$

a matriz é denominada **simétrica**, enquanto, se

$$A = -\tilde{A}, \quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad (3.96)$$

<sup>16</sup>R. J. Stephenson, “Development of vector analysis from quaternions”. *Am. J. Phys.* 34: 194 (1966).



ela é denominada **anti-simétrica** ou **simétrica deslocada**. Os elementos da diagonal desaparecem. É fácil mostrar que qualquer matriz (quadrada) pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica. Considere a identidade

$$A = \frac{1}{2}[A + \tilde{A}] + \frac{1}{2}[A - \tilde{A}]. \quad (3.97)$$

$[A + \tilde{A}]$  é **claramente simétrica**, ao passo que  $[A - \tilde{A}]$  é **claramente anti-simétrica**. Esta é a matriz análoga à da Equação (2.75), Capítulo 2, para tensores. De maneira semelhante, uma função pode ser subdividida em suas partes: par e ímpar.

Até aqui interpretamos a matriz ortogonal como rotação do sistema de coordenadas. Isso altera as componentes de um vetor fixo (que não sofre rotação com as coordenadas (Figura 1.6, Capítulo 1). Contudo, uma matriz ortogonal  $A$  pode ser interpretada igualmente bem como uma rotação do **vetor** na direção **oposta** (Figura 3.4).

Essas duas possibilidades – (1) rotacionar o vetor mantendo as coordenadas fixas e (2) rotacionar as coordenadas (no sentido contrário) mantendo o vetor fixo – têm uma analogia direta na teoria quântica. A rotação (uma transformação de tempo) do vetor de estado dá o quadro de Schrödinger. A rotação da base mantendo o vetor de estado fixo resulta no quadro de Heisenberg.

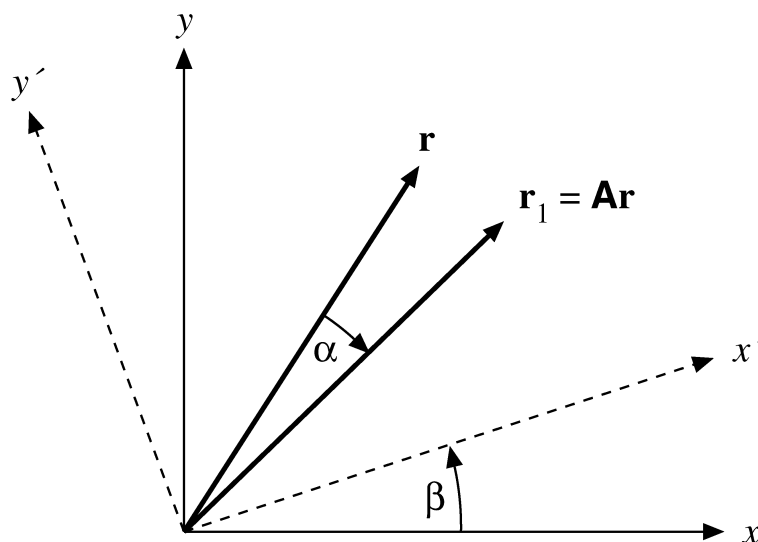


Figura 3.4: Coordenadas fixas — vetor rotacionado.

Suponha que interpretemos a matriz  $A$  como rotacionando um **vetor**  $\mathbf{r}$  até a posição mostrada por  $\mathbf{r}_1$ ; isto é, em um sistema coordenado particular temos uma relação

$$\mathbf{r}_1 = A\mathbf{r}. \quad (3.98)$$

Agora, vamos rotacionar as **coordenadas** aplicando a matriz  $B$ , que rotaciona  $(x, y, z)$  para  $(x', y', z')$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= B\mathbf{r}_1 = BA\mathbf{r} = (A\mathbf{r})' = BA(B^{-1}\mathbf{r}) \\ &= (BAB^{-1})B\mathbf{r} = (BAB^{-1})\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (3.99)$$

$B\mathbf{r}_1$  é exatamente  $\mathbf{r}'_1$  no novo sistema de coordenadas, sendo que uma interpretação similar é válida para  $B\mathbf{r}$ . Daí, **neste novo sistema**  $(B\mathbf{r})$ , é rotacionada até a posição  $(B\mathbf{r}_1)$  pela matriz  $BAB^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccc} B\mathbf{r}_1 & = & (BAB^{-1}) B\mathbf{r} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{r}'_1 & = & A' \mathbf{r}' \end{array}$$

No novo sistema as coordenadas foram rotacionadas pela matriz  $B$ ;  $A$  tem a forma  $A'$ , na qual

$$A' = BAB^{-1}. \quad (3.100)$$

$A'$  opera em espaço  $x', y', z'$ , assim como  $A$  opera em espaço  $x, y, z$ .

A transformação definida pela Equação (3.100), sendo  $B$  qualquer matriz, não necessariamente ortogonal, é conhecida como **transformação de similaridade**. Na forma de componentes, a Equação (3.100) torna-se

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} (B^{-1})_{lj}. \quad (3.101)$$

Agora, se  $B$  é ortogonal,

$$(B^{-1})_{lj} = (\tilde{B})_{lj} = b_{jl}, \quad (3.102)$$

e temos

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} b_{jl} a_{kl}. \quad (3.103)$$

Talvez seja útil pensar em  $A$  novamente como um operador, possivelmente como eixos coordenados em rotação, relacionando momento angular e velocidade angular de um sólido em rotação (Seção 3.5). A matriz  $A$  é a representação de um dado sistema coordenado ou base. Mas há direções associadas com  $A$  — eixos dos cristais, eixos de simetria no sólido em rotação, e assim por diante —, de modo que a representação  $A$  depende da base. A transformação de similaridade mostra exatamente como a representação que se altera muda com uma mudança da base.

### Relação com Tensores

Comparando a Equação (3.103) com as equações da Seção 2.6, vemos que ela é a definição de um tensor de segunda ordem. Daí, uma matriz que se transforma por uma transformação de similaridade **ortogonal** é, por definição, um tensor. Então, é claro que qualquer matriz **ortogonal**  $A$ , se interpretada como rotacionando um vetor (Equação (3.98)), pode ser denominada tensor. Contudo, se considerarmos a matriz ortogonal como uma coleção de co-senos direcionais fixos, dando a nova orientação de um sistema coordenado, não há nenhuma propriedade de tensor envolvida.

As propriedades de simetria e anti-simetria definidas antes são preservadas sob transformações de similaridade **ortogonais**. Seja  $A$  uma matriz simétrica,  $A = \tilde{A}$  e

$$A' = BAB^{-1}. \quad (3.104)$$

Agora,

$$\tilde{A}' = \tilde{B}^{-1} \tilde{A} \tilde{B} = \tilde{B} \tilde{A} \tilde{B}^{-1}, \quad (3.105)$$

visto que  $B$  é ortogonal. Mas  $A = \tilde{A}$ . Por conseguinte,

$$\tilde{A}' = BAB^{-1} = A', \quad (3.106)$$

mostrando que a propriedade de simetria é invariante sob uma transformação de similaridade ortogonal. Em geral, a simetria **não** é preservada sob uma transformação de similaridade não-ortogonal.

### Exercícios

*Nota:* Admita que todos os elementos matriciais sejam reais.

**3.3.1** Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal.

*Nota:* Esta é uma etapa fundamental para demonstrar que todas as matrizes ortogonais  $n \times n$  formam um grupo (Seção 4.1).

**3.3.2** Se  $A$  é ortogonal, mostre que seu determinante  $= \pm 1$ .

**3.3.3** Se  $A$  é ortogonal e  $\det A = +1$ , mostre que  $(\det A)a_{ij} = C_{ij}$ , em que  $C_{ij}$  é o **co-fator** de  $a_{ij}$ . Isso dá como resultado as identidades da Equação (1.46), usadas na Seção 1.4 para mostrar que um produto cruzado de vetores (em espaço tridimensional) é, ele mesmo, um vetor.

*Sugestão:* Note o Exercício 3.2.32.

**3.3.4** Um outro conjunto de rotações de Euler de uso comum é

- (1) uma rotação ao redor do eixo  $x_3$  por meio de um ângulo  $\varphi$ , em sentido anti-horário,
- (2) uma rotação ao redor do eixo  $x'_1$  por meio de um ângulo  $\theta$ , em sentido anti-horário,
- (3) uma rotação ao redor do eixo  $x''_3$  por meio de um ângulo  $\psi$ , em sentido anti-horário.

Se



$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi - \pi/2 & \varphi &= \alpha + \pi/2 \\ \beta &= \theta & \theta &= \beta \\ \gamma &= \psi + \pi/2 & \psi &= \gamma - \pi/2, \end{aligned}$$

mostre que os sistemas finais são idênticos.

- 3.3.5** Suponha que a Terra se mova (seja rotacionada) de modo que o pólo norte passe para a posição 30° norte, 20° oeste (sistema original de latitude e longitude) e que o meridiano 10° aponte para a direção sul.
- (a) Quais são os ângulos de Euler que descrevem essa rotação?  
 (b) Ache os co-senos direcionais correspondentes.

Resposta: (b)  $A = \begin{pmatrix} 0,9551 & -0,2552 & -0,1504 \\ 0,0052 & 0,5221 & -0,8529 \\ 0,2962 & 0,8138 & 0,5000 \end{pmatrix}$ .

- 3.3.6** Verifique que a matriz de rotação do ângulo de Euler, Equação (3.94), é invariante sob a transformação

$$\alpha \rightarrow \alpha + \pi, \quad \beta \rightarrow -\beta, \quad \gamma \rightarrow \gamma - \pi.$$

- 3.3.7** Mostre que a matriz de rotação do ângulo de Euler  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  satisfaz as seguintes relações:

- (a)  $A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \tilde{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  
 (b)  $A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = A(-\gamma, -\beta, -\alpha)$ .

- 3.3.8** Mostre que o traço do produto de uma matriz simétrica por uma matriz anti-simétrica é zero.  
**3.3.9** Mostre que o traço de uma matriz permanece invariante sob transformações de similaridade.  
**3.3.10** Mostre que o determinante de uma matriz permanece invariante sob transformações de similaridade. *Nota:* Os Exercícios 3.3.9 e 3.3.10 mostram que o traço e o determinante são independentes das coordenadas cartesianas. Eles são característicos da matriz (operador) em si.  
**3.3.11** Mostre que a propriedade de anti-simetria é invariante sob transformações de similaridade ortogonais.  
**3.3.12**  $A$  é  $2 \times 2$  e ortogonal. Ache a forma mais geral de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Compare com a rotação bidimensional.

- 3.3.13**  $|\mathbf{x}\rangle$  e  $|\mathbf{y}\rangle$  são vetores colunas. Sob uma transformação ortogonal  $S$ ,  $|\mathbf{x}'\rangle = S|\mathbf{x}\rangle$ ,  $|\mathbf{y}'\rangle = S|\mathbf{y}\rangle$ . Mostre que o produto escalar  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  é invariante sob essa transformação ortogonal. *Nota:* Isso é equivalente à invariância do produto escalar de dois vetores, Seção 1.3.  
**3.3.14** Mostre que a soma dos quadrados dos elementos de uma matriz permanece invariante sob transformações de similaridade ortogonais.  
**3.3.15** Como uma generalização do Exercício 3.3.14, mostre que

$$\sum_{jk} S_{jk} T_{jk} = \sum_{l,m} S'_{lm} T'_{lm},$$

em que os elementos “com linha” e “sem linha” são relacionados por uma transformação de similaridade ortogonal. Esse resultado é útil para derivar invariantes em teoria eletromagnética (compare com a Seção 4.6).

*Nota:* Esse produto  $M_{jk} = \sum S_{jk} T_{jk}$  às vezes é denominado produto de Hadamard. Na estrutura da análise tensorial, Capítulo 2, este exercício torna-se uma contração dupla de dois tensores de segunda ordem e, portanto, é claramente um escalar (invariante).

- 3.3.16** Uma rotação  $\varphi_1 + \varphi_2$  ao redor do eixo  $z$  é executada como duas rotações sucessivas, cada uma ao redor do eixo  $z$ . Use a representação matricial das rotações para derivar as identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1 \text{sen } \varphi_2, \\ \text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) &= \text{sen } \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \text{sen } \varphi_2. \end{aligned}$$

**3.3.17** Um vetor coluna  $\mathbf{V}$  tem componentes  $V_1$  e  $V_2$  em um sistema inicial (“sem linha”). Calcule  $V'_1$  e  $V'_2$  para:

- (a) uma rotação das coordenadas através de um ângulo  $\theta$  em **sentido anti-horário**,
- (b) uma rotação do vetor através de um ângulo  $\theta$  em **sentido horário**.

Os resultados das partes (a) e (b) devem ser idênticos.

**3.3.18** Escreva uma sub-rotina que testará se uma matriz real  $N \times N$  é simétrica. Simetria pode ser definida como

$$0 \leq |a_{ij} - a_{ji}| \leq \varepsilon,$$

em que  $\varepsilon$  é alguma pequena tolerância (que leva em conta o erro de truncamento, e assim por diante, no computador).

### 3.4 Matrizes hermitianas, Matrizes Unitárias

#### Definições

Até aqui admitimos, em geral, que nosso espaço vetorial linear é um espaço real e que os elementos da matriz (as representações dos operadores lineares) são reais. Para muitos cálculos da física clássica, elementos matriciais reais serão suficientes. Todavia, em mecânica quântica, variáveis complexas são inevitáveis por causa da forma das relações básicas de comutação (ou da forma da equação dependente do tempo de Schrödinger). Com isso em mente, generalizamos para o caso de elementos matriciais complexos. Para tratar esses elementos, vamos definir, ou rotular, algumas novas propriedades.

1. Conjugado complexo,  $A^*$ , formado tomando o conjugado complexo ( $i \rightarrow -i$ ) de cada elemento, em que  $i = \sqrt{-1}$ .
2. Adjunta,  $A^\dagger$ , formada pela transposição de  $A^*$ ,

$$\boxed{A^\dagger = \widetilde{A^*} = \widetilde{\widetilde{A}}.} \tag{3.107}$$

3. Matriz hermitiana: a matriz  $A$  é denominada **hermitiana** ou **auto-adjunta** se

$$A = A^\dagger. \tag{3.108}$$

Se  $A$  é real, então  $A^\dagger = \widetilde{A}$  e matrizes hermitianas são matrizes simétricas reais. Na mecânica quântica (ou mecânica matricial), em geral as matrizes são construídas para ser hermitianas ou unitárias.

4. Matriz unitária: matriz  $U$  é denominada **unitária** se

$$\boxed{U^\dagger = U^{-1}.} \tag{3.109}$$

Se  $U$  é real, então  $U^{-1} = \widetilde{U}$ ; portanto, matrizes unitárias reais são matrizes ortogonais. Isso representa uma generalização do conceito de matriz ortogonal (compare com a Equação (3.84)).

5.  $(AB)^* = A^*B^*$ ,  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ .

Se os elementos da matriz são complexos, o físico quase sempre se preocupará com matrizes hermitianas e matrizes unitárias. Matrizes unitárias têm especial importância na mecânica quântica porque deixam o comprimento de um vetor (complexo) inalterado — análoga à operação de uma matriz ortogonal sobre um vetor real. É por essa razão que a matriz  $S$  da teoria da dispersão é uma matriz unitária. Uma importante exceção em matrizes unitárias é o grupo de matrizes de Lorentz, Capítulo 4. Usando o espaço de Minkowski, vemos que essas matrizes não são unitárias.

Em um espaço linear  $n$  dimensional complexo, o quadrado do comprimento de um ponto  $\tilde{x} = x^T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ou o quadrado de sua distância desde a origem  $0$  é definido como  $x^\dagger x = \sum x_i^* x_i = \sum |x_i|^2$ . Se uma transformação de coordenada  $y = Ux$  não alterar a distância, então  $x^\dagger x = y^\dagger y = (Ux)^\dagger Ux = x^\dagger U^\dagger Ux$ . Uma vez que  $x$  é arbitrário, resulta que  $U^\dagger U = 1_n$ ; isto é,  $U$  é uma matriz unitária  $n \times n$ . Se  $x' = Ax$  é um mapa linear, então sua matriz nas novas coordenadas torna-se a transformação unitária (análoga à transformação de similaridade).

$$A' = UAU^\dagger, \tag{3.110}$$

porque  $Ux' = y' = UAx = UAU^{-1}y = UAU^\dagger y$ .



### Matrizes de Pauli e Dirac

O conjunto de três matrizes  $2 \times 2$ ,  $\sigma$ , de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.111)$$

foi introduzido por W. Pauli para descrever uma partícula de spin  $1/2$  em mecânica quântica não-relativista. Pode-se mostrar de imediato que (compare com Exercícios 3.2.13 e 3.2.14) a  $\sigma$  de Pauli satisfaz

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} 1_2, \quad \text{anticomutação} \quad (3.112)$$

$$\sigma_i \sigma_j = i\sigma_k, \quad i, j, k \text{ uma permutação cíclica de } 1, 2, 3 \quad (3.113)$$

$$(\sigma_i)^2 = 1_2, \quad (3.114)$$

em que  $1_2$  é a matriz  $2 \times 2$  unitária. Assim, o vetor  $\sigma/2$  satisfaz às mesmas relações de comutação,

$$[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (3.115)$$

que o momento angular orbital  $\mathbf{L}$  ( $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ , veja o Exercício 2.5.15 e os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$  no Capítulo 4).

As três matrizes  $\sigma$  de Pauli e a matriz unidade formam um conjunto completo, portanto, qualquer matriz hermitiana  $2 \times 2$ ,  $M$ , pode ser expandida como

$$M = m_0 1_2 + m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + m_3 \sigma_3 = m_0 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.116)$$

em que os  $m_i$  formam um vetor constante  $\mathbf{m}$ . Usando  $(\sigma_i)^2 = 1_2$  e  $\text{traço}(\sigma_i) = 0$  obtemos, pela Equação (3.116), os coeficientes de expansão  $m_i$  formando traços

$$2m_0 = \text{traço}(M), \quad 2m_i = \text{traço}(M\sigma_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.117)$$

Somando e multiplicando essas matrizes  $2 \times 2$ , geramos a álgebra de Pauli.<sup>17</sup> Note que  $\text{traço}(\sigma_i) = 0$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Em 1927, P. A. M. Dirac estendeu esse formalismo a partículas de movimento rápido de spin  $\frac{1}{2}$ , tais como elétrons (e neutrinos). Para incluir a relatividade especial, ele partiu da energia de Einstein, em vez da cinética não-relativista e energia potencial,  $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ . A chave da equação de Dirac é fatorar

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = E^2 - (c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = (E - c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(E + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = m^2 c^4, \quad (3.118)$$

usando a identidade da matriz  $2 \times 2$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 1_2. \quad (3.119)$$

A matriz unidade  $2 \times 2$   $1_2$  não está escrita explicitamente na Equação (3.118), e a Equação (3.119) resulta do Exercício 3.2.14 para  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{p}$ . De maneira equivalente, podemos introduzir duas matrizes  $\gamma'$  e  $\gamma$  para fatorar  $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2$  diretamente:

$$\begin{aligned} & [E\gamma' \otimes 1_2 - c(\gamma \otimes \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{p}]^2 \\ &= E^2 \gamma'^2 \otimes 1_2 + c^2 \gamma^2 \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 - Ec(\gamma' \gamma + \gamma \gamma') \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4. \end{aligned} \quad (3.119')$$

Para que a Equação (3.119') seja válida, as condições

$$\gamma'^2 = 1 = -\gamma^2, \quad \gamma' \gamma + \gamma \gamma' = 0 \quad (3.120)$$

devem ser satisfeitas. Assim, as matrizes  $\gamma'$  e  $\gamma$  anticomutam, exatamente como as três matrizes de Pauli; portanto, elas não podem ser números reais ou complexos. Como as condições (3.120) podem ser cumpridas por matrizes  $2 \times 2$ , escrevemos sinais de produto direto (veja o Exemplo 3.2.1) na Equação (3.119') porque são multiplicadas por  $1_2$ , matrizes  $\boldsymbol{\sigma}$  respectivamente, sendo

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

<sup>17</sup>Para conhecer seu significado geométrico, consulte W. E. Baylis, J. Huschilt e Jiansu Wei, *Am. J. Phys.* 60: 788 (1992).

As matrizes  $4 \times 4$  de produto direto na Equação (3.119') são as quatro matrizes  $\gamma$  de Dirac convencionais.

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \gamma' \otimes 1_2 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \gamma^1 &= \gamma \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= \gamma \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.122}$$

e, de modo semelhante, para  $\gamma^2 = \gamma \otimes \sigma_2$ . Em notação vetorial,  $\sigma = \gamma \otimes \sigma$  é um vetor com três componentes, cada um uma matriz  $4 \times 4$ , uma generalização do vetor de matrizes de Pauli para um vetor de matrizes  $4 \times 4$ . As quatro matrizes  $\gamma^i$  são as componentes do quadrivetor  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ . Se reconhecermos na Equação (1.119')

$$E\gamma' \otimes 1_2 - c(\gamma \otimes \sigma) \cdot \mathbf{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma \cdot \mathbf{p} = (\gamma_0, \gamma) \cdot (E, c\mathbf{p})\tag{3.123}$$

como um produto escalar de dois quadrivetores  $\gamma^\mu$  e  $p^\mu$  (veja o grupo de Lorentz no Capítulo 4), então a Equação (3.119') com  $p^2 = p \cdot p = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2$  pode ser considerada uma generalização quadrivetorial da Equação (3.119).

*Resumindo, o tratamento relativista de uma partícula de spin 1/2 leva a matrizes  $4 \times 4$ , enquanto o spin 1/2 de uma partícula não-relativista é descrito pelas matrizes de Pauli,  $\sigma$ ,  $2 \times 2$ .*

Por analogia com a álgebra de Pauli, podemos formar produtos a partir das matrizes  $\gamma^\mu$  básicas e de suas combinações lineares e a partir da matriz unidade  $1 = 1_4$ , desse modo generalizando uma álgebra de 16 dimensões (denominada álgebra de Clifford<sup>18</sup>). Uma base (com propriedades convenientes de transformação de Lorentz, veja o Capítulo 4) é dada (em notação matricial  $2 \times 2$  da Equação (3.122) por

$$1_4, \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} = i(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)/2.\tag{3.124}$$

As matrizes  $\gamma$  anticomutam, isto é, suas combinações simétricas

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}1_4,\tag{3.125}$$

em que  $g^{00} = 1 = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33}$ , e  $g^{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ , são zero ou proporcionais à matriz unidade  $4 \times 4$   $1_4$ , enquanto as seis combinações anti-simétricas na Equação (3.124) dão novos elementos de base que se transformam como um tensor sob transformações de Lorentz (veja o Capítulo 4). Qualquer matriz  $4 \times 4$  pode ser expandida em termos desses 16 elementos, e os coeficientes de expansão são dados pela formação de traços similares ao caso  $2 \times 2$  na Equação (3.117) usando  $\text{traço}(1_4) = 4$ ,  $\text{traço}(\gamma_5) = 0$ ,  $\text{traço}(\gamma^\mu) = 0 = \text{traço}(\gamma_5\gamma^\mu)$ ,  $\text{traço}(\sigma^{\mu\nu}) = 0$   $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  (veja o Exercício 3.4.23). No Capítulo 4 mostramos que  $\gamma_5$  é ímpar sob paridade; portanto, se transforma como um vetor axial que tem paridade par.

A álgebra do spin gerada pelas matrizes de Pauli é apenas uma representação matricial da álgebra quadridimensional de Clifford, enquanto Hestenes e colaboradores (loc. cit.) desenvolveram em seu **cálculo geométrico** uma álgebra livre de representação (isto é, “livre de coordenadas”) que contém números complexos, vetores, a subálgebra do quatérnion e produtos externos generalizados como áreas direcionadas (denominadas *bivetores*). Essa estrutura algébrico-geométrica é talhada para a mecânica quântica não-relativista, enquanto espinores adquirem aspectos geométricos e os teoremas de Gauss e Stokes aparecem como componentes de um teorema unificado. A álgebra geométrica desses autores correspondente à álgebra de dezesseis dimensões de Clifford das matrizes  $\gamma$  de Dirac é a adequada estrutura livre de coordenadas para mecânica quântica e eletrodinâmica.

A discussão de matrizes ortogonais na Seção 3.3 e matrizes unitárias nesta seção é apenas um início. Extensões ulteriores são de importância vital na física de partículas “elementares”. Com as matrizes de Pauli e Dirac podemos

<sup>18</sup>D. Hestenes e G. Sobczyk, loc. cit.; D. Hestenes, *Am. J. Phys.* 39. 1.013 (1971); e *J. Math. Phys.* 16: 556 (1975).





desenvolver funções de onda de **espinor** para elétrons, prótons e outras partículas relativistas de spin  $\frac{1}{2}$ . As rotações de sistemas coordenados levam a  $\mathbf{D}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ , o grupo de rotação usualmente representado por matrizes nas quais os elementos são funções dos ângulos de Euler que descrevem a rotação. O grupo unitário especial SU(3) (composto de matrizes unitárias  $3 \times 3$  com determinante +1) tem sido usado com considerável sucesso para descrever mésons e bárions envolvidos nas interações fortes, uma teoria de calibre que agora é denominada *cromodinâmica quântica*. Essas extensões são consideradas com mais detalhe no Capítulo 4.

### Exercícios

3.4.1 Mostre que

$$\det(A^*) = (\det A)^* = \det(A^\dagger).$$

3.4.2 Três matrizes de momento angular satisfazem a relação básica de comutação

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

(e permutação cíclica de índices). Se duas das matrizes têm elementos reais, mostre que os elementos da terceira devem ser imaginários puros.

3.4.3 Mostre que  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ .

3.4.4 Uma matriz  $C = S^\dagger S$ . Mostre que o traço é definido positivo a menos que S seja a matriz nula, caso em que traço (C) = 0.

3.4.5 Se A e B são matrizes hermitianas, mostre que  $(AB + BA)$  e  $i(AB - BA)$  também são hermitianas.

3.4.6 A matriz C é **não**-hermitiana. Mostre que, então,  $C + C^\dagger$  e  $i(C - C^\dagger)$  são hermitianas. Isso significa que uma matriz não-hermitiana pode ser decomposta em duas partes hermitianas,

$$C = \frac{1}{2}(C + C^\dagger) + \frac{1}{2i}i(C - C^\dagger).$$

Essa decomposição de uma matriz em duas partes de matrizes hermitianas é análoga à decomposição de um número complexo  $z$  em  $x + iy$ , em que  $x = (z + z^*)/2$  e  $y = (z - z^*)/2i$ .

3.4.7 A e B são duas matrizes hermitianas não-comutativas

$$AB - BA = iC.$$

Prove que C é hermitiana.

3.4.8 Mostre que uma matriz hermitiana permanece hermitiana sob transformações de similaridade unitária.

3.4.9 Duas matrizes A e B são hermitianas. Ache uma condição necessária e suficiente para que seu produto AB seja hermitiano.

Resposta:  $[A, B] = 0$ .

3.4.10 Mostre que a recíproca (isto é, a inversa) de uma matriz unitária é unitária.

3.4.11 Uma transformação de similaridade particular resulta em

$$A' = UAU^{-1}, \\ A'^\dagger = UA^\dagger U^{-1}.$$

Se a relação adjunta for preservada ( $A'^\dagger = A'^\dagger$ ) e  $\det U = 1$ , mostre que U deve ser unitária.

3.4.12 Duas matrizes U e H são relacionadas por

$$U = e^{iaH},$$

sendo  $a$  real. (A função exponencial é definida por uma expansão de Maclaurin. Isso será feito na Seção 5.6.)

(a) Se H é hermitiana, mostre que U é unitária.

(b) Se U é unitária, mostre que H é hermitiana. (H é independente de  $a$ .)

*Nota:* Sendo  $H$  a hamiltoniana,

$$\psi(x, t) = U(x, t)\psi(x, 0) = \exp(-itH/\hbar)\psi(x, 0)$$

é uma solução da equação dependente do tempo de Schrödinger.  $U(x, t) = \exp(-itH/\hbar)$  é o “operador de evolução”.

- 3.4.13** Um operador  $T(t + \varepsilon, t)$  descreve a mudança na função de onda de  $t$  a  $t + \varepsilon$ . Para  $\varepsilon$  real e suficientemente pequeno, de modo que  $\varepsilon^2$  possa ser desprezado,

$$T(t + \varepsilon, t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t).$$

- (a) Se  $T$  é unitário, mostre que  $H$  é hermitiana.  
 (b) Se  $H$  é hermitiana, mostre que  $T$  é unitário.

*Nota:* Quando  $H(t)$  é independente de tempo, essa relação pode ser colocada em forma exponencial — Exercício 3.4.12.

- 3.4.14** Mostre que uma forma alternativa,

$$T(t + \varepsilon, t) = \frac{1 - i\varepsilon H(t)/2\hbar}{1 + i\varepsilon H(t)/2\hbar}$$

está de acordo com o  $T$  da parte (a) do Exercício 3.4.13, desprezando  $\varepsilon^2$ , e é exatamente unitário (para  $H$  hermitiana).

- 3.4.15** Prove que o produto direto de duas matrizes unitárias é unitário.

- 3.4.16** Mostre que  $\gamma_5$  anticomuta com todas as quatro  $\gamma^\mu$ .

- 3.4.17** Use o símbolo quadridimensional de Levi-Civita  $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$  com  $\varepsilon_{0123} = -1$  (generalizando as Equações (2.93) na Seção 2.9 para quatro dimensões) e mostre que (i)  $2\gamma_5\sigma_{\mu\nu} = -i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$  usando a convenção de soma da Seção 2.6 e (ii)  $\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu = g_{\lambda\mu}\gamma_\nu - g_{\lambda\nu}\gamma_\mu + g_{\mu\nu}\gamma_\lambda + i\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\rho\gamma_5$ . Defina  $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$  usando  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  para elevar e baixar índices.

- 3.4.18** Avalie os seguintes traços (veja a Equação (3.123) para a notação):

- (i)  $\text{traço}(\gamma \cdot a\gamma \cdot b) = 4a \cdot b$ ,  
 (ii)  $\text{traço}(\gamma \cdot a\gamma \cdot b\gamma \cdot c) = 0$ ,  
 (iii)  $\text{traço}(\gamma \cdot a\gamma \cdot b\gamma \cdot c\gamma \cdot d) = 4(a \cdot bc \cdot d - a \cdot cb \cdot d + a \cdot db \cdot c)$ ,  
 (iv)  $\text{traço}(\gamma_5\gamma \cdot a\gamma \cdot b\gamma \cdot c\gamma \cdot d) = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}a^\alpha b^\beta c^\mu d^\nu$ .

- 3.4.19** Mostre que (i)  $\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -2\gamma^\alpha$ , (ii)  $\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta}$ , e (iii)  $\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\alpha$ .

- 3.4.20** Se  $M = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ , mostre que

$$M^2 = M.$$

Note que  $\gamma_5$  pode ser substituída por qualquer outra matriz de Dirac (qualquer  $\Gamma_i$  da Equação (3.124)). Se  $M$  é hermitiana, então este resultado,  $M^2 = M$ , é a equação de definição para um operador de projeção da mecânica quântica.

- 3.4.21** Mostre que

$$\alpha \times \alpha = 2i\sigma \otimes \mathbf{1}_2,$$

onde  $\alpha = \gamma_0\gamma$  é um vetor

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Note que, se  $\alpha$  é um vetor polar (Seção 2.4), então  $\sigma$  é um vetor axial.

- 3.4.22** Prove que as 16 matrizes de Dirac formam um conjunto linearmente independente.

- 3.4.23** Se admitirmos que uma dada matriz  $A$   $4 \times 4$  (com elementos constantes) pode ser escrita como uma combinação linear das 16 matrizes de 16 Dirac

$$A = \sum_{i=1}^{16} c_i \Gamma_i,$$

mostre que

$$c_i \sim \text{traço}(A\Gamma_i).$$



**3.4.24** Se  $C = i\gamma^2\gamma^0$  é a matriz de conjugação de carga, mostre que  $C\gamma^\mu C^{-1} = -\tilde{\gamma}^\mu$ , em que  $\tilde{\cdot}$  indica transposição.

**3.4.25** Seja  $x'_\mu = \Lambda'_\mu{}^\nu x_\nu$  a rotação por um ângulo  $\theta$  ao redor do eixo 3,

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0, & x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, & x'_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Use  $R = \exp(i\theta\sigma^{12}/2) = \cos \theta/2 + i\sigma^{12}\sin \theta/2$  (veja a Equação (3.170b)) e mostre que as  $\gamma$  se transformam exatamente como as coordenadas  $x^\mu$ , isto é,  $\Lambda'_\mu{}^\nu\gamma_\nu = R^{-1}\gamma_\mu R$ . (Note que  $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$  e que as  $\gamma^\mu$  são bem definidas somente até uma transformação de similaridade.) De modo semelhante, se  $x' = \Lambda x$  é um boost (transformação de Lorentz pura) ao longo do eixo 1, isto é,

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 \cosh \zeta - x_1 \sinh \zeta, & x'_1 &= -x_0 \sinh \zeta + x_1 \cosh \zeta, \\ x'_2 &= x_2, & x'_3 &= x_3, \end{aligned}$$

com  $tgh\zeta = v/c$  e  $B = \exp(-i\zeta\sigma^{01}/2) = \cosh \zeta/2 - i\sigma^{01}\sinh \zeta/2$  (veja a Equação (3.170b)), mostre que  $\Lambda'_\mu{}^\nu\gamma_\nu = B\gamma_\mu B^{-1}$ .

**3.4.26** (a) Dado  $\mathbf{r}' = U\mathbf{r}$ , sendo  $U$  uma matriz unitária e  $\mathbf{r}$  um vetor (coluna) com elementos complexos, mostre que a norma módulo de  $\mathbf{r}$  é invariante sob esta operação.

(b) A matriz  $U$  transforma qualquer vetor coluna  $\mathbf{r}$  com elementos complexos em  $\mathbf{r}'$ , deixando a grandeza invariante:  $\mathbf{r}^\dagger \mathbf{r} = \mathbf{r}'^\dagger \mathbf{r}'$ . Mostre que  $U$  é unitária.

**3.4.27** Escreva uma sub-rotina para testar se uma matriz complexa  $n \times n$  é auto-adjunta. Ao exigir igualdade de elementos matriciais  $a_{ij} = a_{ji}^\dagger$ , permita uma pequena tolerância  $\varepsilon$  para compensar o erro de truncamento do computador.

**3.4.28** Escreva uma sub-rotina que formará a adjunta de uma matriz  $M \times N$  complexa.

**3.4.29** (a) Escreva uma sub-rotina que tomará uma matriz  $M \times N$  complexa  $A$  e dará como resultado o produto  $A^\dagger A$ .

*Sugestão:* Esta sub-rotina pode chamar as sub-rotinas dos Exercícios 3.2.41 e 3.4.28.

(b) Teste sua sub-rotina tomando  $A$  como uma ou mais das matrizes de Dirac, Equação (3.124).

## 3.5 Diagonização de Matrizes

### Matriz de Momento de Inércia

Em muitos problemas de física que envolvem matrizes simétricas reais ou hermitianas complexas, é desejável executar uma transformação de similaridade ortogonal real ou uma transformação unitária (correspondente a uma rotação do sistema de coordenadas) para reduzir a matriz a uma forma diagonal, com todos os elementos não-diagonais iguais a zero. Um exemplo particularmente direto disso é a matriz de momento de inércia  $I$  de um corpo rígido. Pela definição de momento angular  $\mathbf{L}$ , temos

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \tag{3.126}$$

sendo  $\boldsymbol{\omega}$  a velocidade angular.<sup>19</sup> Consta-se que a matriz de inércia  $I$  tem componentes diagonais

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2), \text{ e assim por diante,} \tag{3.127}$$

sendo que o índice inferior  $i$  refere-se à massa  $m_i$  localizada em  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ . Para os componentes não-diagonais, temos

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i = I_{yx}. \tag{3.128}$$

Por inspeção, a matriz  $I$  é simétrica. Além disso, uma vez que  $I$  aparece em uma equação física da forma (3.126), que é válida para todas as orientações do sistema de coordenadas, ela pode ser considerada um tensor (regra do quociente, Seção 2.3).

A chave agora é orientar os eixos coordenados (ao longo de uma estrutura de corpo fixo), de modo que os  $I_{xy}$  e os outros elementos não-diagonais desapareçam. Como consequência e indicação dessa orientação, se a

<sup>19</sup>A matriz de momento de inércia também pode ser desenvolvida a partir da energia cinética de um corpo em rotação,  $T = 1/2\langle\boldsymbol{\omega}|I|\boldsymbol{\omega}\rangle$ .

velocidade angular se encontrar ao longo de um desses **eixos principais** realinhados, a velocidade angular e o momento angular serão paralelos. Como ilustração, a estabilidade de rotação é usada por jogadores de futebol (americano) quando jogam a bola girando ao redor de seu eixo longo principal.

### Autovetores, Autovalores

É instrutivo considerar um quadro geométrico deste problema. Se a matriz de inércia  $I$  for multiplicada de cada lado por um vetor unitário de direção variável,  $\hat{\mathbf{n}} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , então, na notação bracket de Dirac da Seção 3.2,

$$\langle \hat{\mathbf{n}} | I | \hat{\mathbf{n}} \rangle = I, \tag{3.129}$$

em que  $I$  é o momento de inércia ao redor da direção  $\hat{\mathbf{n}}$  e um número (escalar) positivo. Executando a multiplicação, obtemos

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma, \tag{3.130}$$

uma forma quadrática definida positiva que deve ser um elipsóide (veja a Figura 3.5). Pela geometria analítica, sabemos que os eixos coordenados sempre podem ser rotacionados para coincidir com os eixos de nosso elipsóide. Em muitos casos elementares, em especial quando a simetria está presente, esses novos eixos, denominados eixos *principais*, podem ser encontrados por inspeção. Podemos achar os eixos localizando os extremos locais do elipsóide em termos das componentes variáveis de  $\mathbf{n}$ , sujeitos à restrição  $\hat{\mathbf{n}}^2 = 1$ . Para lidar com a restrição, introduzimos um multiplicador de Lagrange  $\lambda$  (Seção 17.6). Diferenciar  $\langle \hat{\mathbf{n}} | I | \hat{\mathbf{n}} \rangle - \lambda \langle \hat{\mathbf{n}} | \hat{\mathbf{n}} \rangle$ ,

$$\frac{\partial}{\partial n_j} (\langle \hat{\mathbf{n}} | I | \hat{\mathbf{n}} \rangle - \lambda \langle \hat{\mathbf{n}} | \hat{\mathbf{n}} \rangle) = 2 \sum_k I_{jk} n_k - 2\lambda n_j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{3.131}$$

dá como resultado as equações de autovalor

$$I | \hat{\mathbf{n}} \rangle = \lambda | \hat{\mathbf{n}} \rangle. \tag{3.132}$$

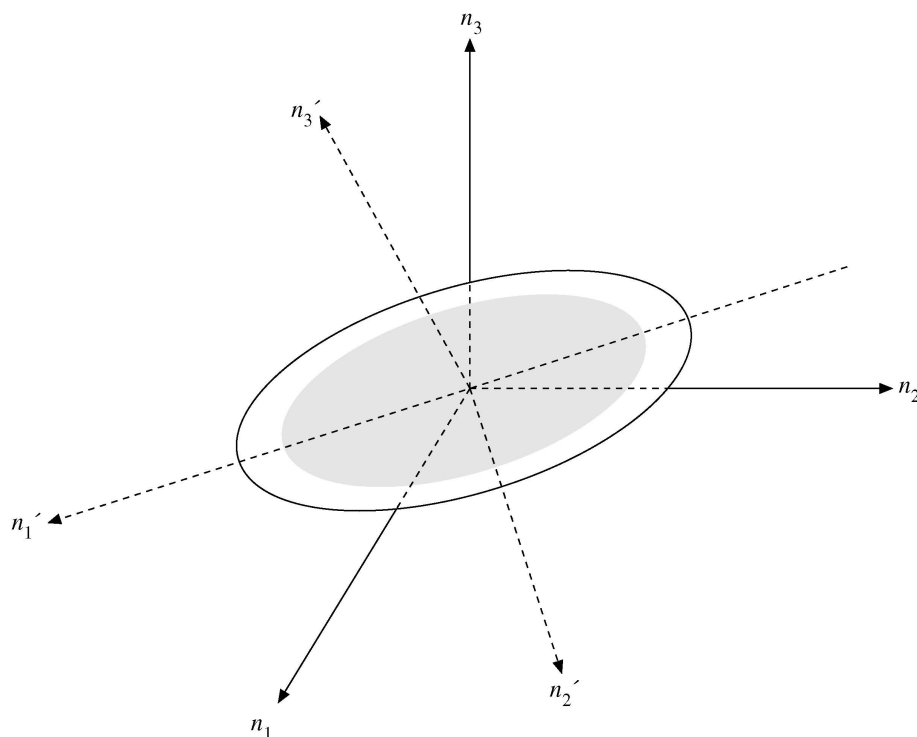


Figura 3.5: Elipsóide de momento de inércia.

O mesmo resultado pode ser encontrado por métodos puramente geométricos. Agora passamos a desenvolver um método geral para achar os elementos diagonais e os eixos principais.

Se  $R^{-1} = \tilde{R}$  é a matriz ortogonal real, tal que  $\mathbf{n}' = R\mathbf{n}$  ou  $|\mathbf{n}'\rangle = R|\mathbf{n}\rangle$  na notação de Dirac são as novas



coordenadas, então, usando  $\langle \mathbf{n}' | \mathbf{R} = \langle \mathbf{n} |$  na Equação (3.132), obtemos

$$\langle \mathbf{n} | \mathbf{I} | \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}' | \mathbf{R} \mathbf{I} \tilde{\mathbf{R}} | \mathbf{n}' \rangle = I'_1 n_1'^2 + I'_2 n_2'^2 + I'_3 n_3'^2, \quad (3.133)$$

em que  $I'_i > 0$  são os momentos de inércia principais. A matriz de inércia  $I'$  na Equação (3.133) é diagonal nas novas coordenadas,

$$I' = \mathbf{R} \mathbf{I} \tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix}. \quad (3.134)$$

Se reescrevermos a Equação (3.134) usando  $\mathbf{R}^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}$  na forma

$$\tilde{\mathbf{R}} I' = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{I} \tilde{\mathbf{R}} \quad (3.135)$$

e admitirmos que  $\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  consiste em três vetores colunas, então a Equação (3.135) se subdivide em três equações de autovalor

$$I \mathbf{v}_i = I'_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.136)$$

com **autovalores**  $I'_i$  e **autovetores**  $\mathbf{v}_i$ . Os nomes vieram da literatura alemã sobre mecânica quântica. Como essas equações são lineares e homogêneas (para  $i$  fixo), pela Seção 3.1 seus determinantes têm de se anular:

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I'_i & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} - I'_i & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} - I'_i \end{vmatrix} = 0. \quad (3.137)$$

Substituindo o autovalor  $I'_i$  por uma variável  $\lambda$  vezes a matriz unidade 1, podemos reescrever a Equação (3.136) como

$$(I - \lambda \mathbf{1}) | \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (3.136')$$

O determinante igualado a zero,

$$|I - \lambda \mathbf{1}| = 0, \quad (3.137')$$

é um polinômio cúbico em  $\lambda$ ; sua três raízes, é claro, são os  $I'_i$ . Voltando à Equação (3.136) ou (3.136') e nela substituindo uma raiz por vez, podemos achar os autovetores correspondentes. Por causa de suas aplicações em teorias astronômicas, a Equação (3.137) ou (3.137') é conhecida como **equação secular**.<sup>20</sup> O mesmo tratamento se aplica a qualquer matriz simétrica real  $I$ , exceto que seus autovalores não precisam ser todos positivos. Além disso, a condição de ortogonalidade na Equação (3.87) para  $\mathbf{R}$  afirma que, em termos geométricos, os autovetores  $\mathbf{v}_i$  são vetores unitários mutuamente ortogonais. Na verdade, eles formam o novo sistema de coordenadas. O fato de quaisquer dois autovetores  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  serem ortogonais se  $I'_i \neq I'_j$  resulta da Equação (3.136) em conjunção com a simetria de  $I$  pela multiplicação por  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{v}_j$ , respectivamente.

$$\langle \mathbf{v}_j | \mathbf{I} | \mathbf{v}_i \rangle = I'_i \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{I} | \mathbf{v}_j \rangle = I'_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j. \quad (3.138a)$$

Visto que  $I'_i \neq I'_j$  e a Equação (3.138a) implicam que  $(I'_j - I'_i) \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ , então  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ .

Podemos escrever as formas quadráticas na Equação (3.133) como uma soma de quadrados nas coordenadas originais  $|\mathbf{n}\rangle$ ,

$$\langle \mathbf{n} | \mathbf{I} | \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}' | \mathbf{R} \mathbf{I} \tilde{\mathbf{R}} | \mathbf{n}' \rangle = \sum_i I'_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i)^2, \quad (3.138b)$$

porque, em termos de componentes, as linhas da matriz de rotação em  $\mathbf{n}' = \mathbf{R} \mathbf{n}$  ou

$$\begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

<sup>20</sup>A Equação (3.126) tomará essa forma quando  $\omega$  se encontrar ao longo de um dos eixos principais. Então,  $\mathbf{L} = \lambda \omega$  e  $l \omega = \lambda \omega$ . Na literatura matemática  $\lambda$  costuma ser denominado **valor característico**,  $\omega$ , um **vetor característico**.

são compostas dos autovetores  $\mathbf{v}_i$ . A identidade subjacente da matriz,

$$I = \sum_i I'_i |\mathbf{v}_i\rangle \langle \mathbf{v}_i|, \quad (3.138c)$$

pode ser vista como a **decomposição espectral** do tensor de inércia (ou de qualquer matriz simétrica real). Aqui, a palavra *spectral* é apenas um outro termo para a expansão de termos em seus autovalores. Quando multiplicamos esta expansão de autovalor por  $\langle \mathbf{n}|$  à esquerda e  $|\mathbf{n}\rangle$  à direita, reproduzimos a relação anterior entre formas quadráticas. O operador  $P_i = |\mathbf{v}_i\rangle \langle \mathbf{v}_i|$  é um operador de projeção que satisfaz  $P_i^2 = P_i$  que projeta a  $i$ -ésima componente  $w_i$  de qualquer vetor  $|\mathbf{w}\rangle = \sum_j w_j |\mathbf{v}_j\rangle$  que é expandido em termos do autovetor de base  $|\mathbf{v}_j\rangle$ . Isso é verificado por

$$P_i |\mathbf{w}\rangle = \sum_j w_j |\mathbf{v}_i\rangle \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = w_i |\mathbf{v}_i\rangle = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w} |\mathbf{v}_i\rangle.$$

Finalmente, a identidade

$$\sum_i |\mathbf{v}_i\rangle \langle \mathbf{v}_i| = 1$$

expressa a completude da base de autovetor segundo a qual qualquer vetor  $|\mathbf{w}\rangle = \sum_i w_i |\mathbf{v}_i\rangle$  pode ser expandido em termos dos autovetores. Multiplicar a relação de completude por  $|\mathbf{w}\rangle$  prova a expansão  $|\mathbf{w}\rangle = \sum_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{w} \rangle |\mathbf{v}_i\rangle$ .

Uma extensão importante do teorema da decomposição espectral se aplica às matrizes comutativas simétricas (ou hermitianas)  $A, B$ : se  $[A, B] = 0$ , então existe uma matriz (unitária) ortogonal que diagonaliza ambas,  $A$  e  $B$ ; isto é, ambas as matrizes têm autovetores comuns se os autovalores forem não-degenerados. O inverso desse teorema também é válido.

Para provar esse teorema, diagonalizamos  $A$ :  $A \mathbf{v}_i = a_i \mathbf{v}_i$ . Multiplicando cada equação de autovalor por  $B$  obtemos  $BA \mathbf{v}_i = a_i B \mathbf{v}_i = A(B \mathbf{v}_i)$ , que diz que  $B \mathbf{v}_i$  é um autovetor de  $A$  com autovalor  $a_i$ . Por conseqüência,  $B \mathbf{v}_i = b_i \mathbf{v}_i$  com  $b_i$ . Ao contrário, se os vetores  $\mathbf{v}_i$  são autovetores comuns de  $A$  e  $B$ , então  $AB \mathbf{v}_i = A b_i \mathbf{v}_i = a_i b_i \mathbf{v}_i = BA \mathbf{v}_i$ . Uma vez que os autovetores  $\mathbf{v}_i$  são completos, isso implica  $AB = BA$ .

### Matrizes Hermitianas

Para espaços vetoriais complexos, matrizes hermitianas e unitárias desempenham o mesmo papel que matrizes simétricas e ortogonais em espaços vetoriais reais, respectivamente. Em primeiro lugar, vamos generalizar o importante teorema sobre os elementos diagonais e os eixos principais para a equação de autovalor

$$A|\mathbf{r}\rangle = \lambda|\mathbf{r}\rangle. \quad (3.139)$$

Agora mostramos que, se  $A$  é uma matriz hermitiana<sup>21</sup> seus autovalores são reais e seus autovetores são ortogonais.

Sejam  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  dois autovalores, e  $|\mathbf{r}_i\rangle$  e  $|\mathbf{r}_j\rangle$ , os autovetores, correspondentes de  $A$ , uma matriz hermitiana. Então,

$$A|\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{r}_i\rangle, \quad (3.140)$$

$$A|\mathbf{r}_j\rangle = \lambda_j|\mathbf{r}_j\rangle. \quad (3.141)$$

A Equação (3.140) é multiplicada por  $\langle \mathbf{r}_j|$ :

$$\langle \mathbf{r}_j | A | \mathbf{r}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle. \quad (3.142)$$

A Equação (3.141) é multiplicada por  $\langle \mathbf{r}_i|$  para dar

$$\langle \mathbf{r}_i | A | \mathbf{r}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle. \quad (3.143)$$

Tomando a adjunta<sup>22</sup> dessa equação, temos

$$\langle \mathbf{r}_j | A^\dagger | \mathbf{r}_i \rangle = \lambda_j^* \langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle, \quad (3.144)$$

<sup>21</sup>Se  $A$  é real, o requisito hermitiano se reduz a um requisito de simetria,

<sup>22</sup>Note que  $\langle \mathbf{r}_j | = |\mathbf{r}_j\rangle^\dagger$  para vetores complexos.



ou

$$\langle \mathbf{r}_j | A | \mathbf{r}_i \rangle = \lambda_j^* \langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle. \quad (3.145)$$

visto que  $A$  é hermitiana. Subtraindo a Equação (3.145) da Equação (3.142), obtemos

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle = 0. \quad (3.146)$$

Este é um resultado geral para todas as possíveis combinações de  $i$  e  $j$ . Em primeiro lugar, seja  $j = i$ . Então, a Equação (3.146) se torna

$$(\lambda_i - \lambda_i^*) \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i \rangle = 0. \quad (3.147)$$

Uma vez que  $\langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_i \rangle = 0$  seria uma solução trivial da Equação (3.147), concluímos que

$$\lambda_i = \lambda_i^*, \quad (3.148)$$

ou  $\lambda_i$  é real, para todo  $i$ .

Em segundo lugar, para  $i \neq j$  e  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle = 0, \quad (3.149)$$

ou

$$\langle \mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i \rangle = 0, \quad (3.150)$$

o que significa que os autovetores de autovalores **distintos** são ortogonais, sendo a Equação (3.150) nossa generalização de ortogonalidade neste espaço complexo.<sup>23</sup>

Se  $\lambda_i = \lambda_j$  (caso degenerado),  $|\mathbf{r}_i\rangle$  não é automaticamente ortogonal a  $|\mathbf{r}_j\rangle$ , pode ser **transformado** em ortogonal.<sup>24</sup> Considere, mais uma vez, o problema físico da matriz de momento de inércia. Se  $x_1$  é um eixo de simetria rotacional, então constataremos que  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Cada um dos autovetores  $|\mathbf{r}_2\rangle$  e  $|\mathbf{r}_3\rangle$  é perpendicular ao eixo de simetria,  $|\mathbf{r}_1\rangle$ , mas encontra-se em qualquer lugar no plano perpendicular a  $|\mathbf{r}_1\rangle$ ; isto é, qualquer combinação linear de  $|\mathbf{r}_2\rangle$  e  $|\mathbf{r}_3\rangle$  também é um autovetor. Considere  $(a_2|\mathbf{r}_2\rangle + a_3|\mathbf{r}_3\rangle)$  com  $a_2$  e  $a_3$  constantes. Então,

$$\begin{aligned} A(a_2|\mathbf{r}_2\rangle + a_3|\mathbf{r}_3\rangle) &= a_2\lambda_2|\mathbf{r}_2\rangle + a_3\lambda_3|\mathbf{r}_3\rangle \\ &= \lambda_2(a_2|\mathbf{r}_2\rangle + a_3|\mathbf{r}_3\rangle), \end{aligned} \quad (3.151)$$

como era de esperar, porque  $x_1$  é um eixo de simetria rotacional. Por conseguinte, se  $|\mathbf{r}_1\rangle$  e  $|\mathbf{r}_2\rangle$  são fixos, podemos simplesmente escolher que  $|\mathbf{r}_3\rangle$  esteja no plano perpendicular a  $|\mathbf{r}_1\rangle$  e também perpendicular a  $|\mathbf{r}_2\rangle$ . Um método geral de soluções ortogonalizadoras, o processo de Gram-Schmidt (Seção 3.1), é aplicado às funções na Seção 10.3.

O conjunto de  $n$  autovetores ortogonais  $|\mathbf{r}_i\rangle$  de nossa matriz hermitiana  $n \times n$   $A$  forma um conjunto **completo**, abrangendo o espaço  $n$  dimensional (complexo),  $\sum_i |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{r}_i| = 1$ . Este fato é útil em um cálculo variacional dos autovalores, Seção 17.8.

A decomposição espectral de qualquer matriz hermitiana  $A$  é provada por analogia com matrizes simétricas reais

$$A = \sum_i \lambda_i |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{r}_i|,$$

com autovalores reais  $\lambda_i$  e autovetores ortonormais  $|\mathbf{r}_i\rangle$ .

Autovalores e autovetores não são limitados a matrizes hermitianas. Todas as matrizes têm ao menos um autovalor e um autovetor. Contudo, somente matrizes hermitianas têm todos os autovetores ortogonais e todos os autovalores reais.

<sup>23</sup> A teoria correspondente para operadores diferenciais (teoria de Sturm-Liouville) aparece na Seção 10.2. A equação integral análoga (teoria de Hilbert-Schmidt) é dada na Seção 16.4.

<sup>24</sup> Aqui, estamos admitindo que os autovetores das  $\lambda_i$   $n$  vezes degeneradas abrangem o espaço  $n$  dimensional correspondente. Isso pode ser mostrado incluindo um parâmetro  $\varepsilon$  na matriz original para remover a degeneração e então deixar que  $\varepsilon$  se aproxime de zero (compare com o Exercício 3.5.30). Isso é análogo a interromper uma degeneração em espectroscopia atômica aplicando um campo magnético externo (efeito de Zeeman).

### Matrizes Anti-Hermitianas

Ocasionalmente encontramos na teoria quântica matrizes anti-hermitianas:

$$A^\dagger = -A.$$

Conforme a análise da primeira parte desta seção, podemos mostrar que

- (a) Os autovalores são imaginários puros (ou zero).
- (b) Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

A matriz R formada a partir dos autovetores normalizados é unitária. Esta propriedade anti-hermitiana é preservada sob transformações unitárias.

### Exemplo 3.5.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA REAL

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.152}$$

A equação secular é

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.153}$$

ou

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \tag{3.154}$$

expandindo por menores. As raízes são  $\lambda = -1, 0, 1$ . Para achar o autovetor correspondente a  $\lambda = -1$ , substituímos esse valor na equação de autovalor, Equação (3.139),

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.155}$$

Com  $\lambda = -1$ , isso resulta

$$x + y = 0, \quad z = 0. \tag{3.156}$$

Dentro de um fator de escala arbitrário e um sinal arbitrário (ou fator de fase),  $\langle \mathbf{r}_1 | = (1, -1, 0)$ . Note que (para  $|\mathbf{r}\rangle$  real em espaço ordinário) o autovetor destaca uma reta no espaço. O sentido positivo ou negativo não é determinado. Essa indeterminação podia ser esperada se notássemos que a Equação (3.139) é homogênea em  $|\mathbf{r}\rangle$ . Por conveniência, exigiremos que os autovetores sejam normalizados para a unidade,  $\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_1 \rangle = 1$ . Com esta condição,

$$\langle \mathbf{r}_1 | = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \tag{3.157}$$

é fixo, exceto por um sinal geral. Para  $\lambda = 0$ , a Equação (3.139) resulta em

$$y = 0, \quad x = 0, \tag{3.158}$$

$\langle \mathbf{r}_2 | = (0, 0, 1)$  é um autovetor adequado. Por fim, para  $\lambda = 1$ , obtemos

$$-x + y = 0, \quad z = 0, \tag{3.159}$$

ou

$$\langle \mathbf{r}_3 | = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right). \tag{3.160}$$

A ortogonalidade de  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ , correspondente a três autovalores distintos, pode ser verificada com facilidade.

A decomposição espectral correspondente resulta

$$\begin{aligned} A &= (-1) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + (+1) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + 0(0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■





### Exemplo 3.5.2 AUTOVALORES DEGENERADOS

Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.161)$$

A equação secular é

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.162)$$

ou

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0, \quad \lambda = -1, 1, 1, \quad (3.163)$$

um caso degenerado. Se  $\lambda = -1$ , a equação de autovalor (3.139) resulta

$$2x = 0, \quad y + z = 0. \quad (3.164)$$

Um autovetor normalizado adequado é

$$\langle \mathbf{r}_1 | = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.165)$$

Para  $\lambda = 1$ , obtemos

$$-y + z = 0. \quad (3.166)$$

Qualquer autovetor que satisfaça a Equação (3.166) é perpendicular a  $\mathbf{r}_1$ . Temos um número infinito de opções. Suponha, como uma das opções possíveis, que  $\mathbf{r}_2$  é tomado como

$$\langle \mathbf{r}_2 | = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.167)$$

o que claramente satisfaz a Equação (3.166). Então,  $\mathbf{r}_3$  deve ser perpendicular a  $\mathbf{r}_1$  e podemos fazer com que seja perpendicular a  $\mathbf{r}_2$  por<sup>25</sup>

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (1, 0, 0). \quad (3.168)$$

A decomposição espectral correspondente resulta

$$\begin{aligned} A &= - \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

### Funções de Matrizes

Polinômios com um ou mais argumentos matriciais são bem definidos e ocorrem com frequência. A série de potência de uma matriz também pode ser definida, contanto que ela convirja para cada elemento da matriz (veja o Capítulo 5). Por exemplo, se  $A$  é qualquer matriz  $n \times n$ , então as séries de potência

$$\exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j, \quad (3.169a)$$

$$\text{sen}(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} A^{2j+1}, \quad (3.169b)$$

$$\text{cos}(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} A^{2j} \quad (3.169c)$$

<sup>25</sup>A utilização do produto cruzado é limitada a espaço tridimensional (veja a Seção 1.4).

são matrizes  $n \times n$  bem definidas. Para as matrizes de Pauli  $\sigma_k$  a **identidade de Euler** para  $\theta$  real e  $k = 1, 2$  ou  $3$

$$\exp(i\sigma_k\theta) = 1_2 \cos \theta + i\sigma_k \text{sen } \theta, \tag{3.170a}$$

resulta da reunião de todas as potências ímpares e pares de  $\theta$  em séries separadas usando  $\sigma_k^2 = 1$ . Para as matrizes  $4 \times 4$   $\sigma^{jk} = 1$  de Dirac com  $(\sigma^{jk})^2 = 1$  se  $j \neq k = 1, 2$  ou  $3$  obtemos, de maneira similar (sem escrever mais a óbvia matriz unidade  $1_4$ ),

$$\exp(i\sigma^{jk}\theta) = \cos \theta + i\sigma^{jk} \text{sen } \theta, \tag{3.170b}$$

enquanto

$$\exp(i\sigma^{0k}\zeta) = \cosh \zeta + i\sigma^{0k} \text{sen } h\zeta \tag{3.170c}$$

vale para  $\zeta$  real porque  $(i\sigma^{0k})^2 = 1$  para  $k = 1, 2$ ,

Para uma matriz hermitiana  $A$  há uma matriz unitária  $U$  que a diagonaliza; isto é,  $UAU^\dagger = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Então, a **fórmula de traço**

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{traço}(A)) \tag{3.171}$$

é obtida (veja os Exercícios 3.5.2 e 3.5.9) por

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &= \det(U \exp(A) U^\dagger) = \det(\exp(UAU^\dagger)) \\ &= \det \exp[a_1, a_2, \dots, a_n] = \det[e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n}] \\ &= \prod e^{a_i} = \exp\left(\sum a_i\right) = \exp(\text{traço}(A)), \end{aligned}$$

usando  $UA^iU^\dagger = (UAU^\dagger)^i$  na série de potências da Equação (3.169a), para  $\exp(UAU^\dagger)$ , e o teorema do produto para determinantes na Seção 3.2.

Essa fórmula de traço é um caso especial da **lei da decomposição espectral** para qualquer função  $f(A)$  (infinitamente diferenciável) para a hermitiana  $A$ :

$$f(A) = \sum_i f(\lambda_i) |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{r}_i|,$$

em que  $|\mathbf{r}_i\rangle$  são os autovetores comuns de  $A$  e  $A^j$ . Essa expansão de autovalor resulta de  $A^j |\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i^j |\mathbf{r}_i\rangle$ , multiplicada por  $f^{(j)}(0)/j!$  e somada sobre  $j$  para formar a expansão de Taylor de  $f(\lambda_i)$  e dar como resultado  $f(A) |\mathbf{r}_i\rangle = f(\lambda_i) |\mathbf{r}_i\rangle$ . Por fim, somando sobre  $i$  e usando completude, obtemos  $f(A) \sum_i |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{r}_i| = \sum_i f(\lambda_i) |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{r}_i| = f(A)$ , q.e.d.

### Exemplo 3.5.3 EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ DIAGONAL

Se a matriz  $A$  é diagonal como

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

então sua enésima potência também é diagonal com seus elementos matriciais diagonais elevados à enésima potência:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então, fazendo o somatório da série exponencial, elemento por elemento, temos

$$e^{\sigma_3} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix}.$$

Se escrevermos a matriz diagonal geral como  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  com elementos diagonais  $a_j$ , então  $A^m = [a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m]$  e, fazendo o somatório das exponenciais, mais uma vez elemento por elemento, obtemos  $e^A = [e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_n}]$ .

Usando a lei da decomposição espectral, obtemos diretamente

$$e^{\sigma_3} = e^{+1}(1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-1}(0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$



Uma outra relação importante é a **fórmula de Baker-Hausdorff**, ■

$$\exp(iG)H \exp(-iG) = H + [iG, H] + \frac{1}{2}[iG, [iG, H]] + \dots, \quad (3.172)$$

que resulta da multiplicação da série de potências por  $\exp(iG)$  e da reunião dos termos com as mesmas potências de  $iG$ . Aqui, definimos

$$[G, H] = GH - HG$$

como o **comutador** de  $G$  e  $H$ .

A análise precedente tem a vantagem de exibir e esclarecer relações conceituais na diagonalização de matrizes. Contudo, para matrizes maiores do que  $3 \times 3$ , ou talvez  $4 \times 4$ , o processo rapidamente se torna tão incômodo que recorremos a computadores e a técnicas iterativas.<sup>26</sup> Uma dessas técnicas é o método de Jacobi para determinar autovalores e autovetores de matrizes simétricas reais. Essa técnica de Jacobi para determinar autovalores e autovetores e o método de Gauss-Seidel para resolver sistemas de equações lineares simultâneas são exemplos de métodos de afrouxamento. São técnicas iterativas nas quais os erros podem decrescer ou afrouxar enquanto as iterações continuam. Métodos de afrouxamento são utilizados extensivamente para a solução de equações diferenciais parciais.

### Exercícios

**3.5.1** (a) Começando com o momento angular orbital do  $i$ -ésimo elemento de massa,

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i),$$

derive a matriz de inércia tal que  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ ,  $|\mathbf{L}\rangle = I|\boldsymbol{\omega}\rangle$ .

(b) Repita a derivação começando com energia cinética

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 \quad \left( T = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} | I | \boldsymbol{\omega} \rangle \right).$$

**3.5.2** Mostre que os autovalores de uma matriz ficam inalterados se a matriz é transformada por uma transformação de similaridade.

Esta propriedade não está limitada a matrizes simétricas ou a matrizes hermitianas. Ela vale para qualquer matriz que satisfaça a equação de autovalor, Equação (3.139). Se conseguirmos trazer nossa matriz para a forma diagonal por uma transformação de similaridade, então duas conseqüências imediatas são:

1. O traço (soma de autovalores) é invariante sob uma transformação de similaridade.
2. O determinante (produto de autovalores) é invariante sob uma transformação de similaridade.

*Nota:* A invariância do traço e do determinante costuma ser demonstrada usando o teorema de Cayley-Hamilton: uma matriz satisfaz sua própria equação (secular) característica.

**3.5.3** Como um inverso do teorema que afirma que matrizes hermitianas têm autovalores reais e que autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais, mostre que, se

- (a) os autovalores de uma matriz são reais e
- (b) os autovetores satisfazem  $\mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j = \delta_{ij} = \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle$ ,

então a matriz é hermitiana.

**3.5.4** Mostre que uma matriz real não-simétrica não pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade ortogonal.

*Sugestão:* Admita que a matriz real não-simétrica pode ser diagonalizada e desenvolva uma contradição.

**3.5.5** As matrizes que representam as componentes do momento angular  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  são todas hermitianas. Mostre que os autovalores de  $\mathbf{J}^2$ , em que  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ , são reais e não-negativos.

**3.5.6**  $A$  tem autovalores  $\lambda_i$  autovetores correspondentes  $|\mathbf{x}_i\rangle$ . Mostre que  $A^{-1}$  tem os mesmos autovetores, mas com autovalores  $\lambda_i^{-1}$ .

<sup>26</sup>Em sistemas de dimensões mais altas, a equação secular pode ser muito mal condicionada no que diz respeito à determinação de suas raízes (os autovalores). A solução direta por computador pode ser muito inexata. Em geral, preferem-se técnicas iterativas para diagonalizar a matriz original. Veja as Seções 2.7 e 2.9 de Press et al., loc. cit.

**3.5.7** Uma matriz quadrada com determinante zero é denominada **singular**.

(a) Se  $A$  é singular, mostre que há ao menos um vetor coluna não-zero  $\mathbf{v}$ , tal que

$$A|\mathbf{v}\rangle = 0.$$

(b) Se há um vetor não-zero  $|\mathbf{v}\rangle$ , tal que

$$A|\mathbf{v}\rangle = 0,$$

mostre que  $A$  é uma matriz singular. Isso significa que, se uma matriz (ou operador) tiver zero como um autovalor, a matriz (ou operador) não tem nenhuma inversa e seu determinante é zero.

**3.5.8** A mesma transformação de similaridade diagonaliza cada uma de duas matrizes. Mostre que as matrizes originais devem comutar. (Isto é particularmente importante na formulação matricial – de Heisenberg – da mecânica quântica.)

**3.5.9** Duas matrizes hermitianas  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores. Mostre que  $A$  e  $B$  são relacionadas por uma transformação de similaridade unitária.

**3.5.10** Ache os autovalores e um conjunto ortonormal (ortogonal e normalizado) de autovetores para as matrizes do Exercício 3.2.15.

**3.5.11** Mostre que a matriz de inércia para uma única partícula de massa  $m$  em  $(x, y, z)$  tem um determinante. Explique esse resultado em termos da invariância do determinante de uma matriz sob transformação de similaridade (Exercício 3.3.10) e de uma possível rotação do sistema coordenado.

**3.5.12** Um certo corpo rígido pode ser representado por três massas pontuais:  $m_1 = 1$  em  $(1, 1, -2)$ ,  $m_2 = 2$  em  $(-1, -1, 0)$  e  $m_3 = 1$  em  $(1, 1, 2)$ .

(a) Ache a matriz de inércia.

(b) Diagonalize a matriz de inércia obtendo os autovalores e os eixos principais (como autovetores ortonormais).

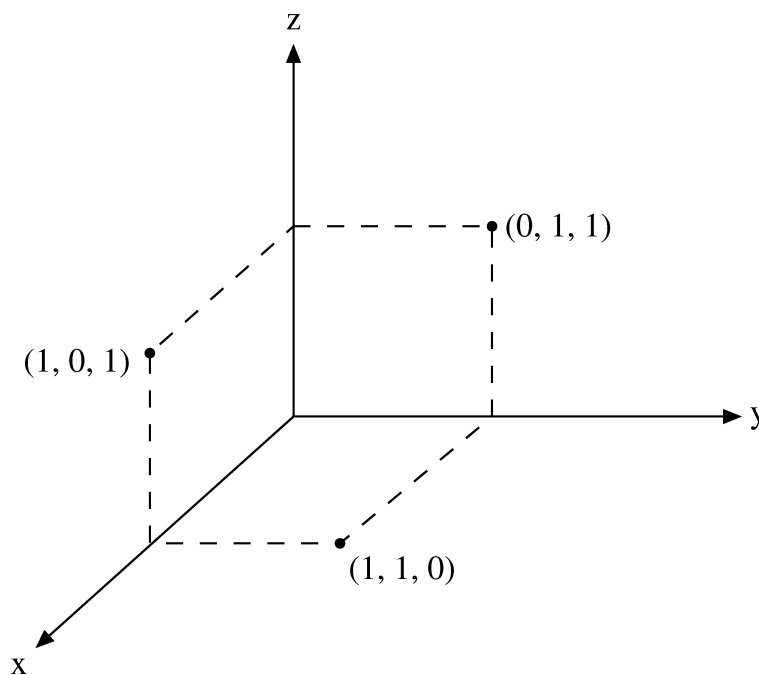


Figura 3.6: Localização de massa para tensor de inércia.



**3.5.13** Massas unitárias são colocadas como mostra a Figura 3.6.

- (a) Ache a matriz do momento de inércia.
- (b) Ache os autovalores e um conjunto de autovetores ortonormais.
- (c) Explique a degeneração em termos da simetria do sistema.

$$\text{Resposta: } I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \mathbf{r}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5. \end{array}$$

**3.5.14** Uma massa  $m_1 = 1/2$  kg está localizada em  $(1, 1, 1)$  (metros), uma massa  $m_2 = 1/2$  kg está em  $(-1, -1, -1)$ . As duas massas são unidas por um bastão ideal (sem peso, rígido).

- (a) Ache o tensor de inércia desse par de massas.
- (b) Ache os autovalores e autovetores dessa matriz de inércia.
- (c) Explique o significado, a significância física do autovalor  $\lambda = 0$ . Qual é a significância do autovetor correspondente?
- (d) Agora que você resolveu este problema por técnicas matriciais bastante sofisticadas, explique como poderia obter
  - (1)  $\lambda = 0$  e  $\lambda = ?$  — por inspeção (isto é, usando bom senso).
  - (2)  $\mathbf{r}_{\lambda=0} = ?$  — por inspeção (isto é, usando física de calouro).

**3.5.15** Massas unitárias estão nos oito vértices de um cubo  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Ache a matriz do momento de inércia e mostre que há uma degeneração tripla. Isso significa que, no que concerne a momentos de inércia, a estrutura cúbica exibe simetria esférica. Ache os autovalores e autovetores ortonormais correspondentes das matrizes seguintes (como verificação numérica, note que a soma dos autovalores é igual à soma dos elementos diagonais da matriz original, Exercício 3.3.9). Note também a correspondência entre  $\det A = 0$  e a existência de  $\lambda = 0$ , como requerido pelos Exercícios 3.5.2 e 3.5.7.

**3.5.16**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 0, 1, 2$ .

**3.5.17**  $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -1, 0, 2$ .

**3.5.18**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -1, 1, 2$ .

**3.5.19**  $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -3, 1, 5$ .

**3.5.20**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 0, 1, 2$ .

**3.5.21**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -1, 1, 2$ .

**3.5.22**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ .

**3.5.23**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 0, 2, 2$ .

**3.5.24**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -1, -1, 2$ .

**3.5.25**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = -1, 2, 2$ .

**3.5.26**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 0, 0, 3$ .

**3.5.27**  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 1, 1, 6$ .

**3.5.28**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 0, 0, 2$ .

**3.5.29**  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Resposta:  $\lambda = 2, 3, 6$ .

**3.5.30** (a) Determine os autovalores e autovetores de

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que os autovalores são degenerados para  $\varepsilon = 0$ , mas que os autovetores são ortogonais para todo  $\varepsilon \neq 0$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(b) Determine os autovalores e autovetores de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que os autovalores são degenerados para  $\varepsilon = 0$  e que para essa matriz (não-simétrica) os autovetores ( $\varepsilon = 0$ ) **não** abrangem o espaço.

(c) Ache o co-seno do ângulo entre os dois autovetores como uma função de  $\varepsilon$  para  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

**3.5.31** (a) Tome os coeficientes das equações lineares simultâneas do Exercício 3.1.7 como os elementos matriciais  $a_{ij}$  da matriz  $A$  (simétrica). Calcule os autovalores e autovetores.

(b) Forme uma matriz  $R$  cujas colunas são os autovetores de  $A$ , e calcule o produto matricial triplo  $\tilde{R}AR$ .

Resposta:  $\lambda = 3, 33163$ .

**3.5.32** Repita o Exercício 3.5.31 usando a matriz do Exercício 3.2.39.

**3.5.33** Descreva as propriedades geométricas da superfície

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2yz + z^2 = 1.$$

Como ela está orientada em espaço tridimensional? Ela é uma seção cônica? Caso positivo, de que tipo?



**3.5.34** Para uma matriz hermitiana  $n \times n$   $A$  com autovalores distintos  $\lambda_j$  e uma função  $f$ , mostre que a lei da decomposição espectral pode ser expressa como

$$f(A) = \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \frac{\prod_{i \neq j} (A - \lambda_i)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

Esta fórmula se deve a Sylvester.

### 3.6 Matrizes Normais

Na Seção 3.5 nossa preocupação primordial foram as matrizes hermitianas ou matrizes simétricas reais e o processo propriamente dito de achar os autovalores e autovetores. Nesta seção<sup>27</sup> generalizamos para matrizes normais, considerando as matrizes hermitianas e a matriz unitária como casos especiais. Também são considerados o importante problema da física referente a modos normais de vibração e o problema numericamente importante de matrizes mal condicionadas.

Uma matriz normal é uma matriz que comuta com sua adjunta,

$$[A, A^\dagger] = 0.$$

**Tabela 3.1**

Matriz	Autovalores	Autovetores (para diferentes autovalores)
Hermitiana	Real	Ortogonais
Anti-hermitiana	Imaginária pura (ou zero)	Ortogonais
Unitária	Grandeza unitária	Ortogonais
Normal	Se $A$ tem autovalor $\lambda$ , $A^\dagger$ $\lambda^*$	Ortogonais $A$ e $A^\dagger$ têm os mesmos autovetores

Exemplos óbvios e importantes são matrizes hermitianas e matrizes unitárias. Mostraremos que matrizes normais têm autovetores ortogonais (veja a Tabela 3.1). Nossa demonstração terá duas etapas.

I. Admitamos que  $A$  tem um autovetor  $|\mathbf{x}\rangle$  e autovalor correspondente  $\lambda$ . Então,

$$A|\mathbf{x}\rangle = \lambda|\mathbf{x}\rangle \tag{3.173}$$

ou

$$(A - \lambda 1)|\mathbf{x}\rangle = 0. \tag{3.174}$$

Por conveniência, a combinação  $A - \lambda 1$  será denominada  $B$ . Tomando a adjunta da equação (3.174), obtemos

$$\langle \mathbf{x} | (A - \lambda 1)^\dagger = 0 = \langle \mathbf{x} | B^\dagger. \tag{3.175}$$

Como

$$[(A - \lambda 1)^\dagger, (A - \lambda 1)] = [A, A^\dagger] = 0,$$

temos

$$[B, B^\dagger] = 0. \tag{3.176}$$

A matriz  $B$  também é normal.

Pelas Equações (3.174) e (3.175) formamos

$$\langle \mathbf{x} | B^\dagger B | \mathbf{x} \rangle = 0. \tag{3.177}$$

Essa expressão é igual a

$$\langle \mathbf{x} | B B^\dagger | \mathbf{x} \rangle = 0 \tag{3.178}$$

<sup>27</sup>Matrizes normais são a maior classe de matrizes que podem ser diagonalizadas por transformações unitárias. Uma discussão mais ampla de matrizes normais pode ser encontrada em P. A. Macklin, “Normal matrices for physicists”. *Am. J. Phys.* 52: 513 (1984).

pela Equação (3.176). Agora, a Equação (3.178) pode ser reescrita como

$$(B^\dagger|\mathbf{x}\rangle)^\dagger(B^\dagger|\mathbf{x}\rangle) = 0. \quad (3.179)$$

Assim,

$$B^\dagger|\mathbf{x}\rangle = (A^\dagger - \lambda^*1)|\mathbf{x}\rangle = 0. \quad (3.180)$$

Vemos que, para matrizes normais,  $A^\dagger$  tem os mesmos autovetores que  $A$ , exceto os autovalores conjugados complexos.

**II.** Agora, considerando mais de um autovetor-autovalor, temos

$$A|\mathbf{x}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{x}_i\rangle, \quad (3.181)$$

$$A|\mathbf{x}_j\rangle = \lambda_j|\mathbf{x}_j\rangle. \quad (3.182)$$

Multiplicando a Equação (3.182) a partir da esquerda por  $\langle\mathbf{x}_i|$ , temos

$$\langle\mathbf{x}_i|A|\mathbf{x}_j\rangle = \lambda_j\langle\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j\rangle. \quad (3.183)$$

Tomando a transposta da Equação (3.181), obtemos

$$\langle\mathbf{x}_i|A = (A^\dagger|\mathbf{x}_i\rangle)^\dagger. \quad (3.184)$$

Pela Equação (3.180), sendo que  $A^\dagger$  tem os mesmos autovetores que  $A$ , exceto os autovalores conjugados complexos,

$$(A^\dagger|\mathbf{x}_i\rangle)^\dagger = (\lambda_i^*|\mathbf{x}_i\rangle)^\dagger = \lambda_i\langle\mathbf{x}_i|. \quad (3.185)$$

Substituindo na Equação (3.183), temos

$$\lambda_i\langle\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j\rangle = \lambda_j\langle\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j\rangle$$

ou

$$(\lambda_i - \lambda_j)\langle\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j\rangle = 0. \quad (3.186)$$

Essa expressão é a mesma que a Equação (3.149).

Para  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,

$$\langle\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_i\rangle = 0.$$

Os autovetores correspondentes a diferentes autovalores de uma matriz normal são **ortogonais**. Isso significa que uma matriz normal pode ser diagonalizada por uma transformação unitária. A matriz unitária requerida pode ser construída a partir dos autovetores ortonormais, como mostramos antes, na Seção 3.5.

O inverso desse resultado também é verdadeiro. Se  $A$  pode ser diagonalizada por uma transformação unitária, então  $A$  é normal.

### Modos Normais de Vibração

Consideramos as vibrações de um modelo clássico de molécula de  $\text{CO}_2$ . É uma ilustração da aplicação de técnicas matriciais a um problema que não começa como um problema matricial. Também nos dá um exemplo dos autovalores e autovetores de uma matriz real assimétrica.

#### Exemplo 3.6.1 MODOS NORMAIS

Considere três massas sobre o eixo  $x$  ligadas por molas, como mostra a Figura 3.7. Admitimos que as forças das molas são lineares (pequenos deslocamentos, lei de Hooke) e que a massa é obrigada a permanecer sobre o eixo  $x$ .

Usando uma coordenada diferente para cada massa, a segunda lei de Newton resulta no conjunto de equações

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{k}{M}(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (3.187)$$



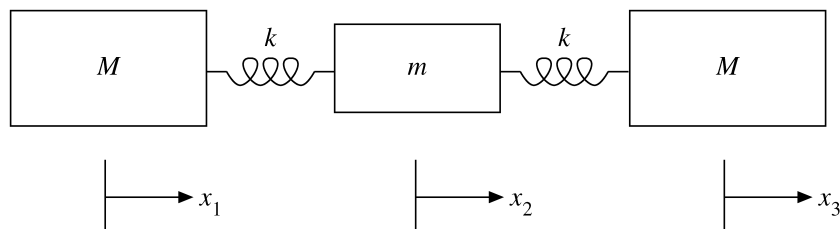


Figura 3.7: Oscilador duplo.

O sistema de massas está vibrando. Procuramos as freqüências comuns,  $\omega$ , tais que todas as massas vibrem com a mesma freqüência. Esses são os **modos normais**. Seja

$$x_i = x_{i0}e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Substituindo este conjunto na Equação (3.187), podemos reescrevê-lo como

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = +\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (3.188)$$

com o fator comum  $e^{i\omega t}$  dividido. Temos uma equação matricial de autovalor com a matriz assimétrica. A equação secular é

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.189)$$

Isso leva a

$$\omega^2 \left( \frac{k}{M} - \omega^2 \right) \left( \omega^2 - \frac{2k}{m} - \frac{k}{M} \right) = 0.$$

Os autovalores são

$$\omega^2 = 0, \quad \frac{k}{M}, \quad \frac{k}{M} + \frac{2k}{m},$$

todos reais.

Os autovetores correspondentes são determinados voltando à Equação (3.188) e nela substituindo os autovalores, um por vez. Para  $\omega^2 = 0$ , a Equação (3.188) dá como resultado,

$$x_1 - x_2 = 0, \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \quad -x_2 + x_3 = 0.$$

Então obtemos

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Essa expressão descreve uma translação pura sem nenhum movimento relativo das massas e nenhuma vibração.

Para  $\omega^2 = k/M$ , a Equação (3.188) resulta em

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = 0.$$

As duas massas externas estão se movimentando em direções opostas. A massa que está no centro é estacionária.

Para  $\omega^2 = k/M + 2k/m$ , as componentes do autovetor são

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = -\frac{2M}{m}x_1.$$

As duas massas externas estão se movimentando juntas. A massa situada no centro está se movimentando em direção contrária às outras duas externas. O momento líquido é zero.

Qualquer deslocamento das três massas ao longo do eixo  $x$  pode ser descrito como uma combinação linear desses três tipos de movimento: translação, mais duas formas de vibração. ■

### Sistemas Mal Condicionados

Um sistema de equações lineares simultâneas pode ser escrito como

$$A|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{y}\rangle \quad \text{ou} \quad A^{-1}|\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{x}\rangle, \quad (3.190)$$

com  $A$  e  $|\mathbf{y}\rangle$  conhecidos e  $|\mathbf{x}\rangle$  desconhecido. Quando um pequeno erro em  $|\mathbf{y}\rangle$  resulta em um erro maior em  $|\mathbf{x}\rangle$ , então a matriz  $A$  é dita *mal condicionada*. Sendo  $|\delta\mathbf{x}\rangle$  um erro em  $|\mathbf{x}\rangle$  e  $|\delta\mathbf{y}\rangle$  um erro em  $|\mathbf{y}\rangle$ , os erros relativos podem ser escritos como

$$\left[ \frac{\langle \delta\mathbf{x} | \delta\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} \right]^{1/2} \leq K(A) \left[ \frac{\langle \delta\mathbf{y} | \delta\mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} \right]^{1/2}. \quad (3.191)$$

Aqui,  $K(A)$ , uma propriedade da matriz  $A$ , é denominada **número da condição**. Para  $A$  hermitiana, uma forma do número da condição é dada por<sup>28</sup>

$$K(A) = \frac{|\lambda|_{\text{máx}}}{|\lambda|_{\text{mín}}}. \quad (3.192)$$

Uma forma aproximada devida a Turing<sup>29</sup> é

$$K(A) = n[A_{ij}]_{\text{máx}} [A_{ij}^{-1}]_{\text{máx}}, \quad (3.193)$$

na qual  $n$  é a ordem da matriz e  $[A_{ij}]_{\text{máx}}$  é o elemento máximo em  $A$ .

### Exemplo 3.6.2 UMA MATRIZ MAL CONDICIONADA

Um exemplo comum de uma matriz mal condicionada é a matriz de Hilbert,  $H_{ij} = (i + j - 1)^{-1}$ . A matriz de Hilbert de ordem 4,  $H_4$ , é encontrada em um ajuste de dados por mínimos quadrados a um polinômio de terceiro grau. Temos

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}. \quad (3.194)$$

Os elementos da matriz inversa (ordem  $n$ ) são dados por

$$(H_n^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1} \cdot \frac{(n+i-1)!(n+j-1)!}{[(i-1)!(j-1)!]^2 (n-i)!(n-j)!}. \quad (3.195)$$

Para  $n = 4$ ,

$$H_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}. \quad (3.196)$$

Pela Equação (3.193) a estimativa de Turing para o número de condição para

$$K_{\text{Turing}} = 4 \times 1 \times 6480 = 2,59 \times 10^4.$$

Esse resultado alerta que um erro de entrada pode ser multiplicado por 26.000 no cálculo do resultado de saída, o que equivale a dizer que  $H_4$  está mal condicionada. Se você encontrar um sistema muito mal condicionado, terá duas alternativas (além de abandonar o problema):

- (a) Tentar uma abordagem matemática diferente.
- (b) Tentar obter números mais significativos e levar a tarefa a cabo por força bruta.

Como vimos antes, técnicas matriciais de autovetor-autovalor não estão limitadas à solução de problemas estritamente matriciais. Um outro exemplo da transferência de técnicas de uma área para outra é visto na aplicação de técnicas matriciais – a solução de equações integrais de autovalor de Fredholm, Seção 16.3. Por sua vez, essas técnicas matriciais são reforçadas pelo um cálculo variacional da Seção 17.8. ■

<sup>28</sup>G. E. Forsythe e C. B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall (1967).

<sup>29</sup>Compare com J. Todd, *The Condition of the Finite Segments of the Hilbert Matrix*, Applied Mathematics Series n<sup>o</sup> 313. Washington, DC: National Bureau of Standards.



### Exercícios

**3.6.1** Mostre que toda matriz  $2 \times 2$  tem dois autovetores e correspondentes autovalores. Os autovetores não são necessariamente ortogonais e podem ser degenerados. Os autovalores não são necessariamente reais.

**3.6.2** Como uma ilustração do Exercício 3.6.1, ache os autovalores e correspondentes autovetores para

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que os autovetores **não** são ortogonais.

Resposta:  $\lambda_1 = 0, \mathbf{r}_1 = (2, -1);$   
 $\lambda_2 = 4, \mathbf{r}_2 = (2, 1).$

**3.6.3** Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , mostre que seus autovalores  $\lambda$  satisfazem a equação secular.

**3.6.4** Admitindo que uma matriz unitária  $U$  satisfaz uma equação de autovalor  $U\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$ , mostre que os autovalores da matriz unitária têm módulo unitário. Este mesmo resultado é válido para matrizes ortogonais reais.

**3.6.5** Visto que uma matriz ortogonal que descreve uma rotação em um espaço tridimensional real é um caso especial de uma matriz unitária, tal matriz ortogonal pode ser diagonalizada por uma transformação unitária.

(a) Mostre que a soma dos três autovalores é  $1 + 2 \cos \varphi$ , em que  $\varphi$  é o ângulo líquido de rotação ao redor de um único eixo fixo.

(b) Dado que um autovalor é 1, mostre que os outros dois autovalores devem ser  $e^{i\varphi}$  e  $e^{-i\varphi}$ .

Nossa matriz de rotação ortogonal (elementos reais) tem autovalores complexos.

**3.6.6**  $A$  é uma matriz hermitiana de enésima ordem com autovetores ortonormais  $|\mathbf{x}_i\rangle$  e autovalores reais  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Mostre que para um vetor de módulo unitário  $|\mathbf{y}\rangle$ ,

$$\lambda_1 \leq \langle \mathbf{y} | A | \mathbf{y} \rangle \leq \lambda_n.$$

**3.6.7** Uma matriz particular é hermitiana e também unitária. Mostre que seus autovalores são todos  $\pm 1$ .

*Nota:* As matrizes de Pauli e Dirac são exemplos específicos.

**3.6.8** Para sua teoria relativista do elétron, Dirac requeria um conjunto de **quatro** matrizes anticomutativas. Admita que essas matrizes devem ser hermitianas e unitárias. Se essas matrizes são  $n \times n$ , mostre que  $n$  deve ser par. Com matrizes  $2 \times 2$ , matrizes inadequadas (por quê?), isso demonstra que as menores matrizes possíveis que formam um conjunto de quatro matrizes anticomutativas, hermitianas, unitárias, são  $4 \times 4$ .

**3.6.9**  $A$  é uma matriz normal com autovalores  $\lambda_n$  e autovetores ortonormais  $|\mathbf{x}_n\rangle$ . Mostre que  $A$  pode ser escrita como

$$A = \sum_n \lambda_n |\mathbf{x}_n\rangle \langle \mathbf{x}_n|.$$

*Sugestão:* Mostre que ambas as formas desse autovetor, essa  $A$  e a  $A$  original dão o mesmo resultado quando agem sobre um vetor arbitrário  $|\mathbf{y}\rangle$ .

**3.6.10**  $A$  tem autovalores  $-1$  e autovetores correspondentes  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Construa  $A$ .

Resposta:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

**3.6.11** Uma matriz não-hermitiana  $A$  tem autovalores  $\lambda_i$  e autovetores correspondentes  $|\mathbf{u}_i\rangle$ . A matriz adjunta  $A^\dagger$  tem o mesmo conjunto de autovalores mas autovetores correspondentes **diferentes**,  $|\mathbf{v}_i\rangle$ . Mostre que os autovetores formam um conjunto **biortogonal**, no sentido de que

$$\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u}_j \rangle = 0 \quad \text{para } \lambda_i^* \neq \lambda_j.$$

**3.6.12** Dado um par de equações:

$$\begin{aligned} A|\mathbf{f}_n\rangle &= \lambda_n|\mathbf{g}_n\rangle \\ \tilde{A}|\mathbf{g}_n\rangle &= \lambda_n|\mathbf{f}_n\rangle \quad \text{com } A \text{ real,} \end{aligned}$$

- (a) Prove que  $|\mathbf{f}_n\rangle$  é um autovetor de  $(\tilde{A}A)$  com autovalor  $\lambda_n^2$ .
- (b) Prove que  $|\mathbf{g}_n\rangle$  é um autovetor de  $(AA)$  com autovalor  $\lambda_n^2$ .
- (c) Explique como você sabe que
  - (1) Os  $|\mathbf{f}_n\rangle$  formam um conjunto ortogonal.
  - (2) Os  $|\mathbf{g}_n\rangle$  formam um conjunto ortogonal.
  - (3)  $\lambda_n^2$  é real.

Prove que A do exercício anterior pode ser escrito como

$$A = \sum_n \lambda_n |\mathbf{g}_n\rangle \langle \mathbf{f}_n|,$$

com os  $|\mathbf{g}_n\rangle$  e  $\langle \mathbf{f}_n|$  normalizados para unidade.

*Sugestão:* Expanda seu vetor arbitrário como uma combinação linear de  $|\mathbf{f}_n\rangle$ .

**3.6.14** Dado

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

- (a) Construa a transposta  $\tilde{A}$  e as formas simétricas  $\tilde{A}A$  e  $A\tilde{A}$ .
- (b) Por  $A\tilde{A}|\mathbf{g}_n\rangle = \lambda_n^2|\mathbf{g}_n\rangle$ , ache  $\lambda_n$  e  $|\mathbf{g}_n\rangle$ . Normalize os  $|\mathbf{g}_n\rangle$ .
- (c) Por  $\tilde{A}A|\mathbf{f}_n\rangle = \lambda_n^2|\mathbf{f}_n\rangle$ , ache  $\lambda_n$  [mesmo da (b)] e  $|\mathbf{f}_n\rangle$ . Normalize os  $|\mathbf{f}_n\rangle$ .
- (d) Verifique que  $A|\mathbf{f}_n\rangle = \lambda_n|\mathbf{g}_n\rangle$  e  $\tilde{A}|\mathbf{g}_n\rangle = \lambda_n|\mathbf{f}_n\rangle$ .
- (e) Verifique que  $A = \sum_n \lambda_n |\mathbf{g}_n\rangle \langle \mathbf{f}_n|$ .

**3.6.15** Dados os autovalores  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e os autovetores correspondentes

$$|\mathbf{f}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{g}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{f}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\mathbf{g}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

- (a) construa A;
- (b) verifique que  $A|\mathbf{f}_n\rangle = \lambda_n|\mathbf{g}_n\rangle$ ;
- (c) verifique que  $\tilde{A}|\mathbf{g}_n\rangle = \lambda_n|\mathbf{f}_n\rangle$ .

Resposta:  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**3.6.16** Este exercício é uma continuação do Exercício 3.4.12, em que a matriz unitária U e a matriz hermitiana H são relacionadas por

$$U = e^{iaH}.$$

- (a) Se  $\text{traço } H = 0$ , mostre que  $\det U = +1$ .
- (b) Se  $\det U = +1$ , mostre que  $\text{traço } H = 0$ .

*Sugestão:* H pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade. Então, interpretando a exponencial por uma expansão de Maclaurin, U também é diagonal. Os autovalores correspondentes são dados por  $u_j = \exp(iah_j)$ .

*Nota:* Essas propriedades e as do Exercício 3.4.12 são vitais no desenvolvimento do conceito de geradores na teoria de grupo, Seção 4.2.

**3.6.17** Uma matriz A tem n autovalores  $A_i$ . Se  $B = e^A$ , mostre que B tem os mesmos autovetores que A, com os autovalores correspondentes  $B_i$  dados por  $B_i = \exp(A_i)$ .

*Nota:*  $e^A$  é definido pela expansão de Maclaurin da exponencial:

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$



**3.6.18** Uma matriz  $P$  é um operador de projeção (veja a discussão após a Equação (3.138c)) que satisfaz a condição

$$P^2 = P.$$

Mostre que os autovalores correspondentes  $(\rho^2)_\lambda$  e  $\rho_\lambda$  satisfazem a relação

$$(\rho^2)_\lambda = (\rho_\lambda)^2 = \rho_\lambda.$$

Isso significa que os autovalores de  $P$  são 0 e 1.

**3.6.19** Na equação **matricial** autovetor-autovalor

$$A|\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{r}_i\rangle,$$

$A$  é uma matriz hermitiana  $n \times n$ . Por simplicidade, admita que seus  $n$  autovalores reais são distintos e que  $\lambda_1$  é o maior. Se  $|\mathbf{r}\rangle$  é uma aproximação de  $|\mathbf{r}_1\rangle$ ,

$$|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}_1\rangle + \sum_{i=2}^n \delta_i |\mathbf{r}_i\rangle,$$

mostre que

$$\frac{\langle \mathbf{r} | A | \mathbf{r} \rangle}{\langle \mathbf{r} | \mathbf{r} \rangle} \leq \lambda_1$$

e que o erro em  $\lambda_1$  é de ordem  $|\delta_i|^2$ . Considere  $|\delta_i| \ll 1$ .

*Sugestão:* Os  $n$   $|\mathbf{r}_i\rangle$  formam um conjunto ortogonal **completo** que abrange o espaço  $n$  dimensional (complexo).

**3.6.20** Duas massas iguais estão ligadas uma à outra e as paredes por molas, como mostra a Figura 3.8. As massas são obrigadas a permanecer sobre uma linha horizontal.

- Estabeleça a equação de aceleração newtoniana para cada massa.
- Resolva a equação secular para os autovetores.
- Determine os autovetores e, assim, os modos normais de movimento.

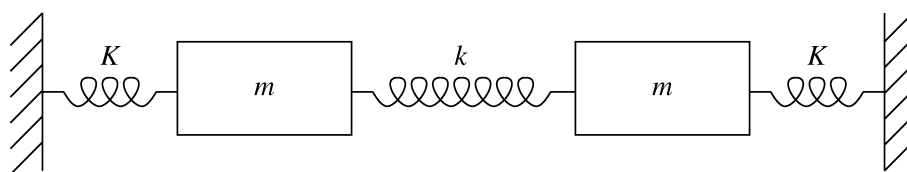


Figura 3.8: Oscilador triplo.

**3.6.21** Dada uma matriz normal  $A$  com autovalores  $\lambda_j$ , mostre que  $A^\dagger$  tem autovalores  $\lambda_j^*$ , sua parte real  $(A + A^\dagger)/2$  tem autovalores  $\Re(\lambda_j)$ , e sua parte imaginária  $(A - A^\dagger)/2i$  tem autovalores  $\Im(\lambda_j)$ .

## Leituras Adicionais

- Aitken, A. C., *Determinants and Matrices*. Nova York: Interscience (1956). Nova tiragem, Greenwood (1983). Uma introdução de fácil leitura a determinantes e matrizes.
- Barnett, S., *Matrices: Methods and Applications*. Oxford: Clarendon Press (1990).
- Bickley, W. G., e R. S. H. G. Thompson, *Matrices – Their Meaning and Manipulation*. Princeton, NJ: Van Nostrand (1964). Um apanhado abrangente de matrizes em problemas de física, suas propriedades analíticas e técnicas numéricas.
- Brown, W. C., *Matrices and Vector Spaces*. Nova York: Dekker (1991).
- Gilbert, J. e L., *Linear Algebra and Matrix Theory*. San Diego: Academic Press (1995).

Heading, J., *Matrix Theory for Physicists*. Londres: Longmans, Green and Co. (1958). Uma introdução de fácil leitura a determinantes e matrizes, com aplicações à mecânica, eletromagnetismo, relatividade especial e mecânica quântica.

Vein, R., e P. Dale, *Determinants and Their Applications in Mathematical Physics*. Berlim: Springer (1998).

Watkins, D. S., *Fundamentals of Matrix Computations*. Nova York: Wiley (1991).

## 4

# Teoria dos Grupos

*O juízo disciplinado sobre o que é agradável, simétrico e elegante tem-se revelado repetidas vezes um excelente guia sobre o modo como a natureza funciona.*

MURRAY GELL-MANN

### 4.1 Introdução à Teoria dos Grupos

Na mecânica clássica, a **simetria** de um sistema físico leva às **leis da conservação**. A conservação do momento angular é uma consequência direta da simetria rotacional, que significa **invariância** sob rotações espaciais. No primeiro terço do século XX, Wigner e outros perceberam que a invariância era um conceito fundamental para o entendimento dos novos fenômenos quânticos e para o desenvolvimento de teorias adequadas. Assim, na mecânica quântica o conceito de momento angular e spin tornou-se ainda mais essencial. Suas generalizações, **isospin** na física nuclear e **simetria de sabor** na física de partículas, são ferramentas indispensáveis para construir e resolver teorias. Generalizações do conceito de **invariância de calibre** da eletrodinâmica clássica para a simetria de isospin resultaram na teoria de calibre eletrofraca.

Em cada caso, o conjunto dessas operações de simetria forma um grupo. A teoria dos grupos é a ferramenta matemática para tratar invariantes e simetrias. Ela traz unificação e formalização de princípios, tais como reflexões espaciais, ou paridade, momento angular e geometria, que são muito usadas por físicos.

O papel fundamental da teoria dos grupos em geometria foi reconhecido há mais de um século por matemáticos (por ex., o Programa Erlanger de Felix Klein). Em geometria euclidiana, a distância entre dois pontos, o produto escalar de dois vetores ou métrica não são alterados sob rotações ou translações. Essas simetrias são características dessa geometria. Em relatividade especial, a métrica, ou produto escalar de quatro vetores, difere da métrica da geometria euclidiana no sentido de que não é mais definida positiva e é invariante sob transformações de Lorentz.

Para um cristal, a simetria dos grupos contém apenas um número finito de rotações em valores discretos de ângulos ou reflexões. A teoria desses grupos **discretos** ou **finitos**, desenvolvida originalmente como um ramo da matemática pura, agora é uma ferramenta útil para o desenvolvimento da cristalografia e da física da matéria condensada. Uma breve introdução a essa área aparece na Seção 4.7. Quando as rotações dependem de ângulos que variam continuamente (os ângulos de Euler da Seção 3.3), os grupos de rotação têm um número infinito de elementos. Esses grupos contínuos (ou **grupos de Lie**<sup>1</sup>) são o tópico das Seções 4.2-4.6. Na Seção 4.8 damos uma introdução a formas diferenciais, com aplicações às equações de Maxwell e tópicos dos Capítulos 1 e 2, que permite ver esses tópicos sob uma perspectiva diferente.

#### Definição de um Grupo

Um grupo  $G$  pode ser definido como um conjunto de objetos ou operações, rotações, transformações, denominados elementos de  $G$ , que podem ser combinados ou “multiplicados” para formar um produto bem definido em  $G$ , denotado por um  $*$ , que satisfaz as seguintes quatro condições:

1. Se  $a$  e  $b$  são dois elementos quaisquer de  $G$ , então o produto  $a * b$  também é um elemento de  $G$ , em que  $b$  age antes de  $a$ ; ou  $(a, b)$  para  $a * b$  associa (ou mapeia) um elemento  $a * b$  de  $G$  com o par  $(a, b)$  de elementos de  $G$ . Essa propriedade é conhecida como “ $G$  é fechado sob multiplicação de seus próprios elementos”.
2. Essa multiplicação é associativa:  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
3. Há um elemento unitário<sup>2</sup> em  $G$ , tal que  $1 * a = a * 1 = a$  para todo elemento em  $G$ . O unitário é único:

<sup>1</sup>O nome se deve ao matemático norueguês Sophus Lie.

<sup>2</sup>Segundo E. Wigner, o elemento unitário de um grupo costuma ser rotulado  $E$ , do alemão **Einheit**, isto é, unidade, ou apenas 1, ou  $I$  para identidade.

$$1 = 1' * 1 = 1'$$

4. Há um inverso, ou recíproco, de cada elemento  $a$  de  $G$ , rotulado  $a^{-1}$ , tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$ . O inverso é único: se  $a^{-1}$  e  $a'^{-1}$  são ambos inversos de  $a$ , então  $a'^{-1} = a'^{-1} * (a * a'^{-1}) = (a'^{-1} * a) * a^{-1} = a^{-1}$ .

Visto que usar  $*$  para representar multiplicação é maçante, em geral esse sinal é omitido e fica simplesmente subentendido. De agora em diante, escreveremos  $ab$  em vez de  $a * b$ .

- Se um subconjunto  $G'$  de  $G$  é fechado sob multiplicação, ele é um grupo e é denominado **subgrupo** de  $G$ ; isto é,  $G'$  é fechado sob a multiplicação de  $G$ . O unitário de  $G$  sempre forma um subgrupo de  $G$ .
- Se  $gg'g^{-1}$  é um elemento de  $G'$  para qualquer  $g$  de  $G$  e  $g'$  de  $G'$ , então  $G'$  é denominado **subgrupo invariante** de  $G$ . O subgrupo constituído do unitário é invariante. Se os elementos do grupo forem matrizes quadradas, então  $gg'g^{-1}$  corresponde a uma transformação de similaridade (veja a Equação (3.100)).
- Se  $ab = ba$  para todos  $a, b$  de  $G$ , o grupo é denominado **abeliano**, isto é, a ordem não importa nos produtos; a multiplicação comutativa costuma ser denotada por um sinal  $+$ . Exemplos são espaços vetoriais cujo unitário é o vetor zero e  $-a$  é o inverso de  $a$  para todos os elementos  $a$  de  $G$ .

### Exemplo 4.1.1 GRUPOS ORTOGONAIS E UNITÁRIOS

Matrizes ortogonais  $n \times n$  formam o grupo  $O(n)$ , e  $SO(n)$  se seus determinantes são  $+1$  ( $S$  quer dizer “especial”). Se  $\tilde{O}_i = O_i^{-1}$  para  $i = 1$  e  $2$  (veja a Seção 3.3 para matrizes ortogonais) são elementos de  $O(n)$ , então o produto

$$\widetilde{O_1 O_2} = \tilde{O}_2 \tilde{O}_1 = O_2^{-1} O_1^{-1} = (O_1 O_2)^{-1}$$

também é uma matriz ortogonal em  $O(n)$ , provando assim o fechamento sob multiplicação (de matrizes). O inverso é a matriz transposta (ortogonal). O unitário do grupo é a matriz unitária  $n$  dimensional  $1_n$ . Uma matriz ortogonal real  $n \times n$  tem  $n(n - 1)/2$  parâmetros independentes. Para  $n = 2$ , há somente um parâmetro: um ângulo. Para  $n = 3$ , há três parâmetros independentes: os três ângulos de Euler da Seção 3.3.

Se  $\tilde{O}_i = O_i^{-1}$  (para  $i = 1$  e  $2$ ) são elementos de  $SO(n)$ , então o fechamento ainda exige provar que seu produto tem determinante  $+1$ , o que resulta do teorema do produto no Capítulo 3.

Do mesmo modo, matrizes unitárias  $n \times n$  formam o grupo  $U(n)$ , e  $SU(n)$  se seus determinantes são  $+1$ . Se  $U_i^\dagger = U_i^{-1}$  (veja a Seção 3.4 para matrizes unitárias) são elementos de  $U(n)$ , então

$$(U_1 U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger = U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2)^{-1},$$

portanto, o produto é unitário e um elemento de  $U(n)$ , provando assim fechamento sob multiplicação. Cada matriz unitária tem uma inversa (sua adjunta hermitiana) que, novamente, é unitária.

Se  $U_i^\dagger = U_i^{-1}$  são elementos de  $SU(n)$ , então o fechamento requer que provemos que seu produto também tem determinante  $+1$ , o que resulta do teorema do produto no Capítulo 3. ■

- Grupos ortogonais são denominados **grupos de Lie**; isto é, eles dependem de parâmetros que variam continuamente (os ângulos de Euler e sua generalização para dimensões mais altas); eles são **compactos** porque os ângulos variam em intervalos fechados finitos (que contêm o limite de qualquer seqüência convergente de ângulos). Grupos unitários também são compactos. Translações formam um grupo não-compacto porque o limite de translações com distância  $d \rightarrow \infty$  não faz parte do grupo. O grupo de Lorentz também não é compacto.

### Homomorfismo, Isomorfismo

Pode haver uma correspondência entre os elementos de dois grupos: um para um, dois para um ou muitos para um. Se essa correspondência preservar a multiplicação do grupo, dizemos que os dois grupos são **homomórficos**. Uma correspondência homomórfica muito importante entre o grupo de rotação  $SO(3)$  e o grupo unitário  $SU(2)$  é desenvolvida na Seção 4.2. Se a correspondência for um-para-um, ainda preservando a multiplicação de grupos,<sup>3</sup> então os grupos são **isomórficos**.

- Se um grupo  $G$  é homomórfico a um grupo de matrizes  $G'$ , então  $G'$  é denominado **representação** de  $G$ . Se  $G$  e  $G'$  são isomórficos, a representação é denominada **fiel**. Há muitas representações de grupos; elas não são únicas.

### Exemplo 4.1.2 ROTAÇÕES

Um outro exemplo instrutivo para um grupo é o conjunto de rotações de coordenadas em sentido anti-horário do espaço euclidiano tridimensional ao redor de seu eixo  $z$ . Pelo Capítulo 3 sabemos que tal rotação é descrita por uma

<sup>3</sup>Suponha que os elementos de um grupo sejam rotulados  $g_i$ , os elementos de um segundo grupo,  $h_i$ . Então  $g_i \leftrightarrow h_i$  é uma correspondência um-para-um para todos os valores de  $i$ . Se  $g_i g_j = g_k$  e  $h_i h_j = h_k$ , então  $g_k$  e  $h_k$  devem ser os elementos correspondentes do grupo.





transformação linear das coordenadas envolvendo uma matriz  $3 \times 3$  composta de três rotações que dependem dos ângulos de Euler. Se o eixo  $z$  é fixo, a transformação linear é através de um ângulo  $\varphi$  do sistema de coordenadas  $xy$  para uma nova orientação na Equação (1.8), Figura 1.6, e Seção 3.3:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

envolve só um ângulo da rotação ao redor do eixo  $z$ . Como mostramos no Capítulo 3, a transformação linear de duas rotações sucessivas envolve o produto das matrizes correspondentes à soma dos ângulos. O produto corresponde a duas rotações,  $R_z(\varphi_1)R_z(\varphi_2)$ , e é definido pela rotação em primeiro lugar pelo ângulo  $\varphi_2$  e então por  $\varphi_1$ . Conforme a Equação (3.29), isso corresponde ao produto das submatrizes ortogonais  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \text{sen } \varphi_1 \\ -\text{sen } \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \text{sen } \varphi_2 \\ -\text{sen } \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -\text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

usando as fórmulas de adição para as funções trigonométricas. A unidade no canto inferior direito da matriz na Equação (4.1) também é reproduzida na multiplicação. O produto é claramente uma rotação, representada pela matriz ortogonal com ângulo  $\varphi_1 + \varphi_2$ . A multiplicação associativa de grupos corresponde à multiplicação associativa de matrizes. É **comutativa**, ou **abeliana**, porque a ordem em que essas rotações são executadas não importa. A inversa da rotação com ângulo  $\varphi$  é a rotação com o ângulo  $-\varphi$ . A unidade corresponde ao ângulo  $\varphi = 0$ . Eliminando os vetores de coordenadas na Equação (4.1), podemos associar a matriz da transformação linear com cada rotação, que é uma multiplicação de grupos que preserva o mapeamento um para um, um isomorfismo: as matrizes formam uma representação fiel do grupo de rotação. A unidade no canto direito também é supérflua, assim como os vetores de coordenadas, e pode ser suprimida. Isso define um outro isomorfismo e representação pelas submatrizes  $2 \times 2$ :

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

O nome do grupo é  $\text{SO}(2)$ , se o ângulo  $\varphi$  variar continuamente de 0 para  $2\pi$ ;  $\text{SO}(2)$  tem infinitamente muitos elementos e é compacto.

O grupo de rotações  $R_z$  é obviamente isomórfico ao grupo de rotações na Equação (4.3). A unidade com  $\varphi = 0$  e a rotação com  $\varphi = \pi$  formam um subgrupo finito. Os subgrupos finitos com ângulos  $2\pi m/n$ , sendo  $n$  um inteiro,  $m = 0, 1, \dots, n-1$  são **cíclicos**; isto é, as rotações  $R(2\pi m/n) = R(2\pi/n)^m$ . ■

Em seguida discutiremos somente os grupos de rotação  $\text{SO}(n)$  e grupos unitários  $\text{SU}(n)$  entre os clássicos grupos de Lie. (Mais exemplos de grupos finitos serão dados na Seção 4.7.)

### Representações — Redutível e Irredutível

A representação de elementos de um grupo por matrizes é uma técnica muito poderosa e tem sido adotada quase universalmente pelos físicos. A utilização de matrizes não impõe nenhuma restrição significativa. Pode-se mostrar que os elementos de qualquer grupo finito e dos grupos contínuos das Seções 4.2-4.4 podem ser representados por matrizes. Exemplos são as rotações descritas na Equação (4.3).

Para ilustrar como representações matriciais surgem de uma simetria, considere a equação estacionária de Schrödinger – ou alguma outra equação de autovalor, tal como  $lv_i = I_i v_i$ , para os principais momentos de inércia de um corpo rígido na mecânica clássica, como por exemplo,

$$H\psi = E\psi. \quad (4.4)$$

Vamos admitir que a hamiltoniana  $H$  permaneça invariante sob um grupo  $G$  de transformações  $R$  em  $G$  (rotações de coordenadas, por exemplo, para um potencial central  $V(r)$  na hamiltoniana  $H$ ); isto é,

$$H_R = RHR^{-1} = H, \quad RH = HR. \quad (4.5)$$

Agora considere uma solução  $\psi$  da Equação (4.4) e a “rotacione”:  $\psi \rightarrow R\psi$ . Então,  $R\psi$  tem a **mesma energia E** porque, multiplicando a Equação (4.4), por  $R$  e usando a Equação (4.5), temos como resultado

$$\boxed{RH\psi = E(R\psi) = (RHR^{-1})R\psi = H(R\psi)}. \quad (4.6)$$

Em outras palavras, todas as soluções rotacionadas  $R\psi$  são **degeneradas** em energia ou formam o que os físicos denominam **multiplete**. Por exemplo, os estados de spin-up (para cima) e spin-down (para baixo) de um elétron ligado no estado fundamental do hidrogênio formam um dubleto, e os estados cujos números quânticos de projeção são  $m = -l, -l + 1, \dots, l$  do momento angular orbital  $l$  formam um multiplete com  $2l + 1$  estados de base.

Vamos admitir que esse espaço vetorial  $V_\psi$  de soluções transformadas tenha uma dimensão finita  $n$ . Sejam  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  uma base. Visto que  $R\psi_j$  é um membro do multiplete, podemos expandi-lo em termos de suas bases

$$R\psi_j = \sum_k r_{jk}\psi_k. \quad (4.7)$$

Assim, a cada  $R$  em  $G$  podemos associar uma matriz  $(r_{jk})$ . Exatamente como no Exemplo 4.1.2, duas rotações sucessivas correspondem ao produto de suas matrizes, portanto esse mapa  $R \rightarrow (r_{jk})$  é uma representação de  $G$ . Para que uma representação seja **irredutível**, é necessário que possamos tomar qualquer elemento de  $V_\psi$  e, fazendo uma rotação de **todos** os elementos  $R$  de  $G$ , transformá-lo em **todos** os outros elementos de  $V_\psi$ . Se nem todos os elementos de  $V_\psi$  forem alcançados, então  $V_\psi$  se subdivide em uma soma direta de dois ou mais subespaços vetoriais,  $V_\psi = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$ , que são mapeados sobre si mesmos, rotacionando seus elementos. Por exemplo, o estado  $2s$  e os estados  $2p$  do número quântico principal  $n = 2$  do átomo de hidrogênio têm a mesma energia (isto é, são degenerados) e formam uma representação redutível porque o estado  $2s$  não pode ser rotacionado para estados  $2p$  e vice-versa (o momento angular é conservado sob rotações). Nesse caso a representação é denominada **redutível**. Então, podemos achar uma base em  $V_\psi$  (isto é, existe uma matriz unitária  $U$ ) de modo que

$$U(r_{jk})U^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

para **todo**  $R$  de  $G$ , e **todas** as matrizes  $(r_{jk})$  têm forma de blocos diagonais **similar**. Aqui,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$  são matrizes de dimensões mais baixas do que  $(r_{jk})$  alinhadas ao longo da diagonal e os  $\mathbf{0}$ 's são matrizes compostas de zeros. Podemos dizer que a representação foi decomposta em  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots$  junto com  $V_\psi = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$ .

As representações irredutíveis desempenham um papel na teoria dos grupos que é aproximadamente análogo ao dos vetores unitários da análise vetorial. Elas são as representações mais simples; todas as outras podem ser montadas a partir delas. (Veja a Seção 4.4 sobre coeficientes de Clebsch-Gordan e *tableaux* de Young.)

## Exercícios

- 4.1.1** Mostre que uma matriz ortogonal  $n \times n$  tem  $n(n - 1)/2$  parâmetros independentes.  
*Sugestão:* A condição de ortogonalidade, Equação (3.71), provê limitações.
- 4.1.2** Mostre que uma matriz unitária  $n \times n$  tem  $n^2 - 1$  parâmetros independentes.  
*Sugestão:* Cada elemento pode ser complexo, dobrando o número de parâmetros possíveis. Algumas das equações de restrição também são complexas e contam como duas restrições.
- 4.1.3** O grupo linear especial  $SL(2)$  consiste em todas as matrizes  $2 \times 2$  (com elementos complexos) que têm um determinante  $+1$ . Mostre que essas matrizes formam um grupo.  
*Nota:* O grupo  $SL(2)$  pode ser relacionado com o grupo completo de Lorentz na Seção 4.4 por uma relação muito semelhante à existente entre o grupo  $SU(2)$  e o grupo  $SO(3)$ .
- 4.1.4** Mostre que as rotações ao redor do eixo  $z$  formam um subgrupo de  $SO(3)$ . Este subgrupo é invariante?
- 4.1.5** Mostre que, se  $R, S, T$  são elementos de um grupo  $G$ , de modo que  $RS = T$  e  $R \rightarrow (r_{ik}), S \rightarrow (s_{ik})$  é uma representação de acordo com a Equação (4.7), então

$$(r_{ik})(s_{ik}) = \left( t_{ik} = \sum_n r_{in}s_{nk} \right),$$

isto é, a multiplicação de grupos traduz-se em multiplicação de matrizes para qualquer representação de grupo.



## 4.2 Geradores de Grupos Contínuos

Uma propriedade característica de grupos contínuos, conhecidos como grupos de Lie, é que os parâmetros de um elemento de produto são funções analíticas<sup>4</sup> dos parâmetros dos fatores. A natureza analítica das funções (diferenciabilidade) nos permite desenvolver o conceito de gerador e reduzir o estudo do grupo inteiro a um estudo dos elementos do grupo na vizinhança do elemento de identidade.

A idéia essencial de Lie era estudar elementos  $R$  em um grupo  $G$  que fossem infinitesimalmente próximos à unidade de  $G$ . Vamos considerar o grupo  $SO(2)$  um exemplo simples. As matrizes de rotação  $2 \times 2$  na Equação (4.2) podem ser escritas em forma exponencial usando a identidade de Euler, Equação (3.170a), como

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = 1_2 \cos \varphi + i\sigma_2 \text{sen } \varphi = \exp(i\sigma_2 \varphi). \quad (4.9)$$

Pela forma exponencial é óbvio que a multiplicação dessas matrizes é equivalente à adição dos argumentos

$$R(\varphi_2)R(\varphi_1) = \exp(i\sigma_2 \varphi_2) \exp(i\sigma_2 \varphi_1) = \exp(i\sigma_2(\varphi_1 + \varphi_2)) = R(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Rotações próximas a 1 têm ângulo pequeno  $\varphi \approx 0$ .

Isso sugere que procuremos uma representação exponencial

$$R = \exp(i\varepsilon S) = 1 + i\varepsilon S + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

para elementos do grupo  $R$  em  $G$  próximos da unidade 1. As transformações infinitesimais são  $\varepsilon S$ , e os  $S$  são denominados geradores de  $G$ . Eles formam um espaço linear porque a multiplicação dos elementos do grupo  $R$  se traduz na adição de geradores  $S$ . A dimensão desse espaço vetorial (sobre os números complexos) é a **ordem** de  $G$ , isto é, o número de geradores linearmente independentes do grupo.

Se  $R$  é uma rotação, ela não altera o elemento de volume do espaço coordenado que ela rotaciona, isto é,  $\det(R) = 1$ , e podemos usar a Equação (3.171) para ver que

$$\det(R) = \exp(\text{traço}(\ln R)) = \exp(i\varepsilon \text{traço}(S)) = 1$$

indica que  $\varepsilon \text{traço}(S) = 0$  e, dividindo pelo parâmetro pequeno, porém não-zero,  $\varepsilon$ , que **geradores têm traços nulos**.

$$\text{traço}(S) = 0. \quad (4.11)$$

Esse é o caso não somente dos grupos de rotação  $SO(n)$  mas também dos grupos unitários  $SU(n)$ .

Se  $R$  de  $G$  na Equação (4.10) é unitário, então  $S^\dagger = S$  é hermitiano, o que também é o caso de  $SO(n)$  e  $SU(n)$ . Isso explica por que o  $i$  extra foi inserido na Equação (4.10).

A seguir, vamos desmembrar a unidade em quatro etapas, de maneira semelhante ao transporte paralelo na geometria diferencial. Expandimos os elementos do grupo

$$\begin{aligned} R_i &= \exp(i\varepsilon_i S_i) = 1 + i\varepsilon_i S_i - \frac{1}{2}\varepsilon_i^2 S_i^2 + \dots, \\ R_i^{-1} &= \exp(-i\varepsilon_i S_i) = 1 - i\varepsilon_i S_i - \frac{1}{2}\varepsilon_i^2 S_i^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.12)$$

até a segunda ordem no parâmetro de grupo pequeno  $\varepsilon_i$  porque os termos lineares e diversos termos quadráticos são cancelados no produto (Figura 4.1)

$$\begin{aligned} R_i^{-1} R_j^{-1} R_i R_j &= 1 + \varepsilon_i \varepsilon_j [S_j, S_i] + \dots, \\ &= 1 + \varepsilon_i \varepsilon_j \sum_k c_{ji}^k S_k + \dots, \end{aligned} \quad (4.13)$$

quando a Equação (4.12) é substituída na Equação (4.13). A última linha é válida porque o produto na Equação (4.13) é, novamente, um elemento de grupo,  $R_{ij}$ , próximo à unidade no grupo  $G$ . Por conseguinte, seu expoente deve ser uma combinação linear dos geradores  $S_k$ , e seu parâmetro infinitesimal de grupo tem de ser proporcional ao produto  $\varepsilon_i \varepsilon_j$ . Comparando ambas as linhas na Equação (4.13), encontramos a relação de **fechamento** dos geradores do grupo de Lie,  $G$ ,

$$[S_i, S_j] = \sum_k c_{ij}^k S_k. \quad (4.14)$$

<sup>4</sup>Aqui, *analítica* significa ter derivadas de todas as ordens.

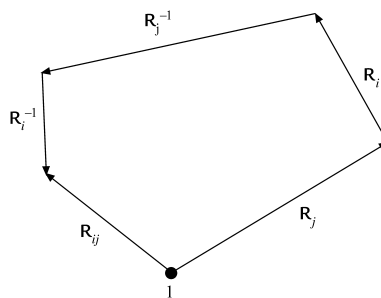


Figura 4.1: Ilustração da Equação (4.13).

Os coeficientes  $c_{ij}^k$  são as constantes estruturais do grupo  $G$ . Uma vez que o comutador na Equação (4.14) é anti-simétrico em  $i$  e  $j$ , o mesmo acontece com as constantes estruturais nos índices inferiores,

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \tag{4.15}$$

Se o comutador na Equação (4.14) for tomado como uma lei de multiplicação de geradores, vemos que o espaço vetorial de geradores se torna uma álgebra, a **álgebra de Lie**  $\mathcal{G}$  do grupo  $G$ . Uma **álgebra** tem duas estruturas de grupo, um produto comutativo denotado por um símbolo  $+$  (essa é a adição de geradores infinitesimais de um grupo de Lie) e uma multiplicação (o comutador de geradores). Muitas vezes, uma álgebra é um espaço vetorial com uma multiplicação, tal como um anel de matrizes quadradas. Para  $SU(l + 1)$ , a álgebra de Lie é denominada  $\mathcal{A}_l$ , para  $SO(2l + 1)$  é  $\mathcal{B}_l$ , e para  $SO(2l)$  é  $\mathcal{D}_l$ , em que  $l = 1, 2, \dots$  é um inteiro positivo, denominado mais adiante **grau** do grupo de Lie  $G$  ou de sua álgebra  $\mathcal{G}$ .

Por fim, a **identidade de Jacobi** vale para todos os comutadores duplos

$$[[S_i, S_j], S_k] + [[S_j, S_k], S_i] + [[S_k, S_i], S_j] = 0, \tag{4.16}$$

o que é verificado com facilidade usando a definição de qualquer comutador  $[A, B] \equiv AB - BA$ . Quando a Equação (4.14) é substituída na Equação (4.16) encontramos uma outra restrição às constantes estruturais,

$$\sum_m \{c_{ij}^m [S_m, S_k] + c_{jk}^m [S_m, S_i] + c_{ki}^m [S_m, S_j]\} = 0. \tag{4.17}$$

Inserindo novamente a Equação (4.14), a Equação (4.17) implica

$$\sum_{mn} \{c_{ij}^m c_{mk}^n S_n + c_{jk}^m c_{mi}^n S_n + c_{ki}^m c_{mj}^n S_n\} = 0, \tag{4.18}$$

em que o fator comum  $S_n$  (e o somatório sobre  $n$ ) pode ser descartado porque os geradores são linearmente independentes. Daí,

$$\sum_m \{c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n\} = 0. \tag{4.19}$$

As relações (4.14), (4.15) e (4.19) formam a base das álgebras de Lie pelas quais elementos finitos do grupo de Lie próximos à sua unidade podem ser reconstruídos.

Voltando à Equação (4.5), a inversa de  $R$  é  $R^{-1} = \exp(-i\varepsilon S)$ . Expandimos  $H_R$  de acordo com a fórmula de Baker-Hausdorff, Equação (3.172),

$$H = H_R = \exp(i\varepsilon S)H \exp(-i\varepsilon S) = H + i\varepsilon[S, H] - \frac{1}{2}\varepsilon^2[S[S, H]] + \dots \tag{4.20}$$

Descartamos  $H$  da Equação (4.20), dividimos pelo  $\varepsilon$ , pequeno (porém não-zero), e deixamos que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Então a Equação (4.20) indica que o comutador

$$\boxed{[S, H] = 0.} \tag{4.21}$$

Se  $S$  e  $H$  são matrizes hermitianas, a Equação (4.21) implica que  $S$  e  $H$  podem ser diagonalizadas simultaneamente e têm autovetores comuns (para matrizes, veja a Seção 3.5; para operadores, veja o lema de Schur na Seção 4.3). Se  $S$  e  $H$  são operadores diferenciais como a hamiltoniana e o momento angular orbital na mecânica quântica,



então a Equação (4.21) indica que  $S$  e  $H$  têm autofunções comuns e que os autovalores degenerados de  $H$  podem ser distinguidos pelos autovalores dos geradores  $S$ . Essas autofunções e autovalores,  $s$ , são soluções de equações diferenciais separadas,  $S\psi_s = s\psi_s$ , portanto a teoria dos grupos (isto é, as simetrias) leva à separação de variáveis para uma equação diferencial parcial que é invariante sob as transformações do grupo.

Por exemplo, vamos tomar a hamiltoniana de uma única partícula,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \mathbf{L}^2 + V(r),$$

que é invariante sob  $\text{SO}(3)$  e, portanto, uma função da distância radial  $r$ , do gradiente radial e do operador rotacionalmente invariante  $\mathbf{L}^2$  de  $\text{SO}(3)$ . Substituindo o operador de momento angular orbital  $\mathbf{L}^2$  por seu autovalor  $l(l+1)$ , obtemos a equação radial de Schrödinger (ODE – equação diferencial ordinária),

$$HR_l(r) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] R_l(r) = E_l R_l(r),$$

em que  $R_l(r)$  é a função de onda radial.

Para simetria cilíndrica, a invariância de  $H$  sob rotações ao redor do eixo  $z$  exigiria que  $H$  fosse independente do ângulo de rotação  $\varphi$ , o que leva à ODE

$$HR_m(z, \rho) = E_m R_m(z, \rho),$$

sendo  $m$  o autovalor de  $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ , o componente  $z$  do operador do momento angular orbital. Se quiser examinar mais exemplos, veja o método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais na Seção 9.3 e funções especiais no Capítulo 12. Esta é, de longe, a mais importante aplicação da teoria de grupo na mecânica quântica.

Nas subseções seguintes estudaremos exemplos de grupos ortogonais e unitários para entender melhor os conceitos gerais desta seção.

### Grupos de Rotação $\text{SO}(2)$ e $\text{SO}(3)$

Para  $\text{SO}(2)$  como definido pela Equação (4.3) há somente um gerador linearmente independente,  $\sigma_2$ , e a ordem de  $\text{SO}(2)$  é 1. Obtemos  $\sigma_2$  pela Equação (4.9) por diferenciação na unidade de  $\text{SO}(2)$ , isto é,  $\varphi = 0$ ,

$$-idR(\varphi)/d\varphi|_{\varphi=0} = -i \left( \begin{array}{cc} -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\text{sen } \varphi \end{array} \right) \Big|_{\varphi=0} = -i \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) = \sigma_2. \quad (4.22)$$

Para as rotações  $R_z(\varphi)$  ao redor do eixo  $z$  descritas pela Equação (4.1), o gerador é dado por

$$-idR_z(\varphi)/d\varphi|_{\varphi=0} = S_z = \left( \begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (4.23)$$

em que o fator  $i$  é inserido para fazer de  $S_z$  um hermitiano. Então, a rotação  $R_z(\delta\varphi)$  através de um ângulo infinitesimal  $\delta\varphi$  pode ser expandida até a primeira ordem em  $\delta\varphi$  pequeno como

$$R_z(\delta\varphi) = 1_3 + i\delta\varphi S_z. \quad (4.24)$$

Uma rotação finita  $R(\varphi)$  pode ser composta de rotações infinitesimais sucessivas

$$R_z(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2) = (1 + i\delta\varphi_1 S_z)(1 + i\delta\varphi_2 S_z). \quad (4.25)$$

Seja  $\delta\varphi = \varphi/N$  para  $N$  rotações com  $N \rightarrow \infty$ . Então,

$$R_z(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} [1 + (i\varphi/N)S_z]^N = \exp(i\varphi S_z). \quad (4.26)$$

Esta forma identifica  $S_z$  como o gerador do grupo  $R_z$ , um subgrupo abeliano de  $\text{SO}(3)$ , o grupo de rotações em três dimensões com determinante  $+1$ . Cada matriz  $3 \times 3$   $R_z(\varphi)$  é ortogonal e, portanto, unitária, e  $\text{traço}(S_z) = 0$ , de acordo com a Equação (4.11).

Por diferenciação das rotações de coordenadas

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \text{sen } \psi \\ 0 & -\text{sen } \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

obtemos os geradores

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

de  $R_x(R_y)$ , o subgrupo de rotações ao redor dos eixos.

### Rotação de Funções e Momento Angular Orbital

Na discussão precedente, os elementos de grupo são matrizes que rotacionam as coordenadas. Qualquer sistema físico que esteja sendo descrito é mantido fixo. Agora vamos manter as coordenadas fixas e rotacionar uma função  $\psi(x, y, z)$  relativa às nossas coordenadas fixas. Com  $R$  para rotacionar as coordenadas,

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \quad (4.29)$$

definimos  $R$  sobre  $\psi$  por

$$R\psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) \equiv \psi(\mathbf{x}'). \quad (4.30)$$

Traduzindo em palavras,  $R$  opera sobre a função  $\psi$ , criando uma **nova função**  $\psi'$  que é numericamente igual a  $\psi(\mathbf{x}')$ , em que  $\mathbf{x}'$  são as coordenadas rotacionadas por  $R$ . Se  $R$  rotaciona as coordenadas em sentido anti-horário, o efeito de  $R$  é rotacionar o padrão da função  $\psi$  em sentido horário.

Voltando às Equações (4.30) e (4.1), considere novamente uma rotação infinitesimal,  $\varphi \rightarrow \delta\varphi$ . Então, usando  $R_z$  Equação (4.1), obtemos

$$R_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) = \psi(x + y\delta\varphi, y - x\delta\varphi, z). \quad (4.31)$$

O lado direito pode ser expandido em primeira ordem no  $\delta\varphi$  pequeno para resultar

$$\begin{aligned} R_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) &= \psi(x, y, z) - \delta\varphi\{x\partial\psi/\partial y - y\partial\psi/\partial x\} + O(\delta\varphi)^2 \\ &= (1 - i\delta\varphi L_z)\psi(x, y, z), \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo que a expressão diferencial entre chaves é o momento angular orbital angular  $iL_z$  (Exercício 1.8.7). Visto que uma rotação ao redor do eixo  $z$  primeiro de  $\varphi$  e em seguida de  $\delta\varphi$  é dada por

$$R_z(\varphi + \delta\varphi)\psi = R_z(\delta\varphi)R_z(\varphi)\psi = (1 - i\delta\varphi L_z)R_z(\varphi)\psi, \quad (4.33)$$

temos (como uma equação de operador)

$$\frac{dR_z}{d\varphi} = \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{R_z(\varphi + \delta\varphi) - R_z(\varphi)}{\delta\varphi} = -iL_z R_z(\varphi). \quad (4.34)$$

Nesta forma, a Equação (4.34) é integrada de imediato para

$$R_z(\varphi) = \exp(-i\varphi L_z). \quad (4.35)$$

Note que  $R_z(\varphi)$  rotaciona funções (em sentido horário) relativas a coordenadas fixas e que  $L_z$  é a componente  $z$  do momento angular orbital  $\mathbf{L}$ . A constante de integração é fixada pela condição de fronteira  $R_z(0) = 1$ .

Como sugerido pela Equação (4.32),  $L_z$  relaciona-se a  $S_z$  por

$$L_z = (x, y, z)S_z \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (4.36)$$

portanto,  $L_x, L_y$  e  $L_z$  satisfazem as mesmas relações de comutação,

$$\boxed{[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k}, \quad (4.37)$$

que  $S_x, S_y$  e  $S_z$  e dão como resultado as mesmas constantes estruturais  $i\varepsilon_{ijk}$  de  $SO(3)$ .



### Homomorfismo $SU(2) — SO(3)$

Uma vez que matrizes unitárias  $2 \times 2$  transformam vetores bidimensionais complexos preservando a norma desses vetores, elas representam as transformações mais gerais (uma base em espaço de Hilbert) de funções de onda de spin  $\frac{1}{2}$  em mecânica quântica não-relativista. Por convenção, os estados de base desse sistema são escolhidos como

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

correspondendo a estados de spin  $\frac{1}{2}$  dirigidos para cima (*up*) e para baixo (*down*), respectivamente. Podemos mostrar que o grupo **unitário especial**  $SU(2)$  de matrizes unitárias  $2 \times 2$  com determinante  $+1$  tem como geradores todas as três matrizes  $\sigma_i$  de Pauli (enquanto as rotações da Equação (4.3) formam um subgrupo abeliano unidimensional). Portanto,  $SU(2)$  é de ordem 3 e depende de três parâmetros contínuos reais  $\xi, \eta, \zeta$ , que costumam ser denominados parâmetros de **Cayley-Klein**. Para construir seu elemento geral, começamos com a observação de que aquelas matrizes  $2 \times 2$  ortogonais são matrizes unitárias reais, portanto formam um subgrupo de  $SU(2)$ . Também vemos que

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

é unitária para um ângulo real  $\alpha$  com determinante  $+1$ . Portanto, essas matrizes simples e evidentemente unitárias formam um outro subgrupo de  $SU(2)$  do qual podemos obter todos os elementos de  $SU(2)$ , isto é, a matriz  $2 \times 2$  unitária geral de determinante  $+1$ . Para uma função de onda de spin  $\frac{1}{2}$  de dois componentes da mecânica quântica, essa matriz unitária diagonal corresponde à multiplicação da função de onda com spin para cima por um vetor de fase  $e^{i\alpha}$  e da componente com spin para baixo pelo fator de fase inverso. Usando o ângulo real  $\eta$  em vez de  $\varphi$  para a matriz de rotação e então multiplicando pelas matrizes unitárias diagonais, construímos uma matriz unitária  $2 \times 2$  que depende de três parâmetros e é, claramente, um elemento mais geral de  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \text{sen } \eta \\ -\text{sen } \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos \eta & e^{i\alpha} \text{sen } \eta \\ -e^{-i\alpha} \text{sen } \eta & e^{-i\alpha} \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\beta)} \cos \eta & e^{i(\alpha-\beta)} \text{sen } \eta \\ -e^{-i(\alpha-\beta)} \text{sen } \eta & e^{-i(\alpha+\beta)} \cos \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definindo  $\alpha + \beta \equiv \xi, \alpha - \beta \equiv \zeta$ , na verdade construímos o elemento geral de  $SU(2)$ :

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\zeta} \text{sen } \eta \\ -e^{-i\zeta} \text{sen } \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Para ver isso, escrevemos o elemento geral  $SU(2)$  como  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  com números complexos  $a, b, c, d$ , de modo que  $\det(U) = 1$ . Escrevendo unitariedade,  $U^\dagger = U^{-1}$ , e usando a Equação (3.50) para a inversa, obtemos

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

indicando que  $c = -b^*, d = a^*$ , como mostra a Equação (4.38). É fácil verificar que o determinante  $\det(U) = 1$  e que  $U^\dagger U = 1 = U U^\dagger$  são válidos.

Para obter os geradores, diferenciamos (e desprezamos fatores gerais irrelevantes):

$$-i\partial U / \partial \xi|_{\xi=0, \eta=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3, \quad (4.39a)$$

$$-i\partial U / \partial \eta|_{\eta=0, \zeta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2. \quad (4.39b)$$

Para evitar um fator  $1/\sin \eta$  para  $\eta \rightarrow 0$  na diferenciação com relação a  $\zeta$ , desta vez usamos o lado direito da Equação (4.38) para  $U$  para imaginários puros  $b = i\beta$  com  $\beta \rightarrow 0$ , de modo que  $a = \sqrt{1-\beta^2}$  de  $|a|^2 + |b|^2 = a^2 + \beta^2 = 1$ . Diferenciando tal  $U$ , obtemos o terceiro gerador,

$$-i \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta^2} & i\beta \\ i\beta & \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} \Big|_{\beta=0} = -i \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & i \\ -i & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \Big|_{\beta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1. \quad (4.39c)$$

As matrizes de Pauli são todas de traço nulo e hermitianas.

Tendo as matrizes de Pauli como geradores, os elementos  $U_1, U_2, U_3$  de  $SU(2)$  podem ser gerados por

$$U_1 = \exp(ia_1\sigma_1/2), \quad U_2 = \exp(ia_2\sigma_2/2), \quad U_3 = \exp(ia_3\sigma_3/2). \quad (4.40)$$

Os três parâmetros  $a_i$  são reais. O fator extra  $1/2$  está presente nos expoentes para fazer com que  $S_i = \sigma_i/2$  satisfaça as mesmas relações de comutação,

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k, \quad (4.41)$$

que o momento angular na Equação (4.37).

Para relacionar e comparar nossos resultados, a Equação (4.3) dá um operador de rotação para rotacionar as coordenadas cartesianas no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Usando a matriz do momento angular  $S_3$ , temos como o operador de rotação correspondente em um espaço bidimensional (complexo)  $R_z(\varphi) = \exp(i\varphi\sigma_3/2)$ . Para rotacionar a função vetorial de onda de duas componentes (spinor) ou uma partícula de spin  $1/2$  em relação a coordenadas fixas, o operador de rotação correspondente é  $R_z(\varphi) = \exp(-i\varphi\sigma_3/2)$ , de acordo com a Equação (4.35).

De modo mais geral, usando a identidade de Euler, Equação (3.170a), na Equação (4.40) obtemos

$$U_j = \cos\left(\frac{a_j}{2}\right) + i\sigma_j \sin\left(\frac{a_j}{2}\right). \quad (4.42)$$

Aqui, o parâmetro  $a_j$  aparece como um ângulo, o coeficiente de um momento angular  $\varphi$  parecido com uma matriz na Equação (4.26). A seleção de matrizes de Pauli corresponde às rotações do ângulo de Euler descritas na Seção 3.3.

Como acabamos de ver, os elementos de  $SU(2)$  descrevem rotações em um espaço bidimensional complexo que deixam  $|z_1|^2 + |z_2|^2$  invariante. O determinante é  $+1$ . Há três parâmetros reais independentes. Nosso grupo ortogonal real  $SO(3)$  claramente descreve rotações em um espaço tridimensional ordinário com a importante característica de deixar  $x^2 + y^2 + z^2$  **invariante**. E também há três parâmetros reais independentes. As interpretações da rotação e a igualdade de números de parâmetros sugerem a existência de alguma correspondência entre os grupos  $SU(2)$  e  $SO(3)$ . Desenvolvemos aqui esta correspondência.

A operação de  $SU(2)$  sobre uma matriz é dada por uma transformação unitária, Equação (4.5), com  $R = U$  e Figura 4.2:

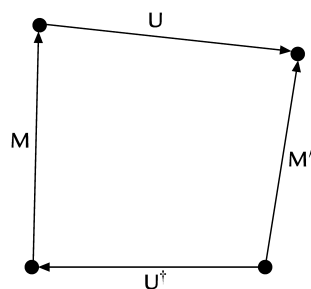


Figura 4.2: Ilustração de  $M' = UMU^\dagger$  na Equação (4.43).

$$M' = UMU^\dagger. \quad (4.43)$$





Tomando  $M$  como uma matriz  $2 \times 2$ , notamos que qualquer matriz  $2 \times 2$  pode ser escrita como uma combinação linear da matriz unidade com as três matrizes de Pauli da Seção 3.4. Seja  $M$  a matriz de traço zero,

$$M = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

sendo que a matriz unidade não entra. Uma vez que o traço é invariante sob uma transformação de similaridade unitária (Exercício 3.3.9),  $M'$  deve ter a mesma forma,

$$M' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

O determinante também é invariante sob uma transformação unitária (Exercício 3.3.10). Por conseguinte,

$$-(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad (4.46)$$

ou  $x^2 + y^2 + z^2$  é invariante sob essa operação de  $SU(2)$ , exatamente como acontece com  $SO(3)$ . Operações de  $SU(2)$  sobre  $M$  devem produzir rotações das coordenadas  $x, y, z$  que ali aparecem. Isso sugere que  $SU(2)$  e  $SO(3)$  podem ser isomórficos ou, ao menos, homomórficos.

A que corresponde essa operação de  $SU(2)$  é o problema que abordaremos agora, considerando casos especiais. Voltando à Equação (4.38), seja  $a = e^{i\xi}$  e  $b = 0$  ou

$$U_3 = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Adiantando-nos à Equação (4.51), damos um índice inferior 3 a essa  $U$ .

Executando uma transformação de similaridade unitária, Equação (4.43), em cada uma das três  $\sigma$  de Pauli de  $SU(2)$ , temos

$$\begin{aligned} U_3\sigma_1U_3^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\xi} \\ e^{-2i\xi} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Expressamos esse resultado em termos das  $\sigma_i$  de Pauli, como na Equação (4.44), para obter

$$U_3x\sigma_1U_3^\dagger = x\sigma_1 \cos 2\xi - x\sigma_2 \text{sen} 2\xi. \quad (4.49)$$

De modo semelhante,

$$\begin{aligned} U_3y\sigma_2U_3^\dagger &= y\sigma_1 \text{sen} 2\xi + y\sigma_2 \cos 2\xi, \\ U_3z\sigma_3U_3^\dagger &= z\sigma_3. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por essas expressões de ângulos duplos, vemos que temos de começar com um **meio-ângulo**:  $\xi = \alpha/2$ . Então, somando as Equações (4.49) e (4.50) e comparando com as Equações (4.44) e (4.45), obtemos

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \text{sen} \alpha \\ y' &= -x \text{sen} \alpha + y \cos \alpha \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (4.51)$$

A transformação unitária  $2 \times 2$  usando  $U_3(\alpha)$  é equivalente ao operador de rotação  $R(\alpha)$  da Equação (4.3).

A correspondência de

$$U_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \text{sen} \beta/2 \\ -\text{sen} \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

e  $R_y(\beta)$  e de

$$U_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 & i \text{sen} \varphi/2 \\ i \text{sen} \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

e  $R_1(\varphi)$  resultam de maneira semelhante. Note que  $U_k(\psi)$  tem a forma geral

$$U_k(\psi) = 1_2 \cos \psi/2 + i\sigma_k \text{sen } \psi/2, \quad (4.54)$$

em que  $k = 1, 2, 3$ .

A correspondência

$$U_3(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\alpha) \quad (4.55)$$

não é uma simples correspondência um para um. Especificamente, assim como  $\alpha$  em  $R_z$  vai de 0 a  $2\pi$ , o parâmetro em  $U_3$ ,  $\alpha/2$ , vai de 0 a  $\pi$ . Achamos

$$\begin{aligned} R_z(\alpha + 2\pi) &= R_z(\alpha) \\ U_3(\alpha + 2\pi) &= \begin{pmatrix} -e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = -U_3(\alpha). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Portanto, **ambas**,  $U_3(\alpha)$  e  $U_3(\alpha + 2\pi) = -U_3(\alpha)$ , correspondem a  $R_z(\alpha)$ . A correspondência é 2 para 1 ou  $SU(2)$  e  $SO(3)$  são **homomórficos**. O estabelecimento da correspondência entre as representações de  $SU(2)$  e as de  $SO(3)$  significa que as representações conhecidas de  $SU(2)$  nos dão, automaticamente, as representações de  $SO(3)$ .

Combinando as várias rotações, constatamos que uma transformação unitária usando

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = U_3(\gamma)U_2(\beta)U_3(\alpha) \quad (4.57)$$

corresponde à rotação geral de Euler  $R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$ . Por multiplicação direta,

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \gamma) &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \text{sen } \beta/2 \\ -\text{sen } \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 & e^{i(\gamma-\alpha)/2} \text{sen } \beta/2 \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2} \text{sen } \beta/2 & e^{-i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Esta é nossa forma geral alternativa, Equação (4.38), com

$$\xi = (\gamma + \alpha)/2, \quad \eta = \beta/2, \quad \zeta = (\gamma - \alpha)/2. \quad (4.59)$$

Assim, pela Equação (4.58) podemos identificar os parâmetros da Equação (4.38) como

$$\begin{aligned} a &= e^{i(\gamma+\alpha)/2} \cos \beta/2 \\ b &= e^{i(\gamma-\alpha)/2} \text{sen } \beta/2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

### Isospin $SU(2)$ e Simetria de Sabor $SU(3)$

A aplicação da teoria de grupos às partículas “elementares” foi denominada por Wigner como o terceiro estágio de teoria de grupos e física. O primeiro estágio foi a procura dos 32 grupos pontuais cristalográficos e dos 230 grupos espaciais que dão as simetrias cristalinas, Seção 4.7. O segundo estágio foi uma procura por representações como as de  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , Seção 4.2. Agora, neste estágio, os físicos estão de volta à procura de grupos.

Nas décadas de 1930 a 1960 o estudo de partículas interagindo fortemente na física nuclear e na de altas energias levou ao grupo de isospin  $SU(2)$  e à simetria de sabor  $SU(3)$ . Na década de 1930, após a descoberta do nêutron, Heisenberg propôs que as forças nucleares eram independentes de carga. A diferença entre a massa do nêutron e a do próton era de apenas 1,6%. Se essa pequena diferença de massa for ignorada, o nêutron e o próton podem ser considerados dois estados de carga (ou isospin) de um dubleto, denominado **núcleon**. Ao longo de  $z$  o isospin  $\mathbf{I}$  tem projeção  $I_3 = 1/2$  para o próton e  $I_3 = -1/2$  para o nêutron. O isospin nada tem a ver com spin (o momento angular intrínseco de uma partícula), mas o estado de isospin a duas componentes obedece às mesmas relações matemáticas que o estado de spin  $1/2$ . Para o núcleon,  $\mathbf{I} = \boldsymbol{\tau}/2$  são as usuais matrizes de Pauli e os estados de isospin  $\pm 1/2$  são autovetores da matriz de Pauli  $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . De modo semelhante, os três estados de carga do



píon ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ) formam um tripleto. O píon é a mais leve de todas as partículas de interação forte e é o portador da força nuclear a longas distâncias, muito semelhante ao fóton para a força eletromagnética. A interação forte dá tratamento semelhante aos membros dessas famílias de partículas, ou múltiplos, e conserva isospin. A simetria é o grupo  $SU(2)$  de isospin.

**Tabela 4.1** Bárions com spin  $\frac{1}{2}$  paridade par

	Massa (MeV)	$Y$	$I$	$I_3$
$\Xi^-$	1321,32			$-\frac{1}{2}$
$\Xi$		-1	$\frac{1}{2}$	
$\Xi^0$	1314,9			$+\frac{1}{2}$
$\Sigma^-$	1197,43			-1
$\Sigma$		0	1	0
$\Sigma^0$	1192,55			0
$\Sigma^+$	1189,37			+1
$\Lambda$		0	0	0
$\Lambda$	1115,63			0
$n$	939,566			$-\frac{1}{2}$
$N$		1	$\frac{1}{2}$	
$p$	938,272			$+\frac{1}{2}$

Na década de 1960, proliferaram partículas produzidas como ressonâncias por aceleradores. As oito mostradas na Tabela 4.1 atraíram particular atenção.<sup>5</sup> Os números quânticos conservados relevantes que são análogos e generalizações de  $L_z$  e  $L^2$  do  $SO(3)$  são  $I_3$  e  $I^2$  para isospin e  $Y$  para **hipercarga**. Partículas podem ser agrupadas em múltiplos de carga ou de isospin. Então a hipercarga pode ser tomada como duas vezes a carga média do múltiplo. Para o núcleon, isto é, o dubleto nêutron-próton,  $Y = 2 \cdot \frac{1}{2}(0+1) = 1$ . Na Tabela 4.1 estão relacionados os valores de hipercarga e isospin para bárions como o núcleon e seus parceiros (aproximadamente degenerados). Eles formam um octeto, como mostra a Figura 4.3, depois do que a simetria correspondente passa a chamar-se **caminho óctuplo**. Em 1961, Gell-Mann e também Ne’eman (independentemente) sugeriram que a interação forte deveria ser (aproximadamente) invariante sob um grupo unitário especial tridimensional,  $SU(3)$  isto é, tem uma **simetria de sabor**  $SU(3)$ .

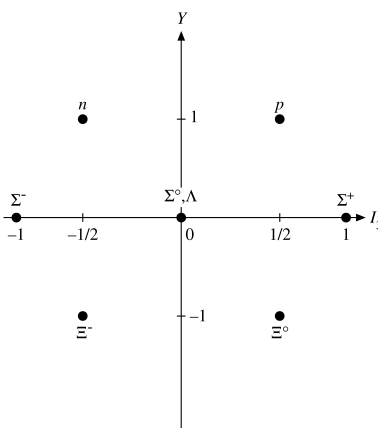


Figura 4.3: Diagrama de peso do octeto de bárions para  $SU(3)$ .

A escolha de  $SU(3)$  foi baseada, em primeiro lugar, nos dois números quânticos conservados e independentes,  $H_1 = I_3$  e  $H_2 = Y$  (isto é, geradores com  $[I_3, Y] = 0$ , que não sejam invariantes de Casimir; veja o sumário na Seção 4.3) que pedem um grupo de ordem (posto) 2. Em segundo lugar, o grupo devia ter uma representação octodimensional para dar conta dos bárions quase degenerados e quatro octetos similares para os mésons. De certa forma,  $SU(3)$  é a generalização mais simples do isospin  $SU(2)$ . Três de seus geradores são matrizes hermitianas

<sup>5</sup>Todas as massas são dadas em unidades de energia,  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ .

$3 \times 3$  de traço zero que contêm as matrizes  $2 \times 2$  de isospin de Pauli  $\tau_i$  no canto superior esquerdo,

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \tau_i & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.61a}$$

Assim, o grupo de isospin  $SU(2)$  é um subgrupo do  $SU(3)$  de sabor com  $I_3 = \lambda_3/2$ . Quatro outros geradores têm os 1 fora da diagonal de  $\tau_1$ , e  $-i, i$  de  $\tau_2$  em todas as outras localizações possíveis para formar matrizes hermitianas  $3 \times 3$  de traço nulo.

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.61b}$$

O segundo gerador diagonal tem a matriz unidade bidimensional  $1_2$  no canto superior esquerdo, o que o torna claramente independente do subgrupo  $SU(2)$  de isospin por causa de seu traço não-nulo naquele subespaço, e  $-2$  no terceiro lugar da diagonal, o que o torna de traço nulo.

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.61c}$$

Ao todo há  $3^2 - 1 = 8$  geradores para  $SU(3)$ , que tem ordem 8. As constantes de estrutura de  $SU(3)$  podem ser obtidas com facilidade dos comutadores desses geradores.

Voltando à simetria de sabor  $SU(3)$ , imaginamos que o hamiltoniano para nossos oito bárions seja composto de três partes:

$$H = H_{\text{forte}} + H_{\text{médio}} + H_{\text{eletromagnético}}. \tag{4.62}$$

A primeira parte,  $H_{\text{forte}}$ , tem a simetria  $SU(3)$  e leva à degeneração óctupla. A introdução do termo que rompe a simetria  $H_{\text{médio}}$  remove parte da degeneração dando massas diferentes aos quatro multipletos de isospin  $(\Xi^-, \Xi^0), (\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+), \Lambda$ , e  $N = (p, n)$ . Esses ainda são multipletos porque  $H_{\text{médio}}$  tem simetria  $SU(2)$  de isospin. Por fim, a presença de forças dependentes de carga subdivide os multipletos de isospin e remove a última degenerescência. Essa seqüência imaginada é mostrada na Figura 4.4.

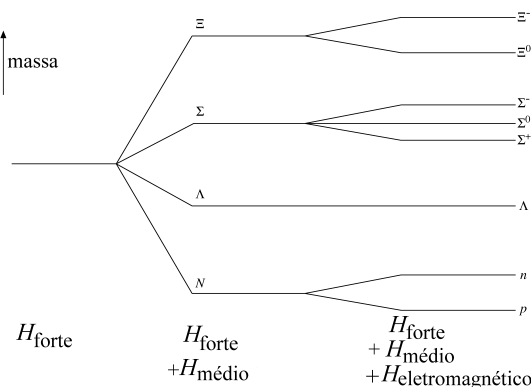


Figura 4.4: Subdivisão da massa do bárion.

A representação por octeto não é a representação mais simples de  $SU(3)$ . As representações mais simples são as triangulares mostradas na Figura 4.5, das quais todas as outras podem ser geradas por acoplamento generalizado



de momento angular (veja a Seção 4.4 sobre quadros de Young). A **representação fundamental** na Figura 4.5a contém os quarks  $u$  (*up*),  $d$  (*down*) e  $s$  (estranho), e a Figura 4.5b contém os antiquarks correspondentes. Uma vez que octetos de mésons podem ser obtidos das representações de quarks como  $q\bar{q}$ , com  $3^2 = 8 + 1$  estados, isso sugere que mésons contêm quarks (e antiquarks) como seus constituintes (veja o Exercício 4.4.3). O modelo de quark resultante dá uma bem-sucedida descrição de espectroscopia hadrônica. A resolução de seu problema com o princípio de exclusão de Pauli resultou eventualmente na teoria de calibre de  $SU(3)$  cor da **interação forte** denominada **cromodinâmica quântica** (QCD).

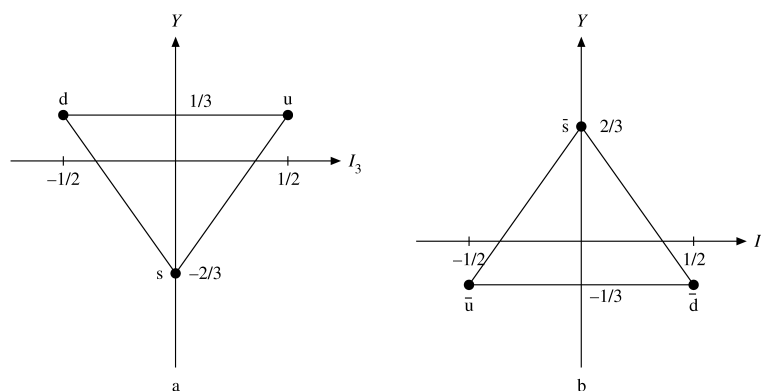


Figura 4.5: (a) Representação fundamental de  $SU(3)$ , o diagrama de pesos para os quarks  $u, d, s$ ; (b) diagrama de pesos para os antiquarks  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ .

Para manter a teoria dos grupos e suas proezas muito reais sob uma perspectiva adequada, devemos enfatizar que ela identifica e formaliza simetrias. Classifica (e às vezes prevê) partículas. Mas, exceto por afirmar que uma parte do hamiltoniano tem simetria  $SU(2)$  e uma outra parte tem geometria  $SU(3)$ , a teoria dos grupos nada diz sobre a interação de partículas. Lembre-se de que declarar que o potencial atômico é esféricamente simétrico nada nos diz sobre a dependência radial do potencial ou da função de onda. Ao contrário, em uma teoria de calibre, a interação é mediada por bósons vetoriais (como o fóton na eletrodinâmica quântica) e unicamente determinada pela derivada covariante de calibre (veja a Seção 1.13).

### Exercícios

- 4.2.1** (i) Mostre que as matrizes de Pauli são os geradores de  $SU(2)$  sem usar a parametrização da matriz  $2 \times 2$  unitária geral na Equação (4.38). (ii) Derive os oito geradores independentes  $\lambda_i$  de  $SU(3)$  de maneira semelhante. Normalize esses geradores de modo que  $\text{tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ . Então determine as constantes estruturais de  $SU(3)$ .

*Sugestão:* As  $\lambda_i$  têm traço nulo e são matrizes hermitianas  $3 \times 3$ .

- (iii) Construa a invariante quadrática de Casimir de  $SU(3)$ .

*Sugestão:* Trabalhe por analogia com  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$  de  $SU(2)$  ou  $\mathbf{L}^2$  de  $SO(3)$ .

- 4.2.2** Prove que a forma geral de uma matriz  $2 \times 2$  unitária unimodular é

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

com  $a^*a + b^*b = 1$ .

- 4.2.3** Determine três subgrupos  $SU(2)$  de  $SU(3)$ .

- 4.2.4** Um operador de **translação**  $T(a)$  converte  $\psi(x)$  a  $\psi(x + a)$ ,

$$T(a)\psi(x) = \psi(x + a).$$

Em termos do operador de momento linear (mecânica quântica),  $p_x = -i\hbar/dx$ , mostre que  $T(a) = \exp(iap_x)$ , isto é,  $p_x$  é o gerador de translações.

*Sugestão:* Expanda  $\psi(x + a)$  como uma série de Taylor.

- 4.2.5** Considere que a equação de elemento geral de  $SU(2)$ , Equação (4.38), seja composta de três rotações de Euler: (i) uma rotação de  $a/2$  ao redor do eixo  $z$ , (ii) uma rotação de  $b/2$  ao redor do novo eixo  $x$ , e (iii) uma rotação de  $c/2$  ao redor do novo eixo  $z$ . (Todas as rotações são em sentido anti-horário.) Usando os geradores  $\sigma$  de Pauli, mostre que esses ângulos de rotação são determinados por

$$\begin{aligned} a &= \xi - \zeta + \frac{\pi}{2} = \alpha + \frac{\pi}{2} \\ b &= 2\eta = \beta \\ c &= \xi + \zeta - \frac{\pi}{2} = \gamma - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

*Nota:* Aqui, os ângulos  $a$  e  $b$  não são o  $a$  e  $b$  da Equação (4.38).

- 4.2.6** Rotacione uma função de onda não-relativista  $\tilde{\psi} = (\psi_{\uparrow}, \psi_{\downarrow})$  de spin  $1/2$  ao redor do eixo  $z$  por um ângulo pequeno  $d\theta$ . Ache o gerador correspondente.

### 4.3 Momento Angular Orbital

O conceito clássico de momento angular,  $\mathbf{L}_{\text{class}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , é apresentado na Seção 1.4 para introduzir o produto vetorial. Seguindo a representação usual de Schrödinger da mecânica quântica, o momento linear clássico  $\mathbf{p}$  é substituído pelo operador  $-i\nabla$ . O **operador** de momento angular orbital na mecânica quântica se torna<sup>6</sup>

$$\mathbf{L}_{QM} = -i\mathbf{r} \times \nabla. \quad (4.63)$$

Isso é usado repetidas vezes nas Seções 1.8, 1.9 e 2.4 para ilustrar operadores diferenciais vetoriais. Pelo Exercício 1.8.8 as componentes do momento angular satisfazem as relações de comutação

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k. \quad (4.64)$$

O  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita da Seção 2.9. Fica subentendido o somatório sobre o índice  $k$ .

O operador diferencial correspondente ao quadrado do momento angular

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (4.65)$$

pode ser determinado por

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \quad (4.66)$$

que é o assunto dos Exercícios 1.9.9 e 2.5.17(b). Visto que  $\mathbf{L}^2$ , sendo um produto escalar, é invariante sob rotações isto é, um escalar rotacional, esperamos que  $[\mathbf{L}^2, L_i] = 0$ , o que também pode ser verificado diretamente.

A Equação (4.64) apresenta as relações de comutação básicas das componentes do momento angular da mecânica quântica. De fato, dentro da estrutura da mecânica quântica e da teoria dos grupos, essas relações de comutação definem um operador de momento angular. Nós as usaremos agora para construir os auto-estados do momento angular e achar os autovalores. Para o momento angular orbital, eles são os harmônicos esféricos da Seção 12.6.

### Abordagem do Operador de Levantamento e Abaixamento

Vamos começar com uma abordagem geral, na qual o momento angular  $\mathbf{J}$  que consideramos pode representar um momento angular orbital  $\mathbf{L}$ , um spin  $\sigma/2$  ou um momento angular total  $\mathbf{L} + \sigma/2$  etc. Admitimos que

1.  $\mathbf{J}$  é um operador hermitiano cujas componentes satisfazem as relações de comutação.

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [\mathbf{J}^2, J_i] = 0. \quad (4.67)$$

Caso contrário,  $\mathbf{J}$  é arbitrário. (Veja o Exercício 4.3.1.)

2.  $|\lambda M\rangle$  é simultaneamente uma autofunção normalizada (ou autovetor) de  $J_z$  com  $M$  e uma autofunção<sup>7</sup> de  $\mathbf{J}^2$ ,

$$J_z|\lambda M\rangle = M|\lambda M\rangle, \quad \mathbf{J}^2|\lambda M\rangle = \lambda|\lambda M\rangle, \quad \langle \lambda M|\lambda M\rangle = 1. \quad (4.68)$$

<sup>6</sup>Por simplicidade, igualamos  $\hbar$  a 1. Isso significa que o momento angular é medido em unidades de  $\hbar$ .

<sup>7</sup>Que  $|\lambda M\rangle$  pode ser uma autofunção de **ambos**,  $J_z$ , e  $\mathbf{J}^2$ , resulta de  $[J_z, \mathbf{J}^2] = 0$  na Equação (4.67). Para  $SU(2)$ ,  $\langle \lambda M|\lambda M\rangle$  é o produto escalar (dos vetores ou spinores bra e ket) na notação braket introduzida na Seção 3.1. Para  $SO(3)$ ,  $|\lambda M\rangle$  é uma função  $Y(\theta, \varphi)$  e  $|\lambda M'\rangle$  é uma função  $Y'(\theta, \varphi)$  e o elemento de matriz  $\langle \lambda M|\lambda M'\rangle \equiv \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y^*(\theta, \varphi)Y'(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$  é a sobreposição delas. Todavia, em nossa abordagem algébrica, apenas a norma na Equação (4.68) é usada e elementos matriciais dos operadores de momento angular são reduzidos à norma por meio da equação de autovalor para  $J_z$ , Equação (4.68) e Equações (4.83) e (4.84).



Agora mostraremos que  $\lambda = J(J + 1)$  e então acharemos outras propriedades de  $|\lambda M\rangle$ . O tratamento ilustrará a generalidade e o poder de técnicas de operador, em particular a utilização de operadores de levantamento e abaixamento.<sup>8</sup>

Os **operadores de levantamento e abaixamento** são definidos como

$$J_+ = J_x + iJ_y, \quad J_- = J_x - iJ_y. \quad (4.69)$$

Em termos desses operadores,  $\mathbf{J}^2$  pode ser reescrito como

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2. \quad (4.70)$$

Pelas relações de comutação, Equação (4.67), encontramos

$$\boxed{[J_z, J_+] = +J_+, \quad [J_z, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = 2J_z.} \quad (4.71)$$

Uma vez que  $J_+$  comuta com  $\mathbf{J}^2$  (Exercício 4.3.1),

$$\mathbf{J}^2(J_+|\lambda M\rangle) = J_+(\mathbf{J}^2|\lambda M\rangle) = \lambda(J_+|\lambda M\rangle). \quad (4.72)$$

Por conseguinte,  $J_+|\lambda M\rangle$  é ainda uma autofunção de  $\mathbf{J}^2$  com autovalor  $\lambda$  e, de modo semelhante, para  $J_-|\lambda M\rangle$ . Mas, pela Equação (4.71),

$$J_zJ_+ = J_+(J_z + 1), \quad (4.73)$$

ou

$$J_z(J_+|\lambda M\rangle) = J_+(J_z + 1)|\lambda M\rangle = (M + 1)J_+|\lambda M\rangle. \quad (4.74)$$

Portanto,  $J_+|\lambda M\rangle$  ainda é uma autofunção de  $J_z$  mas com autovalor  $M + 1$ .  $J_+$  elevou o autovalor de 1 e, por isso, é denominado **operador de elevação**. De modo semelhante,  $J_-$  diminui o autovalor de 1 e é denominado **operador de rebaixamento**.

Tomando valores esperados e usando  $J_x^\dagger = J_x, J_y^\dagger = J_y$ , obtemos

$$\langle \lambda M | \mathbf{J}^2 - J_z^2 | \lambda M \rangle = \langle \lambda M | J_x^2 + J_y^2 | \lambda M \rangle = |J_x|\lambda M\rangle|^2 + |J_y|\lambda M\rangle|^2$$

e vemos que  $\lambda - M^2 \geq 0$ , portanto,  $M$  tem um limite. Seja  $J$  o **maior**  $M$ . Então,  $J_+|\lambda J\rangle = 0$ , o que implica  $J_-J_+|\lambda J\rangle = 0$ . Daí, combinando as Equações (4.70) e (4.71) para obter

$$\mathbf{J}^2 = J_-J_+ + J_z(J_z + 1), \quad (4.75)$$

constatamos, pela Equação (4.75), que

$$0 = J_-J_+|\lambda J\rangle = (\mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_z)|\lambda J\rangle = (\lambda - J^2 - J)|\lambda J\rangle.$$

Portanto,

$$\lambda = J(J + 1) \geq 0, \quad (4.76)$$

com  $J$  não-negativo. Agora renomeamos os estados  $|\lambda M\rangle \equiv |JM\rangle$ . De modo semelhante, seja  $J'$  o **menor**  $M$ . Então,  $J_-|JJ'\rangle = 0$ . Por

$$\mathbf{J}^2 = J_+J_- + J_z(J_z - 1), \quad (4.77)$$

vemos que

$$0 = J_+J_-|JJ'\rangle = (\mathbf{J}^2 + J_z - J_z^2)|JJ'\rangle = (\lambda + J' - J'^2)|JJ'\rangle. \quad (4.78)$$

Daí,

$$\lambda = J(J + 1) = J'(J' - 1) = (-J)(-J - 1).$$

Portanto,  $J' = -J$ , e  $M$  varia em **passos inteiros** de  $-J$  a  $+J$ ,

$$-J \leq M \leq J. \quad (4.79)$$

<sup>8</sup>Operadores de levantamento e abaixamento podem ser desenvolvidos para outras funções matemáticas. Compare com a subseção seguinte, sobre grupos de Lie, e com a Seção 13.1, para os polinômios de Hermite.

Começando de  $|JJ\rangle$  e aplicando  $J_-$  repetidas vezes, chegamos a todos os outros estados  $|JM\rangle$ . Por conseguinte,  $|JM\rangle$  forma uma representação irredutível de  $\text{SO}(3)$  ou  $\text{SU}(2)$ ;  $M$  varia e  $J$  é fixo.

Então, usando as Equações (4.67), (4.75) e (4.77) obtemos

$$\begin{aligned} J_- J_+ |JM\rangle &= [J(J+1) - M(M+1)] |JM\rangle = (J-M)(J+M+1) |JM\rangle, \\ J_+ J_- |JM\rangle &= [J(J+1) - M(M-1)] |JM\rangle = (J+M)(J-M+1) |JM\rangle. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Como  $J_+$  e  $J_-$  são conjugados hermitianos,<sup>9</sup>

$$J_+^\dagger = J_-, \quad J_-^\dagger = J_+, \quad (4.81)$$

os autovalores na Equação (4.80) devem ser positivos ou zero.<sup>10</sup> Alguns exemplos da Equação (4.81) são dados pelas matrizes dos Exercícios 3.2.13 (spin 1/2). Alguns exemplos da Equação (4.81) são dados pelas matrizes dos Exercícios 3.2.13 (spin 1/2), 3.2.15 (spin 1) e 3.2.18 (spin 3/2). Para os operadores de levantamento e abaixamento de momento angular orbital,  $L_+$  e  $L_-$ , são dadas formas explícitas nos Exercícios 2.5.14 e 12.6.7. Agora você pode mostrar (veja também o Exercício 12.7.2) que

$$\langle JM | J_- (J_+ |JM\rangle) = (J_+ |JM\rangle)^\dagger J_+ |JM\rangle. \quad (4.82)$$

Uma vez que  $J_+$  eleva o autovalor  $M$  para  $M+1$ , denominamos a autofunção resultante  $|JM+1\rangle$ . A normalização é dada pela Equação (4.80) como

$$J_+ |JM\rangle = \sqrt{(J-M)(J+M+1)} |JM+1\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} |JM+1\rangle, \quad (4.83)$$

tomando a raiz quadrada positiva e não introduzindo nenhum fator de fase. Pelos mesmos argumentos,

$$J_- |JM\rangle = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} |JM-1\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} |JM-1\rangle. \quad (4.84)$$

Aplicando  $J_+$  à Equação (4.84), obtemos a segunda linha da Equação (4.80) e verificamos que a Equação (4.84) é consistente com a Equação (4.83).

Por fim, visto que  $M$  vai de  $-J$  a  $+J$  em passos unitários,  $2J$  deve ser um inteiro;  $J$  é um inteiro ou metade de um inteiro ímpar. Como veremos mais adiante, se  $\mathbf{J}$  é um momento angular orbital  $\mathbf{L}$ , o conjunto  $|LM\rangle$  para todo  $M$  é uma base que define uma representação de  $\text{SO}(3)$  e, então,  $L$  será inteiro. Em coordenadas polares esféricas  $\theta, \varphi$ , as funções  $|LM\rangle$  tornam-se os harmônicos esféricos  $Y_L^M(\theta, \varphi)$  da Seção 12.6. Os conjuntos de estados  $|JM\rangle$  com  $J$  da metade do inteiro definem representações de  $\text{SU}(2)$  que não são representações de  $\text{SO}(3)$ ; obtemos  $J = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ . Nosso momento angular é quantizado essencialmente como um resultado das relações de comutação. Todas essas representações são irredutíveis, como sugere uma aplicação dos operadores de elevação e rebaixamento.

## Resumo de Grupos de Lie e Álgebras de Lie

As relações gerais de comutação, Equação (4.14) na Seção 4.2, para um clássico grupo de Lie [ $\text{SO}(n)$  e  $\text{SU}(n)$  em particular], podem ser simplificadas para ficar mais parecidas com a Equação (4.71) para  $\text{SO}(3)$  e  $\text{SU}(2)$  nesta seção. Aqui, estamos fazendo uma mera revisão e, como regra, não apresentamos provas para vários teoremas que explicamos.

Em primeiro lugar escolhemos geradores linearmente independentes e mutuamente comutativos  $H_i$  que são generalizações de  $J_z$  para  $\text{SO}(3)$  e  $\text{SU}(2)$ . Seja  $l$  o número máximo de tais  $H_i$  com

$$[H_i, H_k] = 0. \quad (4.85)$$

Então,  $l$  é denominado **grau** do grupo de Lie  $G$  ou sua álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ . O grau e a dimensão, ou ordem, de alguns grupos de Lie são dados na Tabela 4.2. Pode-se demonstrar que todos os outros geradores  $E_\alpha$  são operadores de elevação e rebaixamento em relação a todos os  $H_i$ , portanto,

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (4.86)$$

<sup>9</sup>A conjugação hermitiana ou operação adjunta é definida para matrizes na Seção 3.5, e para operadores em geral, na Seção 10.1.

<sup>10</sup>Se quiser uma excelente discussão sobre operadores adjuntos e espaços hilbertianos, consulte A. Messiah, *Quantum Mechanics*. Nova York: Wiley (1961), Capítulo 7.





O conjunto dos denominados **vetores raízes**  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$  forma o **diagrama raiz** de  $\mathcal{G}$ .

Quando os  $H_i$  comutam, eles podem ser simultaneamente diagonalizados (para matrizes simétricas (ou hermitianas), veja o Capítulo 3; para operadores, veja o Capítulo 10). Os  $H_i$  nos dão um conjunto de autovalores  $m_1, m_2, \dots, m_l$  [números quânticos de projeção ou aditivos generalizando  $M$  de  $J_z$  em  $\text{SO}(3)$  e  $\text{SU}(2)$ ]. O conjunto dos denominados **vetores de peso**  $(m_1, m_2, \dots, m_l)$  para uma representação irredutível (multiplete) forma um **diagrama de peso**.

**Tabela 4.2** Grau e ordem de grupos unitários e rotacionais

Álgebra de Lie	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{B}_l$	$\mathcal{D}_l$
Grupo de Lie	$\text{SU}(l+1)$	$\text{SO}(2l+1)$	$\text{SO}(2l)$
Grau	$l$	$l$	$l$
Ordem	$l(l+2)$	$l(2l+1)$	$l(2l-1)$

Há  $l$  operadores invariantes  $C_i$ , denominados operadores de **Casimir**, que comutam com todos os geradores e são generalizações de  $\mathbf{J}^2$ ,

$$[C_i, H_j] = 0, \quad [C_i, E_\alpha] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (4.87)$$

O primeiro,  $C_1$ , é uma função quadrática dos geradores; os outros são mais complicados. Uma vez que os  $C_j$  comutam com todos os  $H_j$ , eles podem ser diagonalizados simultaneamente com os  $H_j$ . Seus autovalores  $c_1, c_2, \dots, c_l$  caracterizam representações irredutíveis e permanecem constantes enquanto o vetor de pesos varia sobre qualquer representação irredutível particular. Assim, a autofunção geral pode ser escrita como

$$|(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle, \quad (4.88)$$

generalizando o multiplete  $|JM\rangle$  de  $\text{SO}(3)$  e  $\text{SU}(2)$ . Suas equações de autovalor são

$$H_i |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle = m_i |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle \quad (4.89a)$$

$$C_i |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle = c_i |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle. \quad (4.89b)$$

Agora podemos mostrar que  $E_\alpha |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle$  tem o vetor de pesos  $(m_1 + \alpha_1, m_2 + \alpha_2, \dots, m_l + \alpha_l)$  usando as relações de comutação, Equação (4.86), em conjunção com as Equações (4.89a) e (4.89b):

$$\begin{aligned} H_i E_\alpha |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle \\ = (E_\alpha H_i + [H_i, E_\alpha]) |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle \\ = (m_i + \alpha_i) E_\alpha |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Portanto,

$$E_\alpha |(c_1, c_2, \dots, c_l)m_1, m_2, \dots, m_l\rangle \sim |(c_1, \dots, c_l)m_1 + \alpha_1, \dots, m_l + \alpha_l\rangle,$$

a generalização das Equações (4.83) e (4.84) de  $\text{SO}(3)$ . Essas mudanças de autovalores pelo operador  $E_\alpha$  são denominadas suas **regras de seleção** em mecânica quântica. Elas são exibidas no diagrama-raiz de uma álgebra de Lie.

Exemplos de diagramas-raiz para  $\text{SU}(2)$  e  $\text{SU}(3)$ , são dados na Figura 4.6. Se ligarmos as raízes denotadas por setas na Figura 4.6b a um peso nas Figuras 4.3 ou 4.5a, b, podemos chegar a qualquer outro estado (representando po um ponto no diagrama de pesos).

Aqui, o **lema de Schur** se aplica: um operador  $H$  que comuta com todos os operadores de grupo e, portanto, com todos os geradores  $H_i$  de um determinado grupo (clássico) de Lie  $G$  tem como autovetores todos os estados de um multiplete e é degenerado com o multiplete. Como consequência, esse operador comuta com todos os invariantes de Casimir,  $[H, C_i] = 0$ .

O último resultado é claro porque os invariantes de Casimir são construídos a partir de geradores e operadores de elevação e abaixamento do grupo. Para provar o restante, seja  $\psi$  um autovetor,  $H\psi = E\psi$ . Então, para qualquer rotação  $R$  de  $G$ , temos  $HR\psi = ER\psi$ , que diz que  $R\psi$  é um auto-estado com o mesmo autovalor  $E$  juntamente com  $\psi$ . Uma vez que  $[H, C_i] = 0$ , todos os invariantes de Casimir podem ser diagonalizados simultaneamente com

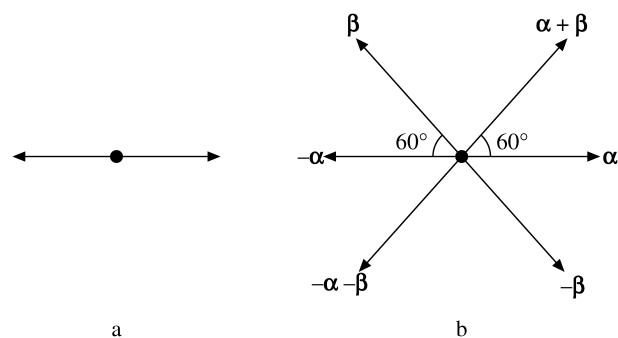


Figura 4.6: Diagrama-raiz para (a) SU(2) e (b) SU(3).

$H$  e um auto-estado de  $H$  é um auto-estado de todos os  $C_i$ . Visto que  $[H_i, C_i] = 0$ , os auto-estados rotacionados  $R\psi$  são autoestados de  $C_i$ , juntamente com  $\psi$  pertencentes ao mesmo multipletto caracterizado pelos autovalores  $c_i$  de  $C_i$ .

Por fim, esse operador  $H$  não pode induzir transições entre diferentes multipletos do grupo porque

$$\langle (c'_1, c'_2, \dots, c'_l) m'_1, m'_2, \dots, m'_l | H | (c_1, c_2, \dots, c_l) m_1, m_2, \dots, m_l \rangle = 0.$$

Usando  $[H, C_j] = 0$  (para qualquer  $j$ ) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (c'_1, c'_2, \dots, c'_l) m'_1, m'_2, \dots, m'_l | [H, C_j] | (c_1, c_2, \dots, c_l) m_1, m_2, \dots, m_l \rangle \\ &= (c_j - c'_j) \langle (c'_1, c'_2, \dots, c'_l) m'_1, m'_2, \dots, m'_l | H | (c_1, c_2, \dots, c_l) m_1, m_2, \dots, m_l \rangle. \end{aligned}$$

Se  $c'_j \neq c_j$  para alguns  $j$ , segue-se a equação precedente.

### Exercícios

**4.3.1** Mostre que (a)  $[J_+, \mathbf{J}^2] = 0$ , (b)  $[J_-, \mathbf{J}^2] = 0$ .

**4.3.2** Derive o diagrama-raiz de SU(3) na Figura 4.6b a partir dos geradores  $\lambda_i$  na Equação (4.61).

*Sugestão:* Elabore primeiro o caso SU(2) na Figura 4.6a a partir das matrizes de Pauli.

## 4.4 Acoplamento de Momento Angular

Em sistemas de muitos corpos da mecânica clássica, o momento angular total é o somatório  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$  dos momentos angulares orbitais individuais. Qualquer partícula isolada tem momento angular conservado. Na mecânica quântica, o momento angular conservado surge quando partículas se movimentam em um potencial central, tal como o potencial de Coulomb na física atômica, um potencial de modelo de camada em física nuclear ou um potencial de confinamento de um modelo de quark na física de partículas. Na equação relativística de Dirac, o momento angular orbital já não é mais conservado, porém  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  é conservado, com o momento angular total de uma partícula consistindo em seu momento angular orbital e intrínseco, denominado spin  $\mathbf{S} = \sigma/2$ , em unidades de  $\hbar$ .

Pode-se mostrar de imediato que a soma de operadores de momento angular obedece às mesmas relações de comutação na Equação (4.37) ou na Equação (4.41) que os operadores individuais de momento angular, contanto que os operadores de partículas diferentes comutem.

### Coefficientes de Clebsch-Gordan: SU(2)–SO(3)

É claro que a combinação de dois momentos angulares comutativos  $\mathbf{J}_i$  para formar sua soma

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \quad [J_{1i}, J_{2i}] = 0, \quad (4.91)$$

ocorre com frequência em aplicações e  $\mathbf{J}$  satisfaz as relações de comutação do momento angular

$$[J_j, J_k] = [J_{1j} + J_{2j}, J_{1k} + J_{2k}] = [J_{1j}, J_{1k}] + [J_{2j}, J_{2k}] = i\varepsilon_{jkl}(J_{1l} + J_{2l}) = i\varepsilon_{jkl}J_l.$$

O momento angular total para uma partícula única com spin 1/2, por exemplo, um elétron ou um quark, é uma soma do momento angular orbital e do spin. O momento angular orbital total para duas partículas sem spin é



$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ . Para que  $\mathbf{J}^2$  e  $J_z$  da Equação (4.91) sejam ambos diagonais,  $[\mathbf{J}^2, J_z] = 0$  tem de ser válida. Para demonstrar isso, usamos as óbvias relações de comutação  $[J_{iz}, \mathbf{J}_j^2] = 0$  e

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z} \quad (4.91')$$

em conjunção com a Equação (4.71), para ambos  $\mathbf{J}_i$ , para obter

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}^2, J_z] &= [J_{1-}J_{2+} + J_{1+}J_{2-}, J_{1z} + J_{2z}] \\ &= [J_{1-}, J_{1z}]J_{2+} + J_{1-}[J_{2+}, J_{2z}] + [J_{1+}, J_{1z}]J_{2-} + J_{1+}[J_{2-}, J_{2z}] \\ &= J_{1-}J_{2+} - J_{1-}J_{2+} - J_{1+}J_{2-} + J_{1+}J_{2-} = 0. \end{aligned}$$

De maneira similar, provamos  $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_i^2] = 0$ . Por conseguinte, os autovalores de  $\mathbf{J}_i^2, \mathbf{J}^2, J_z$  podem ser usados para rotular os estados de momento angular total  $|J_1J_2JM\rangle$ .

Os estados do produto  $|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle$  obviamente satisfazem as equações de autovalor

$$\begin{aligned} J_z|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle &= (J_{1z} + J_{2z})|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle = (m_1 + m_2)|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle \\ &= M|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle, \\ \mathbf{J}_i^2|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle &= J_i(J_i + 1)|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle, \end{aligned} \quad (4.92)$$

mas não terão  $\mathbf{J}^2$  diagonal exceto para os estados extremos com  $M = \pm(J_1 + J_2)$  e  $J = J_1 + J_2$  (veja a Figura 4.7a). Para ver isso usamos a Equação (4.91') mais uma vez, em conjunção com as Equações (4.83) e (4.84) em

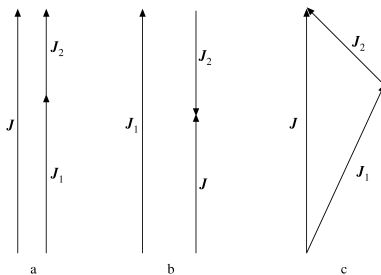


Figura 4.7: Acoplamento de dois momentos angulares: (a) paralelo, (b) antiparalelo, (c) caso geral.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle &= \{J_1(J_1 + 1) + J_2(J_2 + 1) + 2m_1m_2\}|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle \\ &+ \{J_1(J_1 + 1) - m_1(m_1 + 1)\}^{1/2} \{J_2(J_2 + 1) - m_2(m_2 - 1)\}^{1/2} \\ &\times |J_1m_1 + 1\rangle|J_2m_2 - 1\rangle + \{J_1(J_1 + 1) - m_1(m_1 - 1)\}^{1/2} \\ &\times \{J_2(J_2 + 1) - m_2(m_2 + 1)\}^{1/2} |J_1m_1 - 1\rangle|J_2m_2 + 1\rangle. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Os dois últimos termos na Equação (4.93) desaparecem somente quando  $m_1 = J_1$  e  $m_2 = J_2$  ou  $m_1 = -J_1$  e  $m_2 = -J_2$ . Em ambos os casos  $J = J_1 + J_2$  resulta da primeira linha da Equação (4.93). Por conseguinte, em geral, temos de formar combinações adequadas de estados de produto

$$|J_1J_2JM\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(J_1J_2J|m_1m_2M)|J_1m_1\rangle|J_2m_2\rangle, \quad (4.94)$$

de modo que  $\mathbf{J}^2$  tenha autovalor  $J(J+1)$ . As quantidades  $C(J_1J_2J|m_1m_2M)$  na Equação (4.94) são denominadas **coeficientes de Clebsch-Gordan**. Pela Equação (4.92) vemos que eles desaparecem a menos que  $M = m_1 + m_2$ , reduzindo a soma dupla a uma soma única. Aplicar  $J_{\pm}$  a  $|JM\rangle$  mostra que os autovalores  $M$  de  $J_z$  satisfazem as desigualdades usuais  $-J \leq M \leq J$ .

É claro que o máximo  $J_{\text{máx}} = J_1 + J_2$  (veja a Figura 4.7a). Nesse caso, a Equação (4.93) se reduz a um estado de produto puro.

$$|J_1J_2J = J_1 + J_2M = J_1 + J_2\rangle = |J_1J_1\rangle|J_2J_2\rangle, \quad (4.95a)$$

portanto, o coeficiente de Clebsch-Gordan

$$C(J_1 J_2 J = J_1 + J_2 | J_1 J_2 J_1 + J_2) = 1. \quad (4.95b)$$

O mínimo  $J = J_1 - J_2$  (se  $J_1 > J_2$ , veja a Figura 4.7b) e  $J = J_2 - J_1$  para  $J_2 > J_1$  resulta se mantivermos em mente que há exatamente tantos produtos de estado quanto estados  $|JM\rangle$ , isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{J=J_{\min}}^{J_{\max}} (2J+1) &= (J_{\max} - J_{\min} + 1)(J_{\max} + J_{\min} + 1) \\ &= (2J_1 + 1)(2J_2 + 1). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Essa condição é válida porque os estados  $|J_1 J_2 JM\rangle$  são apenas um rearranjo de todos os estados de produto na forma de representações irredutíveis de momento angular total. É equivalente à **regra do triângulo**:

$$\begin{aligned} \Delta(J_1 J_2 J) &= 1, & \text{se } |J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2; \\ \Delta(J_1 J_2 J) &= 0, & \text{se não for.} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Isso indica que um multipletto completo de cada valor  $J$  de  $J_{\min}$  a  $J_{\max}$  dá conta de todos os estados e que todos os estados  $|JM\rangle$  são necessariamente ortogonais. Em outras palavras, a Equação (4.94) define uma transformação unitária a partir do conjunto de produtos de base ortogonal de estados de partícula única  $|J_1 m_1; J_2 m_2\rangle = |J_1 m_1\rangle |J_2 m_2\rangle$  para os estados de duas partículas  $|J_1 J_2 JM\rangle$ . Os coeficientes de Clebsch-Gordan são exatamente os elementos da matriz de sobreposição.

$$C(J_1 J_2 J | m_1 m_2 M) \equiv \langle J_1 J_2 JM | J_1 m_1; J_2 m_2 \rangle. \quad (4.98)$$

A construção explícita no que segue mostra que eles são todos reais. Os estados na Equação (4.94) são ortonormalizados, contanto que as restrições

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, m_1+m_2=M} C(J_1 J_2 J | m_1 m_2 M) C(J_1 J_2 J' | m_1 m_2 M') \\ = \langle J_1 J_2 JM | J_1 J_2 J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \end{aligned} \quad (4.99a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{J, M} C(J_1 J_2 J | m_1 m_2 M) C(J_1 J_2 J | m'_1 m'_2 M) \\ = \langle J_1 m_1 | J_1 m'_1 \rangle \langle J_2 m_2 | J_2 m'_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned} \quad (4.99b)$$

sejam válidas.

Agora estamos prontos para construir mais diretamente os estados de momento angular total partindo de  $|J_{\max} = J_1 + J_2, M = J_1 + J_2\rangle$  na Equação (4.95a) e usando o operador de rebaixamento  $J_- = J_{1-} + J_{2-}$  repetidas vezes. Na primeira etapa usamos a Equação (4.84) para

$$J_{i-} |J_i J_i\rangle = \{J_i(J_i + 1) - J_i(J_i - 1)\}^{1/2} |J_i J_i - 1\rangle = (2J_i)^{1/2} |J_i J_i - 1\rangle,$$

que substituímos em  $(J_{1-} + J_{2-}) |J_1 J_1\rangle |J_2 J_2\rangle$ . Normalizando o estado resultante com  $M = J_1 + J_2 - 1$  adequadamente para 1, obtemos

$$\begin{aligned} |J_1 J_2 J_1 + J_2 J_1 + J_2 - 1\rangle &= \{J_1/(J_1 + J_2)\}^{1/2} |J_1 J_1 - 1\rangle |J_2 J_2\rangle \\ &+ \{J_2/(J_1 + J_2)\}^{1/2} |J_1 J_1\rangle |J_2 J_2 - 1\rangle. \end{aligned} \quad (4.100)$$

A Equação (4.100) dá os coeficientes de Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} C(J_1 J_2 J_1 + J_2 | J_1 - 1, J_2, J_1 + J_2 - 1) &= \{J_1/(J_1 + J_2)\}^{1/2}, \\ C(J_1 J_2 J_1 + J_2 | J_1, J_2 - 1, J_1 + J_2 - 1) &= \{J_2/(J_1 + J_2)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Então aplicamos  $J_-$  mais uma vez e normalizamos os estados obtidos até alcançarmos  $|J_1 J_2, J_1 + J_2, M\rangle$  com  $M = -(J_1 + J_2)$ . Desse modo, os coeficientes de Clebsch-Gordan  $C(J_1 J_2 J_1 + J_2 | m_1 m_2 M)$  podem ser calculados etapa a etapa e são todos reais.



A próxima etapa é perceber que o único outro estado com  $M = J_1 + J_2 - 1$  é o topo da próxima torre mais baixa de estados  $|J_1 + J_2 - 1M\rangle$ . Visto que  $|J_1 + J_2 - 1 J_1 + J_2 - 1\rangle$  é ortogonal a  $|J_1 + J_2 J_1 + J_2 - 1\rangle$  na Equação (4.100), ele deve ser a outra combinação linear com um sinal de menos relativo.

$$\begin{aligned} |J_1 + J_2 - 1 J_1 + J_2 - 1\rangle = & -\{J_2/(J_1 + J_2)\}^{1/2}|J_1 J_1 - 1\rangle|J_2 J_2\rangle \\ & + \{J_1/(J_1 + J_2)\}^{1/2}|J_1 J_1\rangle|J_2 J_2 - 1\rangle, \end{aligned} \quad (4.102)$$

até um sinal geral.

Por conseguinte, determinamos os coeficientes de Clebsch-Gordan (para  $J_2 \geq J_1$ )

$$\begin{aligned} C(J_1 J_2 J_1 + J_2 - 1 | J_1 - 1 J_2 J_1 + J_2 - 1) &= -\{J_2/(J_1 + J_2)\}^{1/2}, \\ C(J_1 J_2 J_1 + J_2 - 1 | J_1 J_2 - 1 J_1 + J_2 - 1) &= \{J_1/(J_1 + J_2)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Mais uma vez, continuamos a usar  $J_-$  até alcançarmos  $M = -(J_1 + J_2 - 1)$ , e continuamos normalizando os estados resultantes  $|J_1 + J_2 - 1M\rangle$  da torre  $J = J_1 + J_2 - 1$ .

Para chegar ao topo da torre seguinte,  $|J_1 + J_2 - 2M\rangle$  com  $M = J_1 + J_2 - 2$ , lembramos que já construímos dois estados com aquele  $M$ . Ambos,  $|J_1 + J_2 J_1 + J_2 - 2\rangle$  e  $|J_1 + J_2 - 1 J_1 + J_2 - 2\rangle$ , são combinações lineares conhecidas dos três estados de produto  $|J_1 J_1\rangle|J_2 J_2 - 2\rangle$ ,  $|J_1 J_1 - 1\rangle \times |J_2 J_2 - 1\rangle$ , e a menos de  $|J_1 J_1 - 2\rangle|J_2 J_2\rangle$ . A terceira combinação linear é fácil de achar pela ortogonalidade desses dois estados, até uma fase geral, que é escolhida pelas **convenções de fase de Condon-Shortley**<sup>11</sup> de modo que o coeficiente  $C(J_1 J_2 J_1 + J_2 - 2 | J_1 J_2 - 2 J_1 + J_2 - 2)$  do último estado de produto é positivo para  $|J_1 J_2 J_1 + J_2 - 2 J_1 + J_2 - 2\rangle$ . É direto, embora um pouco tedioso, determinar o restante dos coeficientes de Clebsch-Gordan.

Numerosas relações de recorrência podem ser derivadas de elementos matriciais de vários operadores de momento angular, para as quais nos referimos, à literatura.<sup>12</sup>

As propriedades de simetria dos coeficientes de Clebsch-Gordan são mais bem exibidas nos símbolos  $3j$  de Wigner mais simétricos, que são tabulados:

$$\begin{pmatrix} J_1 J_2 J_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{J_1 - J_2 - m_3}}{(2J_3 + 1)^{1/2}} C(J_1 J_2 J_3 | m_1 m_2, -m_3), \quad (4.104a)$$

obedecendo às relações de simetria

$$\begin{pmatrix} J_1 J_2 J_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{J_1 + J_2 + J_3} \begin{pmatrix} J_k J_l J_n \\ m_k m_l m_n \end{pmatrix}, \quad (4.104b)$$

para  $(k, l, n)$  uma permutação ímpar de  $(1, 2, 3)$ . Um dos lugares mais importantes em que aparecem os coeficientes de Clebsch-Gordan é em elementos matriciais de operadores tensoriais, que são governados pelo teorema de Wigner-Eckart discutido na próxima seção, sobre tensores esféricos. Um outro é o acoplamento de operadores ou vetores de estado a momento angular total, tal como um acoplamento spin-órbita. Reacoplar operadores e estados em elementos matriciais leva a símbolos  $6j$  e  $9j$ . Coeficientes de Clebsch-Gordan podem ser, e são, calculados para outros grupos de Lie, tal como  $SU(3)$ .

## Tensores Esféricos

No Capítulo 2, as propriedades de tensores cartesianos são definidas usando o grupo de transformações lineares gerais não-singulares, que contém as rotações tridimensionais como um subgrupo. Um tensor de uma dada ordem que é irreduzível em relação ao grupo total pode perfeitamente tornar-se redutível para o grupo de rotação  $SO(3)$ . Para explicar este ponto, considere o tensor de segunda ordem com  $T_{jk} = x_j y_k$  para  $j, k = 1, 2, 3$ . Ele contém o tensor simétrico  $S_{jk} = (x_j y_k + x_k y_j)/2$  e o tensor anti-simétrico  $A_{jk} = (x_j y_k - x_k y_j)/2$ , portanto  $T_{jk} = S_{jk} + A_{jk}$ . Isso reduz  $T_{jk}$  em  $SO(3)$ . Contudo, sob rotações o produto escalar  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  é invariante e, por

<sup>11</sup>E. U. Condon e G. H. Shortley, *Theory of Atomic Spectra*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1935).

<sup>12</sup>Há uma rica literatura sobre esse assunto, por ex., A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton, NJ: Princeton University Press (1957); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*. Nova York: Wiley (1957); A. de-Shalit e I. Talmi, *Nuclear Shell Model*. Nova York: Academic Press (1963); Dover (2005). Coeficientes de Clebsch-Gordan são tabulados em M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis e J. K. Wooten, Jr., *The 3j- and 6j-Symbols*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology Press (1959).

consequente, é irredutível em  $SO(3)$ . Assim,  $S_{jk}$  pode ser reduzido por subtração do múltiplo de  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  que o torna sem traço. Isso leva ao tensor irredutível  $SO(3)$

$$S'_{jk} = \frac{1}{2}(x_j y_k + x_k y_j) - \frac{1}{3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \delta_{jk}.$$

Tensores de ordens mais altas podem ser tratados de maneira semelhante. Quando formamos tensores a partir de produtos das componentes do vetor de coordenadas  $\mathbf{r}$ , então, em coordenadas polares que são talhadas para a simetria  $SO(3)$ , terminamos com os harmônicos esféricos do Capítulo 12.

A forma dos operadores de levantamento e abaixamento para  $SO(3)$  na Seção 4.3 nos leva a introduzir as **componentes esféricas** (note, todavia, a normalização e os sinais diferentes prescritos pelos  $Y_{lm}$ ) de um vetor  $\mathbf{A}$ :

$$A_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y), \quad A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y), \quad A_0 = A_z. \quad (4.105)$$

Então, para o vetor de coordenadas  $\mathbf{r}$  em coordenadas polares, temos,

$$\begin{aligned} r_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} r \text{sen } \theta e^{i\varphi} = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{11}, & r_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} r \text{sen } \theta e^{-i\varphi} = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,-1}, \\ r_0 &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

em que  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  são os harmônicos esféricos do Capítulo 12. Mais uma vez, as componentes esféricas  $jm$  dos tensores  $T_{jm}$  de ordem mais alta  $j$  podem ser introduzidas de modo semelhante.

Um **operador tensorial esférico**  $T_{jm}$  irredutível de ordem  $j$  tem  $2j + 1$  componentes, exatamente como os harmônicos esféricos e  $m$  varia de  $-j$  a  $+j$ . Sob uma rotação  $R(\alpha)$ ,  $\alpha$  representa os ângulos de Euler, os  $Y_{lm}$  se transformam em

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') = \sum_{m'} Y_{lm'}(\hat{\mathbf{r}}) D^l_{m'm}(\mathbf{R}), \quad (4.107a)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}' = (\theta', \varphi')$  são obtidos de  $\hat{\mathbf{r}} = (\theta, \varphi)$  pela rotação  $R$  e são os ângulos do mesmo ponto no referencial rotacionado, e

$$D^J_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle Jm | \exp(i\alpha J_z) \exp(i\beta J_y) \exp(i\gamma J_z) | Jm' \rangle$$

são as matrizes de rotação. Portanto, para o operador  $T_{jm}$ , definimos

$$RT_{jm}R^{-1} = \sum_{m'} T_{jm'} D^j_{m'm}(\alpha). \quad (4.107b)$$

Para uma rotação infinitesimal (veja a Equação (4.20) na Seção 4.2 sobre geradores), o lado esquerdo da Equação (4.107b) é simplificado para um comutador e o lado direito para os elementos matriciais de  $\mathbf{J}$ , o gerador infinitesimal da rotação  $R$ :

$$[J_n, T_{jm}] = \sum_{m'} T_{jm'} \langle jm' | J_n | jm \rangle. \quad (4.108)$$

Se substituirmos nas Equações (4.83) e (4.84) os elementos matriciais de  $J_m$ , obteremos as leis alternativas de transformação de um operador tensorial

$$[J_0, T_{jm}] = mT_{jm}, \quad [J_{\pm}, T_{jm}] = T_{jm\pm 1} \{(j - m)(j \pm m + 1)\}^{1/2}. \quad (4.109)$$

Podemos usar os coeficientes de Clebsch-Gordan da subseção anterior para acoplar dois tensores de uma dada ordem a uma outra ordem. Um exemplo é o produto externo ou vetorial de dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  no Capítulo 1. Vamos escrever ambos os vetores em componentes esféricas  $a_m$  e  $b_m$ . Então, verificamos que o tensor  $C_m$  de ordem 1 é definido como

$$C_m \equiv \sum_{m_1 m_2} C(111|m_1 m_2 m) a_{m_1} b_{m_2} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_m. \quad (4.110)$$

Uma vez que  $C_m$  é um tensor esférico de ordem 1, linear nas componentes de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , ele deve ser proporcional ao produto vetorial  $C_m = N(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_m$ . A constante  $N$  pode ser determinada a partir de um caso especial,  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{y}}$ , em essência, escrevendo  $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$  em componentes esféricas como segue. Usando

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{z}})_0 &= 1; & (\hat{\mathbf{x}})_1 &= -1/\sqrt{2}, & (\hat{\mathbf{x}})_{-1} &= 1/\sqrt{2}; \\ (\hat{\mathbf{y}})_1 &= -i/\sqrt{2}, & (\hat{\mathbf{y}})_{-1} &= -i/\sqrt{2}, \end{aligned}$$



a Equação (4.110) para  $m = 0$  se torna

$$\begin{aligned} C(111|1, -1, 0)[(\hat{\mathbf{x}})_1(\hat{\mathbf{y}})_{-1} - (\hat{\mathbf{x}})_{-1}(\hat{\mathbf{y}})_1] &= N((\hat{\mathbf{z}})_0) = N \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{i}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{i}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

em que usamos  $C(111|101) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  da Equação (4.103) em lugar de  $J_1 = 1 = J_2$ , o que implica  $C(111|1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  usando as Equações (4.104a,b):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} C(111|101) = -\frac{1}{6} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} C(111|1, -1, 0).$$

Um pouco mais simples é o produto escalar usual de dois vetores no Capítulo 1, no qual  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são acoplados a momento angular zero:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv -(\mathbf{ab})_0 \sqrt{3} \equiv -\sqrt{3} \sum_m C(110|m, -m, 0) a_m b_{-m}. \quad (4.111)$$

Mais uma vez, a ordem zero de nosso produto de tensores implica  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = n(\mathbf{ab})_0$ . A constante  $n$  pode ser determinada por um caso especial, em essência escrevendo  $\hat{\mathbf{z}}^2 = 1$  em componentes esféricas:  $\hat{\mathbf{z}}^2 = 1 = nC(110|000) = -\frac{n}{\sqrt{3}}$ .

Uma outra aplicação de tensores usada com frequência é o **reacoplamento** que envolve **símbolos 6j** para três operadores e **9j** para quatro operadores.<sup>12</sup> Um exemplo é o produto escalar seguinte, para o qual se pode demonstrar que

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{3} \mathbf{r}^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)_2 \cdot (\mathbf{r}\mathbf{r})_2, \quad (4.112)$$

mas que também pode ser rearranjado por meios elementares. Aqui, os operadores tensoriais são definidos como

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)_{2m} = \sum_{m_1 m_2} C(112|m_1 m_2 m) \sigma_{1m_1} \sigma_{2m_2}, \quad (4.113)$$

$$(\mathbf{r}\mathbf{r})_{2m} = \sum_m C(112|m_1 m_2 m) r_{m_1} r_{m_2} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \mathbf{r}^2 Y_{2m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (4.114)$$

e o produto escalar de tensores de ordem 2 como

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)_2 \cdot (\mathbf{r}\mathbf{r})_2 = \sum_m (-1)^m (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)_{2m} (\mathbf{r}\mathbf{r})_{2,-m} = \sqrt{5} ((\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)_2 (\mathbf{r}\mathbf{r})_2)_0. \quad (4.115)$$

Uma das aplicações mais importantes de operadores tensoriais esféricos é o **teorema de Wigner-Eckart**. Esse teorema diz que um elemento matricial de um operador em tensor esférico  $T_{km}$  de ordem  $k$  entre estados de momento angular  $j$  e  $j'$  se fatora um coeficiente de Clebsch-Gordan e um denominado **elemento de matriz reduzida**, denotado por barras duplas, que não tem mais dependência alguma dos números quânticos de projeção  $m, m', n$ :

$$\langle j' m' | T_{kn} | j m \rangle = C(k j j' | n m m') (-1)^{k-j+j'} \langle j' || T_k || j \rangle / \sqrt{(2j'+1)}. \quad (4.116)$$

Em outras palavras, tais elementos matriciais se fatoram em uma parte dinâmica, o elemento de matriz reduzida, e em uma parte geométrica, o coeficiente de Clebsch-Gordan que contém as propriedades rotacionais (expressas pelos números quânticos de projeção) da invariância  $\text{SO}(3)$ . Para ver isso, acoplamos  $T_{kn}$  com o estado inicial ao momento angular total  $j'$ :

$$|j' m'\rangle_0 \equiv \sum_{nm} C(k j j' | n m m') T_{kn} |j m\rangle. \quad (4.117)$$

Sob rotações, o estado  $|j' m'\rangle_0$  se transforma exatamente como  $|j' m'\rangle$ . Assim, o elemento da matriz de sobreposição  $\langle j' m' | j' m' \rangle_0$  é um escalar rotacional que não tem dependência alguma de  $m'$ , de modo que podemos tomar a média das projeções,

$$\langle JM | j' m' \rangle_0 = \frac{\delta_{Jj'} \delta_{Mm'}}{2j'+1} \sum_{\mu} \langle j' \mu | j' \mu \rangle_0. \quad (4.118)$$

Em seguida, substituímos nossa definição, Equação (4.117), na Equação (4.118) e invertemos a relação, Equação (4.117), usando ortogonalidade, Equação (4.99b), para constatar que

$$\langle JM|T_{kn}|jm\rangle = \sum_{j'm'} C(kjj'|nmm') \frac{\delta_{Jj'} \delta_{Mm'}}{2J+1} \sum_{\mu} \langle J\mu|J\mu\rangle_0, \quad (4.119)$$

o que prova o teorema de Wigner-Eckart, Equação (4.116).<sup>13</sup>

Como aplicação, podemos escrever os elementos das matrizes de Pauli em termos dos coeficientes de Clebsch-Gordan. Aplicamos o teorema de Wigner-Eckart a

$$\langle \frac{1}{2}\gamma|\sigma_{\alpha}|\frac{1}{2}\beta\rangle = (\sigma_{\alpha})_{\gamma\beta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}C(1\frac{1}{2}\frac{1}{2}|\alpha\beta\gamma)\langle \frac{1}{2}\|\sigma\|\frac{1}{2}\rangle. \quad (4.120)$$

Visto que  $\langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}|\sigma_0|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = 1$  com  $\sigma_0 = \sigma_3$  e  $C(1\frac{1}{2}\frac{1}{2}|0\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = -1/\sqrt{3}$ , encontramos

$$\langle \frac{1}{2}\|\sigma\|\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{6}, \quad (4.121)$$

que, substituído na Equação (4.120), resulta em

$$(\sigma_{\alpha})_{\gamma\beta} = -\sqrt{3}C(1\frac{1}{2}\frac{1}{2}|\alpha\beta\gamma). \quad (4.122)$$

Note que o  $\alpha = \pm 1, 0$  denota as componentes esféricas das matrizes de Pauli.

### Tableaux de Young para SU( $n$ )

Os *Tableaux* de Young (TY) fornecem um método poderoso e elegante para decompor produtos de representações de grupo SU( $n$ ) em somas de representações irredutíveis. Os TY dão as dimensões e os tipos de simetria das representações irredutíveis nessa denominada **série de Clebsch-Gordan**, embora não dêem os coeficientes de Clebsch-Gordan pelos quais os estados de produto são acoplados aos números quânticos de cada representação irredutível das séries (veja a Equação (4.94)).

Produtos de representações correspondem a estados de multipartículas. Neste contexto, permutações de partículas são importantes quando tratamos com diversas partículas idênticas. Permutações de  $n$  objetos idênticos formam o **grupo simétrico**  $S_n$ . Uma conexão próxima entre representações irredutíveis de  $S_n$ , que são os TY, e as dos SU( $n$ ), é dada por este **teorema**: todo estado de  $N$  partícula de  $S_n$  que é composto de estados de uma única partícula do múltiplo fundamental  $n$  dimensional SU( $n$ ) pertence a uma representação irredutível SU( $n$ ). Uma prova está no Capítulo 22 de Wybourne<sup>14</sup>.

Para SU(2) a representação fundamental é uma caixa que representa os estados de spin  $+\frac{1}{2}$  (para cima) e  $-\frac{1}{2}$  (para baixo) e tem dimensão 2. Para SU(3) a caixa compreende os três estados de quark no triângulo da Figura 4.5a; tem dimensão 3.

Um arranjo de caixas mostrado na Figura 4.8 com  $\lambda_1$  caixas na primeira linha,  $\lambda_2$  caixas na segunda linha,  $\dots$ , e  $\lambda_{n-1}$  caixas na última linha é denominado *tableau de Young* (TY), denotado por  $[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$ , e representa uma representação irredutível de SU( $n$ ) se, e somente se,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}. \quad (4.123)$$

Caixas na mesma linha são representações simétricas; as que estão na mesma coluna são anti-simétricas. Um TY de apenas uma linha é totalmente simétrico. Um TY de uma única coluna é totalmente anti-simétrico.

Há no máximo  $n - 1$  linhas para o TY de SU( $n$ ) porque uma coluna de  $n$  caixas é a representação totalmente anti-simétrica do singlete (**determinante de Slater** de estados de uma partícula única) que pode ser eliminado de TY.

Um arranjo de  $N$  caixas é um estado de  $N$  partículas cujas caixas podem ser rotuladas por inteiros positivos, de modo que os números (ou rótulos de partículas) em uma linha do TY não diminuam da esquerda para a direita e os de qualquer uma coluna aumentam de cima para baixo. Ao contrário das possíveis repetições de números de linhas, os números em qualquer coluna devem ser diferentes por causa da anti-simetria desses estados.

O produto de um TY com uma única caixa [1] é a soma do TY formado quando a caixa é colocada no final de cada linha do TY, contanto que o TY resultante seja legítimo, isto é, obedeça à Equação (4.123). Para SU(2), o produto de duas caixas, representações de spin 1/2 de dimensão 2, gera

$$[1] \otimes [1] = [2] \oplus [1, 1], \quad (4.124)$$

<sup>13</sup>O fator extra  $(-1)^{k-j+j'}/\sqrt{(2j'+1)}$  na Equação (4.116) é apenas uma convenção que varia na literatura.

<sup>14</sup>B.G. Wybourne *Classical Groups for Physicists*. Nova York: Wiley (1974).



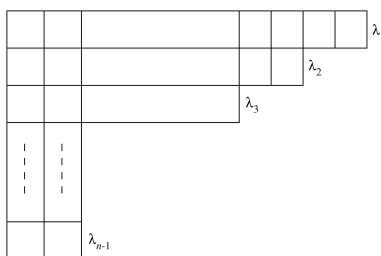


Figura 4.8: *Tableau de Young* (TY) para  $SU(n)$ .

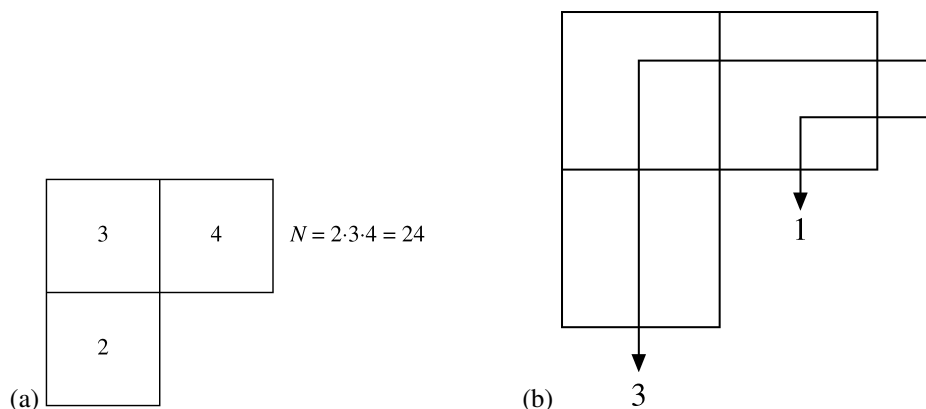


Figura 4.9: Ilustração de (a)  $N$  e (b)  $D$  na Equação (4.125) para o octeto de  $SU(3)$  no *tableau* de Young.

a representação simétrica de spin 1 de dimensão 3 e o singlete anti-simétrico de dimensão 1 mencionado antes.

A coluna de  $n - 1$  caixas é a representação conjugada da representação fundamental; seu produto com uma única caixa contém a coluna de  $n$  caixas, que é o singlete. Para  $SU(3)$ , a representação conjugada da caixa única [1] ou representação fundamental de quark é o triângulo invertido na Figura 4.5b, [1, 1], que representa os três antiquarks  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ , obviamente também de dimensão 3.

A dimensão de um TY é dada pela razão

$$\dim \text{TY} = \frac{N}{D}. \tag{4.125}$$

O numerador  $N$  é obtido escrevendo um  $n$  em todas as caixas do TY ao longo da diagonal ( $n + 1$ ) em todas as caixas imediatamente acima da diagonal ( $n - 1$ ), imediatamente abaixo da diagonal etc.  $N$  é o produto de todos os números no TY. A Figura 4.9a mostra um exemplo para a representação em octeto de  $SU(3)$ , em que  $N = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ . Há uma fórmula fechada que é equivalente à Equação (4.125).<sup>15</sup> O denominador  $D$  é o produto de todos os **ganchos**.<sup>16</sup> Desenhamos um gancho através de cada caixa do TY começando por uma linha horizontal que parte da direita da caixa em questão e então continua na vertical fora do TY. O número de caixas atravessadas pela linha do gancho é o número de gancho da caixa.  $D$  é o produto de todos os números de gancho do TY. A Figura 4.9b mostra um exemplo de octeto de  $SU(3)$ , cujo número de gancho é  $D = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ . Por conseguinte, a dimensão do octeto de  $SU(3)$  é  $24/3 = 8$ , daí seu nome.

Agora podemos calcular as dimensões do TY na Equação (4.124). Para  $SU(2)$ , elas são  $2 \times 2 = 3 + 1 = 4$ . Para  $SU(3)$ , são  $3 \cdot 3 = 3 \cdot 4 / (1 \cdot 2) + 3 \cdot 2 / (2 \cdot 1) = 6 + 3 = 9$ . Para o produto do TY de  $SU(3)$  quark vezes antiquark obtemos

$$[1, 1] \otimes [1] = [2, 1] \oplus [1, 1, 1], \tag{4.126}$$

isto é, octeto e singlete, que são precisamente os multipletos de mésons considerados na subseção sobre o caminho óctuplo, a simetria de sabor  $SU(3)$  que sugere que mésons são estados ligados de um quark e um antiquark,

<sup>15</sup>Veja, por exemplo, M. Hamermesh, *Group Theory and Its Application to Physical Problems*. Reading, MA: Addison-Wesley (1962).

<sup>16</sup>F. Close, *Introduction to Quarks and Partons*. Nova York: Academic Press (1979).

configurações  $q\bar{q}$ . Para o produto de três quarks obtemos

$$([1] \otimes [1]) \otimes [1] = ([2] \oplus [1, 1]) \otimes [1] = [3] \oplus 2[2, 1] \oplus [1, 1, 1], \quad (4.127)$$

isto é, decuplo, octeto e singleto, que são os multipletos observados para os bárions, que sugerem que eles são estados ligados de três quarks, configurações  $qqq$ .

Como vimos,  $TY$  descreve a decomposição de um produto de representações irredutíveis de  $SU(n)$  em representações irredutíveis de  $SU(n)$ , que é denominada série de Clebsch-Gordan, enquanto os coeficientes de Clebsch-Gordan considerados antes permitem a construção dos estados individuais nessa série.

### Exercícios

- 4.4.1 Derive relações de recorrência para coeficientes de Clebsch-Gordan. Use-as para calcular  $C(11J|m_1m_2M)$  para  $J = 0, 1, 2$ .  
*Sugestão:* Use os elementos de matriz conhecidos de  $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ ,  $J_{i+}$ , e  $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$  etc.
- 4.4.2 Mostre que  $(Y_l \chi)_M^J = \sum C(l \frac{1}{2} J | m_l m_s M) Y_{lm_l} \chi_{m_s}$ , em que  $\chi_{\pm 1/2}$  são as autofunções de spin para cima e para baixo de  $\sigma_3 = \sigma_z$ , se transformam como um tensor esférico de ordem  $J$ .
- 4.4.3 Quando o spin de quarks é levado em conta, a simetria de sabor  $SU(3)$  é substituída pela simetria  $SU(6)$  Por quê? Obtenha o *tableau* de Young para a configuração de antiquark  $\bar{q}$ . Então decomponha o produto  $q\bar{q}$ . Quais representações de  $SU(3)$  estão contidas na representação não trivial de  $SU(6)$  para mésons?  
*Sugestão:* Determine as dimensões de todos os  $TY$ .
- 4.4.4 Para  $l = 1$ , a Equação (4.107a) se torna

$$Y_1^m(\theta', \varphi') = \sum_{m'=-1}^1 D_{m'm}^1(\alpha, \beta, \gamma) Y_1^{m'}(\theta, \varphi).$$

Reescreva esses harmônicos esféricos em forma cartesiana. Mostre que as equações de coordenadas cartesianas resultantes são equivalentes à matriz de rotação de Euler  $A(\alpha, \beta, \gamma)$ , Equação (3.94), rotacionando as coordenadas.

- 4.4.5 Admitindo que  $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$  é unitário, mostre que

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)$$

é uma quantidade escalar (invariante sob rotações). Esse é um tensor esférico análogo a um produto escalar de vetores.

- 4.4.6 (a) Mostre que a dependência  $\alpha$  e  $\gamma$  de  $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$  pode ser eliminada por fatoração, de modo que

$$D^j(\alpha, \beta, \gamma) = A^j(\alpha) d^j(\beta) C^j(\gamma).$$

- (b) Mostre que  $A^j(\alpha)$  e  $C^j(\gamma)$  são diagonais. Ache as formas explícitas.
- (c) Mostre que  $d^j(\beta) = D^j(0, \beta, 0)$ .

- 4.4.7 A forma de  $m$  exponencial de momento angular dos operadores de rotação do ângulo de Euler é

$$\begin{aligned} R &= R_{z''}(\gamma) R_{y'}(\beta) R_z(\alpha) \\ &= \exp(-i\gamma J_{z''}) \exp(-i\beta J_{y'}) \exp(-i\alpha J_z). \end{aligned}$$

Mostre que em termos dos eixos originais

$$R = \exp(i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(-i\gamma J_z).$$

*Sugestão:* Os operadores  $R$  se transformam como matrizes. A rotação ao redor do eixo  $y'$  (segunda rotação de Euler) pode ser referida ao eixo  $y$  original por

$$\exp(-i\beta J_{y'}) = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(i\alpha J_z).$$



- 4.4.8** Usando o teorema de Wigner-Eckart, prove o teorema da decomposição para um operador de vetor esférico  $\langle j'm'|T_{1m}|jm\rangle = \frac{\langle jm'|J \cdot T_1|jm\rangle}{j(j+1)} \delta_{jj'}$ .
- 4.4.9** Usando o teorema de Wigner-Eckart, prove a

$$\langle j'm'|J_M J \cdot T_1|jm\rangle = \langle jm'|J_M|jm\rangle \delta_{jj'} \langle jm|J \cdot T_1|jm\rangle.$$

## 4.5 Grupo Homogêneo de Lorentz

Generalizando a abordagem de vetores da Seção 1.2, em relatividade especial exigimos que nossas leis da física sejam covariantes<sup>17</sup> sob

- translações do espaço e do tempo,
- rotações no espaço real, tridimensional e
- transformações de Lorentz.

A exigência de covariância sob translações é baseada na homogeneidade do espaço e do tempo. Covariância sob rotações é uma asserção da isotropia de espaço. O requisito de covariância de Lorentz vem da relatividade especial. Todas essas três transformações juntas formam o grupo não-homogêneo de Lorentz ou o grupo de Poincaré. Quando excluídas as translações, as rotações no espaço e a transformação de Lorentz juntas formam um grupo — o grupo homogêneo de Lorentz.

Em primeiro lugar, geramos um subgrupo, as transformações de Lorentz nas quais a velocidade relativa  $\mathbf{v}$  está ao longo do eixo  $x = x^1$ . O gerador pode ser determinado considerando sistemas de referência espaço-temporais movimentando-se com uma velocidade relativa  $\delta v$ , um infinitésimo.<sup>18</sup> As relações são similares àquelas para rotações no espaço real, Seções 1.2, 2.6 e 3.3, exceto que, aqui, o ângulo de rotação é imaginário puro (compare com a Seção 4.6).

Transformações de Lorentz são lineares não somente nas coordenadas espaciais  $x_i$  mas também no tempo  $t$ . Elas se originam das equações de Maxwell da eletrodinâmica, que são invariantes sob transformações de Lorentz, como veremos mais adiante. Transformações de Lorentz deixam a forma quadrática  $c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$  invariante, em que  $x_0 = ct$ . Vemos isso se acendermos uma fonte de luz na origem do sistema de coordenadas. No tempo  $t$ , a luz viajou a distância  $ct = \sqrt{\sum x_i^2}$ , portanto  $c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ . A relatividade especial requer que em todos os sistemas (inerciais) que se movimentam com velocidade  $v \leq c$  em qualquer direção relativa ao sistema  $x_i$  e têm a mesma origem no tempo  $t = 0$ ,  $c^2 t'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0$  também seja válida. Um espaço-tempo quadridimensional com a métrica  $x \cdot x = x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$  é denominado espaço de Minkowski, com o produto escalar de dois quadrivetores definido como  $a \cdot b = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Usando o tensor métrico,

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.128)$$

podemos elevar e abaixar os índices de um quadrivetor, tal como as coordenadas  $x^\mu = (x_0, \mathbf{x})$ , de modo que  $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, -\mathbf{x})$  e  $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ , ficando subentendida a convenção da soma de Einstein. Para o gradiente,  $\partial^\mu = (\partial/\partial x_0, -\nabla) = \partial/\partial x_\mu$  e  $\partial_\mu = (\partial/\partial x_0, \nabla)$ , portanto,  $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = (\partial/\partial x_0)^2 - \nabla^2$  é um escalar de Lorentz, exatamente como a métrica  $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ .

Para  $v \ll c$ , no limite não-relativista, uma transformação de Lorentz deve ser galileana. Por conseguinte, para derivar a forma de uma transformação de Lorentz ao longo do eixo  $x_1$ , começamos com uma transformação galileana para a velocidade relativa infinitesimal  $\delta v$ :

$$x'^1 = x^1 - \delta v t = x^1 - x^0 \delta \beta. \quad (4.129)$$

Aqui,  $\beta = v/c$ . Por simetria, escrevemos também

$$x'^0 = x^0 + a \delta \beta x^1, \quad (4.129')$$

escolhendo o parâmetro  $a$ , de modo que  $x_0^2 - x_1^2$  seja invariante,

$$x_0'^2 - x_1'^2 = x_0^2 - x_1^2. \quad (4.130)$$

<sup>17</sup>Ser covariante significa ter a mesma forma em sistemas coordenados diferentes, de modo que não há um sistema de referência preferido (compare com as Seções 1.2 e 2.6).

<sup>18</sup>Essa derivação, com uma métrica ligeiramente diferente, aparece em um artigo de J. L. Strecker, *Am. J. Phys.* 35: 12 (1967).

Lembre-se de que  $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$  é o vetor protótipo quadridimensional no espaço de Minkowski. Assim, a Equação (4.130) é uma simples declaração da invariância do quadrado da grandeza do vetor “distância” sob transformação de Lorentz no espaço de Minkowski. É aqui que a relatividade especial entra em nossa transformação. Elevando ao quadrado e subtraindo as Equações (4.129) e (4.129') e descartando os termos de ordem  $(\delta\beta)^2$ , encontramos  $a = -1$ . As Equações (4.129) e (4.129') podem ser combinadas como uma equação matricial

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = (1_2 - \delta\beta\sigma_1) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}; \quad (4.131)$$

por acaso,  $\sigma_1$  é a matriz de Pauli,  $\sigma_1$ , e o parâmetro  $\delta\beta$  representa uma alteração infinitesimal. Usando as mesmas técnicas da Seção 4.2, repetimos a transformação  $N$  vezes para desenvolver uma transformação finita com o parâmetro de velocidade  $\rho = N\delta\beta$ . Então,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \left(1_2 - \frac{\rho\sigma_1}{N}\right)^N \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}. \quad (4.132)$$

No limite, à medida que  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1_2 - \frac{\rho\sigma_1}{N}\right)^N = \exp(-\rho\sigma_1). \quad (4.133)$$

Assim como na Seção 4.2, a exponencial é interpretada por uma expansão de Maclaurin,

$$\exp(-\rho\sigma_1) = 1_2 - \rho\sigma_1 + \frac{1}{2!}(\rho\sigma_1)^2 - \frac{1}{3!}(\rho\sigma_1)^3 + \dots \quad (4.134)$$

Notando que  $(\sigma_1)^2 = 1_2$ ,

$$\exp(-\rho\sigma_1) = 1_2 \cosh \rho - \sigma_1 \sinh \rho. \quad (4.135)$$

Por conseqüência, nossa transformação finita de Lorentz é

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \rho & -\sinh \rho \\ -\sinh \rho & \cosh \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}. \quad (4.136)$$

$\sigma_1$  gerou as representações dessa transformação de Lorentz pura. As quantidades  $\cosh \rho$  e  $\sinh \rho$  podem ser identificadas considerando a origem do sistema de coordenadas “com linha”,  $x'^1 = 0$  ou  $x^1 = vt$ . Substituindo na Equação (4.136), temos

$$0 = x^1 \cosh \rho - x^0 \sinh \rho. \quad (4.137)$$

Com  $x^1 = vt$  and  $x^0 = ct$ ,

$$\operatorname{tgh} \rho = \beta = \frac{v}{c}.$$

Note a **rapidez**  $\rho \neq v/c$ , exceto no limite com que  $v \rightarrow 0$ . A rapidez é o parâmetro aditivo para a transformação de Lorentz puras (“boosts”) ao longo do mesmo eixo que corresponde a ângulos para rotações ao redor do mesmo eixo. Usando  $1 - \operatorname{tgh}^2 \rho = (\cosh^2 \rho)^{-1}$ ,

$$\cosh \rho = (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma, \quad \sinh \rho = \beta\gamma. \quad (4.138)$$

O grupo de transformações de Lorentz não é compacto, porque o limite de uma seqüência de rapidez que tende ao infinito não é mais um elemento do grupo.

O caso especial precedente da velocidade paralela a um eixo do espaço é fácil, mas ilustra a técnica por exponenciação dos geradores das transformações infinitesimais de velocidade. Agora, esta técnica exata pode ser aplicada para derivar a transformação de Lorentz para a velocidade relativa  $\mathbf{v}$  **não**-paralela a qualquer eixo do espaço. As matrizes dadas pela Equação (4.136) para o caso de  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}v_x$  formam um subgrupo. As matrizes no caso geral, não. O produto de duas matrizes de transformação de Lorentz  $L(\mathbf{v}_1)$  e  $L(\mathbf{v}_2)$  resulta em uma terceira matriz de Lorentz,  $L(\mathbf{v}_3)$ , se as duas velocidades  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  forem paralelas. A velocidade resultante,  $\mathbf{v}_3$ , é relacionada com  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  pela lei da adição de velocidade de Einstein, Exercício 4.5.3. Se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  não forem paralelas, essa relação simples não existe. Especificamente, considere três referenciais  $S, S'$  e  $S''$ , com  $S$  e  $S'$  relacionados por



$L(\mathbf{v}_1)$  e  $S'$  e  $S''$  relacionados por  $L(\mathbf{v}_2)$ . Se a velocidade de  $S''$  relativa ao sistema original  $S$  é  $\mathbf{v}_3$ ,  $S''$  não é obtida de  $S$  por  $L(\mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_2)L(\mathbf{v}_1)$ . Em vez disso, constatamos que

$$L(\mathbf{v}_3) = RL(\mathbf{v}_2)L(\mathbf{v}_1), \quad (4.139)$$

em que  $R$  é uma matriz  $3 \times 3$  de rotação no espaço inserida em nosso espaço-tempo quadridimensional. Com  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  não-paralelas, o sistema final,  $S''$ , é **rotacionado** em relação a  $S$ . Essa rotação é a origem da precessão de Thomas envolvida em termos de acoplamento spin-órbita em física atômica e nuclear. Por causa de sua presença, as transformações de Lorentz puras  $L(\mathbf{v})$  por si sós não formam um grupo.

### Cinemática e Dinâmica em Espaço-Tempo de Minkowski

Vimos que a propagação da luz determina a métrica

$$\mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = 0 = \mathbf{r}'^2 - c^2 t'^2,$$

em que  $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$  é o quadrivetor de coordenadas. Para uma partícula que se movimenta com velocidade  $\mathbf{v}$ , a versão infinitesimal invariante de Lorentz

$$c d\tau \equiv \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2} = dt \sqrt{c^2 - \mathbf{v}^2}$$

define o tempo próprio invariante  $\tau$  em sua trajetória. Por causa da dilatação do tempo em referenciais em movimento, um relógio de tempo real acompanha a partícula (no seu referencial de repouso) e funciona à menor taxa possível em comparação com a de qualquer outro referencial inercial (um observador, por exemplo). A quadri-velocidade da partícula agora pode ser adequadamente definida como

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu = \left( \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}^2}} \right),$$

portanto,  $u^2 = 1$ , e o quadrimomento  $p^\mu = cmu^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$  resulta na famosa relação de energia de Einstein

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = mc^2 + \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 \pm \dots$$

Uma consequência de  $u^2 = 1$  e seu significado físico é que a partícula está sobre sua camada de massa  $p^2 = m^2 c^2$ .

Agora formulamos a equação de Newton para uma **partícula única** de massa  $m$  em relatividade especial como  $\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu$ , sendo que  $K^\mu$  denota o quadrivetor força, portanto sua parte vetorial da equação coincide com a forma usual. Para  $\mu = 1, 2, 3$  usamos  $d\tau = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$  e encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = \mathbf{K},$$

que determina  $\mathbf{K}$  em termos da força usual  $\mathbf{F}$ . Precisamos achar  $K^0$ . Prosseguimos por analogia com a derivação de conservação de energia, multiplicando a equação de força na quadri-velocidade

$$mu_\nu \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{m}{2} \frac{du^2}{d\tau} = 0,$$

porque  $u^2 = 1 = \text{constante}$ . O outro lado da equação de Newton resulta em

$$0 = \frac{1}{c} u \cdot K = \frac{K^0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}},$$

portanto,  $K^0 = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}$  é relacionada à taxa de trabalho realizado pela força sobre a partícula.

Agora abordamos colisões de dois corpos, nas quais a conservação de energia-momento toma a forma  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ , em que  $p_i^\mu$  são os quadrimomentos das partículas. Como o produto escalar de qualquer quadrivetor por ele próprio é invariante sob transformações de Lorentz, é conveniente definir a energia invariante de Lorentz ao quadrado,  $s = (p_1 + p_2)^2 = P^2$ , em que  $P^\mu$  é o quadrimomento total, e usar unidades em que a velocidade da luz  $c = 1$ . O sistema de laboratório (lab) é definido como a estrutura de repouso da partícula com quadrimomento

$p_2^\mu = (m_2, \mathbf{0})$  e referencial do centro de momento (cms) é definido pelo quadrimomento total  $P^\mu = (E_1 + E_2, \mathbf{0})$ . Quando a energia incidente de laboratório  $E_1^L$  é dada, então

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L$$

é determinada. Agora, as energias cms das quatro partículas são obtidas de produtos escalares

$$p_1 \cdot P = E_1(E_1 + E_2) = E_1 \sqrt{s},$$

portanto,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{p_1 \cdot (p_1 + p_2)}{\sqrt{s}} = \frac{m_1^2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{s}} = \frac{m_1^2 - m_2^2 + s}{2\sqrt{s}}, \\ E_2 &= \frac{p_2 \cdot (p_1 + p_2)}{\sqrt{s}} = \frac{m_2^2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{s}} = \frac{m_2^2 - m_1^2 + s}{2\sqrt{s}}, \\ E_3 &= \frac{p_3 \cdot (p_3 + p_4)}{\sqrt{s}} = \frac{m_3^2 + p_3 \cdot p_4}{\sqrt{s}} = \frac{m_3^2 - m_4^2 + s}{2\sqrt{s}}, \\ E_4 &= \frac{p_4 \cdot (p_3 + p_4)}{\sqrt{s}} = \frac{m_4^2 + p_3 \cdot p_4}{\sqrt{s}} = \frac{m_4^2 - m_3^2 + s}{2\sqrt{s}}, \end{aligned}$$

por substituição de

$$2p_1 \cdot p_2 = s - m_1^2 - m_2^2, \quad 2p_3 \cdot p_4 = s - m_3^2 - m_4^2.$$

Assim, todas as energias cms  $E_i$  dependem somente da energia incidente, mas não do ângulo de dispersão. Para espalhamento elástico,  $m_3 = m_1, m_4 = m_2$ , portanto  $E_3 = E_1, E_4 = E_2$ . A transferência de momento invariante de Lorentz ao quadrado

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3$$

depende linearmente do co-seno do ângulo de espalhamento.

### Exemplo 4.5.1 DECAIMENTO DO KÁON E LIMAR DE FOTOPRODUÇÃO DE PÍON

Ache as energias cinéticas do múon de massa 106 MeV e neutrino sem massa no qual um méson K de massa 494 MeV decai em seu referencial de repouso.

A conservação de energia e momento dá  $m_K = E_\mu + E_\nu = \sqrt{s}$ . A aplicação da cinemática relativista descrita anteriormente resulta em

$$\begin{aligned} E_\mu &= \frac{p_\mu \cdot (p_\mu + p_\nu)}{m_K} = \frac{m_\mu^2 + p_\mu \cdot p_\nu}{m_K}, \\ E_\nu &= \frac{p_\nu \cdot (p_\mu + p_\nu)}{m_K} = \frac{p_\mu \cdot p_\nu}{m_K}. \end{aligned}$$

Combinando ambos os resultados, obtemos  $m_K^2 = m_\mu^2 + 2p_\mu \cdot p_\nu$ , portanto

$$\begin{aligned} E_\mu &= T_\mu + m_\mu = \frac{m_K^2 + m_\mu^2}{2m_K} = 258,4 \text{ MeV}, \\ E_\nu &= T_\nu = \frac{m_K^2 - m_\mu^2}{2m_K} = 235,6 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Como outro exemplo, na produção de um pión neutro por um fóton incidente de acordo com  $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p'$  no limiar, o pión neutro e o próton são criados em repouso no cms. Por conseguinte,

$$s = (p_\gamma + p)^2 = m_p^2 + 2m_p E_\gamma^L = (p_\pi + p')^2 = (m_\pi + m_p)^2,$$

portanto,  $E_\gamma^L = m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p} = 144,7 \text{ MeV}$ .



## Exercícios

- 4.5.1** Duas transformações de Lorentz são executadas em sucessão:  $v_1$  ao longo do eixo  $x$  e em seguida  $v_2$  ao longo do eixo  $y$ . Mostre que a transformação resultante (dada pelo produto dessas duas transformações sucessivas) **não pode** ser colocada na forma de uma única transformação de Lorentz.

*Nota:* A discrepância corresponde a uma rotação.

- 4.5.2** Derive novamente a transformação de Lorentz, trabalhando inteiramente no espaço real  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  com  $x^0 = x_0 = ct$ . Mostre que a transformação de Lorentz pode ser escrita como  $L(\mathbf{v}) = \exp(\rho\sigma)$ , sendo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\mu & -\nu \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e  $\lambda, \mu, \nu$  são os co-senos diretores da velocidade  $\mathbf{v}$ .

- 4.5.3** Usando a relação matricial, Equação (4.136), seja a rapidez  $\rho_1$  relacionada aos referenciais de Lorentz  $(x'^0, x'^1)$  e  $(x^0, x^1)$ . Seja  $\rho_2$  relacionada a  $(x''^0, x''^1)$  e  $(x'^0, x'^1)$ . Por fim, seja  $\rho$  relacionada a  $(x''^0, x''^1)$  e  $(x^0, x^1)$ . Por  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  derive a lei da adição de velocidade de Einstein

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

## 4.6 Covariância de Lorentz de Equações de Maxwell

Se uma lei física deve ser válida para todas as orientações de nossas coordenadas (reais) — isto é, deve ser invariante sob rotações —, os termos da equação devem ser covariantes sob rotações (Seções 1.2 e 2.6). Isso quer dizer que escrevemos as leis da física na forma matemática escalar = escalar, vetor = vetor, tensor de segunda ordem = tensor de segunda ordem, e assim por diante. De modo semelhante, se uma lei da física deve ser válida para todos os sistemas inerciais, os termos da equação devem ser covariantes sob transformações de Lorentz.

Usando o espaço de Minkowski ( $ct = x^0; x = x^1, y = x^2, z = x^3$ ), temos um espaço quadridimensional com a métrica  $g_{\mu\nu}$  (Equação (4.128), Seção 4.5). As transformações de Lorentz são lineares no espaço e no tempo nesse espaço real quadridimensional.<sup>19</sup>

Aqui, consideramos equações de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.140a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v}, \quad (4.140b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (4.140c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.140d)$$

e as relações

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (4.141)$$

Os símbolos têm seus significados usuais como dados na Seção 1.9. Por simplicidade, admitimos o vácuo ( $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$ ).

Admitimos que as equações de Maxwell são válidas em todos os sistemas inerciais; isto é, as equações de Maxwell são consistentes com a relatividade especial. (Na verdade, a covariância das equações de Maxwell sob transformações de Lorentz foi demonstrada por Lorentz e Poincaré antes de Einstein propor sua teoria da relatividade especial. Nosso objetivo imediato é reescrever as equações de Maxwell como equações de tensores em um espaço de Minkowski. Isso fará com que a covariância de Lorentz fique explícita ou evidente.

<sup>19</sup>Uma derivação teórica de grupo da transformação de Lorentz em espaço de Minkowski aparece na Seção 4.5. Veja também H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Cambridge, MA: Addison-Wesley (1951), Capítulo 6. A equação métrica  $x_0^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ , independente do referencial, leva às transformações de Lorentz.

Em termos de um escalar,  $\varphi$ , e potenciais vetores magnéticos,  $\mathbf{A}$ , podemos resolver<sup>20</sup> a Equação (4.140d) e então (4.140a) por

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \end{aligned} \quad (4.142)$$

A Equação (4.142) especifica o rotacional de  $\mathbf{A}$ ; a divergência de  $\mathbf{A}$  ainda é indefinida (compare com a Seção 1.16). Podemos, e assim o faremos para conveniência futura, impor mais uma restrição de calibre ao potencial vetorial  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.143)$$

Esta é a relação calibre de Lorentz. Ela servirá para desacoplar as equações diferenciais para  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$  que virão em seguida. Os potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$  ainda não são completamente fixos. A liberdade restante é o tópico do Exercício 4.6.4.

Agora reescrevemos as equações de Maxwell em termos dos potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ . Pelas Equações (4.140c) para  $\nabla \cdot \mathbf{D}$ , (4.141) e (4.142),

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (4.144)$$

enquanto as Equações (4.140b) para  $\nabla \times \mathbf{H}$  e (4.142) e Equação (1.86c) do Capítulo 1 resultam em

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \{ \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \} = \frac{\rho \mathbf{v}}{\varepsilon_0}. \quad (4.145)$$

Usando a relação de Lorentz, Equação (4.143), e a relação  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} &= -\mu_0 \rho \mathbf{v}, \\ \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Agora, o operador diferencial (veja também o Exercício 2.7.3)

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\partial^2 \equiv -\partial^\mu \partial_\mu$$

é um laplaciano quadridimensional, usualmente denominado d’alembertiano e às vezes também denotado por  $\square$ . É um escalar por construção (veja o Exercício 2.7.3).

Por conveniência, definimos

$$\begin{aligned} A^1 &\equiv \frac{A_x}{\mu_0 c} = c \varepsilon_0 A_x, & A^3 &\equiv \frac{A_z}{\mu_0 c} = c \varepsilon_0 A_z, \\ A^2 &\equiv \frac{A_y}{\mu_0 c} = c \varepsilon_0 A_y, & A_0 &\equiv \varepsilon_0 \varphi = A^0. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Se, além disso, definirmos uma densidade de corrente quadrivetorial

$$\frac{\rho v_x}{c} \equiv j^1, \quad \frac{\rho v_y}{c} \equiv j^2, \quad \frac{\rho v_z}{c} \equiv j^3, \quad \rho \equiv j_0 = j^0, \quad (4.148)$$

então a Equação (4.146) pode ser escrita na forma

$$\partial^2 A^\mu = j^\mu. \quad (4.149)$$

A equação de onda (4.149) é parecida com uma equação quadrivetorial, mas parece não constituir prova. Para provar que ela é uma equação quadrivetorial, começamos investigando as propriedades de transformação da corrente generalizada  $j^\mu$ .

<sup>20</sup>Compare com a Seção 1.13, em especial com o Exercício 1.13.10.





Uma vez que um elemento de carga elétrica  $de$  é uma quantidade invariante, temos

$$de = \rho dx^1 dx^2 dx^3, \text{ invariante.} \quad (4.150)$$

Vimos na Seção 2.9 que o elemento de volume quadridimensional  $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  também era invariante, um pseudo-escalar. Comparando este resultado, Equação (2.106), com a Equação (4.150), vemos que a densidade de carga  $\rho$  deve se transformar do mesmo modo que  $dx^0$ , a componente de ordem zero de um vetor quadridimensional  $dx^\lambda$ . Igualamos  $\rho = j^0$ , sendo que, agora,  $j^0$  está estabelecida como a componente de ordem zero de um quadrivetor. As outras partes da Equação (4.148) podem ser expandidas como

$$j^1 = \frac{\rho v_x}{c} = \frac{\rho dx^1}{c dt} = j^0 \frac{dx^1}{dx^0}. \quad (4.151)$$

Uma vez que acabamos de mostrar que  $j^0$  se transforma como  $dx^0$ , isso significa que  $j^1$  se transforma como  $dx^1$ . Com resultados similares para  $j^2$  e  $j^3$ , temos  $j^\lambda$  se transformando como  $dx^\lambda$ , provando que  $j^\lambda$  é um vetor quadridimensional no espaço de Minkowski.

Admitimos que a Equação (4.149), que resulta diretamente das equações de Maxwell, Equações (4.140), é válida em todos os sistemas cartesianos (todos os referenciais de Lorentz). Então, pela regra do quociente, Seção 2.8,  $A^\mu$  também é um vetor e a Equação (4.149) é uma equação tensorial legítima.

Agora, trabalhando para trás, a Equação (4.142) pode ser escrita

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E_j &= -\frac{\partial A^j}{\partial x^0} - \frac{\partial A^0}{\partial x^j}, & j &= 1, 2, 3, \\ \frac{1}{\mu_0 c} B_i &= \frac{\partial A^k}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^k}, & (i, j, k) &= \text{permutação cíclica}(1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.152)$$

Definimos um novo tensor,

$$\partial^\mu A^\lambda - \partial^\lambda A^\mu = \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} \equiv F^{\mu\lambda} = -F^{\lambda\mu} \quad (\mu, \lambda = 0, 1, 2, 3),$$

um tensor anti-simétrico de segunda ordem, já que  $A^\lambda$  é um vetor. Escrito explicitamente,

$$\frac{F_{\mu\lambda}}{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{F^{\mu\lambda}}{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.153)$$

Note que em nosso espaço quadridimensional de Minkowski  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  não são mais vetores, mas juntos formam um tensor de segunda ordem. Com esse tensor podemos escrever as duas equações não-homogêneas de Maxwell ((4.140b) e (4.140c)) combinadas como uma equação tensorial,

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\mu} = j_\lambda. \quad (4.154)$$

O lado esquerdo da Equação (4.154) é uma divergência quadridimensional de um tensor e, portanto, um vetor. Isso, é claro, é equivalente a contrair um tensor de terceira ordem parcial  $\partial F^{\lambda\mu}/\partial x^\nu$  (compare com os Exercícios 2.7.1 e 2.7.2). As duas equações homogêneas de Maxwell — (4.140a) para  $\nabla \times \mathbf{E}$  e (4.140d) para  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  — podem ser expressas sob a forma de tensor

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} = 0 \quad (4.155)$$

para a Equação (4.140d) e três equações da forma

$$-\frac{\partial F_{30}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{02}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} = 0 \quad (4.156)$$

para a Equação (4.140a). (Uma segunda equação permuta 120, uma terceira permuta 130.). Visto que

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \equiv t^{\lambda\mu\nu}$$

é um tensor (de terceira ordem), as Equações (4.140a) e (4.140d) são dadas pela equação tensorial

$$t^{\lambda\mu\nu} + t^{\nu\lambda\mu} + t^{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (4.157)$$

Pelas Equações (4.155) e (4.156) você entenderá que se supõe que os índices  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  são diferentes. Na verdade, a Equação (4.157) se reduz automaticamente a  $0 = 0$  se quaisquer dois índices coincidirem. Uma forma alternativa da Equação (4.157) aparece no Exercício 4.6.14.

### Transformação de Lorentz de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

A construção das Equações tensoriais (4.154) e (4.157) conclui nosso objetivo inicial de reescrever as equações de Maxwell sob forma tensorial.<sup>21</sup> Agora exploraremos as propriedades de tensores de nossos quatro vetores e do tensor  $F_{\mu\nu}$ .

Para a transformação de Lorentz correspondente ao movimento ao longo do eixo  $z(x_3)$  com velocidade  $v$ , os “co-senos diretores” são dados por<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ x'^3 &= \gamma(x^3 - \beta x^0), \end{aligned} \quad (4.158)$$

em que

$$\beta = \frac{v}{c}$$

e

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (4.159)$$

Usando as propriedades de transformação tensorial, podemos calcular os campos elétrico e magnético no sistema em movimento em termos dos valores no referencial original. Pelas Equações (2.66), (4.153) e (4.158) obtemos

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( E_x - \frac{v}{c^2} B_y \right), \\ E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( E_y + \frac{v}{c^2} B_x \right), \\ E'_z &= E_z \end{aligned} \quad (4.160)$$

e

$$\begin{aligned} B'_x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( B_x + \frac{v}{c^2} E_y \right), \\ B'_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( B_y - \frac{v}{c^2} E_x \right), \\ B'_z &= B_z. \end{aligned} \quad (4.161)$$

Esse acoplamento de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  é de se esperar. Considere, por exemplo, o caso de campo elétrico zero no sistema “sem linha”

$$E_x = E_y = E_z = 0.$$

Está claro que não haverá nenhuma força sobre uma partícula carregada estacionária. Quando a partícula está em movimento com uma pequena velocidade  $v$  ao longo do eixo  $z$ ,<sup>23</sup> um observador na partícula vê campos (que exercem uma força sobre sua partícula carregada) dados por

$$\begin{aligned} E'_x &= -vB_y, \\ E'_y &= vB_x, \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{B}$  é um campo de indução magnética no sistema “sem linha”. Essas equações podem ser postas em forma vetorial

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.162)$$

<sup>21</sup>Teorias modernas de eletrodinâmica quântica e das partículas elementares costumam ser escritas nessa forma “evidentemente covariante” para garantir consistência com a relatividade especial. Ao contrário, a insistência em tal forma tensorial tem sido um útil guia na construção dessas teorias.

<sup>22</sup>Uma derivação teórica de grupo da transformação de Lorentz aparece na Seção 4.5. Veja também Goldstein, loc. cit., Capítulo 6.

<sup>23</sup>Se a velocidade não for pequena, é preciso uma transformação relativista da força.



ou

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

que costuma ser considerada a definição operacional da indução magnética  $\mathbf{B}$ .

### Invariantes Eletromagnéticas

Por fim, as propriedades do tensor (ou vetor) nos permitem construir um grande número de quantidades invariantes. Uma delas, muito importante, é o produto escalar dos dois vetores quadridimensionais ou quadrivetores  $A_\lambda$  e  $j_\lambda$ . Temos

$$\begin{aligned} A^\lambda j_\lambda &= -c\varepsilon_0 A_x \frac{\rho v_x}{c} - c\varepsilon_0 A_y \frac{\rho v_y}{c} - c\varepsilon_0 A_z \frac{\rho v_z}{c} + \varepsilon_0 \varphi \rho \\ &= \varepsilon_0(\rho\varphi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}), \text{ invariante,} \end{aligned} \tag{4.163}$$

sendo  $\mathbf{A}$  o potencial vetor magnético usual e  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente ordinária. O primeiro termo,  $\rho\varphi$ , é o acoplamento elétrico estático ordinário, com dimensões de energia por unidade de volume. Daí nosso invariante escalar recém-construído ser uma densidade de energia. A interação dinâmica de campo e corrente é dada pelo produto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ . Esse invariante  $A^\lambda j_\lambda$  aparece nas lagrangianas eletromagnéticas dos Exercícios 17.3.6 e 17.5.1.

Outros possíveis invariantes eletromagnéticos aparecem nos Exercícios 4.6.9 e 4.6.11.

*O grupo de Lorentz é o grupo de simetria da eletrodinâmica, da teoria de calibre eletrofraco e das interações fortes descritas pela cromodinâmica Lorentz quântica: ele governa a relatividade especial. A métrica do espaço-tempo de Minkowski é a invariante de Lorentz, e expressa a propagação da luz; isto é, a velocidade da luz é a mesma em todas as estruturas inerciais. As equações de movimento de Newton podem ser estendidas diretamente para a relatividade especial. As cinemáticas, nas colisões de dois corpos são importantes aplicações da álgebra vetorial, no espaço-tempo de Minkowski.*

### Exercícios

- 4.6.1** (a) Mostre que todo quadrivetor no espaço de Minkowski pode ser decomposto em um vetor ordinário no espaço tridimensional e um escalar ordinário no espaço tridimensional. Exemplos:  $(ct, \mathbf{r})$ ,  $(\rho, \rho\mathbf{v}/c)$ ,  $(\varepsilon_0\varphi, c\varepsilon_0\mathbf{A})$ ,  $(E/c, \mathbf{p})$ ,  $(\omega/c, \mathbf{k})$ .

*Sugestão:* Considere uma rotação das coordenadas do espaço tridimensional com tempo fixo.

- (b) Mostre que o inverso de (a) **não** é verdadeiro — todo trivetor mais um escalar **não** formam um quadrivetor de Minkowski.

- 4.6.2** (a) Mostre que

$$\partial^\mu j_\mu = \partial \cdot j = \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

- (b) Mostre como a equação tensorial precedente pode ser interpretada como um enunciado da continuidade de carga e corrente em espaço e tempo tridimensionais ordinários.  
 (c) Se sabemos que essa equação é válida em todas as estruturas de referência da Lorentz, por que não podemos concluir que  $j_\mu$  é um vetor?

- 4.6.3** Escreva a condição de calibre de Lorentz (Equação (4.143)) como uma equação tensorial no espaço de Minkowski.

- 4.6.4** Uma transformação de calibre consiste em variar o potencial escalar  $\varphi_1$  e o potencial vetor  $\mathbf{A}_1$  de acordo com a relação

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1 - \nabla \chi. \end{aligned}$$

A nova função  $\chi$  deve satisfazer a equação de onda homogênea

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Mostre o seguinte:

- (a) A relação de calibre de Lorentz não se altera.

- (b) Os novos potenciais satisfazem as mesmas equações de onda não-homogêneas que os potenciais originais satisfaziam.
- (c) Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  não se alteram.

A invariância de nossa teoria eletromagnética sob essa transformação é denominada **invariância de calibre**.

**4.6.5** Uma partícula carregada, carga  $q$ , massa  $m$ , obedece à equação covariante de Lorentz

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{\epsilon_0 mc} F^{\mu\nu} p_\nu,$$

em que  $p^\nu$  é o vetor quadrimomento  $(E/c; p^1, p^2, p^3)$ ,  $\tau$  é o tempo próprio,  $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , um escalar de Lorentz. Mostre que as formas espaço-temporais explícitas são

$$\frac{dE}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

**4.6.6** A partir dos elementos da matriz de transformação de Lorentz (Equação (4.158)), derive a lei da adição de velocidade de Einstein

$$u' = \frac{u - v}{1 - (uv/c^2)} \quad \text{ou} \quad u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)},$$

em que  $u = c dx^3/dx^0$  e  $u' = c dx'^3/dx'^0$ .

*Sugestão:* Se  $L_{12}(v)$  é a matriz que transforma o sistema 1 no sistema 2,  $L_{23}(u')$  é a matriz que transforma o sistema 2 no sistema 3,  $L_{13}(u)$  é a matriz que transforma o sistema 1 diretamente no sistema 3, então  $L_{13}(u) = L_{23}(u')L_{12}(v)$ . Dessa relação matricial extraia a lei da adição de velocidade de Einstein.

**4.6.7** O dual de um tensor quadridimensional de segunda ordem  $\mathbf{B}$  pode ser definido por  $\tilde{\mathbf{B}}$ , em que os elementos do tensor dual são dados por

$$\tilde{B}^{ij} = \frac{1}{2!} \epsilon^{ijkl} B_{kl}.$$

Mostre que  $\tilde{\mathbf{B}}$  se transforma em

- (a) um tensor de segunda ordem sob rotações,
- (b) um pseudotensor sob inversões.

*Note:* Aqui, o til **não** significa transposta.

**4.6.8** Construa  $\tilde{\mathbf{F}}$ , o dual de  $\mathbf{F}$ , em que  $\mathbf{F}$  é o tensor eletromagnético dado pela Equação (4.153).

$$\text{Resposta: } \tilde{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & E_z & -E_y \\ cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Isso corresponde a

$$\begin{aligned} c\mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &\rightarrow c\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Essa transformação, às vezes denominada **transformação dual**, deixa invariantes as equações de Maxwell no vácuo ( $\rho = 0$ ).

**4.6.9** Como a contração quádrupla de um pseudotensor de quarta ordem e dois tensores de segunda ordem  $\epsilon_{\mu\lambda\nu\sigma} F^{\mu\lambda} F^{\nu\sigma}$  é claramente um pseudo-escalar, avalie-o.

$$\text{Resposta: } -8\epsilon_0^2 c\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}.$$

**4.6.10** (a) Se um campo eletromagnético é puramente elétrico (ou puramente magnético) em um particular referencial de Lorentz, mostre que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  serão ortogonais em outros sistemas de referência de Lorentz.



(b) Ao contrário, se  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são ortogonais em um determinado referencial de Lorentz, existe um sistema de referência de Lorentz no qual  $\mathbf{E}$  (ou  $\mathbf{B}$ ) desaparece. Ache esse sistema de referência.

**4.6.11** Mostre que  $c^2\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$  é um escalar de Lorentz.

**4.6.12** Visto que  $(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$  é um quadrivetor,  $dx_\mu dx^\mu$  é um escalar. Avalie esse escalar para uma partícula em movimento em dois sistemas de coordenadas diferentes. (a) um sistema de coordenadas fixo em relação a você (sistema de laboratório) (b) em um sistema de coordenadas que se movimenta com uma partícula em movimento (velocidade  $v$  em relação a você). Rotulando o incremento de tempo por  $d\tau$  no sistema da partícula e por  $dt$  no sistema de laboratório, mostre que

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

$\tau$  é o tempo próprio da partícula, uma quantidade invariante de Lorentz.

**4.6.13** Expanda a expressão escalar

$$-\frac{1}{4\varepsilon_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{\varepsilon_0}j_\mu A^\mu$$

em termos dos campos e potenciais. A expressão resultante é a densidade lagrangiana usada no Exercício 17.5.1.

**4.6.14** Mostre que a Equação (4.157) pode ser escrita como

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0.$$

## 4.7 Grupos Discretos

Nesta seção, consideramos grupos com um número finito de elementos. Na física, os grupos costumam aparecer como um conjunto de operações que deixa um sistema inalterado, invariante. Essa é uma expressão de simetria. De fato, uma simetria pode ser definida como a invariância da hamiltoniana de um sistema sob um grupo de transformações. Simetria, neste sentido, é importante na mecânica clássica, mas se torna ainda mais importante e mais profunda na mecânica quântica. Nesta seção investigamos as propriedades de simetria de conjuntos de objetos (átomos em uma molécula ou cristal). Isso nos dá ilustrações adicionais dos conceitos de grupo da Seção 4.1 e leva diretamente a grupos diédricos. Por sua vez, grupos diédricos abrem o estudo dos 32 grupos pontuais cristalográficos e dos 230 grupos espaciais que são tão importantes em cristalografia e na física do estado sólido. Devemos citar que foi por meio do estudo de simetrias cristalinas que os conceitos de simetria e teoria dos grupos entraram na Física. Nesta área, as condições de grupos abstratos muitas vezes assumem significados físicos diretos em termos de transformações de vetores, spinores e tensores.

Como exemplo simples, mas não trivial, de grupo finito, considere o conjunto  $1, a, b, c$ , que se combina conforme a tabela de multiplicação de grupo<sup>24</sup> (veja a Figura 4.10). As quatro condições da definição de “grupo” estão claramente satisfeitas. Os elementos  $a, b, c$  e  $1$  são entidades matemáticas abstratas, sem nenhuma restrição, exceto a tabela de multiplicação da Figura 4.10.

	1	$a$	$b$	$c$
1	1	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$	1
$b$	$b$	$c$	1	$a$
$c$	$c$	1	$a$	$b$

Figura 4.10: Tabela de multiplicação de grupo.

<sup>24</sup>A ordem dos fatores é linha-coluna:  $ab = c$  no exemplo anterior indicado.

Agora, para uma representação específica dos elementos desse grupo, façamos

$$1 \rightarrow 1, \quad a \rightarrow i, \quad b \rightarrow -1, \quad c \rightarrow -i, \tag{4.164}$$

combinados por multiplicação ordinária. Novamente, as quatro condições de grupo são satisfeitas e esses quatro elementos formam um grupo, que denominamos  $C_4$ . Uma vez que a multiplicação dos elementos do grupo é comutativa, o grupo é denominado **comutativo** ou **abeliano**. Nosso grupo é também um **grupo cíclico**, no sentido de que os elementos podem ser escritos como potências sucessivas de um elemento, nesse caso  $i^n, n = 0, 1, 2, 3$ . Note que, escrevendo a Equação (4.164) selecionamos uma representação fiel específica para esse grupo de quatro objetos.

Reconhecemos que os elementos de grupo  $1, i, -1, -i$  podem ser interpretados como rotações sucessivas de  $90^\circ$  no plano complexo. Então, pela Equação (3.74), criamos o conjunto de quatro matrizes  $2 \times 2$  (substituindo  $-\varphi$  na Equação (3.74) para rotacionar um vetor em vez de rotacionar as coordenadas):

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

e para  $\varphi = 0, \pi/2, \pi, \text{ e } 3\pi/2$  temos

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.165}$$

Esse conjunto de quatro matrizes forma um grupo, sendo que a lei de combinação é a multiplicação de matrizes. Temos, portanto, uma segunda representação fiel. Por multiplicação de matrizes verificamos que essa representação também é abeliana e cíclica. Há uma clara correspondência um-para-um entre as duas representações

$$1 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1 \quad a \leftrightarrow i \leftrightarrow A \quad b \leftrightarrow -1 \leftrightarrow B \quad c \leftrightarrow -i \leftrightarrow C. \tag{4.166}$$

No grupo  $C_4$  as duas representações  $(1, i, -1, -i)$  e  $(1, A, B, C)$  são isomórficas.

**Tabela 4.3**

	1	$V_1$	$V_2$	$V_3$
1	1	$V_1$	$V_2$	$V_3$
$V_1$	$V_1$	1	$V_3$	$V_2$
$V_2$	$V_2$	$V_3$	1	$V_1$
$V_3$	$V_3$	$V_2$	$V_1$	1

Em contraste com isso, não existe tal correspondência entre qualquer dessas representações do grupo  $C_4$  e um outro grupo de quatro objetos, o *Vierergruppe* (Exercício 3.2.7). A tabela de multiplicação do *Vierergruppe* é mostrada na Tabela 4.3. Confirmando a falta de correspondência entre o grupo representado por  $(1, i, -1, -i)$  ou as matrizes  $(1, A, B, C)$  da Equação (4.165), note que, embora o *Vierergruppe* seja abeliano, não é cíclico. O grupo cíclico  $C_4$  e o *Vierergruppe* não são isomórficos.

### Classes e Caráter

Considere um elemento de grupo  $x$  transformado em um elemento de grupo  $y$  por uma transformada de similaridade em relação a  $g_i$  um elemento do grupo

$$g_i x g_i^{-1} = y. \tag{4.167}$$

O elemento de grupo  $y$  é **conjugado** a  $x$ . Uma **classe** é um conjunto de elementos de grupo mutuamente conjugados. Em geral, esse conjunto de elementos que formam uma classe não satisfaz os postulados de grupo e não é um grupo. De fato, o elemento unitário 1, que é sempre uma classe por si só, é a única classe que também é um subgrupo. Todos os membros de uma dada classe são equivalentes, no sentido de que qualquer um dos elementos é uma transformada de similaridade de qualquer outro elemento. É claro que, se um grupo é abeliano, todo elemento é uma classe por si só. Constatamos que



1. Cada elemento do grupo original pertence a uma, e somente uma, classe.
2. O número de elementos em uma classe é um fator da ordem do grupo.

Obtemos uma possível interpretação física do conceito de classe observando que  $y$  é uma transformada de similaridade de  $x$ . Se  $g_i$  representa uma rotação do sistema de coordenadas, então  $y$  é a mesma operação que  $x$ , mas relativa às novas coordenadas relacionadas.

Na Seção 3.3 vimos que uma matriz real se transforma sob rotação das coordenadas por uma transformação de similaridade ortogonal. Dependendo da escolha de estrutura de referência, por essência a mesma matriz pode assumir uma infinidade de formas diferentes. Do mesmo modo, nossas representações de grupo podem ser colocadas em uma infinidade de formas diferentes usando transformações unitárias. Mas cada uma dessas representações transformadas é isomórfica com a original. Pelo Exercício 3.3.9, o traço de cada elemento (cada matriz de nossa representação) é invariante sob transformações unitárias. Exatamente por ser invariante, o traço (sob o novo rótulo **caráter**) assume um papel de certa importância na teoria dos grupos, em particular em aplicações à física do estado sólido. É claro que todos os membros de uma dada classe (em uma dada representação) têm o mesmo caráter. Elementos de classes diferentes podem ter o mesmo caráter, mas elementos com caráter diferente não podem estar na mesma classe.

O conceito de classe é importante (1) por causa do traço ou caráter e (2) porque o **número de representações irreduzíveis não-equivalentes de um grupo é igual ao número de classes**.

### Subgrupos e Classes Laterais

Freqüentemente, um subconjunto dos elementos do grupo (incluindo o elemento unitário  $I$ ) satisfará por si só os quatro requisitos de grupo e, portanto, é um grupo. Tal subconjunto é denominado **subgrupo**. Todo grupo tem dois subgrupos triviais: o elemento unitário sozinho e o grupo em si. Os elementos  $1$  e  $b$  do grupo de quatro elementos  $C_4$  discutido antes forma um subgrupo não-trivial. Na Seção 4.1 consideramos  $SO(3)$  o grupo (contínuo) de todas as rotações em espaço ordinário. As rotações ao redor de qualquer um dos eixos formam um subgrupo de  $SO(3)$ . Numerosos outros exemplos de subgrupos aparecem nas seções seguintes.

Considere um subgrupo  $H$  com elementos  $h_i$  e um elemento de grupo  $x$  que não está em  $H$ . Então,  $xh_i$  e  $h_ix$  não estão no subgrupo  $H$ . Os conjuntos gerados por

$$xh_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad h_ix, \quad i = 1, 2, \dots$$

são denominados **classes laterais**, respectivamente, os grupos laterais esquerdo e direito do subgrupo  $H$  em relação a  $x$ . Podemos mostrar (admita o contrário e prove uma contradição) que o grupo lateral de um subgrupo tem o mesmo número de elementos distintos que o subgrupo. Estendendo esse resultado, podemos expressar o grupo original  $G$  como a soma de  $H$  e dos grupos laterais:

$$G = H + x_1H + x_2H + \dots$$

**Então, a ordem de qualquer subgrupo é um divisor da ordem do grupo.** É esse resultado que torna o conceito de grupo lateral significativo. Na seção seguinte o grupo de seis elementos  $D_3$  (ordem 6) tem subgrupos de ordem 1, 2 e 3.  $D_3$  não pode ter (e não tem) subgrupos de ordem 4 ou 5.

A transformada de similaridade de um subgrupo  $H$  por um elemento fixo de grupo **que não está** em  $H$ ,  $xHx^{-1}$ , resulta em um subgrupo, Exercício 4.7.8. Se esse novo subgrupo é idêntico a  $H$  para todo  $x$ , isto é,

$$xHx^{-1} = H,$$

então  $H$  é denominado **subgrupo invariante, normal** ou **autoconjugado**. Esses subgrupos estão envolvidos na análise de multipletos de espectros atômicos e nucleares e das partículas discutidas na Seção 4.2. Todos os subgrupos de um grupo comutativo (abeliano) são automaticamente invariantes.

### Dois Objetos — Eixo de Simetria Dupla

Em primeiro lugar, considere o sistema bidimensional de dois átomos idênticos no plano  $xy$  em  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ , Figura 4.11. Quais rotações<sup>25</sup> podem ser executadas (mantendo ambos os átomos no plano  $xy$ ), que deixarão esse sistema invariante? O primeiro candidato é, obviamente, o operador unitário  $1$ . A rotação de  $\pi$  radianos ao redor do eixo  $z$  completa a lista. Portanto, temos um grupo bastante desinteressante de dois membros  $(1, -1)$ . O eixo  $z$  é denominado eixo de simetria dupla — correspondente aos dois ângulos de rotação,  $0$  e  $\pi$ , que deixam o sistema invariante.

<sup>25</sup>Aqui excluímos deliberadamente reflexões e inversões. Elas devem voltar à cena no desenvolvimento do conjunto completo de 32 grupos pontuais cristalográficos.

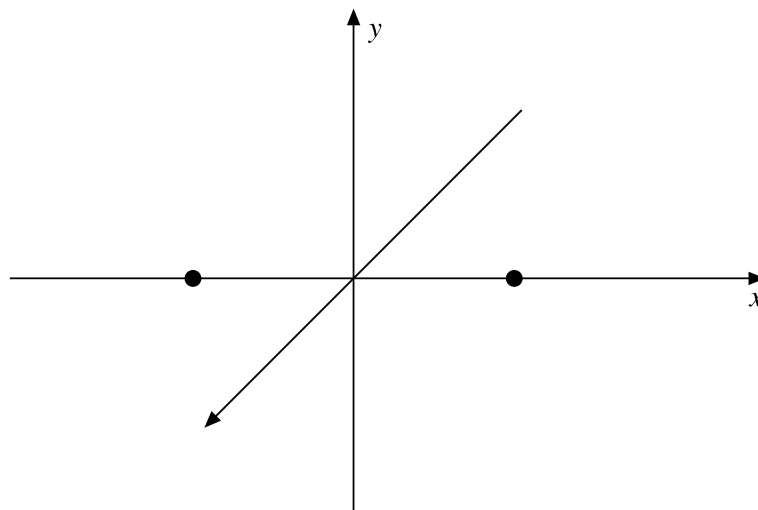


Figura 4.11: Moléculas diatômicas de  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $Cl_2$ .

Nosso sistema fica mais interessante em três dimensões. Imagine agora uma molécula (ou parte de um cristal) com átomos do elemento  $X$  em  $\pm a$  no eixo  $y$ , e átomos do elemento  $Z$  em  $\pm c$  no eixo  $z$ , como mostra a Figura 4.12. Fica claro agora que cada eixo é um eixo de simetria dupla. Usando  $R_x(\pi)$  para designar uma rotação de  $\pi$  radianos ao redor do eixo  $x$ , podemos montar uma representação matricial das rotações como na Seção 3.3:

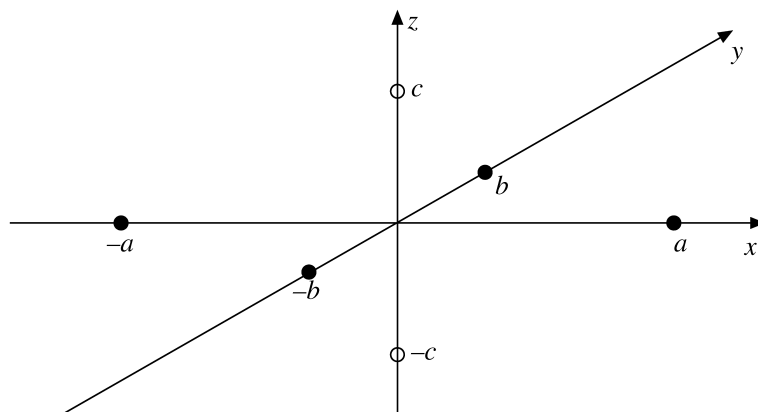


Figura 4.12: Simetria  $D_2$ .

$$\begin{aligned}
 R_x(\pi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & R_y(\pi) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 R_z(\pi) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{4.168}$$

Esses quatro elementos  $[1, R_x(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi)]$  formam um grupo abeliano. A tabela de multiplicação do grupo é mostrada na Tabela 4.4.





**Tabela 4.4**

	1	$R_x(\pi)$	$R_y(\pi)$	$R_z(\pi)$
1	1	$R_x$	$R_y$	$R_z$
$R_x(\pi)$	$R_x$	1	$R_z$	$R_y$
$R_y(\pi)$	$R_y$	$R_z$	1	$R_x$
$R_z(\pi)$	$R_z$	$R_y$	$R_x$	1

Os produtos mostrados na Tabela 4.4 podem ser obtidos por um de dois modos distintos: (1) podemos analisar as operações em si — uma rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $x$  seguida por uma rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $y$  é equivalente a uma rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $z$ :  $R_y(\pi)R_x(\pi) = R_z(\pi)$ . (2) Alternativamente, uma vez estabelecida uma representação fiel, podemos obter os produtos por multiplicação de matrizes. É aqui que se revela todo o poder da matemática, quando o sistema é muito complexo para uma interpretação física direta.

A comparação com os Exercícios 3.2.7, 4.7.2 e 4.7.3 mostra que esse grupo é o *Vierergruppe*. As matrizes da Equação (4.168) são isomórficas com as do Exercício 3.2.7. Além disso, são redutíveis, já que são diagonais. Os subgrupos são  $(1, R_x)$ ,  $(1, R_y)$  e  $(1, R_z)$ . Eles são invariantes. Deve-se notar uma rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $y$  e uma rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $x$ :  $R_z(\pi)R_y(\pi) = R_x(\pi)$ . Em termos de simetria, se  $y$  e  $z$  são eixos de simetria dupla,  $x$  é automaticamente um eixo de simetria tripla.

Este grupo de simetria<sup>26</sup>, o *Vierergruppe*, costuma ser representado por  $D_2$ , em que  $D$  significa um grupo diédrico e o índice 2 significa um eixo de simetria dupla (e nenhum eixo de simetria mais alta).

### Três Objetos — Eixo de Simetria Tripla

Considere agora três átomos idênticos nos vértices de um triângulo equilátero, Figura 4.13. Rotações do **triângulo** de  $0, 2\pi/3$  e  $4\pi/3$  deixam o triângulo invariante. Em forma matricial, temos<sup>27</sup>

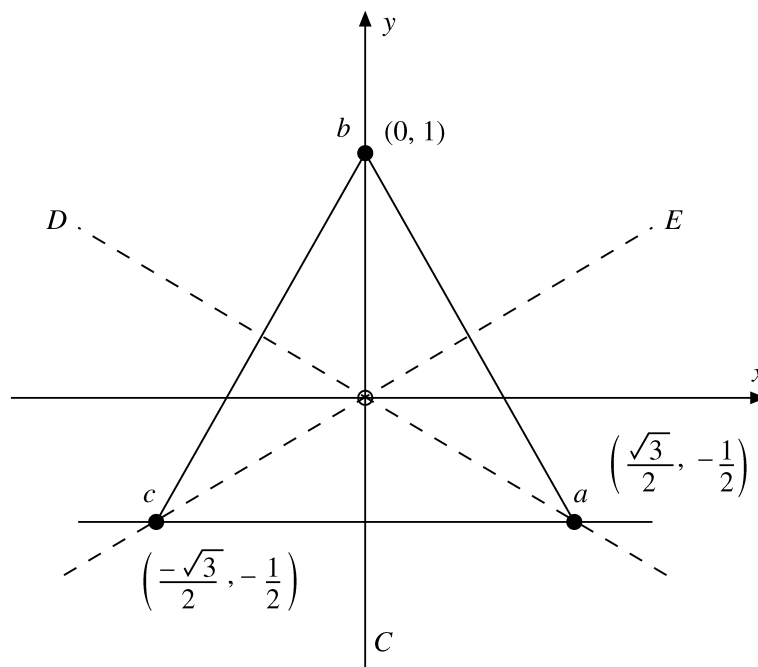


Figura 4.13: Operações de simetria em um triângulo equilátero.

<sup>26</sup>Um grupo de **simetria** é um grupo de operações que preserva a simetria, isto é, rotações, reflexões e inversões. Um grupo **simétrico** é o grupo de permutações de objetos distintos — de ordem  $n!$ .

<sup>27</sup>Note que aqui estamos rotacionando o **triângulo** em sentido anti-horário em relação a coordenadas fixas.

$$\begin{aligned}
 1 &= R_z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A &= R_z(2\pi/3) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\text{sen } 2\pi/3 \\ \text{sen } 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
 B &= R_z(4\pi/3) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.169}$$

O eixo  $z$  é um eixo de simetria tripla.  $(1, A, B)$  formam um grupo cíclico, um subgrupo do grupo completo de seis elementos resultante.

No plano  $xy$  há três eixos de simetria adicionais — sendo que cada átomo (vértice) e o centro geométrico definem um eixo. Cada um destes é um eixo de simetria dupla. Essas rotações podem ser descritas com muita facilidade dentro de nossa estrutura bidimensional introduzindo reflexões. A rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $C$  (ou  $y$ ), que significa a permuta de átomos (sem estrutura)  $a$  e  $c$ , é apenas uma reflexão do eixo  $x$ :

$$C = R_C(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.170}$$

Podemos substituir a rotação ao redor do eixo  $D$  por uma rotação de  $4\pi/3$  (ao redor de nosso eixo  $z$ ) seguida por uma reflexão do eixo  $x$  ( $x \rightarrow -x$ ) (Figura 4.14).

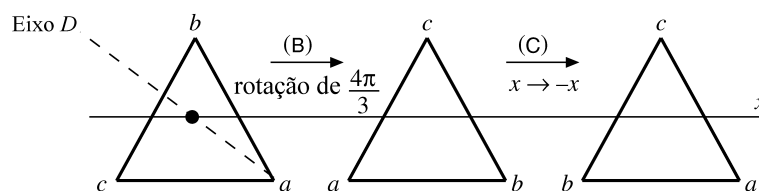


Figura 4.14: O triângulo da direita é o triângulo da esquerda rotacionado  $180^\circ$  ao redor do eixo  $D$ .  $D = CB$ .

$$\begin{aligned}
 D &= R_D(\pi) = CB \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.171}$$

De maneira similar, a rotação de  $\pi$  ao redor do eixo  $E$ , permutando  $a$  e  $b$ , é substituída por uma rotação de  $2\pi/3$  (A) seguida por uma reflexão<sup>28</sup> do eixo  $x$ :

$$\begin{aligned}
 E &= R_E(\pi) = CA \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.172}$$

A tabela completa de multiplicação do grupo é

<sup>28</sup>Note que, como uma consequência dessas reflexões,  $\det(C) = \det(D) = \det(E) = -1$ . As rotações A e B, é claro, têm um determinante de +1.



	1	A	B	C	D	E
1	1	A	B	C	D	E
A	A	B	1	D	E	C
B	B	1	A	E	C	D
C	C	E	D	1	B	A
D	D	C	E	A	1	B
E	E	D	C	B	A	1

Note que cada elemento do grupo aparece somente uma vez em cada linha e em cada coluna, como requer o teorema do rearranjo, Exercício 4.7.4. Além disso, pela tabela de multiplicação, vemos que o grupo é não-abeliano. Construímos um grupo de seis elementos e uma representação matricial  $2 \times 2$  irredutível desse grupo. O único outro grupo distinto de seis elementos é o grupo cíclico  $[1, R, R^2, R^3, R^4, R^5]$ , com

$$R = e^{2\pi i/6} \quad \text{ou} \quad R = e^{-\pi i\sigma_2/3} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (4.173)$$

Nosso grupo  $[1, A, B, C, D, E]$  é denominado  $D_3$  em cristalografia, o grupo diédrico com um eixo de simetria tripla. Os três eixos ( $C, D$  e  $E$ ) no plano  $xy$  automaticamente se tornam eixos de simetria dupla. Como conseqüência,  $(1, C)$ ,  $(1, D)$  e  $(1, E)$  formam subgrupos de dois elementos. Nenhum desses subgrupos de dois elementos de  $D_3$  é invariante.

Um resultado geral e muito importante para grupos finitos de  $h$  elementos é que

$$\sum_i n_i^2 = h, \quad (4.174)$$

em que  $n_i$  é a dimensão das matrizes da  $i$ -ésima representação irredutível. Essa igualdade, às vezes denominada **teorema da dimensionalidade**, é muito útil para estabelecer as representações irredutíveis de um grupo. Aqui, para  $D_3$  temos  $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$  para nossas três representações. Não existe nenhuma outra representação irredutível desse grupo de simetria de três objetos. (As outras representações são a identidade e  $\pm 1$ , dependendo de haver ou não uma reflexão envolvida.)

### Grupos Diédricos, $D_n$

Um grupo diédrico  $D_n$  com eixo de simetria ênupla, implica  $n$  eixos com separação angular de  $2\pi/n$  radianos em que  $n$  é um inteiro positivo mas, sob qualquer outro aspecto, sem restrições. Se aplicarmos os argumentos de simetria a *redes cristalinas*, então  $n$  é limitado a 1, 2, 3, 4 e 6. O requisito de invariância da rede cristalina sob translações no plano perpendicular ao eixo ênuplo exclui  $n = 5, 7$  e valores mais altos. Tente cobrir completamente um plano com pentágonos regulares idênticos e sem nenhuma sobreposição.<sup>29</sup> Para moléculas individuais, essa restrição não existe, embora os exemplos com  $n > 6$  sejam raros;  $n = 5$  é uma possibilidade real. Como exemplo, o grupo de simetria para o rutenoceno,  $(C_5H_5)_2Ru$ , ilustrado na Figura 4.15, é  $D_5$ .<sup>30</sup>

### Grupos Cristalográficos Pontuais e Espaciais

Os grupos diédricos que acabamos de considerar são exemplos de grupos pontuais cristalográficos. Um grupo pontual é composto de combinações de rotações e reflexões (incluindo inversões) que deixarão inalteradas algumas redes cristalinas. Limitar as operações a rotações e reflexões (incluindo inversões) significa que um ponto — a origem — permanece **fixo**, daí o termo **grupo pontual**. Incluindo os grupos cíclicos, dois grupos cúbicos (simetrias tetraédricas e octaédricas) e as formas impróprias (que envolvem reflexões), chegamos a um total de 32 grupos pontuais cristalográficos.

Se, às operações de rotação e reflexão que produziram aqueles grupos pontuais acrescentarmos a possibilidade de translações e ainda exigirmos que algumas redes cristalinas permaneçam invariantes, chegamos aos grupos espaciais. Há 230 grupos espaciais distintos, um número assombroso, exceto, talvez, para os especialistas da área. Se quiser mais detalhes (que podem abranger centenas de páginas), veja Leituras Adicionais.

### Exercícios

**4.7.1** Mostre que as matrizes 1, A, B e C da Equação (4.165) são redutíveis. Reduza-as.

*Nota:* Isso significa transformar A e C para a forma diagonal (pela mesma transformação unitária).

*Sugestão:* A e C são anti-hermitianas. Seus autovetores serão ortogonais.

<sup>29</sup>Para  $D_6$  imagine o plano coberto com hexágonos regulares e o eixo de rotação passando pelo centro geométrico de um deles.

<sup>30</sup>Na verdade, o rótulo técnico completo é  $D_{5h}$ , com  $h$  indicando invariância sob uma **reflexão** do eixo quántuplo.

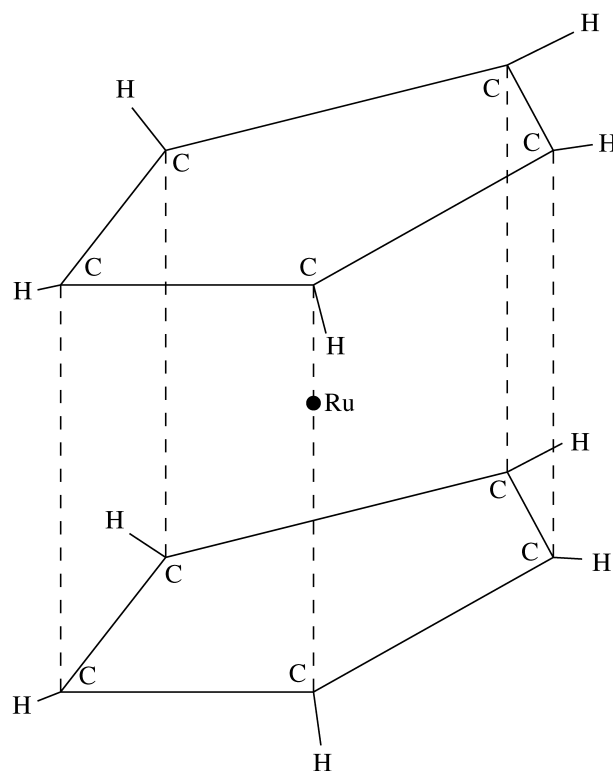


Figura 4.15: Rutenoceno.

- 4.7.2 Entre as operações possíveis em uma rede cristalina estão  $A_\pi$  (rotação por  $\pi$ ),  $m$  (reflexão) e  $i$  (inversão). Essas três operações se combinam como

$$A_\pi^2 = m^2 = i^2 = 1,$$

$$A_\pi \cdot m = i, \quad m \cdot i = A_\pi, \quad \text{e} \quad i \cdot A_\pi = m.$$

Mostre que o grupo  $(1, A_\pi, m, i)$  é isomórfico com o *Vierergruppe*.

- 4.7.3 Quatro operações possíveis no plano são:

1. nenhuma alteração  $\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \end{cases}$

2. inversão  $\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$

3. reflexão  $\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{cases}$

4. reflexão  $\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$ .

- (a) Mostre que essas quatro operações formam um grupo.  
 (b) Mostre que esse grupo é isomórfico com o *Vierergruppe*.  
 (c) Monte uma representação matricial  $2 \times 2$ .

- 4.7.4 Teorema do rearranjo: dado um grupo de  $n$  elementos distintos  $(I, a, b, c, \dots, n)$ , mostre que o conjunto de produtos  $(aI, a^2, ab, ac \dots an)$  reproduz os  $n$  elementos distintos em uma nova ordem.

- 4.7.5 Usando a representação matricial  $2 \times 2$  do Exercício 3.2.7 para o *Vierergruppe*,

- (a) Mostre que há quatro classes, cada uma com um elemento.  
 (b) Calcule o caráter (traço) de cada classe. Note que duas classes diferentes podem ter o mesmo caráter.  
 (c) Mostre que há três subgrupos de dois elementos. (O elemento unitário, por si só, sempre forma um subgrupo.)



(d) Para qualquer um dos subgrupos de dois elementos mostre que o subgrupo e um único grupo lateral reproduzem o *Vierergruppe* original.

Note que subgrupos, classes e grupos laterais são inteiramente diferentes.

**4.7.6** Usando a representação matricial  $2 \times 2$ , Equação (4.165), de  $C_4$ ,

- (a) Mostre que há quatro classes, cada uma com um elemento.
- (b) Calcule o caráter (traço) de cada classe.
- (c) Mostre que há apenas um subgrupo de dois elementos.
- (d) Mostre que o subgrupo e um único grupo lateral reproduzem o grupo original.

**4.7.7** Prove que o número de elementos distintos em um grupo lateral de um subgrupo é o mesmo que o número de elementos no subgrupo.

**4.7.8** Um subgrupo  $H$  tem elementos  $h_i$ . Seja  $x$  um elemento fixo do grupo original  $G$  e **não** um membro de  $H$ . A transformada

$$xh_ix^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

gera um **subgrupo conjugado**  $xHx^{-1}$ . Mostre que esse subgrupo conjugado satisfaz cada um dos quatro postulados de grupo e, portanto, é um grupo.

- 4.7.9** (a) Um determinado grupo é abeliano. Um segundo grupo é criado substituindo cada elemento do grupo original  $g_i$  por  $g_i^{-1}$ . Mostre que os dois grupos são isomórficos.  
*Nota:* Isto significa mostrar que, se  $a_ib_i = c_i$ , então  $a_i^{-1}b_i^{-1} = c_i^{-1}$ .
- (b) Continuando a parte (a), se os dois grupos são isomórficos, mostre que cada um deve ser abeliano.

- 4.7.10** (a) Uma vez que você tenha uma representação matricial de qualquer grupo, uma representação unidimensional pode ser obtida usando os determinantes das matrizes. Mostre que as relações multiplicativas são preservadas nesta representação por determinante.
- (b) Use determinantes para obter um representante unidimensional de  $D_3$ .

**4.7.11** Explique como a relação

$$\sum_i n_i^2 = h$$

se aplica ao *Vierergruppe* ( $h = 4$ ) e ao grupo diédrico  $D_3$  com  $h = 6$ .

**4.7.12** Mostre que o subgrupo  $(1, A, B)$  de  $D_3$  é um subgrupo invariante.

**4.7.13** O grupo  $D_3$  pode ser discutido como um grupo de **permutação** de três objetos. A matriz  $B$ , por exemplo, rotaciona o vértice  $a$  (localização original 1) até a posição antes ocupada por  $c$  (localização 3). O vértice  $b$  muda da localização 2 para a localização 1, e assim por diante. Como uma permutação,  $(abc) \rightarrow (bca)$ . Em três dimensões

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

- (a) Desenvolva representações  $3 \times 3$  análogas para os outros elementos de  $D_3$ .
- (b) Reduza sua representação  $3 \times 3$  para a representação  $2 \times 2$  desta seção.

(Essa representação  $3 \times 3$  deve ser redutível ou a Equação (4.174) será violada.)

*Nota:* Na verdade, a redução de uma representação redutível pode ser desajeitada. Muitas vezes é mais fácil desenvolver diretamente uma nova representação da dimensão requerida.

**4.7.14** (a) O grupo de permutação de quatro objetos  $P_4$  tem  $4! = 24$  elementos. Tratando os quatro elementos do grupo cíclico  $C_4$  como permutações, monte uma representação matricial  $4 \times 4$  de  $C_4$ .  $C_4$  que se torna um subgrupo de  $P_4$ .

(b) Como você sabe que essa representação matricial  $4 \times 4$  de  $C_4$  **deve** ser redutível?

*Nota:*  $C_4$  é abeliano e todo grupo abeliano de  $h$  objetos tem somente  $h$  representações irredutíveis unidimensionais.

**4.7.15** (a) Os objetos  $(abcd)$  são permutados para  $(dacb)$ . Escreva uma representação matricial  $4 \times 4$  dessa permutação.

- (b) A permutação  $(abdc)$  para  $(dacb)$  é ímpar ou par?
- (c) Essa permutação é um possível membro do grupo  $D_4$ ? Justifique sua resposta.

**4.7.16** Os elementos do grupo diédrico  $D_n$  podem ser escritos na forma

$$S^\lambda R_z^\mu(2\pi/n), \quad \lambda = 0, 1$$

$$\mu = 0, 1, \dots, n - 1,$$

em que  $R_z(2\pi/n)$  representa uma rotação de  $2\pi/n$  ao redor do eixo de simetria ênupla, enquanto  $S$  representa uma rotação de  $\pi$  ao redor de um eixo que passa pelo centro do polígono regular e por um de seus vértices.

Para  $S = E$  mostre que essa forma pode descrever as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  de  $D_3$ .

*Nota:* Os elementos  $R_z$  e  $S$  são denominados geradores desse grupo finito. De maneira semelhante,  $i$  é o gerador do grupo dado pela Equação (4.164).

**4.7.17** Mostre que o grupo cíclico de  $n$  objetos,  $C_n$ , pode ser representado por  $r^m, m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Aqui,  $r$  é um gerador dado por

$$r = \exp(2\pi i s/n).$$

O parâmetro  $s$  assume os valores  $s = 1, 2, 3, \dots, n$ , sendo que cada valor de  $s$  resulta em uma representação unidimensional (irreduzível) diferente de  $C_n$ .

**4.7.18** Desenvolva a representação matricial  $2 \times 2$  irreduzível do grupo de operações (rotações e reflexões) que transformam um quadrado nele mesmo. Dê a tabela de multiplicação de grupo.

*Nota:* Este é o grupo de simetria de um quadrado e também o grupo diédrico  $D_4$ . (Veja a Figura 4.16.)

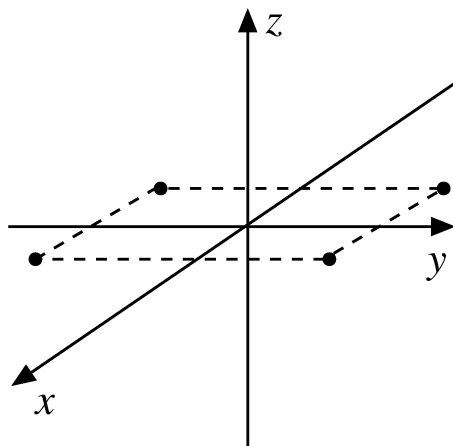


Figura 4.16: Quadrado.

**4.7.19** O grupo de permutação de quatro objetos contém  $4! = 24$  elementos. Pelo Exercício 4.7.18,  $D_4$ , o grupo de  $D_4$ , o grupo de simetria para um quadrado tem menos de 24 elementos. Explique a relação entre  $D_4$  e o grupo de permutação de quatro objetos.

**4.7.20** Um plano é coberto com hexágonos regulares, como mostra a Figura 4.17.

(a) Determine a simetria diédrica de um eixo perpendicular ao plano que passa pelo vértice comum de três hexágonos ( $A$ ). Isto é, se o eixo tiver simetria ênupla, mostre (com explicação detalhada) qual é  $n$ . Escreva a matriz que descreve a mínima rotação positiva (não-zero) do arranjo de hexágonos que é um membro de seu grupo  $D_n$ .

(b) Repita a parte (a) para um eixo perpendicular ao plano passando pelo centro geométrico de um hexágono ( $B$ ).

**4.7.21** Em um cristal cúbico simples, poderíamos ter átomos idênticos em  $r = (la, ma, na)$ , com  $l, m$  e  $n$  assumindo todos os valores inteiros.

(a) Mostre que cada eixo cartesiano é um eixo de simetria quádruplo.

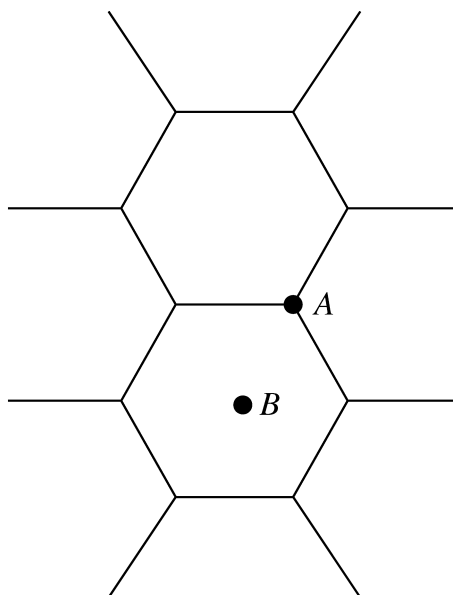


Figura 4.17: Hexágono.

- (b) O grupo cúbico consistirá em todas as operações (rotações, reflexões, inversão) que deixam o cristal cúbico simples invariante. Considerando a permutação dos eixos coordenados negativo e positivo, faça uma previsão de quantos elementos esse grupo cúbico conterá.
- 4.7.22** (a) Pela tabela de multiplicação  $D_3$  da Figura 4.18, construa uma tabela de transformadas de similaridade mostrando  $xyx^{-1}$ , onde as faixas de  $x$  e  $y$  abrangem todos os seis elementos de  $D_3$ .
- (b) Divida os elementos de  $D_3$  em classes. Usando a representação matricial  $2 \times 2$  das Equações (4.169)-(4.172), observe o traço (caráter) de cada classe.

$x \backslash y$	1	A - -
1	1	1 - -
A	A	A - -

Figura 4.18: Tabela de multiplicação.

### 4.8 Formas Diferenciais

Nos Capítulos 1 e 2 adotamos a visão de que, em  $n$  dimensões, um vetor é um ênupla de números reais e que seus componentes se transformam adequadamente sob mudanças das coordenadas. Nesta seção partimos da visão alternativa, na qual se imagina um vetor como um segmento de reta dirigido, uma seta. A finalidade da idéia é esta: embora o conceito de vetor como um segmento de reta não se generalize para espaço-tempo (variedades de geometria diferencial), exceto se trabalharmos no espaço plano tangente que requer a inserção de dimensões extras auxiliares, as formas diferenciais de Elie Cartan são naturais em espaço-tempo curvado e uma poderosa ferramenta. O cálculo pode ser baseado em formas diferenciais, como Edwards mostrou em seu livro clássico (veja as Leituras Adicionais). O cálculo de Cartan leva a uma notável unificação de conceitos e teoremas de análise vetorial que vale

a pena analisar. Agora, a utilização de formas diferenciais está amplamente disseminada em geometria diferencial e análise avançada (sobre variedades).

A noção de Cartan de vetor é baseada na correspondência um-para-um entre os espaços lineares de vetores de deslocamento e operadores diferenciais direcionais (componentes do gradiente formam uma base). Uma vantagem crucial dos últimos é que eles podem ser generalizados para espaço-tempo curvado. Além do mais, descrever vetores em termos de derivadas direcionais ao longo de curvas especifica unicamente o vetor em um dado ponto sem a necessidade de invocar coordenadas. Em última instância, uma vez que precisamos de coordenadas para especificar pontos, o formalismo de Cartan, embora uma ferramenta matemática elegante para a derivação eficiente de teoremas de análise vetorial, em princípio não tem nenhuma vantagem sobre o formalismo de componente.

### 1-Formas

Definimos  $dx, dy, dz$  em espaço euclidiano tridimensional como funções que atribuem a um segmento de reta direcionado  $PQ$  do ponto  $P$  ao ponto  $Q$  a mudança correspondente em  $x, y, z$ . O símbolo  $dx$  representa “comprimento orientado da projeção de uma curva sobre o eixo  $x$ ” etc. Note que  $dx, dy, dz$  podem, mas não, precisam, ser infinitesimalmente pequenos e **não devem ser confundidas com as diferenciais ordinárias** que associamos com integrais e quocientes diferenciais. Uma função do tipo

$$A dx + B dy + C dz, \quad A, B, C \text{ números reais} \tag{4.175}$$

é definida como uma **1-forma constante**.

#### Exemplo 4.8.1 1-FORMA CONSTANTE

Para uma força constante  $\mathbf{F} = (A, B, C)$ , o trabalho realizado ao longo do deslocamento de  $P = (3, 2, 1)$  a  $Q = (4, 5, 6)$  é dado por

$$W = A(4 - 3) + B(5 - 2) + C(6 - 1) = A + 3B + 5C.$$

Se  $\mathbf{F}$  é um campo de força, então suas componentes retangulares  $A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)$  dependerão da localização e a **1-forma** (não-constante)  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  corresponderá ao conceito de trabalho realizado contra o campo de força  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ao longo de  $d\mathbf{r}$  sobre uma curva no espaço. Uma quantidade finita de trabalho

$$W = \int_C [A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz] \tag{4.176}$$

envolve a familiar integral de linha ao longo de uma curva orientada  $C$  em que a 1-forma  $dW$  descreve a quantidade de trabalho para pequenos deslocamentos (segmentos na trajetória  $C$ ). Sob essa luz, o integrando  $f(x) dx$  de uma integral  $\int_a^b f(x) dx$  consistindo na função  $f$  e na medida  $dx$  como o comprimento orientado aqui é considerada uma 1-forma. O valor da integral é obtido da integral de linha ordinária. ■

### 2-Formas

Considere uma unidade de fluxo de massa na direção  $z$ , isto é, um fluxo na direção de  $z$  crescente, de modo que uma unidade de massa atravessasse um quadrado unitário no plano  $xy$  em tempo unitário. A orientação simbolizada pela seqüência de pontos na Figura 4.19,

$$(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 0),$$

será denominada **anti-horária**, como de costume. Uma unidade de fluxo na direção  $z$  é definida pela função  $dx dy$ <sup>31</sup> que atribui a retângulos orientados no espaço a área orientada de suas projeções no plano  $xy$ . De modo semelhante, um fluxo unitário na direção  $x$  é descrito por  $dx dy = dy dx$  e um fluxo unitário na direção  $y$  por  $dz dx$ . A ordem inversa,  $dz dx$ , é ditada pela convenção de orientação e  $dz dx = -dx dz$  por definição. Essa anti-simetria é consistente com o produto cruzado de dois vetores que representam áreas orientadas em espaço euclidiano. Essa noção é generalizada para polígonos e superfícies diferenciáveis curvadas aproximadas por polígonos e volumes.

<sup>31</sup>Muitos autores denotam este produto cunha como  $dx \wedge dy$  com  $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ . Note que o produto  $dx dy = dy dx$  para diferenciais ordinárias.



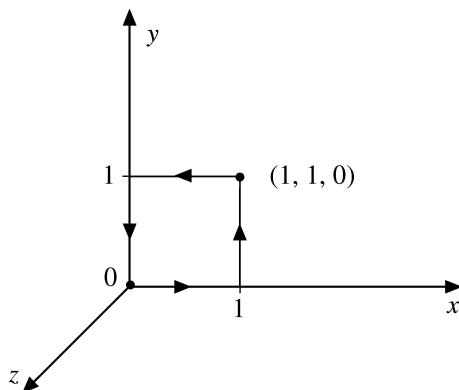


Figura 4.19: Retângulo orientado em sentido anti-horário.

**Exemplo 4.8.2** FLUXO MAGNÉTICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE ORIENTADA

Se  $\mathbf{B} = (A, B, C)$  é uma indução magnética constante, então a constante **2-forma**

$$A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

descreve o fluxo magnético através de um retângulo orientado. Se  $\mathbf{B}$  é um campo de indução magnética que varia através de uma superfície  $S$ , então o fluxo

$$\Phi = \int_S [B_x(\mathbf{r}) dy dz + B_y(\mathbf{r}) dz dx + B_z(\mathbf{r}) dx dy] \tag{4.177}$$

através da superfície orientada  $S$  envolve a familiar integração (de Riemann) sobre retângulos orientados aproximadamente pequenos a partir dos quais  $S$  é montada. ■

A definição de  $\int \omega$  depende da decomposição de  $\omega = \sum_i \omega_i$ , em que cada uma das formas diferenciais  $\omega_i$  é não-nula apenas em um pequeno trecho da superfície  $S$  que cobre a superfície. Então, pode-se demonstrar que  $\sum_i \int \omega_i$  converge, porque os trechos ficam cada vez menores e mais numerosos, até o limite  $\int \omega$ , que é independente dessas decomposições. Caso o leitor queira mais detalhes e provas, consulte Edwards nas Leituras Adicionais.

**3-Formas**

Uma 3-forma  $dx dy dz$  representa um volume orientado. Por exemplo, o determinante de três vetores em espaço euclidiano muda de sinal se invertermos a ordem de dois vetores. O determinante mede o volume orientado abrangido pelos três vetores. Em particular,  $\int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$  representa a carga total dentro do volume  $V$  se  $\rho$  for a densidade de carga. Formas diferenciais de dimensões mais altas em espaços de dimensões mais altas são definidas de maneira semelhante e denominadas formas  $k$  com  $k = 0, 1, 2, \dots$

Se uma 3-forma

$$\omega = A(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = A'(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \tag{4.178}$$

em uma variedade tridimensional é expressa em termos de novas coordenadas, então há um mapa um-para-um, diferenciável,  $x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3)$ , entre essas coordenadas com jacobiano

$$J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 1,$$

e  $A = A'J = A'$ , de modo que

$$\int_V \omega = \int_V A dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{V'} A' dx'_1 dx'_2 dx'_3. \tag{4.179}$$

Essa declaração explica detalhadamente a independência de parâmetro de integrais sobre formas diferenciais, uma vez que, em essência, parametrizações são arbitrárias. As regras que governam a integração de formas diferenciais são definidas sobre variedades. Estas são contínuas se pudermos nos movimentar continuamente (na verdade, admitimos que elas são diferenciáveis) de ponto a ponto, e orientadas, se a orientação das curvas generalizar para superfícies e volumes até a dimensão de toda a base múltipla. As regras para formas diferenciais são:

- Se  $\omega = a\omega_1 + a'\omega'_1$ , sendo  $a, a'$  números reais, então  $\int_S \omega = a \int_S \omega_1 + a' \int_S \omega'_1$ , em que  $S$  é uma variedade compacta, orientada, contínua, com fronteira.
- Se a orientação for invertida, então a integral  $\int_S \omega$  muda de sinal.

### Derivada Exterior

Agora apresentaremos a **derivada exterior**  $d$  de uma função  $f$ , uma 0-forma:

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (4.180)$$

que gera uma 1-forma  $\omega_1 = df$ , a diferencial de  $f$  (ou derivada externa), o gradiente na análise vetorial padrão. Ao fazer o somatório sobre as coordenadas, usamos, e continuaremos a usar, a convenção de somatório de Einstein. Aplicando a derivada exterior  $d$  a uma 1-forma, definimos

$$d(A dx + B dy + C dz) = dA dx + dB dy + dC dz \quad (4.181)$$

com funções  $A, B, C$ . Essa definição, em conjunção com  $df$  exatamente como acabamos de dar, liga vetores a operadores diferenciais  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . De maneira semelhante, estendemos  $d$  para  $k$ -formas. Contudo, aplicar  $d$  duas vezes dá zero,  $ddf = 0$ , porque

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4.182)$$

Isso resulta do fato de que, em derivadas parciais mistas, a ordem não importa, contanto que todas as funções sejam suficientemente deriváveis. Do mesmo modo podemos provar que  $dd\omega_1 = 0$  para uma  $\omega_1$ , de 1-forma, etc.

As regras que governam formas diferenciais, com  $\omega_k$  denotando uma forma  $k$ , que usamos até aqui são

- $dx dx = 0 = dy dy = dz dz, dx_i^2 = 0$ ;
- $dx dy = -dy dx, dx_i dx_j = -dx_j dx_i, i \neq j$ ;
- $dx_1 dx_2 \cdots dx_k$  é totalmente anti-simétrica na  $dx_i, i = 1, 2, \dots, k$ .
- $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ ;
- $d(\omega_k + \Omega_k) = d\omega_k + d\Omega_k$ , linearidade;
- $dd\omega_k = 0$ .

Agora aplicamos a derivada exterior  $d$  a produtos de formas diferenciais, começando com funções (0-forma). Temos

$$d(fg) = \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} dx_i = \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} g\right) dx_i = f dg + df g. \quad (4.183)$$

Se  $\omega_1 = \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$  é uma 1-forma e  $f$  é uma função, então

$$\begin{aligned} d(f\omega_1) &= d\left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i\right) = d\left(f \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_i \\ &= \frac{\partial\left(f \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} dx_j dx_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_j dx_i \\ &= df\omega_1 + f d\omega_1, \end{aligned} \quad (4.184)$$

como esperado. Mas, se  $\omega'_1 = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$  é uma outra 1-forma, então

$$\begin{aligned} d(\omega_1\omega'_1) &= d\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = d\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j \\ &= \frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_k} dx_k dx_i dx_j \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} dx_k dx_i \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_k dx_j \\ &= d\omega_1 \omega'_1 - \omega_1 d\omega'_1. \end{aligned} \quad (4.185)$$



Essa prova é válida para 1-formas mais gerais  $\omega = f_i dx_i$  com funções  $f_i$ . Portanto, em geral, definimos  $k$ -formas:

$$d(\omega_k \omega'_k) = (d\omega_k) \omega'_k + (-1)^k \omega_k (d\omega'_k). \quad (4.186)$$

Em geral, a derivada exterior de uma  $k$ -forma é uma  $(k + 1)$  forma.

### Exemplo 4.8.3 ENERGIA POTENCIAL

Como aplicação em duas dimensões (por simplicidade), considere o potencial  $V(\mathbf{r})$  uma 0-forma e  $dV$  sua derivada exterior. Integrando  $V$  ao longo de uma trajetória orientada  $C$  de  $\mathbf{r}_1$  até  $\mathbf{r}_2$  temos

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = \int_C dV = \int_C \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right) = \int_C \nabla V \cdot d\mathbf{r}, \quad (4.187)$$

em que a última integral é a fórmula-padrão para a diferença de potencial de energia que faz parte do teorema da conservação de energia. A trajetória e a independência de parametrização são evidentes nesse caso especial. ■

### Retrocessos (pullbacks)

Se um mapa linear  $\mathcal{L}_2$  do plano  $uv$  para o plano  $xy$  tem a forma

$$x = au + bv + c, \quad y = eu + fv + g, \quad (4.188)$$

polígonos orientados no plano  $uv$  são mapeados para polígonos similares no plano  $xy$ , contanto que o determinante a  $\mathcal{L}_2$  seja não-zero. A 2-forma

$$dx dy = (a du + b dv)(e du + f dv) = (af - be) du dv \quad (4.189)$$

pode ser traduzida de volta do plano  $xy$  para o plano  $uv$ . Isso significa que uma integral sobre uma superfície simplesmente conectada  $S$  se torna

$$\int_{\mathcal{L}_2(S)} dx dy = (af - be) \int_S du dv, \quad (4.190)$$

e  $(af - be) du dv$  é o retorno de  $dx dy$ , oposto à direção do mapa  $\mathcal{L}_2$  do plano  $uv$  para o plano  $xy$ . É claro que o determinante  $af - be$  do mapa  $\mathcal{L}_2$  é simplesmente o jacobiano, gerado sem muito esforço pelas formas diferenciais na Equação (4.189).

De modo semelhante, um mapa linear  $\mathcal{L}_3$  do espaço  $u_1 u_2 u_3$  para o espaço  $x_1 x_2 x_3$

$$x_i = a_{ij} u_j + b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.191)$$

gera automaticamente sua forma jacobiana a partir da forma

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 dx_3 &= \left( \sum_{j=1}^3 a_{1j} du_j \right) \left( \sum_{j=1}^3 a_{2j} du_j \right) \left( \sum_{j=1}^3 a_{3j} du_j \right) \\ &= (a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} \pm \dots) du_1 du_2 du_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} du_1 du_2 du_3. \end{aligned} \quad (4.192)$$

Assim, formas diferenciais geram as regras que governam determinantes.

Dados dois mapas lineares em seqüência é possível provar diretamente que o retrocesso sob um mapa composto é o retrocesso do retrocesso. Este teorema é o análogo em formas diferenciais da multiplicação de matrizes.

Agora vamos considerar a curva  $C$  definida por um parâmetro  $t$  em contraste com uma curva definida por uma equação. Por exemplo, o círculo  $\{(\cos t, \sin t); 0 \leq t \leq 2\pi\}$  é uma parametrização por  $t$ , ao passo que o círculo  $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$  é uma definição por uma equação. Então, a integral de linha

$$\int_C [A(x, y) dx + B(x, y) dy] = \int_{t_i}^{t_f} \left[ A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} \right] dt \quad (4.193)$$

para funções contínuas  $A, B, dx/dt, dy/dt$  se torna uma integral unidimensional sobre o intervalo orientado  $t_i \leq t \leq t_f$ . Claramente, a 1-forma  $[A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt}] dt$  na linha  $t$  é obtida da 1-forma  $A dx + B dy$  no plano  $xy$  via o mapa  $xy$   $x = x(t)$ , da linha  $t$  para a curva  $C$  no plano  $xy$ . A 1-forma  $[A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt}] dt$  é denominada retrocesso da 1-forma  $A dx + B dy$  sob o mapa  $x = x(t), y = y(t)$ . Usando retrocessos podemos mostrar que integrais sobre 1-formas são independentes da parametrização da trajetória.

Nesse sentido, o quociente diferencial  $\frac{dy}{dx}$  pode ser considerado o coeficiente de  $dx$  no retorno de  $dy$  sob a função  $y = f(x)$  ou  $dy = f'(x) dx$ . Esse conceito de retrocesso se generaliza imediatamente para mapas em três ou mais dimensões e para  $k$ -formas com  $k > 1$ . Em particular, pode-se verificar que a regra da cadeia é um retorno: Se

$$\begin{aligned} y_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), & i &= 1, 2, \dots, l \quad \text{e} \\ z_j &= g_j(y_1, y_2, \dots, y_l), & j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{4.194}$$

são mapas diferenciáveis de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $\mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ , então o mapa composto  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável e o retrocesso de qualquer  $k$ -forma sob o mapa composto é igual ao retrocesso do retrocesso. Esse teorema é útil para estabelecer que integrais de  $k$ -formas são independentes de parâmetro.

De forma semelhante, definimos a diferencial  $df$  como o retrocesso da 1-forma  $dz$  sob a função  $z = f(x, y)$ :

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{4.195}$$

### Exemplo 4.8.4 TEOREMA DE STOKES

Como outra aplicação, em primeiro lugar vamos esboçar a derivação-padrão da versão mais simples do teorema de Stokes para um retângulo  $S = [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$  orientado em sentido anti-horário, sendo  $\partial S$  sua fronteira

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (A dx + B dy) &= \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^d B(b, y) dy + \int_b^a A(x, d) dx + \int_d^c B(a, y) dy \\ &= \int_c^d [B(b, y) - B(a, y)] dy - \int_a^b [A(x, d) - A(x, c)] dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial B}{\partial x} dx dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial A}{\partial y} dy dx \\ &= \int_S \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \tag{4.196}$$

que vale para qualquer superfície simplesmente conectada  $S$  que possa ser reunida por retângulos.

Agora demonstramos a utilização de formas diferenciais para obter o mesmo teorema (novamente em duas dimensões, por simplicidade):

$$\begin{aligned} d(A dx + B dy) &= dA dx + dB dy \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy \right) dx + \left( \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy \right) dy = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \tag{4.197}$$

usando as regras destacadas anteriormente. Integrando sobre uma superfície  $S$  e sua fronteira  $\partial S$ , respectivamente, obtemos

$$\int_{\partial S} (A dx + B dy) = \int_S d(A dx + B dy) = \int_S \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \tag{4.198}$$

Aqui, as contribuições à integral da esquerda advindas de fronteiras internas se cancelam como de hábito, porque são orientadas em direções opostas sobre retângulos adjacentes. Para cada retângulo interno orientado que compõe a superfície simplesmente conectada  $S$ , usamos

$$\int_R ddx = \int_{\partial R} dx = 0. \tag{4.199}$$



Note que a derivada exterior gera automaticamente a componente  $z$  do rotacional.

Em três dimensões, o teorema de Stokes deriva da identidade de forma diferencial que envolve o potencial vetor  $\mathbf{A}$  e a indução magnética  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,

$$\begin{aligned} d(A_x dx + A_y dy + A_z dz) &= dA_x dx + dA_y dy + dA_z dz \\ &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \right) dx + \dots \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (4.200)$$

gerando todos os componentes do rotacional em espaço tridimensional. Essa identidade é integrada sobre cada retângulo orientado que compõe a superfície simplesmente conectada  $S$  (que não tem buracos, isto é, onde cada curva se contrai até um ponto da superfície) e então é somada sobre todos os retângulos adjacentes, para resultar o fluxo magnético através de  $S$ ,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S [B_x dy dz + B_y dz dx + B_z dx dy] \\ &= \int_{\partial S} [A_x dx + A_y dy + A_z dz], \end{aligned} \quad (4.201)$$

ou, na notação-padrão de análise vetorial (teorema de Stokes, Capítulo 1),

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.202)$$

■

### Exemplo 4.8.5 TEOREMA DE GAUSS

Considere a lei de Gauss, Seção 1.14. Integramos a densidade elétrica  $\rho = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{E}$  sobre o volume de um único paralelepípedo  $V = [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f]$  orientado por  $dx dy dz$  (para o lado direito), o lado  $x = b$  de  $V$  orientado por  $dy dz$  (sentido anti-horário, como vemos por  $x > b$ ), e assim por diante. Usando

$$E_x(b, y, z) - E_x(a, y, z) = \int_a^b \frac{\partial E_x}{\partial x} dx, \quad (4.203)$$

temos, na notação de formas diferenciais, somando sobre todos os paralelepípedos que compõem o volume  $\mathcal{V}$ ,

$$\int_{\partial \mathcal{V}} E_x dy dz = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz. \quad (4.204)$$

Integrando a identidade (2-forma) do fluxo elétrico

$$\begin{aligned} d(E_x dy dz + E_y dz dx + E_z dx dy) &= dE_x dy dz + dE_y dz dx + dE_z dx dy \\ &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (4.205)$$

sobre a superfície simplesmente conectada  $\partial \mathcal{V}$  temos o teorema de Gauss,

$$\int_{\partial \mathcal{V}} (E_x dy dz + E_y dz dx + E_z dx dy) = \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (4.206)$$

ou, em notação-padrão de análise vetorial,

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (4.207)$$

■

Esses exemplos são casos diferentes de um único teorema sobre formas diferenciais. Para explicar por que, vamos começar com um pouco de terminologia, uma **definição preliminar de uma variedade diferenciável  $M$** : ela é uma coleção de pontos ( $m$ -tuplas de números reais) que são conectados suavemente (isto é, diferenciavelmente) uns com os outros, de modo que a vizinhança de cada ponto parece ser um pedaço simplesmente conectado de um espaço cartesiano  $m$ -dimensional “suficiente próximo” ao redor do ponto e que o contém. Aqui,  $m$ , que permanece constante de ponto a ponto, é denominada dimensão da variedade. São exemplos o espaço euclidiano  $m$ -dimensional  $\mathbb{R}^m$  e a esfera  $m$ -dimensional

$$S_m = \left[ (x^1, \dots, x^{m+1}); \sum_{i=1}^{m+1} (x^i)^2 = 1 \right].$$

Qualquer superfície com bordas agudas, cantos ou vazios não é uma base múltipla em nosso sentido, isto é, não é diferenciável. Em geometria diferencial, todos os movimentos, tais como translação e deslocamento paralelo, são locais, isto é, são definidos por infinitésimos. Se aplicarmos a derivada exterior  $d$  a uma função  $f(x^1, \dots, x^m)$  sobre  $M$ , geramos 1-formas básicas:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \tag{4.208}$$

em que  $x^i(P)$  são funções coordenadas. Como antes, temos  $d(df) = 0$  porque

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j dx^i \\ &= \sum_{j < i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j dx^i = 0 \end{aligned} \tag{4.209}$$

porque a ordem das derivadas não importa. Qualquer 1-forma é uma combinação linear  $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$  com funções  $\omega_i$ .

### Teorema de Stokes Generalizado sobre Formas Diferenciais

Seja  $\omega$  uma forma  $(k - 1)$  contínua no espaço  $x_1 x_2 \cdots x_n$  definida em todos os lugares sobre uma variedade  $S$  compacta, orientada, diferenciável,  $k$ -dimensional, com fronteira  $\partial S$  em espaço  $x_1 x_2 \cdots x_n$ . Então

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega. \tag{4.210}$$

Aqui

$$d\omega = d(A dx_1 dx_2 \cdots dx_{k-1} + \cdots) = dA dx_1 dx_2 \cdots dx_{k-1} + \cdots. \tag{4.211}$$

A energia potencial no Exemplo 4.8.3, dado esse teorema para o potencial  $\omega = V$ , 0-forma; o teorema de Stokes no Exemplo 4.8.4 é esse teorema para o potencial vetorial 1-forma  $\sum_i A_i dx_i$  (para espaços euclidianos  $dx^i = dx_i$ ); e o teorema de Gauss no Exemplo 4.8.5 é o teorema de Stokes para o fluxo elétrico 2-forma no espaço euclidiano tridimensional.

O método de integração por partes pode ser generalizado para formas diferenciais usando a Equação (4.186):

$$\int_S d\omega_1 \omega_2 = \int_{\partial S} \omega_1 \omega_2 - (-1)^{k_1} \int_S \omega_1 d\omega_2. \tag{4.212}$$

Isto é provado integrando a identidade

$$d(\omega_1 \omega_2) = d\omega_1 \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 d\omega_2, \tag{4.213}$$

com o termo integrado  $\int_S d(\omega_1 \omega_2) = \int_{\partial S} \omega_1 \omega_2$ .

Nosso próximo objetivo é colocar as Seções 2.10 e 2.11 na linguagem das formas diferenciais. Até aqui trabalhamos em espaço euclidiano bi ou tridimensional.



### Exemplo 4.8.6 VARIEDADE DE RIEMANN

Vamos examinar o espaço-tempo curvado de Riemann das Seções 2.10-2.11 e reformular um pouco dessa análise tensorial em espaços curvos na linguagem das formas diferenciais. Lembre-se de que, aqui, é importante distinguir entre índices inferiores e superiores. A métrica  $g_{ij}$  Equação (2.123) pode ser escrita em termos de vetores tangentes, Equação (2.114), como segue:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial q^i} \frac{\partial x_l}{\partial q^j}, \quad (4.214)$$

em que a soma sobre o índice  $l$  denota o produto interno dos vetores tangentes. (Aqui continuamos a usar a convenção da soma de Einstein sobre índices repetidos. Como antes, o tensor métrico é usado para elevar e reduzir índices repetidos). O conceito fundamental de conexão envolve os símbolos de Christoffel, que abordamos em primeiro lugar. A derivada exterior de um vetor tangente pode ser expandida em termos da base de vetores tangentes (compare com a Equação (2.131a)),

$$d\left(\frac{\partial x^l}{\partial q^i}\right) = \Gamma^k{}_{ij} \frac{\partial x^l}{\partial q^k} dq^j, \quad (4.215)$$

introduzindo, desse modo, os símbolos de Christoffel da segunda espécie. Aplicando  $d$  à Equação (4.214), obtemos

$$\begin{aligned} dg_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} dq^m = d\left(\frac{\partial x^l}{\partial q^i}\right) \frac{\partial x_l}{\partial q^j} + \frac{\partial x^l}{\partial q^i} d\left(\frac{\partial x_l}{\partial q^j}\right) \\ &= \left(\Gamma^k{}_{im} \frac{\partial x_l}{\partial q^k} \frac{\partial x^l}{\partial q^j} + \Gamma^k{}_{jm} \frac{\partial x^l}{\partial q^i} \frac{\partial x_l}{\partial q^k}\right) dq^m = (\Gamma^k{}_{im} g_{kj} + \Gamma^k{}_{jm} g_{ik}) dq^m. \end{aligned} \quad (4.216)$$

Comparando os coeficientes de  $dq^m$ , temos

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} = \Gamma^k{}_{im} g_{kj} + \Gamma^k{}_{jm} g_{ik}. \quad (4.217)$$

Usando o símbolo de Christoffel da primeira espécie,

$$[ij, m] = g_{km} \Gamma^k{}_{ij}, \quad (4.218)$$

podemos reescrever a Equação (4.217) como

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} = [im, j] + [jm, i], \quad (4.219)$$

o que corresponde à Equação (2.136) e implica a Equação (2.137). Verificamos que

$$[ij, m] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} \right) \quad (4.220)$$

é a única solução da Equação (4.219) e que

$$\Gamma^k{}_{ij} = g^{mk} [ij, m] = \frac{1}{2} g^{mk} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} \right) \quad (4.221)$$

resulta disso. ■

### Operador\* de Hodge

As diferenciais  $dx^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , formam uma base de um espaço vetorial que é considerado dual em relação às derivadas  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ; elas são 1-formas básicas. Por exemplo, o espaço vetorial  $\mathcal{V} = \{(a_1, a_2, a_3)\}$  é dual ao espaço vetorial de planos (funções lineares de  $f$ ) em espaço euclidiano tridimensional  $\mathcal{V}^* = \{f \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - d = 0\}$ . O gradiente

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (a_1, a_2, a_3) \quad (4.222)$$

dá um mapa um-para-um, diferenciável, de  $\mathcal{V}^*$  para  $\mathcal{V}$ . Essas relações duais são generalizadas pelo operador  $*$  de Hodge, baseado no símbolo de Levi-Civita da Seção 2.9.

Sejam os vetores unitários  $\hat{x}_i$  uma base ortonormal orientada do espaço euclidiano tridimensional. Então o  $*$  de Hodge de escalares é definido pelo elemento de base

$$*1 \equiv \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3, \quad (4.223)$$

que corresponde a  $(\hat{x}_1 \times \hat{x}_2) \cdot \hat{x}_3$  em notação vetorial padrão. Aqui,  $\hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k$  é o produto externo totalmente anti-simétrico dos vetores unitários que corresponde a  $(\hat{x}_i \times \hat{x}_j) \cdot \hat{x}_k$  em notação vetorial padrão. Para vetores,  $*$  é definido para a base de vetores unitários como

$$*\hat{x}_i \equiv \frac{1}{2!} \varepsilon_i^{jk} \hat{x}_j \hat{x}_k. \quad (4.224)$$

Em particular,

$$*\hat{x}_1 = \hat{x}_2 \hat{x}_3, \quad *\hat{x}_2 = \hat{x}_3 \hat{x}_1, \quad *\hat{x}_3 = \hat{x}_1 \hat{x}_2. \quad (4.225)$$

Para áreas orientadas,  $*$  é definido sobre elementos de área de base como

$$*(\hat{x}_i \hat{x}_j) \equiv \varepsilon^k_{ij} \hat{x}_k, \quad (4.226)$$

portanto,

$$\begin{aligned} *(\hat{x}_1 \hat{x}_2) &= \varepsilon^3_{12} \hat{x}_3 = \hat{x}_3, & *(\hat{x}_1 \hat{x}_3) &= \varepsilon^2_{13} \hat{x}_2 = -\hat{x}_2, \\ *(\hat{x}_2 \hat{x}_3) &= \varepsilon^1_{23} \hat{x}_1 = \hat{x}_1. \end{aligned} \quad (4.227)$$

Para volumes,  $*$  é definido como

$$*(\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3) \equiv \varepsilon_{123} = 1. \quad (4.228)$$

### Exemplo 4.8.7 PRODUTO EXTERNO DE VETORES

O produto externo de dois vetores

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \hat{x}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b^i \hat{x}_i \quad (4.229)$$

é dado por

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \left( \sum_{i=1}^3 a^i \hat{x}_i \right) \left( \sum_{j=1}^3 b^j \hat{x}_j \right) = \sum_{i < j} (a^i b^j - a^j b^i) \hat{x}_i \hat{x}_j, \quad (4.230)$$

ao passo que a Equação (4.224) implica

$$*(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (4.231)$$

■

Em seguida, vamos analisar as Seções 2.1-2.2 sobre coordenadas curvilíneas na linguagem das formas diferenciais.

### Exemplo 4.8.8 LAPLACIANO EM COORDENADAS ORTOGONAIS

Considere coordenadas ortogonais onde a métrica (Equação (2.5)) leva a elementos de comprimento

$$ds_i = h_i dq_i, \quad \text{não somados.} \quad (4.232)$$

Aqui, as  $dq_i$  são diferenciais ordinárias. As 1-formas associadas com as direções  $\hat{q}_i$

$$\varepsilon^i = h_i dq_i, \quad \text{não somadas.} \quad (4.233)$$

Então o gradiente é definido pela 1-forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i = \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \varepsilon^i. \quad (4.234)$$





Aplicamos o operador de Hodge a  $df$ , gerando a 2-forma

$$\begin{aligned} *df &= \left( \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) * \varepsilon^i = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \varepsilon^2 \varepsilon^3 + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \varepsilon^3 \varepsilon^1 + \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \varepsilon^1 \varepsilon^2 \\ &= \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) dq_2 dq_3 + \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) dq_3 dq_1 + \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (4.235)$$

Aplicando uma outra derivada exterior  $d$ , obtemos o laplaciano

$$\begin{aligned} d(*df) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) dq_1 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) dq_2 dq_1 dq_2 dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) dq_3 dq_1 dq_2 dq_3 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \\ &\quad \cdot \varepsilon^1 \varepsilon^2 \varepsilon^3 = \nabla^2 f dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (4.236)$$

Dividindo pelo elemento de volume, temos a Equação (2.22). Lembre-se de que os elementos de volume  $dx dy dz$  e  $\varepsilon^1 \varepsilon^2 \varepsilon^3$  devem ser iguais porque  $\varepsilon^i$  e  $dx, dy, dz$  são 1-formas ortonormais e o mapa de  $xyz$  para as  $q_i$  coordenadas é um-para-um. ■

### Exemplo 4.8.9 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Agora trabalhamos em espaço quadridimensional de Minkowski, o espaço-tempo plano, homogêneo, da relatividade especial, para discutir a eletrodinâmica clássica em termos de formas diferenciais. Começamos introduzindo o campo eletromagnético 2-forma (tensor de campo em notação relativista padrão):

$$\begin{aligned} F &= -E_x dt dx - E_y dt dy - E_z dt dz + B_x dy dz + B_y dz dx + B_z dx dy \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (4.237)$$

que contém a 1-forma elétrica  $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$  e o fluxo magnético 2-forma. Aqui, termos com 1-formas em ordem oposta foram combinados. (Para a Equação (4.237) ser válida, a indução magnética está em unidades de  $c$ ; isto é,  $B_i \rightarrow cB_i$  sendo  $c$  a velocidade da luz ou trabalhamos em unidades em que  $c = 1$ . Além disso,  $F$  está em unidades de  $1/\varepsilon_0$ , a constante dielétrica do vácuo. E mais, o potencial vetorial é definido como  $A_0 = \varepsilon_0 \phi$ , com o potencial elétrico não-estático  $\phi$  e  $A^1 = \frac{A_x}{\mu_0 c}, \dots$  (veja a Seção 4.6 se quiser mais detalhes). O campo  $F$  de 2-forma abrange a lei da indução de Faraday que diz que uma carga em movimento sofre a ação de forças magnéticas.

Aplicando a derivada exterior  $d$ , geramos automaticamente as equações homogêneas de Maxwell por  $F$ :

$$\begin{aligned} dF &= - \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right) dt dx - \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right) dt dy \\ &\quad - \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} dx + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right) dt dz + \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \frac{\partial B_x}{\partial t} dt \right) dy dz \\ &\quad + \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) dz dx + \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \left( -\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dt dx dy + \left( -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dt dx dz \\ &\quad + \left( -\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dt dy dz = 0 \end{aligned} \quad (4.238)$$

que, em notação-padrão de análise vetorial, toma a familiar forma vetorial de equações homogêneas de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (4.239)$$

Uma vez que  $dF = 0$ , isto é, não há nenhum termo-guia, de modo que  $F$  é fechada e deve existir um  $\omega = A_\mu dx^\mu$  1-forma, de modo que  $F = d\omega$ . Agora,

$$d\omega = \partial_\nu A_\mu dx^\nu dx^\mu, \tag{4.240}$$

que, em notação-padrão leva à forma relativista convencional do tensor de campo eletromagnético,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.241}$$

Assim, as equações homogêneas de Maxwell,  $dF = 0$ , são equivalentes a  $\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0$ .

Para derivar dessa mesma forma as equações não-homogêneas de Maxwell, introduzimos o tensor dual de campo eletromagnético

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{4.242}$$

e, em termos de formas diferenciais,

$$*F = *(F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = F_{\mu\nu} *(dx^\mu dx^\nu) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{4.243}$$

Aplicando as derivadas exteriores, obtemos

$$d(*F) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\gamma F_{\mu\nu}) dx^\gamma dx^\alpha dx^\beta, \tag{4.244}$$

o lado esquerdo das equações não-homogêneas de Maxwell, uma 3-forma. Seu termo-guia é o dual da densidade de corrente elétrica, uma 3-forma:

$$\begin{aligned} *J &= J_\alpha (*dx^\alpha) = J_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda \\ &= \rho dx dy dz - J_x dt dy dz - J_y dt dz dx - J_z dt dx dy. \end{aligned} \tag{4.245}$$

No todo, as equações não-homogêneas de Maxwell tomam a elegante forma

$$d(*F) = *J. \tag{4.246}$$

*A estrutura de forma diferencial trouxe considerável unificação à álgebra vetorial e, de forma mais geral, à análise tensorial variedades, tal como a união dos teoremas de Stokes e Gauss, forneceu uma reformulação elegante das equações de Maxwell e uma derivação do laplaciano em coordenadas ortogonais curvas, entre outras.*

### Exercícios

**4.8.1** Avalie a 1-forma  $a dx + 2b dy + 4c dz$  no segmento de linha  $PQ$ , com  $P = (3, 5, 7)$ ,  $Q = (7, 5, 3)$ .

**4.8.2** Se o campo de força é constante e movimentar uma partícula da origem até  $(3, 0, 0)$  requer a unidade de trabalho, de  $(-1, -1, 0)$  a  $(-1, 1, 0)$  exige  $b$  unidades de trabalho e de  $(0, 0, 4)$  a  $(0, 0, 5)$  precisa de  $c$  unidade de trabalho, ache a 1-forma do trabalho.

**4.8.3** Avalie o fluxo descrito pela 2-forma  $dx dy + 2 dy dz + 3 dz dx$  através do triângulo orientado PQR com vértices em

$$P = (3, 1, 4), \quad Q = (-2, 1, 4), \quad R = (1, 4, 1).$$

**4.8.4** Os pontos, na ordem dada a seguir,

$$(0, 1, 1), \quad (3, -1, -2), \quad (4, 2, -2), \quad (-1, 0, 1)$$

são coplanares ou formam um volume orientado (para o lado direito ou para o lado esquerdo)?

**4.8.5** Escreva a lei de Oersted,

$$\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} \sim I,$$

em notação de forma diferencial.

**4.8.6** Descreva o campo elétrico pela 1-forma  $E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$  e a indução magnética pela 2-forma  $B_1 dy dz + B_2 dz dx + B_3 dx dy$ . Então formule a lei de Faraday da indução em termos dessas formas.



4.8.7 Avalie a 1-forma

$$\frac{x dy}{x^2 + y^2} - \frac{y dx}{x^2 + y^2}$$

no círculo unitário ao redor da origem, com orientação anti-horária.

4.8.8 Ache o retrocesso de  $dx dz$  sob  $x = u \cos v, y = u - v,$

4.8.9 Ache o retrocesso da forma  $dy dz + dz dx + dx dy$  sob o mapa  $x = \sin \theta \cos \varphi, y = \sin \theta \sin \varphi, z = \cos \theta.$

4.8.10 Parametrize a superfície obtida pela rotação do círculo  $(x - 2)^2 + z^2 = 1, y = 0$  ao redor do eixo  $z$  com orientação em sentido anti-horário, como visto de fora.

4.8.11 Uma 1-forma  $A dx + B dy$  é definida como **fechada** se  $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$  É denominada **exata** se houver uma função  $f,$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = A$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = B.$  Determine quais das seguintes 1-formas são fechadas ou exatas e ache as funções correspondentes  $f$  para as que são exatas:

$$y dx + x dy, \quad \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad [\ln(xy) + 1] dx + \frac{x}{y} dy, \\ -\frac{y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}, \quad f(z) dz \text{ com } z = x + iy.$$

4.8.12 Mostre que  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = a^2$  define uma base múltipla diferenciável de dimensão  $D = n - 1$  se  $a \neq 0$  e  $D = 0$  se  $a = 0.$

4.8.13 Mostre que o conjunto de matrizes ortogonais  $2 \times 2$  forma uma base múltipla diferenciável e determine sua dimensão.

4.8.14 Determine o valor da 2-forma  $A dy dz + B dz dx + C dx dy$  sobre um paralelogramo com lados  $a, b.$

4.8.15 Prove a invariância de Lorentz das equações de Maxwell na linguagem das formas diferenciais.

## Leituras Adicionais

Buerger, M. J., *Elementary Crystallography.* Nova York: Wiley (1956). Uma discussão de simetrias de cristais. Buerger desenvolve todos os 32 grupos pontuais e todos os 230 grupos espaciais. Alguns dos livros deste autor relacionados ao assunto são *Contemporary Crystallography.* Nova York: McGraw-Hill (1970); *Crystal Structure Analysis.* Nova York: Krieger (1979) (nova tiragem em 1960); e *Introduction to Crystal Geometry.* Nova York: Krieger (1977) (nova tiragem, 1971).

Burns, G., e A. M. Glazer, *Space Groups for Solid-State Scientists.* Nova York: Academic Press (1978). Um tratamento bem organizado e de fácil leitura de grupos e sua aplicação ao estado sólido.

de-Shalit, A., e I. Talmi, *Nuclear Shell Model.* Nova York: Academic Press (1963). Adotamos as convenções de fase de Condon-Shortley apresentadas nesse texto.

Edmonds, A. R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics.* NJ: Princeton University Press (1957).

Edwards, H. M., *Advanced Calculus: A Differential Forms Approach.* Boston: Birkhäuser (1994).

Falicov, L. M., *Group Theory and Its Physical Applications.* Notas compiladas por A. Luehrmann. Chicago: University of Chicago Press (1966). Teoria dos grupos com ênfase em aplicações a simetrias de cristais e física do estado sólido.

Gell-Mann, M., e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way.* Nova York: Benjamin (1965). Uma coletânea de artigos relevantes sobre  $SU(3)$  e as partículas da física de alta energia. Diversas seções introdutórias por Gell-Mann e Ne'eman são de especial utilidade.

Greiner, W., e B. Müller, *Quantum Mechanics Symmetries.* Berlim: Springer (1989). Referimo-nos a este livro para mais detalhes e numerosos exercícios que são examinados detalhadamente.

Hamermesh, M., *Group Theory and Its Application to Physical Problems.* Reading, MA: Addison-Wesley (1962). Um apanhado detalhado e rigoroso de grupos finitos e grupos contínuos. Os 32 grupos pontuais são desenvolvidos. Os grupos contínuos são tratados, com a álgebra de Lie incluída. Grande número de aplicações às físicas atômica e nuclear.

Hassani, S., *Foundations of Mathematical Physics.* Boston: Allyn and Bacon (1991).

Heitler, W., *The Quantum Theory of Radiation, 2<sup>a</sup>.* ed. Oxford: Oxford University Press (1947). Nova tiragem, Nova York: Dover (1983).

- Higman, B., *Applied Group-Theoretic and Matrix Methods*. Oxford: Clarendon Press (1955). Um desenvolvimento bastante complexo, porém de fácil compreensão de análise matricial e teoria dos grupos.
- Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3<sup>a</sup>. ed. Nova York: Wiley (1998).
- Messiah, A., *Quantum Mechanics*, vol. II. Amsterdam: North-Holland (1961).
- Panofsky, W. K. H., e M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2<sup>a</sup>. ed. Reading, MA: Addison-Wesley (1962). A covariância de Lorentz de equações de Maxwell é desenvolvida para o vácuo e também para meios materiais. Panofsky e Phillips usam tensores contravariantes e covariantes.
- Park, D. "Resource letter SP-1 on symmetry in physics". *Am. J. Phys.* 36: 577-584 (1968). Inclui uma grande seleção de referências básicas sobre teoria dos grupos e suas aplicações à física: átomos, moléculas, núcleos, sólidos e partículas elementares.
- Ram, B., "Physics of the SU(3) symmetry model." *Am. J. Phys.* 35: 16 (1967). Uma excelente discussão das aplicações do SU(3) às partículas de interações fortes (bárions). Esse assunto também é discutido em R. D. Young, Physics of the quark model. *Am. J. Phys.* 41: 472 (1973).
- Rose, M. E., *Elementary Theory of Angular Momentum*. Nova York: Wiley (1957). Nova tiragem. Nova York: Dover (1995). Como parte do desenvolvimento da teoria quântica do momento angular, Rose inclui um apanhado detalhado e de fácil leitura do grupo de rotação.
- Wigner, E. P., *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (traduzido por J. J. Griffin). Nova York: Academic Press (1959). Este livro é a referência clássica da teoria dos grupos para o físico. O grupo de rotação é tratado com considerável detalhe. Há um grande número de aplicações à física atômica.

## 5

# Séries Infinitas

### 5.1 Conceitos Fundamentais

Séries infinitas, literalmente somas de um número infinito de termos, ocorrem com frequência tanto na matemática pura quanto na aplicada. Elas podem ser usadas pelo matemático puro para definir funções como uma abordagem fundamental da teoria de funções, bem como para calcular valores precisos de constantes transcendentais e funções transcendentais. Na matemática da Ciência e da Engenharia, as séries infinitas estão por toda parte, porque aparecem na avaliação de integrais (Seções 5.6 e 5.7), na solução de equações diferenciais (Seções 9.5 e 9.6) e como séries de Fourier (Capítulo 14) e competem com as representações integrais na descrição de um grande número de funções especiais (Capítulos 11, 12 e 13). Na Seção 16.3, a solução da série de Neumann para equações integrais nos dá mais de um exemplo da ocorrência e utilização de séries infinitas.

Desde o início enfrentamos o problema de atribuir significado à soma de um número infinito de termos. A abordagem usual é a das somas parciais. Se temos uma seqüência infinita de termos  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$ , definimos a  $i$ -ésima soma parcial como

$$s_i = \sum_{n=1}^i u_n. \quad (5.1)$$

Essa é uma soma finita e não oferece dificuldade alguma. Se as somas parciais  $s_i$  convergem para um limite (finito), à medida que  $i \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = S, \quad (5.2)$$

diz-se que a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  é **convergente** e tem o valor  $S$ . Note que, de um modo razoável, plausível, porém ainda assim arbitrário, **definimos** a série infinita como igual a  $S$  e que uma condição necessária para essa convergência para um limite é que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Entretanto, essa condição não é suficiente para garantir convergência. A Equação (5.2) costuma ser escrita em notação matemática formal:

A condição para a existência de um limite  $S$  é que, para cada  $\varepsilon > 0$ , haja um  $N = N(\varepsilon)$  fixo tal que

$$|S - s_i| < \varepsilon, \quad \text{para } i > N.$$

Essa condição é freqüentemente derivada do critério de Cauchy aplicado às somas parciais  $s_i$ . O **critério de Cauchy** é:

Uma condição necessária e suficiente para que uma seqüência  $(s_i)$  convirja é que, para cada  $\varepsilon > 0$ , haja um número fixo  $N$  tal que

$$|s_j - s_i| < \varepsilon, \quad \text{para todo } i, j > N.$$

Isso significa que as somas parciais individuais devem se agrupar à medida que avançamos bastante na seqüência. O critério de Cauchy pode ser estendido com facilidade para seqüências de funções. Nós o vemos nessa forma na Seção 5.5, na definição de convergência uniforme, e na Seção 10.4, no desenvolvimento do espaço de Hilbert. Nossas somas parciais  $s_i$  podem não convergir a um limite único, mas oscilar, como no caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots - (-1)^n + \dots$$

É claro que,  $s_i = 1$  para ímpar, mas  $s_i = 0$  para  $i$  par. Não há nenhuma convergência para um limite, e séries como essa são denominadas **oscilantes**. Sempre que a seqüência de somas parciais divergir (aproximar-se de  $\pm\infty$ ), diz-se que a série infinita **diverge**. Muitas vezes, o termo *divergente* é ampliado para incluir também séries oscilantes.

Como avaliamos as somas parciais pela aritmética comum, a série convergente, definida em termos de um limite das somas parciais, assume uma posição de suprema importância. Dois exemplos podem esclarecer a natureza de convergência ou divergência de uma série e também servirão como base para uma investigação mais detalhada na próxima seção.

**Exemplo 5.1.1** A SÉRIE GEOMÉTRICA

A seqüência geométrica, começando com  $a$  e com uma razão  $r$  ( $= a_{n+1}/a_n$  independente de  $n$ ), é dada por

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

A  $n$ ésima soma parcial é dada por<sup>1</sup>

$$s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}. \tag{5.3}$$

Tomando o limite para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{para } |r| < 1. \tag{5.4}$$

Daí, por definição, a série geométrica infinita converge para  $|r| < 1$  e é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}. \tag{5.5}$$

Por outro lado, se  $|r| \geq 1$ , a condição necessária  $u_n \rightarrow 0$  não é satisfeita e a série infinita diverge.

**Exemplo 5.1.2** A SÉRIE HARMÔNICA

Como um segundo exemplo mais complicado, consideramos a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \tag{5.6}$$

Temos o  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ , mas isso não é suficiente para garantir convergência. Se agruparmos os termos (nenhuma alteração na ordem) como

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots, \tag{5.7}$$

cada par de parênteses inclui  $p$  termos da forma

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+p} > \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}. \tag{5.8}$$

Formando somas parciais pela adição dos grupos entre parênteses, um por um, obtemos

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & s_4 &> \frac{5}{2}, \\ s_2 &= \frac{3}{2}, & s_5 &> \frac{6}{2}, \dots \\ s_3 &> \frac{4}{2}, & s_n &> \frac{n+1}{2}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Considerada dessa maneira, a série harmônica é certamente divergente.<sup>2</sup> Uma demonstração alternativa e independente de sua divergência aparece na Seção 5.2. ■

Se os  $u_n > 0$  estão decrescendo monotonicamente para zero, isto é,  $u_n > u_{n+1}$  para todo  $n$ , então  $\sum_n u_n$  está convergindo para  $S$  se, e somente se,  $s_n - nu_n$  convergir para  $S$ . À medida que as somas parciais  $s_n$  convergem para  $S$ , esse teorema indica que  $nu_n \rightarrow 0$ , para  $n \rightarrow \infty$ .

Para provar esse teorema, começamos por concluir de  $0 < u_{n+1} < u_n$  e

$$s_{n+1} - (n+1)u_{n+1} = s_n - nu_{n+1} = s_n - nu_n + n(u_n - u_{n+1}) > s_n - nu_n$$

<sup>1</sup>Multiplique e divida  $s_n = \sum_{m=0}^{n-1} ar^m$  por  $1 - r$ .

<sup>2</sup>A série harmônica (finita) aparece em uma nota interessante sobre o máximo deslocamento estável de uma pilha de moedas. P. R. Johnson, “The Leaning Tower of Lire”. *Am. J. Phys.* 23: 240 (1955).



que  $s_n - nu_n$  aumenta à medida que  $n \rightarrow \infty$ . Como consequência de  $s_n - nu_n < s_n \leq S$ ,  $s_n - nu_n$  converge para um valor  $s \leq S$ . Excluindo a cauda de termos positivos  $u_i - u_n$  de  $i = \nu + 1$  to  $n$ , inferimos, por  $s_n - nu_n > u_0 + (u_1 - u_n) + \dots + (u_\nu - u_n) = s_\nu - \nu u_n$  que  $s_n - nu_n \geq s_\nu$  para  $n \rightarrow \infty$ . Por conseguinte,  $s \geq S$ , também, portanto,  $s = S$  e  $nu_n \rightarrow 0$ .

Quando aplicado à **série harmônica**  $\sum_n \frac{1}{n}$  com  $n \frac{1}{n} = 1$ , esse teorema indica que ela não converge; diverge para  $+\infty$ .

### Adição, Subtração de Séries

Se temos duas série convergentes  $\sum_n u_n \rightarrow s$  e  $\sum_n v_n \rightarrow S$ , a soma e a diferença das duas também convergirão para  $s \pm S$  porque suas somas parciais satisfazem

$$|s_j \pm S_j - (s_i \pm S_i)| = |s_j - s_i \pm (S_j - S_i)| \leq |s_j - s_i| + |S_j - S_i| < 2\epsilon$$

usando a desigualdade triangular

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

para  $a = s_j - s_i, b = S_j - S_i$ .

Uma série convergente  $\sum_n u_n \rightarrow S$  pode ser multiplicada termo a termo por um número real  $a$ . A nova série convergirá a  $aS$  porque

$$|as_j - as_i| = |a(s_j - s_i)| = |a||s_j - s_i| < |a|\epsilon.$$

Essa multiplicação por uma constante pode ser generalizada para uma multiplicação por termos  $c_n$  de uma seqüência limitada de números.

Se  $\sum_n u_n$  converge para  $S$  e  $0 < c_n \leq M$  são limitados, então  $\sum_n u_n c_n$  é convergente. Se  $\sum_n u_n$  é divergente e  $c_n > M > 0$ , então  $\sum_n u_n c_n$  diverge.

Para provar esse **teorema** tomamos  $i, j$  suficientemente grandes, de modo que  $|s_j - s_i| < \epsilon$ . Então,

$$\sum_{i+1}^j u_n c_n \leq M \sum_{i+1}^j u_n = M|s_j - s_i| < M\epsilon.$$

O caso divergente resulta de

$$\sum_n u_n c_n > M \sum_n u_n \rightarrow \infty.$$

Usando o teorema binomial<sup>3</sup> (Seção 5.6), podemos expandir a função  $(1 + x)^{-1}$ :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1} + \dots \tag{5.10}$$

Se deixarmos  $x \rightarrow 1$ , essa série se torna

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \tag{5.11}$$

uma série que denominamos oscilante no início desta seção. Embora ela não convirja no sentido usual, podemos atribuir um significado a essa série. Euler, por exemplo, atribuiu um valor de  $1/2$  a essa seqüência oscilante com base na correspondência entre essa série e a função bem definida  $(1 + x)^{-1}$ . Infelizmente, tal correspondência entre série e função não é única e essa abordagem deve ser refinada. Foram desenvolvidos outros métodos para atribuir um significado a uma série divergente ou oscilante, métodos para definir uma soma. Veja G. H. Hardy, *Divergent Séries*, Chelsea Publishing Co. 2<sup>a</sup> ed. (1992). Contudo, em geral, o interesse desse aspecto das séries infinitas para o cientista ou engenheiro é relativamente pequeno. Uma exceção a essa afirmativa, a muito importante série assintótica ou semiconvergente, é considerada na Seção 5.10.

## Exercícios

**5.1.1** Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

*Sugestão:* Mostre (por indução matemática) que  $s_m = m/(2m + 1)$ .

<sup>3</sup>A Equação (5.10) pode ser verificada multiplicando ambos os lados por  $1 + x$ .

5.1.2 Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ache a soma parcial  $s_m$  e verifique se está correta por indução matemática.

Nota: O método de expansão em frações parciais, Seção 15.8, oferece um modo alternativo para resolver os Exercícios 5.1.1 e 5.1.2.

## 5.2 Testes de Convergência

Embora séries não-convergentes possam ser úteis em certos casos especiais (compare com a Seção 5.10), por questão de conveniência, se não de necessidade, normalmente insistimos que nossas séries sejam convergentes. Portanto, poder dizer de antemão se uma dada série é convergente torna-se uma questão de extrema importância. Desenvolveremos vários testes possíveis, começando com os testes simples e relativamente insensíveis e passando para os testes mais complicados, porém bastante sensíveis. Por enquanto, vamos considerar uma **série de termos positivos**  $a_n \geq 0$ , deixando os termos negativos para a seção seguinte.

### Teste de Comparação

Se, termo a termo, uma série de termos  $0 \leq u_n \leq a_n$ , na qual os  $a_n$  formam uma série convergente, a série  $\sum_n u_n$  também é convergente. Se  $u_n \leq a_n$  para todos os  $n$ , então  $\sum_n u_n \leq \sum_n a_n$  e  $\sum_n u_n$ , portanto, é **convergente**. Se, termo a termo, uma série de termos  $v_n \geq b_n$ , na qual os  $b_n$  formam uma série divergente, a série  $\sum_n v_n$  também é **divergente**. Note que comparações de  $u_n$  com  $b_n$  ou  $v_n$  ou  $a_n$  não resultam em nenhuma informação. Se  $v_n \geq b_n$  para todos os  $n$ , então  $\sum_n v_n \geq \sum_n b_n$  e, portanto,  $\sum_n v_n$  é divergente.

Para a série convergente  $a_n$  já temos a série geométrica, ao passo que a série harmônica servirá como a série divergente de comparação  $b_n$ . Na medida em que outras séries são identificadas como convergente ou divergente, elas podem ser usadas no lugar das séries conhecidas nesse teste de comparação. Todos os testes desenvolvidos nesta seção são, em essência, testes de comparação. A Figura 5.1 mostra esses testes e as inter-relações.

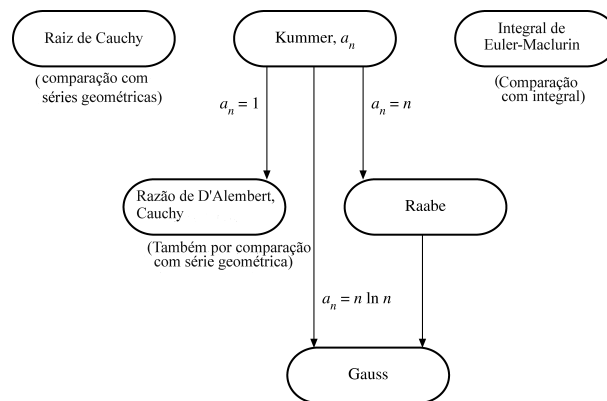


Figura 5.1: Testes de comparação.

### Exemplo 5.2.1 UMA SÉRIE DE DIRICHLET

Teste  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ ,  $p = 0,999$ , para convergência. Visto que  $n^{-0,999} > n^{-1}$  e  $b_n = n^{-1}$  forma a série harmônica divergente, o teste de comparação mostra que  $\sum_n n^{-0,999}$  é divergente. Generalizando, diz-se que  $\sum_n n^{-p}$  é divergente para todo  $p \leq 1$  mas convergente para  $p > 1$  (veja o Exemplo 5.2.3).

### Teste da Raiz de Cauchy

Se  $(a_n)^{1/n} \leq r < 1$  para todo  $n$  suficientemente grande, com  $r$  independente de  $n$ , então  $\sum_n a_n$  é convergente. Se  $(a_n)^{1/n} \geq 1$  para todo  $n$  suficientemente grande, então  $\sum_n a_n$  é divergente.

A primeira parte desse teste é verificada com facilidade elevando  $(a_n)^{1/n} \leq r$  à  $n$ ésima potência. Obtemos

$$a_n \leq r^n < 1.$$





Uma vez que  $r^n$  é exatamente o  $n$ ésimo termo em uma série geométrica convergente,  $\sum_n a_n$  é convergente pelo teste de comparação. Ao contrário, se  $(a_n)^{1/n} \geq 1$ , então  $a_n \geq 1$  e a série deve divergir. Esse teste da raiz é particularmente útil para estabelecer as propriedades de uma série de potências (Seção 5.7).

### Teste da Razão de D’Alembert (ou Cauchy)

Se  $a_{n+1}/a_n \leq r < 1$  para todo  $n$  suficientemente grande, e  $r$  é independente de  $n$ , então  $\sum_n a_n$  é convergente. Se  $a_{n+1}/a_n \geq 1$  para todo  $n$  suficientemente grande, então  $\sum_n a_n$  é divergente.

A convergência é provada por comparação direta com a série geométrica  $(1 + r + r^2 + \dots)$ . Na segunda parte,  $a_{n+1} \geq a_n$  e a divergência deve ser razoavelmente óbvia. Embora não seja tão sensível quanto o teste da raiz de Cauchy, esse teste de razão de D’Alembert é um dos mais fáceis de aplicar e tem ampla utilização. Um enunciado alternativo do teste da razão é na forma de um limite: se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, & \text{ convergência,} \\ > 1, & \text{ divergência,} \\ = 1, & \text{ indeterminada.} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Por causa dessa última possibilidade indeterminada, o teste da raiz pode falhar em pontos cruciais, e por causa disso são necessários testes mais delicados, mais sensíveis. O leitor atento talvez esteja imaginando por que essa indeterminação surgiu. Na verdade, ela estava oculta na primeira afirmação,  $a_{n+1}/a_n \leq r < 1$ . Poderíamos encontrar  $a_{n+1}/a_n < 1$  para todo  $n$  **finito** mas não conseguimos escolher um  $r < 1$  **independente de  $n$** , tal que  $a_{n+1}/a_n \leq r$  para todo  $n$  suficientemente grande. Um exemplo é dado pela série harmônica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1. \tag{5.13}$$

Uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \tag{5.14}$$

não existe nenhuma razão fixa  $r < 1$  e o teste da razão falha.

### Exemplo 5.2.2 TESTE DA RAZÃO DE D’ALEMBERT

Teste  $\sum_n n/2^n$  para convergência.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \tag{5.15}$$

Uma vez que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{3}{4} \quad \text{para } n \geq 2, \tag{5.16}$$

temos convergência. Alternativamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \tag{5.17}$$

e, novamente, convergência. ■

### Teste da Integral de Cauchy (ou Maclaurin)

Esse é outro tipo de teste de comparação, no qual comparamos uma série com uma integral. Em termos geométricos, comparamos a área de uma série de retângulos de largura unitária com a área sob a curva.

Seja  $f(x)$  uma **função monotônica decrescente** contínua na qual  $f(n) = a_n$ . Então  $\sum_n a_n$  converge se  $\int_1^\infty f(x) dx$  é finita e diverge se a integral é infinita. Para a  $i$ -ésima soma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^i a_n = \sum_{n=1}^i f(n). \tag{5.18}$$

Mas,

$$s_i > \int_1^{i+1} f(x) dx \tag{5.19}$$

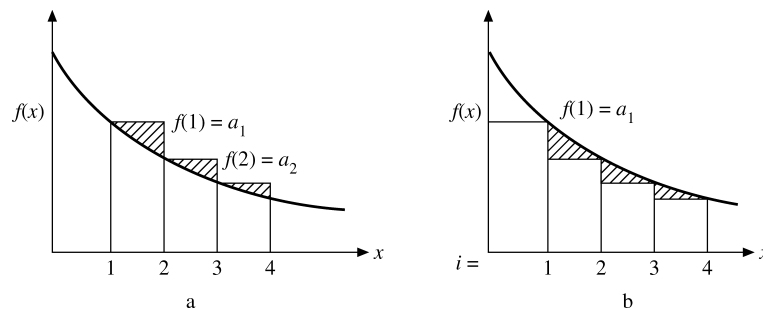


Figura 5.2: (a) Comparação entre integral e blocos de soma que sobram. (b) Comparação entre integral e blocos de soma que faltam.

pela Figura 5.2a, sendo  $f(x)$  monotônica decrescente. Por outro lado, pela Figura 5.2b,

$$s_i - a_1 < \int_1^i f(x) dx, \quad (5.20)$$

na qual a série é representada pelos retângulos inscritos. Considerando o limite como  $i \rightarrow \infty$ , temos

$$\int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty a_n \leq \int_1^\infty f(x) dx + a_1. \quad (5.21)$$

Por conseguinte, a série infinita converge ou diverge à medida que a integral correspondente convergir ou divergir. Esse teste da integral é particularmente útil para estabelecer limites superiores e inferiores para o resto de uma série após a soma de um certo número de termos iniciais. Isto é,

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^\infty a_n,$$

onde

$$\int_{N+1}^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=N+1}^\infty a_n \leq \int_{N+1}^\infty f(x) dx + a_{N+1}.$$

Para livrar o teste da integral do requisito bastante restritivo de que a função interpoladora  $f(x)$  seja positiva e monotônica, mostramos que, para qualquer função  $f(x)$  com uma derivada contínua,

$$\sum_{n=N_i+1}^{N_f} f(n) = \int_{N_i}^{N_f} f(x) dx + \int_{N_i}^{N_f} (x - [x]) f'(x) dx \quad (5.22)$$

é válida. Aqui  $[x]$  denota a maior integral abaixo de  $x$ , portanto  $x - [x]$  varia sob a forma de dente de serra entre 0 e 1. Para derivar a Equação (5.22), observamos que

$$\int_{N_i}^{N_f} x f'(x) dx = N_f f(N_f) - N_i f(N_i) - \int_{N_i}^{N_f} f(x) dx, \quad (5.23)$$

usando integração por partes. Em seguida, avaliamos a integral

$$\begin{aligned} \int_{N_i}^{N_f} [x] f'(x) dx &= \sum_{n=N_i}^{N_f-1} n \int_n^{n+1} f'(x) dx = \sum_{n=N_i}^{N_f-1} n \{f(n+1) - f(n)\} \\ &= - \sum_{n=N_i+1}^{N_f} f(n) - N_i f(N_i) + N_f f(N_f). \end{aligned} \quad (5.24)$$



Subtraindo a Equação (5.24) de (5.23) chegamos à Equação (5.22). Note que  $f(x)$  pode subir ou descer e até mudar de sinal, portanto a Equação (5.22) também se aplica a séries alternantes (veja a Seção 5.3). Em geral,  $f'(x)$  cai mais rapidamente do que  $f(x)$  para  $x \rightarrow \infty$ , portanto o termo do resto na Equação (5.22) converge melhor. É fácil melhorar a Equação (5.22) substituindo  $x - [x]$  por  $x - [x] - \frac{1}{2}$ , que varia entre  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ :

$$\sum_{N_i < n \leq N_f} f(n) = \int_{N_i}^{N_f} f(x) dx + \int_{N_i}^{N_f} (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x) dx + \frac{1}{2} \{f(N_f) - f(N_i)\}. \quad (5.25)$$

Então a integral  $f'(x)$  fica cada vez menor, se  $f'(x)$  não mudar de sinal com muita frequência. Para uma aplicação desse teste da integral a uma série alternante, veja o Exemplo 5.3.1.

### Exemplo 5.2.3 FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

A função zeta de Riemann é definida por

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}, \quad (5.26)$$

contanto que a série convirja. Podemos tomar  $f(x) = x^{-p}$ , e então

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty}, \quad p \neq 1$$

$$= \ln x \Big|_{x=1}^{\infty}, \quad p = 1. \quad (5.27)$$

A integral e, portanto, a série, é divergente para  $p \leq 1$ , convergentes para  $p > 1$ . Daí, a Equação (5.26) poderia acarretar a condição  $p > 1$ . Por acaso, essa é uma prova independente de que a divergência da série harmônica ( $p = 1$ ) é logarítmica. A soma do primeiro milhão de termos  $\sum_{n=1}^{1,000,000} n^{-1}$  é apenas 14.392 726 . . . ■

Essa comparação por integral também pode ser usada para estabelecer um limite superior para a constante de Euler-Mascheroni,<sup>4</sup> definida por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^n m^{-1} - \ln n \right). \quad (5.28)$$

Voltando às somas parciais, a Equação (5.20) resulta em

$$s_n = \sum_{m=1}^n m^{-1} - \ln n \leq \int_1^n \frac{dx}{x} - \ln n + 1. \quad (5.29)$$

Avaliando a integral da direita,  $s_n < 1$  para todo  $n$  e, portanto,  $\gamma \leq 1$ . O Exercício 5.2.12 leva a limites mais restritivos. Na verdade, a constante de Euler-Mascheroni é 0,57721566 . . .

### Teste de Kummer

Esse é o primeiro dos três testes que são um pouco mais difíceis de aplicar do que os precedentes. Sua importância está em seu poder e sensibilidade. Muitas vezes, pelo menos um dos três funcionará quando os testes mais simples, mais fáceis, forem inconclusivos. Contudo, é preciso lembrar que esses testes, assim como os que já discutimos, são, em última instância, baseados em comparações. Pode-se demonstrar que não existe a série que converge mais lentamente e a série que diverge mais lentamente. Isso significa que todos os testes dados aqui, incluindo o de Kummer, podem falhar alguma vez.

Consideremos uma série de termos positivos  $u_i$  e uma seqüência de constantes positivas finitas  $a_i$ . Se

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq C > 0 \quad (5.30)$$

<sup>4</sup>Essa é a notação do National Bureau of Standards, *Handbook of Mathematical Functions*, Applied Mathematics Series-55 (AMS-55). Nova York: Dover (1972).

para todo  $n \geq N$ , em que  $N$  é algum número fixo,<sup>5</sup> então  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  **converge**. Se

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0 \tag{5.31}$$

e  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$  **diverge**, então  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  **diverge**.

A prova desse teste poderoso é extraordinariamente simples. Pela Equação (5.30), sendo  $C$  alguma constante positiva,

$$\begin{aligned} Cu_{N+1} &\leq a_N u_N - a_{N+1} u_{N+1} \\ Cu_{N+2} &\leq a_{N+1} u_{N+1} - a_{N+2} u_{N+2} \\ &\dots\dots\dots \\ Cu_n &\leq a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Somando e dividindo por  $C$  (e lembrando que  $C \neq 0$ ), obtemos

$$\sum_{i=N+1}^n u_i \leq \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C}. \tag{5.33}$$

Por conseguinte, para a soma parcial  $s_n$ ,

$$\begin{aligned} s_n &\leq \sum_{i=1}^N u_i + \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C} \\ &< \sum_{i=1}^N u_i + \frac{a_N u_N}{C}, \text{ uma constante, independente de } n. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Portanto, as somas parciais têm um limite superior. Sendo zero um limite inferior óbvio, a série  $\sum u_i$  deve convergir.

A divergência é mostrada como segue. Pela Equação (5.31) para  $u_{n+1} > 0$ ,

$$a_n u_n \geq a_{n-1} u_{n-1} \geq \dots \geq a_N u_N, \quad n > N. \tag{5.35}$$

Assim, para  $a_n > 0$ ,

$$u_n \geq \frac{a_N u_N}{a_n} \tag{5.36}$$

e

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \geq a_N u_N \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i^{-1}. \tag{5.37}$$

Se  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$  divergir, então, pelo teste de comparação,  $\sum_i u_i$  diverge. As Equações (5.30) e (5.31) costumam ser dadas em forma de limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) = C. \tag{5.38}$$

Assim, para  $C > 0$  temos convergência, ao passo que, para  $C < 0$  (e  $\sum_i a_i^{-1}$  divergente), temos divergência. Talvez seja útil mostrar a estreita relação entre a Equação (5.38) e as Equações (5.30) e (5.31) e mostrar por que a indeterminância se insinua quando o limite  $C = 0$ . Pela definição de limite,

$$\left| a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} - C \right| < \varepsilon \tag{5.39}$$

para todo  $n \geq N$  e todo  $\varepsilon > 0$ , não importando quão pequeno seja  $\varepsilon$ . Retirando-se os sinais de valor absoluto,

$$C - \varepsilon < a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < C + \varepsilon. \tag{5.40}$$

Agora, se  $C > 0$ , a Equação (5.30) resulta de  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Por outro lado, se  $C < 0$ , Equação (5.31), resulta a Equação (5.31). Contudo, se  $C = 0$ , o termo central,  $a_n(u_n/u_{n+1}) - a_{n+1}$ , pode ser positivo ou negativo e a prova falha. A utilização primária do teste de Kummer é para provar outros testes, tal como o de Raabe (compare também com o Exercício 5.2.3).

Se escolhermos as constantes positivas  $a_n$  do teste de Kummer, tais que  $a_n = n$ , temos o teste de Raabe.

<sup>5</sup>Com  $u_m$  finito, a soma parcial  $s_N$  sempre será finita para  $N$  finito. A convergência ou divergência de uma série depende do comportamento da última infinidade de termos e não dos primeiros  $N$  termos.



### Teste de Raabe

Se  $u_n > 0$  e se

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq P > 1, \quad (5.41)$$

para todo  $n \geq N$ , em que  $N$  é um inteiro positivo independente de  $n$ , **então**  $\sum_i u_i$  **converge**. Aqui,  $P = C + 1$  do teste de Kummer. Se

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad (5.42)$$

então  $\sum_i u_i$  **diverge** (como  $\sum_n n^{-1}$  **diverge**). A forma do limite do teste de Raabe é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = P. \quad (5.43)$$

Temos convergência para  $P > 1$ , divergência para  $P < 1$  e nenhuma conclusão para  $P = 1$ , exatamente como no teste de Kummer. Essa indeterminância é apontada pelo Exercício 5.2.4, que apresenta uma série convergente e uma série divergente, sendo que ambas resultam em  $P = 1$  na Equação (5.43).

O teste de Raabe é mais sensível do que o teste da razão de d’Alembert (Exercício 5.2.3) porque  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$  **diverge** mais lentamente do que  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ . Obtemos um teste mais sensível (e que ainda é razoavelmente fácil de aplicar) escolhendo  $a_n = n \ln n$ . Esse é o teste de Gauss.

### Teste de Gauss

Se  $u_n > 0$  para todo  $n$  e

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}, \quad (5.44)$$

na qual  $B(n)$  é uma função limitada de  $n$  para  $n \rightarrow \infty$ , então  $\sum_i u_i$  **converge** para  $h > 1$  e **diverge** para  $h \leq 1$ : aqui não há nenhum caso indeterminado.

O teste de Gauss é um teste de convergência de série extremamente sensível e funcionará para todas as séries que o físico provavelmente encontrará. Para  $h > 1$  ou  $h < 1$ , a prova resulta diretamente do teste de Raabe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ h + \frac{B(n)}{n} \right] = h. \quad (5.45)$$

Se  $h = 1$ , o teste de Raabe falha. Contudo, se voltarmos ao teste de Kummer e usarmos  $a_n = n \ln n$ , a Equação (5.38) leva a

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \ln n \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{B(n)}{n^2} \right] - (n+1) \ln(n+1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \ln n \cdot \frac{n+1}{n} - (n+1) \ln(n+1) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left[ \ln n - \ln n - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Tomando emprestado um resultado da Seção 5.6 (que não é dependente do teste de Gauss), temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n+1) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \cdots \right) \\ &= -1 < 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Por conseguinte, temos divergência para  $h = 1$ . Esse é um exemplo de uma aplicação bem-sucedida do teste de Kummer quando da falha do teste de Raabe.

### Exemplo 5.2.4 SÉRIE DE LEGENDRE

A relação de recorrência para a solução de série da equação de Legendre (Exercício 9.5.5) pode ser posta na forma

$$\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \frac{2j(2j+1) - l(l+1)}{(2j+1)(2j+2)}. \quad (5.48)$$

Para  $u_j = a_{2j}$  e  $B(j) = O(1/j^2) \rightarrow 0$  (isto é,  $|B(j)j^2| \leq C, C > 0$ , uma constante) quando  $j \rightarrow \infty$  no teste de Gauss aplicamos a Equação (5.45). Então, para  $j \gg l$ ,<sup>6</sup>

$$\frac{u_j}{u_{j+1}} \rightarrow \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1)} = \frac{2j+2}{2j} = 1 + \frac{1}{j}. \tag{5.49}$$

Pela Equação (5.44), a série é divergente. ■

### Melhoria da Convergência

Até aqui esta seção preocupou-se em estabelecer convergência como uma propriedade matemática abstrata. Na prática, a **taxa** de convergência pode ser de considerável importância. Aqui apresentamos um método para melhorar a taxa de convergência de uma série convergente. Outras técnicas são dadas nas Seções 5.4 e 5.9.

O princípio básico desse método, devido a Kummer, é formar uma combinação linear de nossa série de convergência lenta e uma ou mais séries cuja soma é conhecida. Para as séries conhecidas, a coleção

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \\ \alpha_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \\ \alpha_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_p &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p \cdot p!} \end{aligned}$$

é de particular utilidade.<sup>7</sup> As séries são combinadas termo a termo e os coeficientes na combinação linear são escolhidos para cancelar os termos de convergência mais lenta.

### Exemplo 5.2.5 FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN, $\zeta(3)$

Seja a série a ser somada  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ . Na Seção 5.9 ela é identificada como função zeta de Riemann,  $\zeta(3)$ . Formamos uma combinação linear

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} + a_2 \alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} + \frac{a_2}{4}.$$

$\alpha_1$  não é incluída, visto que converge mais lentamente do que  $\zeta(3)$ . Combinando termos, obtemos do lado esquerdo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^3} + \frac{a_2}{n(n+1)(n+2)} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1+a_2) + 3n + 2}{n^3(n+1)(n+2)}.$$

Se escolhermos  $a_2 = -1$ , as equações precedentes resultam em

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3(n+1)(n+2)}. \tag{5.50}$$

A série resultante pode não ser bonita, mas converge como  $n^{-4}$  o mais rapidamente do que  $n^{-3}$ . Uma forma mais conveniente vem do Exercício 5.2.21. Nesse exercício, a simetria leva à convergência como  $n^{-5}$ . ■

O método pode ser estendido, incluindo  $a_3 \alpha_3$  para obter convergência como  $n^{-5}$ ,  $a_4 \alpha_4$  para obter convergência como  $n^{-6}$ , e assim por diante. Em certo momento, você acabará chegando a um meio-termo entre quanta álgebra faz e quanta aritmética o computador faz. Como os computadores são mais rápidos, o equilíbrio está pendendo firmemente para menos álgebra para você e mais aritmética para ele.

<sup>6</sup>A dependência  $l$  entra em  $B(j)$  mas não afeta  $h$  na Equação (5.45).

<sup>7</sup>Essas somas de séries podem ser verificadas expandindo as formas por frações parciais, escrevendo os termos iniciais e examinando o padrão de cancelamento de termos positivos e negativos.



### Exercícios

5.2.1 (a) Prove que, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = A < \infty, \quad p > 1,$$

a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

(b) Prove que, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = A > 0,$$

a série diverge. (O teste falha para  $A = 0$ .)

Esses dois testes, conhecidos como **testes de limites**, costumam ser convenientes para estabelecer a convergência de uma série. Eles podem ser tratados como testes de comparação, comparando com

$$\sum_n n^{-q}, \quad 1 \leq q < p.$$

5.2.2 Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = K,$$

é uma constante com  $0 < K < \infty$ , mostre que  $\sum_n b_n$  converge ou diverge com  $\sum a_n$ .

*Sugestão:* Se  $\sum a_n$  convergir, use  $b'_n = \frac{1}{2K} b_n$ . Se  $\sum a_n$  divergir, use  $b''_n = \frac{2}{K} b_n$ .

5.2.3 Mostre que o teste completo da razão de d'Alembert resulta diretamente do teste de Kummer com  $a_i = 1$ .

5.2.4 Mostre que o teste de Raabe é inconclusivo para  $P = 1$ , estabelecendo que  $P = 1$  para as séries

(a)  $u_n = \frac{1}{n \ln n}$  e que esta série diverge.

(b)  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$  e que esta série converge.

*Nota:* Por adição direta,  $\sum_2^{100,000} [n(\ln n)^2]^{-1} = 2,02288$ . O resto da série  $n > 10^5$  resulta em 0,08686 pelo teste de comparação da integral. Então, o total, 2 para  $\infty$ , é 2,1097.

5.2.5 Muitas vezes, o teste de Gauss é dado na forma de um teste da razão

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0}.$$

Para quais valores dos parâmetros  $a_1$  e  $b_1$  há convergência? Divergência?

Resposta: Convergente para  $a_1 - b_1 > 1$ ,  
divergente para  $a_1 - b_1 \leq 1$ .

5.2.6 Teste para convergência

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-1}$       (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)]^{-1/2}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$       (e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$

5.2.7 Teste para convergência

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$       (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$       (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

**5.2.8** Para quais valores de  $p$  e  $q$  a seguinte série convergirá?  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$ .

Resposta: Convergente: para  $\begin{cases} p > 1, & \text{todo } q, \\ p = 1, & q > 1, \end{cases}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{divergente para } p < 1, \text{ todo } q, \\ p = 1, \quad q \leq 1. \end{array} \right.$

**5.2.9** Determine a faixa de convergência para a **série hipergeométrica** de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

*Sugestão:* Gauss desenvolveu seu teste para a finalidade específica de estabelecer a convergência dessa série.

Resposta: Convergente para  $-1 < x < 1$  e  $x = \pm 1$  se  $\gamma > \alpha + \beta$ .

**5.2.10** Uma calculadora de bolso dá o resultado

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-3} = 1,202\,007.$$

Mostre que

$$1,202\,056 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \leq 1,202\,057.$$

*Sugestão:* Use integrais para determinar os limites superior e inferior para  $\sum_{n=101}^{\infty} n^{-3}$ .

*Nota:* Um valor mais exato para a soma de  $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$  é 1,202 056 903...; sabe-se que  $\zeta(3)$  é um número irracional, mas não está ligado a constantes conhecidas como  $e, \pi, \gamma, \ln 2$ .

**5.2.11** Estabeleça os limites inferiores para  $\sum_{n=1}^{1,000,000} n^{-1}$ , admitindo que

(a) a constante de Euler-Mascheroni é conhecida.

$$\text{Resposta: } 14,392\,726 < \sum_{n=1}^{1,000,000} n^{-1} < 14,392\,727.$$

(b) a constante de Euler-Mascheroni é desconhecida.

**5.2.12** Dado  $\sum_{n=1}^{1,000} n^{-1} = 7,485\,470\dots$  estabeleça limites superior e inferior para a constante de Euler-Mascheroni.

Resposta:  $0,5767 < \gamma < 0,5778$ .

**5.2.13** (Do **paradoxo de Olbers**.) Admita um universo estático no qual as estrelas estão uniformemente distribuídas. Divida todo o espaço em cascas de espessura constante; as estrelas que estão em qualquer uma das cascas subtendem, por si sós, um ângulo sólido de  $\omega_0$ . **Levando em conta o bloqueio de estrelas distantes por estrelas mais próximas**, mostre que o ângulo sólido líquido total subtendido por todas as estrelas, com as cascas estendendo-se ao infinito, é **exatamente**  $4\pi$ . [Portanto, o céu noturno deveria estar flamejante de luz. Se quiser mais detalhes, consulte E. Harrison, *Darkness at Night: A Riddle of the Universe*. Cambridge, MA: Harvard University Press (1987).]

**5.2.14** Teste para convergência

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{64} + \frac{25}{256} + \dots$$

**5.2.15** A série de Legendre  $\sum_{j \text{ par}} u_j(x)$  satisfaz as relações de recorrência

$$u_{j+2}(x) = \frac{(j+1)(j+2) - l(l+1)}{(j+2)(j+3)} x^2 u_j(x),$$

nas quais o índice  $j$  é par e  $l$  é alguma constante (porém, neste problema, **não** um inteiro ímpar não-negativo). Ache a faixa de valores de  $x$  para a qual essa série de Legendre é convergente. Teste as extremidades.





Resposta:  $-1 < x < 1$ .

**5.2.16** Uma solução de série (Seção 9.5) da equação de Chebyshev leva a termos sucessivos que têm a razão

$$\frac{u_{j+2}(x)}{u_j(x)} = \frac{(k+j)^2 - n^2}{(k+j+1)(k+j+2)} x^2,$$

com  $k = 0$  e  $k = 1$ . Teste para convergência em  $x = \pm 1$ .

Resposta: Convergente.

**5.2.17** Uma solução de série para a função ultra-esférica (Gegenbauer)  $C_n^\alpha(x)$  leva à recorrência

$$a_{j+2} = a_j \frac{(k+j)(k+j+2\alpha) - n(n+2\alpha)}{(k+j+1)(k+j+2)}.$$

Investigue a convergência de cada uma dessas séries em  $x = \pm 1$  como uma função do parâmetro  $\alpha$ .

Resposta: Convergente para  $\alpha < 1$ ,  
divergente para  $\alpha \geq 1$ .

**5.2.18** Uma expansão de série da função beta incompleta (Seção 8.4) resulta em

$$B_x(p, q) = x^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1-q}{p+1} x + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)} x^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{(1-q)(2-q) \cdots (n-q)}{n!(p+n)} x^n + \dots \right\}.$$

Dado que  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p > 0$  e  $q > 0$ , teste essa série para convergência. O que acontece em  $x = 1$ ?

**5.2.19** Mostre que a seguinte série é convergente.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!(2s+1)}.$$

*Nota:*  $(2s-1)!! = (2s-1)(2s-3) \cdots 3 \cdot 1$  com  $(-1)!! = 1$ ;  $(2s)!! = (2s)(2s-2) \cdots 4 \cdot 2$  com  $0!! = 1$ . A série aparece como uma expansão de série de  $\sin^{-1}(1)$  e igual a  $\pi/2$ , e  $\sin^{-1}x \equiv \arcsen x \neq (\sin x)^{-1}$ .

**5.2.20** Mostre como combinar  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$  com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para obter uma série que converge como  $n^{-4}$ .

*Nota:*  $\zeta(2)$  é conhecida:  $\zeta(2) = \pi^2/6$  (veja a Seção 5.9).

**5.2.21** A melhoria de convergência do Exemplo 5.2.5 pode ser executada com mais desembaraço (nesse caso especial) colocando  $\alpha_2$  em uma forma mais simétrica: substituindo  $n$  by  $n-1$ , temos

$$\alpha'_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

- (a) Combine  $\zeta(3)$  e  $\alpha'_2$  para obter convergência como  $n^{-5}$ .
- (b) Deixe que  $\alpha'_4$  seja  $\alpha_4$  com  $n \rightarrow n - 2$ . Combine  $\zeta(3)$ ,  $\alpha'_2$ , e  $\alpha'_4$  para obter convergência como  $n^{-7}$ .
- (c) Se  $\zeta(3)$  deve ser calculada com precisão até a sexta casa decimal (erro  $5 \times 10^{-7}$ ), quantos termos são requeridos só para  $\zeta(3)$ ? Combinados como na parte (a)? Combinados como na parte (b)?

Nota: O erro pode ser estimado utilizando a integral correspondente.

$$\text{Resposta: (a) } \zeta(3) = \frac{5}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3(n^2 - 1)}.$$

**5.2.22** A constante de Catalan ( $\beta(2)$  de M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (AMS-55), Wash, D. C. National Bureau of Standards (1972); nova tiragem Dover (1974), Capítulo 23) é definida por

$$\beta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k + 1)^{-2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \dots$$

Calcule  $\beta(2)$  com seis dígitos de precisão.

Sugestão: A taxa de convergência é realçada formando pares dos termos:

$$(4k - 1)^{-2} - (4k + 1)^{-2} = \frac{16k}{(16k^2 - 1)^2}.$$

Se você usou dígitos suficientes em sua soma de série,  $\sum_{1 \leq k \leq N} 16k / (16k^2 - 1)^2$ , números significativos adicionais podem ser obtidos estabelecendo limites superiores e inferiores na cauda da série,  $\sum_{k=N+1}^{\infty}$ . Esses limites podem ser estabelecidos por comparação com integrais, como no teste da integral de Maclaurin.

Resposta:  $\beta(2) = 0,9159\ 6559\ 4177\dots$

### 5.3 Séries Alternantes

Na Seção 5.2 nos limitamos às séries de termos positivos. Agora, ao contrário, consideraremos séries infinitas nas quais os sinais se alternam. O cancelamento parcial devido aos sinais alternantes torna a convergência mais rápida e mais fácil de identificar. Provaremos o critério de Leibniz, uma condição geral para a convergência de uma série alternante. Para séries com trocas de sinais mais irregulares, como a série de Fourier do Capítulo 14 (veja o Exemplo 5.3.1), o teste da integral da Equação (5.25) costuma ser útil.

#### Critério de Leibniz

Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  com  $a_n > 0$ . Se  $a_n$  é **monotonicamente decrescente** (para  $n$  suficientemente grande) e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , então a série converge. Para provar esse teorema, examinamos as somas parciais

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n}, \\ s_{2n+2} &= s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Uma vez que  $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ , temos

$$s_{2n+2} > s_{2n}. \tag{5.52}$$

Por outro lado,

$$s_{2n+2} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - a_{2n+2}. \tag{5.53}$$

Daí, sendo cada par de termos  $a_{2p} - a_{2p+1} > 0$ ,

$$s_{2n+2} < a_1. \tag{5.54}$$

Com as somas parciais pares limitadas  $s_{2n} < s_{2n+2} < a_1$  e os termos  $a_n$  decrescendo monotonicamente e se aproximando de zero, essa série alternante converge.

Mais um resultado importante pode ser extraído das somas parciais da mesma série alternante. Pela diferença entre o limite da série  $S$  e a soma parcial  $s_n$ ,

$$\begin{aligned} S - s_n &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots, \end{aligned} \tag{5.55}$$



ou

$$S - s_n < a_{n+1}. \tag{5.56}$$

A Equação (5.56) diz que o erro na eliminação de uma série alternante cujos termos são monotonicamente decrescentes após  $n$  termos é menor do que  $a_{n+1}$ , sendo o primeiro termo descartado. Conhecer o erro obtido desse modo pode ser de grande importância prática.

### Convergência Absoluta

Dada uma série de termos  $u_n$  na qual o sinal de  $u_n$  pode variar, se  $\sum |u_n|$  converge, então diz-se que  $\sum u_n$  é absolutamente convergente. Se  $\sum u_n$  converge, mas  $\sum |u_n|$  diverge, a convergência é denominada **condicional**.

A série harmônica alternante é um exemplo simples dessa convergência condicional. Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots, \tag{5.57}$$

convergente pelo critério de Leibniz; mas, nas Seções 5.1 e 5.2, mostramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

é divergente.

Note que a maioria dos testes desenvolvidos na Seção 5.2 supõe uma série positiva de termos. Portanto, esses testes daquela seção garantem convergência absoluta.

### Exemplo 5.3.1 SÉRIE COM TROCA IRREGULAR DE SINAIS

Para  $0 < x < 2\pi$ , a série de Fourier (veja o Capítulo 14.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left(2\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) \tag{5.58}$$

converge, tendo coeficientes que mudam de sinal com frequência, mas não tanta que o critério de convergência de Leibniz se aplique com facilidade. Vamos aplicar o teste da integral da Equação (5.22). Usando integração por partes, vemos imediatamente que

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} dn = \left[ \frac{\operatorname{sen}(nx)}{nx} \right]_1^{\infty} + \frac{1}{x} \int_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} dn$$

converge, e a integral do lado direito até converge absolutamente. O termo derivativo na Equação (5.22) tem a forma

$$\int_1^{\infty} (n - [n]) \left\{ -\frac{x}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{\cos(nx)}{n^2} \right\} dn,$$

em que o segundo termo converge absolutamente e não precisa mais ser considerado. Em seguida observamos que  $g(N) = \int_1^N (n - [n]) \operatorname{sen}(nx) dn$  é limitada para  $N \rightarrow \infty$ , exatamente como  $\int^N \operatorname{sen}(nx) dn$  é limitada por causa da natureza periódica de  $\operatorname{sen}(nx)$  e de sua troca regular de sinais. Usando novamente integração por partes,

$$\int_1^{\infty} \frac{g'(n)}{n} dn = \left[ \frac{g(n)}{n} \right]_{n=1}^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{g(n)}{n^2} dn,$$

vemos que o segundo termo é absolutamente convergente e que o primeiro vai a zero no limite superior. Por conseguinte, a série na Equação (5.58) converge, o que é difícil de ver por outros testes de convergência.

Alternativamente, podemos aplicar o caso  $q = 1$  da fórmula de integração de Euler-Maclaurin na Equação (5.168b),

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n f(\nu) &= \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} \{f(n) + f(1)\} + \frac{1}{12} \{f'(n) - f'(1)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \sum_{\nu=1}^{n-1} f''(x + \nu) dx, \end{aligned}$$

o que é direto, porém mais tedioso por causa da derivada de segunda ordem. ■

### Exercícios

**5.3.1** (a) Pelo problema eletrostático de dois hemisférios (Exercício 12.3.20), obtemos a série

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s + 3) \frac{(2s - 1)!!}{(2s + 2)!!}.$$

Teste a série para convergência.

(b) A série correspondente para a densidade superficial de carga de superfície é

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s + 3) \frac{(2s - 1)!!}{(2s)!!}.$$

Teste a série para convergência.

A notação !! é explicada na Seção 8.1 e do Exercício 5.2.19.

**5.3.2** Mostre por cálculo numérico direto que a soma dos primeiros 10 termos de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 + x) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}$$

difere de  $\ln 2$  por menos do que o undécimo termo:  $\ln 2 = 0,6931471806\dots$

**5.3.3** No Exercício 5.2.9 mostra-se que a série hipergeométrica é convergente para  $x = \pm 1$ , se  $\gamma > \alpha + \beta$ . Mostre que há uma convergência condicional para  $x = -1$  para  $\gamma$  até  $\gamma > \alpha + \beta - 1$ .

*Sugestão:* O comportamento assintótico da função fatorial é dado pela série de Stirling, Seção 8.3.

## 5.4 Álgebra de Séries

O estabelecimento de convergência absoluta é importante porque se pode provar que séries absolutamente convergentes podem ser reordenadas de acordo com as regras familiares da álgebra ou da aritmética.

- Se uma série é absolutamente convergente, a soma da série é independente da ordem em que os termos são somados.
- A série pode ser multiplicada por uma outra série absolutamente convergente. O limite do produto será o produto dos limites das séries individuais. A série produto, uma série dupla, também convergirá absolutamente.

Nenhuma dessas garantias pode ser dada para séries condicionalmente convergentes. Considere, mais uma vez, a série harmônica alternante. Se escrevermos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots, \tag{5.59}$$

fica claro que a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} < 1. \tag{5.60}$$

Contudo, se rearranjarmos ligeiramente os termos, podemos fazer com que a série harmônica alternante convirja para  $\frac{3}{2}$ . Reagrupamos os termos da Equação (5.59), tomando

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) \\ & + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{25}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{35}\right) - \left(\frac{1}{8}\right) + \dots \end{aligned} \tag{5.61}$$

Tratando os termos agrupados entre parênteses como termos únicos, por conveniência, obtemos as somas parciais

$s_1 = 1,5333$	$s_2 = 1,0333$
$s_3 = 1,5218$	$s_4 = 1,2718$
$s_5 = 1,5143$	$s_6 = 1,3476$
$s_7 = 1,5103$	$s_8 = 1,3853$
$s_9 = 1,5078$	$s_{10} = 1,4078.$

Por essa tabulação de  $s_n$  e pelo gráfico de  $s_n$  versus  $n$  na Figura 5.3, a convergência para  $\frac{3}{2}$  fica razoavelmente clara. No rearranjo dos termos tomamos termos positivos até a soma parcial ser igual ou maior do que  $\frac{3}{2}$  e então



somamos termos negativos até que a soma parcial chegue logo abaixo de  $\frac{3}{2}$ , e assim por diante. À medida que a série se estende para o infinito, todos os termos originais acabam aparecendo, mas as somas parciais dessa série harmônica alternante rearranjada converge para  $\frac{3}{2}$ .

Mediante um rearranjo adequado de termos, podemos fazer com que uma série condicionalmente convergente convirja para qualquer valor desejado e até mesmo diverja. Essa afirmação às vezes é denominada **teorema de Riemann**. Portanto, é óbvio que a série convergente deve ser tratada com cautela.

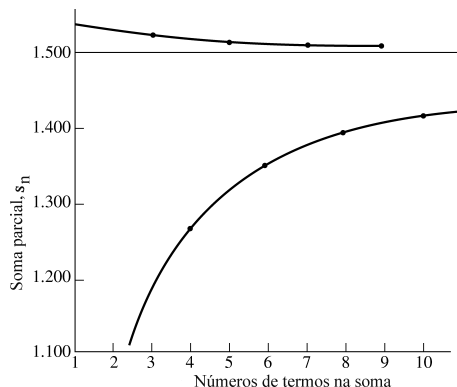


Figura 5.3: Série harmônica alternante — termos rearranjados para dar convergência para 1,5.

Séries absolutamente convergentes podem ser multiplicadas sem problemas. Isso resulta como um caso especial do rearranjo de um série dupla. Todavia, séries condicionalmente convergentes nem sempre podem ser multiplicadas para resultar em séries convergentes, como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 5.4.1** O QUADRADO DE UMA SÉRIE CONDICIONALMENTE CONVERGENTE PODE DIVERGIR

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  converge, pelo critério de Leibniz. O termo geral de seu quadrado, entre colchetes,

$$\left[ \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_n (-1)^n \left[ \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1}} \right],$$

consiste em  $n - 1$  termos aditivos, cada qual maior do que  $\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n-1}}$ , portanto o termo produto entre colchetes é maior do que  $\frac{n-1}{n-1}$  e não vai a zero. Daí, esse produto oscila e, portanto, diverge.

Por isso, para que um produto de duas séries convirja, temos de impor, como uma condição suficiente, que ao menos uma delas convirja absolutamente. Para provar esse **teorema da convergência do produto**, ou seja, se  $\sum_n u_n$  converge absolutamente para  $U$ ,  $\sum_n v_n$  converge para  $V$ , então

$$\sum_n c_n, \quad c_n = \sum_{m=0}^n u_m v_{n-m}$$

converge para  $UV$ , é suficiente mostrar que os termos da diferença  $D_n \equiv c_0 + c_1 + \dots + c_{2n} - U_n V_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , em que  $U_n, V_n$  são as somas parciais de nossa série. O resultado é que as diferenças das somas parciais

$$\begin{aligned} D_n &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \dots + (u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \dots + u_{2n} v_0) \\ &\quad - (u_0 + u_1 + \dots + u_n)(v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= u_0(v_{n+1} + \dots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \dots + v_{2n-1}) + \dots + u_{n+1} v_{n+1} \\ &\quad + v_{n+1}(v_0 + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_{2n} v_0, \end{aligned}$$

portanto, para todo  $n$  suficientemente grande,

$$|D_n| < \epsilon(|u_0| + \dots + |u_{n-1}|) + M(|u_{n+1}| + \dots + |u_{2n}|) < \epsilon(a + M),$$

porque  $|v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+m}| < \epsilon$  para  $n$  suficientemente grande e todos os inteiros positivos  $m$ , já que  $\sum v_n$  converge, e as somas parciais  $V_n < B$  de  $\sum_n v_n$  são limitadas por  $M$ , porque a soma converge. Por fim, chamamos  $\sum_n |u_n| = a$ , já que  $\sum u_n$  converge absolutamente.

*Dois séries podem ser multiplicadas, contanto que uma delas convirja absolutamente. Adição e subtração de séries termo a termo também são válidas se uma série convergir absolutamente.*

### Melhoria da Convergência, Aproximações Racionais

A série

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1, \tag{5.61a}$$

converge muito lentamente à medida que  $x$  se aproxima de  $+1$ . A taxa de convergência pode ser melhorada substancialmente multiplicando ambos os lados da Equação (5.61a) por um polinômio e ajustando os coeficientes do polinômio de modo a cancelar as porções da série que convergem com mais lentidão. Considere a possibilidade mais simples: multiplique  $\ln(1+x)$  by  $1+a_1x$ :

$$(1+a_1x)\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n}.$$

Combinando termo a termo as duas séries à direita, obtemos

$$\begin{aligned} (1+a_1x)\ln(1+x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{a_1}{n-1} \right) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(1-a_1) - 1}{n(n-1)} x^n. \end{aligned}$$

É claro que, se considerarmos  $a_1 = 1$ , o  $n$  no numerador desaparece e nossa série combinada converge como  $n^{-2}$ .

Continuando esse processo, constatamos que  $(1+2x+x^2)\ln(1+x)$  se anula como  $n^{-3}$  e que  $(1+3x+3x^2+x^3)\ln(1+x)$  se anula como  $n^{-4}$ . Na verdade, estamos passando de uma simples expansão de série da Equação (5.61a) para uma representação fracionária racional na qual a função  $\ln(1+x)$  é representada pela razão entre uma série e um polinômio:

$$\ln(1+x) = \frac{x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n / [n(n-1)]}{1+x}.$$

Essas aproximações racionais podem ser compactas, bem como precisas.

### Rearranjo de Série Dupla

Um outro aspecto do rearranjo de uma série aparece no tratamento de série dupla (Figura 5.4):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}.$$

Vamos substituir

$$n = q \geq 0, \quad m = p - q \geq 0 \quad (q \leq p).$$

Isso resulta na identidade

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{q,p-q}. \tag{5.62}$$

A soma sobre  $p$  e  $q$  da Equação (5.62) é ilustrada na Figura 5.5. A substituição

$$n = s \geq 0, \quad m = r - 2s \geq 0 \quad \left( s \leq \frac{r}{2} \right)$$

leva a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s}, \tag{5.63}$$

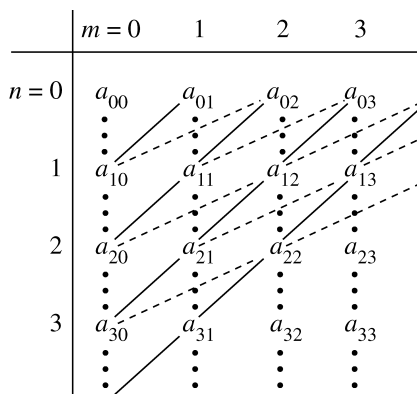


Figura 5.4: Série dupla — soma sobre  $n$  indicada pelas linhas verticais pontilhadas.

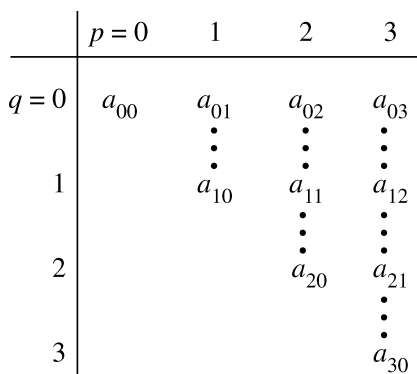


Figura 5.5: Série dupla — novamente, a primeira soma é representada por linhas verticais pontilhadas, mas essas linhas correspondem às diagonais na Figura 5.4.

com  $[r/2] = r/2$  para  $r$  par e  $(r - 1)/2$  para  $r$  ímpar. A soma sobre  $r$  e  $s$  da Equação (5.63) é mostrada na Figura 5.6. As Equações (5.62) e (5.63) são claramente rearranjos do conjunto de coeficientes  $a_{nm}$ , rearranjos que são válidos contanto que tenhamos convergência absoluta.

A combinação das Equações (5.62) e (5.63),

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a_{q,p-q} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s}, \tag{5.64}$$

é usada na Seção 12.1 na determinação da forma de série dos polinômios de Legendre.

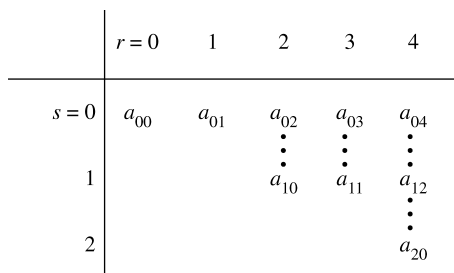


Figura 5.6: Série dupla — A soma sobre  $s$  corresponde a uma soma ao longo das linhas pontilhadas quase horizontais na Figura 5.4.

### Exercícios

5.4.1 Dada a série (derivada na Seção 5.6)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots, \quad -1 < x \leq 1,$$

mostre que

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad -1 < x < 1.$$

A série original,  $\ln(1+x)$ , aparece na análise da energia de ligação em cristais. Ela é  $\frac{1}{2}$  da constante de Madelung ( $2 \ln 2$ ) para uma cadeia de átomos. A segunda série é útil para normalizar os polinômios de Legendre (Seção 12.3) e para desenvolver uma segunda solução para a equação diferencial de Legendre (Seção 12.10).

5.4.2 Determine os valores dos coeficientes  $a_1, a_2$  e  $a_3$  que farão  $(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \ln(1+x)$  convergir como  $n^{-4}$ . Ache a série resultante.

5.4.3 Mostre que

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} [\zeta(n) - 1] = 1, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n [\zeta(n) - 1] = \frac{1}{2},$$

em que  $\zeta(n)$  é a função zeta de Riemann.

5.4.4 Escreva um programa para rearranjar os termos da série harmônica alternante e fazer com que a série convirja para 1,5. Agrupe seus termos como indicado na Equação (5.61). Liste as primeiras 100 somas parciais sucessivas e passe um pouco de 1,5 ou fique um pouco abaixo de 1,5 e liste os novos termos incluídos em cada soma parcial.

Resposta:

$n$	1	2	3	4	5
$s_n$	1,5333	1,0333	1,5218	1,2718	1,5143

## 5.5 Série de Funções

Estendemos nosso conceito de série infinita para incluir a possibilidade de que cada termo  $u_n$  pode ser uma função de alguma variável,  $u_n = u_n(x)$ . Numerosas ilustrações de tal série de funções aparecem nos Capítulos 11–14. As somas parciais tornam-se funções da variável  $x$ ,

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \tag{5.65}$$

bem como a soma da série, definida como o limite das somas parciais:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x). \tag{5.66}$$

Até aqui nos preocupamos com o comportamento das somas parciais como uma função de  $n$ . Agora consideramos como as quantidades precedentes dependem de  $x$ . Aqui, o conceito fundamental é o da convergência uniforme.

### Convergência Uniforme

Se, para qualquer pequeno  $\varepsilon > 0$ , existir um número  $N$  **independente** de  $x$  no intervalo  $[a, b]$  (isto é,  $a \leq x \leq b$ ), tal que

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq N, \tag{5.67}$$

então diz-se que a série é uniformemente convergente no intervalo  $[a, b]$ . Isso significa que, para nossa série ser uniformemente convergente, deve ser possível encontrar um  $N$  finito, tal que a cauda da série infinita,  $|\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x)|$ , seja menor do que um  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno para todo  $x$  no intervalo dado.

Essa condição, Equação (5.67), que define convergência uniforme, é ilustrada na Figura 5.7. A questão é que não importa quão pequeno presumirmos que o  $\varepsilon$  seja, sempre podemos escolher  $n$  grande o bastante, de modo que a grandeza absoluta da diferença entre  $S(x)$  e  $s_n(x)$  seja menor do que  $\varepsilon$  para todo  $x, a \leq x \leq b$ . Se isso não puder ser feito, então  $\sum u_n(x)$  não é uniformemente convergente em  $[a, b]$ .





**Exemplo 5.5.1** CONVERGÊNCIA NÃO-UNIFORME

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]} \tag{5.68}$$

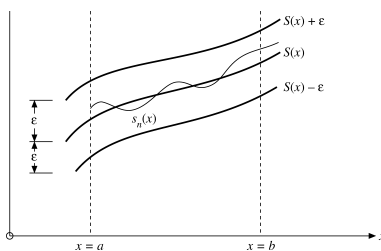


Figura 5.7: Convergência uniforme.

A soma parcial  $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$  pode ser verificada por **indução matemática**. Por inspeção, essa expressão para  $s_n(x)$  é válida para  $n = 1, 2$ . Admitimos que ela seja válida para  $n$  termos e então provamos que é válida para  $n + 1$  termos:

$$\begin{aligned} s_{n+1}(x) &= s_n(x) + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} \\ &= \frac{nx}{[nx+1]} + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]} \\ &= \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1}, \end{aligned}$$

concluindo a prova.

Deixando que  $n$  se aproxime do infinito, obtemos

$$\begin{aligned} S(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 0, \\ S(x \neq 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x \neq 0) = 1. \end{aligned}$$

Temos uma descontinuidade no limite de nossa série em  $x = 0$ . Todavia,  $s_n(x)$  é uma função contínua de  $x, 0 \leq x \leq 1$ , para todo  $n$  finito. Não importa quão pequeno  $\epsilon$  possa ser, a Equação (5.67) será violada para todo  $x$  suficientemente pequeno. Nossa série não converge uniformemente. ■

**Teste M (Majorante) de Weierstrass**

O teste mais comumente encontrado para convergência uniforme é o teste  $M$  de Weierstrass. Se pudermos construir uma série de números  $\sum_1^{\infty} M_i$ , na qual  $M_i \geq |u_i(x)|$  para todo  $x$  no intervalo  $[a, b]$  e  $\sum_1^{\infty} M_i$  é convergente, nossa série  $u_i(x)$  será **uniformemente** convergente em  $[a, b]$ .

A prova desse teste  $M$  de Weierstrass é direta e simples. Visto que  $\sum_i M_i$  converge, existe algum número  $N$ , tal que, para  $n + 1 \geq N$ ,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \epsilon. \tag{5.69}$$

Isso resulta de nossa definição de convergência. Então, com  $|u_i(x)| \leq M_i$  para todo  $x$  no intervalo  $a \leq x \leq b$ ,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \epsilon. \tag{5.70}$$

Portanto,

$$|S(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x) \right| < \epsilon, \tag{5.71}$$

e, por definição,  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$  é uniformemente convergente em  $[a, b]$ . Uma vez que especificamos valores absolutos no enunciado do teste  $M$  de Weierstrass, a série  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$  também é considerada **absolutamente** convergente.

Note que convergência uniforme e convergência absoluta são propriedades independentes. Nenhuma implica a outra. Como exemplos específicos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.72)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5.73)$$

convergem uniformemente nos intervalos indicados mas não convergem absolutamente. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n &= 1, & 0 \leq x < 1 \\ &= 0, & x = 1, \end{aligned} \quad (5.74)$$

converge absolutamente mas não converge uniformemente em  $[0, 1]$ .

Pela definição de convergência uniforme podemos mostrar que qualquer série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (5.75)$$

não pode convergir uniformemente em qualquer intervalo que inclua uma descontinuidade de  $f(x)$  se todos,  $u_n(x)$  são contínuos.

Visto que o teste  $M$  de Weierstrass estabelece as duas, a convergência uniforme e a convergência absoluta, ele necessariamente falhará para séries que são uniformemente convergentes, porém condicionalmente.

### Teste de Abel

Um teste um tanto mais delicado para a convergência uniforme foi dado por Abel. Se

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n f_n(x), \\ \sum a_n &= A, \text{ convergente} \end{aligned}$$

e as funções  $f_n(x)$  são monotônicas [ $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ ] e limitadas,  $0 \leq f_n(x) \leq M$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então  $\sum_n u_n(x)$  **converge uniformemente** em  $[a, b]$ .

Esse teste é de particular utilidade na análise da série de potências (compare com a Seção 5.7). Detalhes da prova do teste de Abel e de outros testes para convergência uniforme são dados nas Leituras Adicionais apresentadas ao final deste capítulo.

Séries uniformemente convergentes têm três propriedades de particular utilidade.

1. Se os termos individuais  $u_n(x)$  são contínuos, a soma da série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (5.76)$$

também é contínua.

2. Se os termos individuais  $u_n(x)$  são contínuos, a série pode ser integrada termo a termo. A soma das integrais é igual à integral da

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (5.77)$$

3. A derivada da soma da série  $f(x)$  é igual à soma das derivadas dos termos individuais:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x), \quad (5.78)$$



contanto que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$u_n(x) \text{ e } \frac{du_n(x)}{dx} \text{ são contínuas em } [a, b].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx} \text{ é uniformemente convergente em } [a, b].$$

A integração termo a termo de uma série uniformemente convergente<sup>8</sup> requer apenas continuidade dos termos individuais. Essa condição é quase sempre satisfeita em aplicações físicas. A diferenciação termo a termo de uma série muitas vezes não é válida porque as condições que devem ser satisfeitas são mais restritivas. De fato, encontraremos séries de Fourier no Capítulo 14, nas quais a diferenciação termo a termo de uma série uniformemente convergente leva a uma série divergente.

### Exercícios

**5.5.1** Ache a faixa de convergência **uniforme** da série de Dirichlet

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}, \quad (b) \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Resposta: (a)  $0 < s \leq x < \infty$ .

(b)  $1 < s \leq x < \infty$ .

**5.5.2** Para qual faixa de  $x$  a série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  é uniformemente convergente?

Resposta:  $-1 < -s \leq x \leq s < 1$ .

**5.5.3** Para qual faixa de valores positivos de  $x$  é  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1+x^n)$

(a) convergente? (b) uniformemente convergente?

**5.5.4** Se a série dos coeficientes  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  é absolutamente convergente, mostre que a série de Fourier

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

é **uniformemente** convergente para  $-\infty < x < \infty$ .

## 5.6 Expansão de Taylor

Essa é uma expansão de uma função para uma série infinita de potências de uma variável  $x$  ou para uma série finita mais um termo de resto. Os coeficientes dos termos sucessivos da série envolvem as derivadas sucessivas da função. Já usamos a expansão de Taylor quando estabelecemos a interpretação física da divergência (Seção 1.7) e em outras seções dos Capítulos 1 e 2. Agora derivamos a expansão de Taylor.

Admitimos que nossa função  $f(x)$  tem uma derivada contínua de enésima ordem<sup>9</sup> no intervalo a  $a \leq x \leq b$ . Então, integrando essa derivada enésima  $n$  vezes,

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n)}(x_1) dx_1 &= f^{(n-1)}(x_1) \Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a), \\ \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1) &= \int_a^x dx_2 [f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(a)] \\ &= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a). \end{aligned} \tag{5.79}$$

Continuando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_3 \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1) &= f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - (x-a)f^{(n-2)}(a) \\ &\quad - \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(n-1)}(a). \end{aligned} \tag{5.80}$$

<sup>8</sup>Integração termo a termo também pode ser válida na ausência de convergência uniforme.

<sup>9</sup>A expansão de Taylor pode ser derivada sob condições ligeiramente menos restritivas; compare com H. Jeffreys e B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3<sup>a</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press (1956), Seção 1.133.

Por fim, ao integrarmos pela enésima vez,

$$\int_a^x dx_n \cdots \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a). \quad (5.81)$$

Note que essa expressão é exata. Nenhum termo foi descartado, nenhuma aproximação foi feita. Agora, resolvendo para  $f(x)$ , temos

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n.} \quad (5.82)$$

O resto,  $R_n$ , é dado pela integral múltipla

$$R_n = \int_a^x dx_n \cdots \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1). \quad (5.83)$$

Esse resto, Equação (5.83), pode ser colocado em uma forma talvez mais prática usando o **teorema do valor médio** do cálculo integral:

$$\int_a^x g(x) dx = (x-a)g(\xi), \quad (5.84)$$

com  $a \leq \xi \leq x$ . Integrando  $n$  vezes, obtemos a forma lagrangiana<sup>10</sup> do resto:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi). \quad (5.85)$$

Com a expansão de Taylor nessa forma, não nos preocupamos com quaisquer questões de convergência de série finita. Essa série é finita, e as únicas questões referem-se à grandeza do resto.

Quando a função  $f(x)$  é tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0, \quad (5.86)$$

a Equação (5.82) se torna a série de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).^{11} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Nossa série de Taylor especifica o valor de uma função em um ponto,  $x$ , em termos do valor da função e de suas derivadas em um ponto de referência  $a$ . Ela é uma expansão em potências da **mudança** na variável,  $\Delta x = x - a$  neste caso. A notação pode ser variada conforme a conveniência do usuário. Com a substituição de  $x \rightarrow x + h$  e  $a \rightarrow x$ , temos uma forma alternativa,

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Quando usamos o **operador**  $D = d/dx$ , a expansão de Taylor se torna

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} f(x) = e^{hD} f(x).$$

(A transição para a forma exponencial antecipa a Equação (5.90) que dela resulta.) Uma forma equivalente de operador dessa expansão de Taylor aparece no Exercício 4.2.4. Uma derivação da expansão de Taylor no contexto da teoria da variável complexa aparece na Seção 6.5.

<sup>10</sup>Uma forma alternativa derivada por Cauchy é

$$R_n = \frac{(x-\zeta)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!} f^{(n)}(\zeta),$$

com  $a \leq \zeta \leq x$ .

<sup>11</sup>Note que  $0! = 1$  (compare com a Seção 8.1).



### Teorema de Maclaurin

Se expandirmos ao redor da origem ( $a = 0$ ), a Equação (5.87) é conhecida como série de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \quad (5.88)$$

Uma aplicação imediata da série de Maclaurin (ou da série de Taylor) é na expansão de várias funções transcendentais para séries infinitas (de potências).

#### Exemplo 5.6.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Seja  $f(x) = e^x$ . Diferenciando, temos

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad (5.89)$$

para todo  $n, n = 1, 2, 3, \dots$ . Então, com a Equação (5.88), temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.90)$$

Essa é a expansão de série da função exponencial. Alguns autores a usam para definir a função exponencial.

Embora essa série seja claramente convergente para todo  $x$ , devemos verificar o termo do resto,  $R_n$ . Pela Equação (5.85) temos

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi) = \frac{x^n}{n!}e^\xi, \quad 0 \leq |\xi| \leq x. \quad (5.91)$$

Portanto,

$$|R_n| \leq \frac{x^n e^x}{n!} \quad (5.92)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \quad (5.93)$$

para todos os valores **finitos** de  $x$ , o que indica que essa expansão de Maclaurin de  $e^x$  converge absolutamente na faixa  $-\infty < x < \infty$ .

#### Exemplo 5.6.2 LOGARITMO

Seja  $f(x) = \ln(1 + x)$ . Por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + x)^{-1}, \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1 + x)^{-n}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

A expansão de Maclaurin (Equação (5.88)) resulta em

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + R_n \\ &= \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} + R_n. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Nesse caso, nosso resto é dado por

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq x \\ &\leq \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Agora, o resto se aproxima de zero à medida que  $n$  aumenta indefinidamente, contanto que  $0 \leq x \leq 1$ .<sup>12</sup> Como uma série infinita,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (5.97)$$

<sup>12</sup>Essa faixa pode ser estendida com facilidade para  $-1 < x \leq 1$  mas não para  $x = -1$ .

converge para  $-1 < x \leq 1$ . A faixa  $-1 < x < 1$  é estabelecida com facilidade pelo teste da razão de d’Alembert (Seção 5.2). Convergência em  $x = 1$  resulta pelo critério de Leibniz (Seção 5.3). Em particular, em  $x = 1$  temos

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}, \tag{5.98}$$

a série harmônica alternante condicionalmente ■

### Teorema Binomial

Uma segunda e extremamente importante aplicação das expansões de Taylor e Maclaurin é a derivação do teorema binomial para potências negativas e/ou não-inteiras.

Seja  $f(x) = (1 + x)^m$ , na qual  $m$  pode ser negativo e não limitado a valores inteiros. A aplicação direta da Equação (5.88) resulta em

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + R_n. \tag{5.99}$$

Para esta função o resto é

$$R_n = \frac{x^n}{n!} (1 + \xi)^{m-n} m(m-1) \dots (m-n+1) \tag{5.100}$$

e  $\xi$  se encontra entre 0 e  $x$ ,  $0 \leq \xi \leq x$ . Agora, para  $n > m$ ,  $(1 + \xi)^{m-n}$  é um máximo para  $\xi = 0$ . Portanto,

$$R_n \leq \frac{x^n}{n!} m(m-1) \dots (m-n+1). \tag{5.101}$$

Note que os  $m$  fatores dependentes não resultam em um zero, a menos que  $m$  seja um inteiro não-negativo;  $R_n$  tende a zero, à medida que  $n \rightarrow \infty$  se  $x$  for restrito à faixa  $0 \leq x < 1$ . Por conseguinte, demonstra-se que a expansão binomial é

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \tag{5.102}$$

Em outra notação equivalente,

$$(1 + x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n. \tag{5.103}$$

A quantidade  $\binom{m}{n}$ , que é igual a  $m!/[n!(m-n)!]$ , é denominada **coeficiente binomial**. Embora tenhamos apenas mostrado que o resto desaparece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

na verdade podemos mostrar que, para  $0 \leq x < 1$ , a série na Equação (5.102) é convergente para a faixa estendida  $-1 < x < 1$ . Para  $m$  inteiro,  $(m-n)! = \pm\infty$  se  $n > m$  (Seção 8.1), e a série automaticamente termina em  $n = m$ .

### Exemplo 5.6.3 ENERGIA RELATIVISTA

A energia relativista total de uma partícula de massa  $m$  e velocidade  $v$  é

$$E = mc^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \tag{5.104}$$

Compare essa expressão com a energia cinética clássica,  $mv^2/2$ .

Pela Equação (5.102), com  $x = -v^2/c^2$  e  $m = -1/2$ , temos

$$E = mc^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \left( -\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} \left( -\frac{v^2}{c^2} \right)^3 + \dots \right],$$



ou

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{16}mv^2 \cdot \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots \quad (5.105)$$

O primeiro termo,  $mc^2$ , é identificado como a energia da massa em repouso. Então,

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2}mv^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{8} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots \right]. \quad (5.106)$$

Para velocidade de partícula  $v \ll c$ , a velocidade da luz, a expressão entre colchetes se reduz à unidade, e vemos que a porção cinética da energia relativista total está de acordo com o resultado clássico. ■

Para polinômios podemos generalizar a expansão binomial para

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m},$$

em que a soma inclui todas as diferentes combinações de  $n_1, n_2, \dots, n_m$  com  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ . Aqui  $n_i$  e  $n$  são todos inteiros. Essa generalização encontra considerável uso na mecânica estatística.

Às vezes, a série de Maclaurin pode aparecer indiretamente em vez de por utilização direta da Equação (5.88). Por exemplo, o modo mais conveniente de obter a expansão de série

$$\text{sen}^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots, \quad (5.106a)$$

é fazer uso da relação (de  $\text{sen } y = x$ , obtendo  $dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$ )

$$\text{sen}^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}.$$

Expandimos  $(1-t^2)^{-1/2}$  (teorema binomial) e então integramos termo a termo. Essa integração termo a termo é discutida na Seção 5.7. O resultado é a Equação (5.106a). Por fim, podemos tomar o limite enquanto  $x \rightarrow 1$ . A série converge pelo teste de Gauss, Exercício 5.2.5.

### Expansão de Taylor – Mais de uma Variável

Se a função  $f$  tem mais de uma variável independente, digamos,  $f = f(x, y)$ , a expansão de Taylor se torna

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y} \\ & + \frac{1}{2!} \left[ (x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{1}{3!} \left[ (x-a)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ & \left. + 3(x-a)(y-b)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + (y-b)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (5.107)$$

com todas as derivadas avaliadas no ponto  $(a, b)$ . Usando  $\alpha_j t = x_j - x_{j0}$ , podemos escrever a expansão de Taylor para  $m$  variáveis independentes na forma simbólica

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n f(x_1, \dots, x_m) \Big|_{(x_k=x_{k0}, k=1, \dots, m)}. \quad (5.108)$$

Uma forma vetorial conveniente para  $m = 3$  é

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n \psi(\mathbf{r}). \quad (5.109)$$

## Exercícios

5.6.1 Mostre que

$$(a) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$(b) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Na Seção 6.1,  $e^{ix}$  é definida por uma expansão de série, tal que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Essa é a base para a representação polar de quantidades complexas. Como caso especial, podemos encontrar, com  $x = \pi$ , a intrigante relação

$$e^{i\pi} = -1.$$

5.6.2 Derive uma expansão de série de  $\cotg x$  em potências crescentes de  $x$  dividindo  $\cos x$  por  $\sin x$ .  
*Nota:* A série resultante que começa com  $1/x$  é, na verdade, uma série de Laurent (Seção 6.5). Embora as duas séries para  $\sin x$  e  $\cos x$  fossem válidas para todo  $x$ , a convergência da série para  $\cotg x$  é limitada pelos zeros do denominador,  $\sin x$  (veja Continuação Analítica na Seção 6.5).

5.6.3 O teste de Raabe para  $\sum_n (n \ln n)^{-1}$  leva a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} - 1 \right].$$

Mostre que esse limite é a unidade (o que significa que, nesse caso, o teste de Raabe é indeterminado).

5.6.4 Mostre, por expansão de série, que

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} = \operatorname{cotgh}^{-1} \eta_0, \quad |\eta_0| > 1.$$

Essa identidade pode ser usada para obter uma segunda solução para a equação de Legendre.

5.6.5 Mostre que  $f(x) = x^{1/2}$ : (a) não tem nenhuma expansão de Maclaurin, mas (b) tem uma expansão de Taylor ao redor de qualquer ponto  $x_0 \neq 0$ . Ache a faixa de convergência da expansão de Taylor ao redor de  $x = x_0$ .

5.6.6 Seja  $x$  uma aproximação para um zero de  $f(x)$  e  $\Delta x$  a correção. Mostre que, desprezando os termos de ordem  $(\Delta x)^2$ ,

$$\Delta x = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Essa é a fórmula de Newton para achar uma raiz. O método de Newton tem as virtudes de ilustrar expansões de séries e cálculo elementar, mas é muito traiçoeiro.

5.6.7 Expanda uma função  $\Phi(x, y, z)$  por expansão de Taylor ao redor de  $(0, 0, 0)$  para  $\mathcal{O}(a^3)$ . Avalie  $\bar{\Phi}$ , o valor médio de  $\Phi$ , calculado pela média sobre um pequeno cubo de lado  $a$  centrado na origem e mostre que a laplaciana de  $\Phi$  é uma medida do desvio de  $\Phi$  em relação a  $\Phi(0, 0, 0)$ .

5.6.8 A razão de duas funções diferenciáveis  $f(x)$  e  $g(x)$  assume a forma indeterminada  $0/0$  em  $x = x_0$ . Usando expansões de Taylor, prove a **regra de l'Hôpital**,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.6.9 Com  $n > 1$ , mostre que

$$(a) \quad \frac{1}{n} - \ln \left( \frac{n}{n-1} \right) < 0, \quad (b) \quad \frac{1}{n} - \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) > 0.$$

Use essas desigualdades para mostrar que o limite que define a constante de Euler-Mascheroni, Equação (5.28), é finito.





**5.6.10** Expanda  $(1 - 2tz + t^2)^{-1/2}$  em potências de  $t$ . Admita que  $t$  é pequeno. Reúna os coeficientes de  $t^0, t^1$  e  $t^2$ .

Resposta:  $a_0 = P_0(z) = 1,$   
 $a_1 = P_1(z) = z,$   
 $a_2 = P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1),$

em que  $a_n = P_n(z)$ , o  $n$ ésimo polinômio de Legendre.

**5.6.11** Usando a notação de duplo fatorial da Seção 8.1, mostre que

$$(1 + x)^{-m/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m + 2n - 2)!!}{2^n n! (m - 2)!!} x^n,$$

para  $m = 1, 2, 3, \dots$

**5.6.12** Usando expansões binomiais, compare as três fórmulas do deslocamento Doppler:

(a)  $\nu' = \nu \left(1 \mp \frac{v}{c}\right)^{-1}$  fonte se movendo;

(b)  $\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$  observador se movendo;

(c)  $\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  relativista.

*Nota:* A fórmula relativista está de acordo com as fórmulas clássicas se os termos de ordem  $v^2/c^2$  puderem ser desprezados.

**5.6.13** Na teoria da relatividade geral há vários modos de relacionar (definir) uma velocidade de recessão de uma galáxia com seu afastamento para o vermelho,  $\delta$ . O modelo de Milne (relatividade cinemática) resulta em

(a)  $v_1 = c\delta \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right),$

(b)  $v_2 = c\delta \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) (1 + \delta)^{-2},$

(c)  $1 + \delta = \left[\frac{1 + v_3/c}{1 - v_3/c}\right]^{1/2}.$

1. Mostre que para  $\delta \ll 1$  (e  $v_3/c \ll 1$ ) todas as três fórmulas se reduzem a  $v = c\delta$ .
2. Compare as três velocidades por meio de termos de ordem  $\delta^2$ .

*Nota:* Em relatividade especial (com  $\delta$  substituído por  $z$ ), a razão entre o comprimento de onda observado  $\lambda_0$  é dada por

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + z = \left(\frac{c + v}{c - v}\right)^{1/2}.$$

**5.6.14** A soma relativista  $w$  de duas velocidades  $u$  e  $v$  é dada por

$$\frac{w}{c} = \frac{u/c + v/c}{1 + uv/c^2}.$$

Se

$$\frac{v}{c} = \frac{u}{c} = 1 - \alpha,$$

em que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , ache  $w/c$  em potências de  $\alpha$  por meio de termos em  $\alpha^3$ .

**5.6.15** O deslocamento  $x$  de uma partícula de massa de repouso  $m_0$ , resultante de uma força constante  $m_0g$  ao longo do eixo  $x$  é

$$x = \frac{c^2}{g} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{gt}{c} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\},$$

incluindo efeitos relativistas. Ache o deslocamento  $x$  como uma série de potências em tempo  $t$ . Compare com o resultado clássico,

$$x = \frac{1}{2}gt^2.$$

**5.6.16** Usando a teoria relativista de Dirac, a fórmula de estrutura fina de espectroscopia atômica é dada por

$$E = mc^2 \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{(s + n - |k|)^2} \right]^{-1/2},$$

em que

$$s = (|k|^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Expanda em potências de  $\gamma^2$  pela ordem  $\gamma^4$  ( $\gamma^2 = Ze^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ , sendo  $Z$  o número atômico). Essa expansão é útil em comparações das previsões da teoria de elétrons de Dirac com as de uma teoria relativista de elétrons de Schrödinger. Resultados experimentais apóiam a teoria de Dirac.

**5.6.17** Em uma colisão frontal próton-próton, a razão entre a energia cinética no centro do sistema de massa e a energia cinética incidente é

$$R = [\sqrt{2mc^2(E_k + 2mc^2)} - 2mc^2]/E_k.$$

Ache o valor dessa razão de energias cinéticas para

- (a)  $E_k \ll mc^2$  (não-relativista)
- (b)  $E_k \gg mc^2$  (relativista extrema).

Resposta: (a)  $\frac{1}{2}$ , (b) 0. A última resposta é um tipo de lei de retornos decrescentes para aceleradores de partículas de altas energias (com alvos estacionários).

**5.6.18** Com expansões binomiais

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n}.$$

A soma dessas duas séries resulta em  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n = 0$ .

Tenho certeza de que todos concordamos que isso é um absurdo, mas o que deu errado?

**5.6.19** (a) A teoria de Planck de osciladores quantizados leva a uma energia média

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp(-n\varepsilon_0/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_0/kT)},$$

em que  $\varepsilon_0$  é uma energia fixa. Identifique o numerador e o denominador como expansões binomiais e mostre que a razão entre eles é

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT) - 1}.$$

(b) Mostre que o  $\langle \varepsilon \rangle$  da parte (a) se reduz a  $kT$ , o resultado clássico, para  $kT \gg \varepsilon_0$ .

**5.6.20** (a) Expanda pelo teorema binomial e integre termo a termo para obter a série de Gregory para  $y = tg^{-1}x$  (note que  $tgy = x$ ):

$$\begin{aligned} tg^{-1}x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \{1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots\} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

(b) Comparando expansões de séries, mostre que

$$tg^{-1}x = \frac{i}{2} \ln \left( \frac{1-ix}{1+ix} \right).$$

*Sugestão:* Compare com o Exercício 5.4.1.



**5.6.21** Em análise numérica, muitas vezes é conveniente aproximar

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) \approx \frac{1}{h^2} [\psi(x+h) - 2\psi(x) + \psi(x-h)].$$

Ache o erro dessa aproximação.

Resposta: Erro =  $\frac{h^2}{12}\psi^{(4)}(x)$ .

**5.6.22** Você tem uma função  $y(x)$  tabulada em valores igualmente espaçados do argumento

$$\begin{cases} y_n = y(x_n) \\ x_n = x + nh. \end{cases}$$

Mostre que a combinação linear

$$\frac{1}{12h} \{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}\}$$

resulta em

$$y'_0 - \frac{h^4}{30}y_0^{(5)} + \dots$$

Por conseguinte, essa combinação linear resulta em  $y'_0$  se  $(h^4/30)y_0^{(5)}$  e potências mais altas de  $h$  e derivadas de ordens mais altas de  $y(x)$  são desprezíveis.

**5.6.23** Em uma integração numérica de uma equação diferencial parcial, o laplaciano tridimensional é substituído por

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi(x, y, z) \rightarrow h^{-2} & [\psi(x+h, y, z) + \psi(x-h, y, z) \\ & + \psi(x, y+h, z) + \psi(x, y-h, z) + \psi(x, y, z+h) \\ & + \psi(x, y, z-h) - 6\psi(x, y, z)]. \end{aligned}$$

Determine o erro dessa aproximação. Aqui,  $h$  é o tamanho do espaçamento, a distância entre pontos adjacentes na direção  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .

**5.6.24** Usando precisão dupla, calcule  $e$  por sua série de Maclaurin.

*Nota:* Essa abordagem simples, direta, é o melhor modo de calcular  $e$  com alta precisão. Dezesseis termos dão  $e$  até 16 algarismos significativos. Os fatoriais recíprocos dão convergência muito rápida.

## 5.7 Série de Potências

A série de potências é um tipo extremamente útil de série infinita da forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \tag{5.110}$$

em que os coeficientes  $a_i$  são constantes, independentes de  $x$ .<sup>13</sup>

### Convergência

A Equação (5.110) pode ser testada de imediato para convergência pelo teste da raiz de Cauchy ou pelo teste da razão de d'Alembert (Seção 5.2). Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R^{-1}, \tag{5.111}$$

a série converge para  $-R < x < R$ . Esse é o intervalo ou raio de convergência. Uma vez que os testes da raiz e da razão falham quando o limite é a unidade, as extremidades do intervalo requerem especial atenção. Por exemplo, se  $a_n = n^{-1}$ , então  $R = 1$ , pelas Seções 5.1, 5.2 e 5.3, a série converge para  $x = -1$  mas diverge para  $x = +1$ . Se  $a_n = n!$ , então  $R = 0$  e a série diverge para todo  $x \neq 0$ .

<sup>13</sup>A Equação (5.110) pode ser generalizada para  $z = x + iy$ , substituindo  $x$ . Então, os dois capítulos seguintes darão convergência uniforme, integrabilidade e diferenciabilidade em uma região de um plano complexo em lugar de um intervalo no eixo  $x$ .

### Convergência Uniforme e Absoluta

Suponha que constatemos que nossa série de potências (Equação (5.110)) é convergente para  $-R < x < R$ ; então ela será uniforme e absolutamente convergente em qualquer intervalo **interior**  $-S \leq x \leq S$ , em que  $0 < S < R$ .

Isso pode ser provado diretamente pelo teste M de Weierstrass (Seção 5.5).

### Continuidade

Visto que cada um dos termos  $u_n(x) = a_n x^n$  é uma função contínua de  $x$  e  $f(x) = \sum a_n x^n$  converge uniformemente para  $-S \leq x \leq S$ ,  $f(x)$  deve ser uma função contínua no intervalo de convergência uniforme.

Esse comportamento deve ser comparado com o comportamento surpreendentemente diferente da série de Fourier (Capítulo 14), no qual essa série é freqüentemente usada para representar funções descontínuas, tais como ondas em dente de serra e ondas quadradas.

### Diferenciação e Integração

Sendo  $u_n(x)$  contínua e  $\sum a_n x^n$  uniformemente convergente, constatamos que a série diferenciada é uma série de potências com funções contínuas e o mesmo raio de convergência da série original. Os novos fatores introduzidos por diferenciação (ou integração) não afetam nem o teste da raiz nem o teste da razão. Portanto, nossa série de potências pode ser diferenciada ou integrada com a freqüência que se desejar dentro do intervalo de convergência uniforme (Exercício 5.7.13).

Em vista das restrições bastante sérias aplicadas à diferenciação (Seção 5.5), esse é um resultado notável e valioso.

### Teorema da Unicidade

Na seção precedente, usando a série de Maclaurin, expandimos  $e^x$  e  $\ln(1+x)$  em séries infinitas. Nos capítulos subseqüentes, funções são freqüentemente representadas ou talvez definidas por séries infinitas. Agora, determinamos que a representação da série de potências é única.

Se

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, & -R_a < x < R_a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, & -R_b < x < R_b, \end{aligned} \tag{5.112}$$

com intervalos de convergência sobrepostos, incluindo a origem, então

$$a_n = b_n \tag{5.113}$$

para todo  $n$ ; isto é, admitimos duas representações (diferentes) de séries de potências e passamos a mostrar que, na verdade, as duas são idênticas.

Pela Equação (5.112),

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -R < x < R, \tag{5.114}$$

em que  $R$  é o menor de  $R_a, R_b$ . Estabelecendo  $x = 0$  para eliminar todos os termos, exceto os constantes, obtemos

$$a_0 = b_0. \tag{5.115}$$

Agora, explorando a diferenciabilidade de nossa série de potências, diferenciamos a Equação (5.114), obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}. \tag{5.116}$$

Mais uma vez estabelecemos  $x = 0$ , para isolar os novos termos constantes e achamos

$$a_1 = b_1. \tag{5.117}$$

Repetindo esse processo  $n$  vezes, temos

$$a_n = b_n, \tag{5.118}$$



o que mostra que as duas séries coincidem. Portanto, nossa representação de séries de potências é única.

Isso será um ponto crucial na Seção 9.5, na qual usamos uma série de potências para desenvolver soluções de equações diferenciais. Essa unicidade da série de potências aparece com muita frequência na física teórica. O estabelecimento da teoria da perturbação em mecânica quântica é um exemplo. A representação de funções por séries de potências costuma ser útil para avaliar formas indeterminadas, em particular quando a regra de l'Hôpital pode ser incômoda de aplicar (Exercício 5.7.9).

### Exemplo 5.7.1 REGRA DE L'HÔPITAL

Avalie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad (5.119)$$

Substituindo  $\cos x$  por sua expansão de série de Maclaurin, obtemos

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots$$

Deixando que  $x \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad (5.120)$$

A unicidade de séries de potências significa que os coeficientes  $a_n$  podem ser identificados com as derivadas em uma série de Maclaurin. Por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

temos

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$



### Inversão de Séries de Potências

Suponha que temos uma série

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (5.121)$$

Isso dá  $(y - y_0)$  em termos de  $(x - x_0)$ . Contudo, pode ser desejável ter uma expressão explícita para  $(x - x_0)$  em termos de  $(y - y_0)$ . Podemos resolver a Equação (5.121) para  $x - x_0$  por inversão de nossa série. Admita que

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y - y_0)^n, \quad (5.122)$$

com  $b_n$  determinado em termos de  $a_n$ . Uma abordagem de força bruta, que é perfeitamente adequada para alguns poucos primeiros coeficientes, é simplesmente substituir a Equação (5.121) na Equação (5.122). Igualando coeficientes de  $(x - x_0)^n$  em ambos os lados da Equação (5.122), uma vez que a série de potências é única, obtemos

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\ b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{a_1^5} (2a_2^2 - a_1 a_3), \\ b_4 &= \frac{1}{a_1^7} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3), \quad \text{e assim por diante.} \end{aligned} \quad (5.123)$$

Alguns dos coeficientes mais altos são listados por Dwight.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4<sup>th</sup> ed. Nova York: Macmillan (1961). (Compare com a Fórmula n<sup>o</sup> 50.)

### Exercícios

**5.7.1** A clássica teoria do magnetismo de Langevin leva a uma expressão para a polarização magnética,

$$P(x) = c \left( \frac{\cosh x}{\operatorname{sen} hx} - \frac{1}{x} \right).$$

Expanda  $P(x)$  como uma série de potências para pequenos  $x$  (campos baixos, alta temperatura).

**5.7.2** O fator de despolarização  $L$  para um elipsóide oblato em um campo elétrico uniforme paralelo ao eixo de rotação é

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0} (1 + \zeta_0^2) (1 - \zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0),$$

em que  $\zeta_0$  define um elipsóide oblato em coordenadas esféricas oblatas  $(\xi, \zeta, \varphi)$ . Mostre que

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \quad (\text{esfera}), \quad \lim_{\zeta_0 \rightarrow 0} L = \frac{1}{\varepsilon_0} \quad (\text{lâmina fina}).$$

**5.7.3** O fator de despolarização (Exercício 5.7.2) para um elipsóide prolato (oblongo) é

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0} (\eta_0^2 - 1) \left( \frac{1}{2} \eta_0 \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1 \right).$$

Mostre que

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \quad (\text{esfera}), \quad \lim_{\eta_0 \rightarrow 0} L = 0 \quad (\text{agulha longa}).$$

**5.7.4** A análise do padrão de difração de uma abertura circular envolve

$$\int_0^{2\pi} \cos(c \cos \varphi) d\varphi.$$

Expanda o integrando em uma série e integre usando

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \varphi d\varphi = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = 0.$$

O resultado é  $2\pi$  vezes a função de Bessel  $J_0(c)$ .

**5.7.5** Nêutrons são criados (por uma reação nuclear) dentro de uma esfera oca de raio  $R$ . Os nêutrons recém-criados são distribuídos uniformemente pelo volume esférico. Admitindo que todas as direções são igualmente prováveis (isotropia), que distância média um nêutron percorrerá antes de se chocar com a superfície da esfera? Admita movimento em linha reta sem colisões.

(a) Mostre que

$$\bar{r} = \frac{3}{2} R \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} k^2 dk \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

(b) Expanda o integrando como uma série e integre para obter

$$\bar{r} = R \left[ 1 - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right].$$

(c) Mostre que a soma dessa série infinita é  $1/12$ , dando  $\bar{r} = \frac{3}{4} R$ .

*Sugestão:* Mostre que  $s_n = 1/12 - [4(2n+1)(2n+3)]^{-1}$  por indução matemática. Então deixe  $n \rightarrow \infty$ .

**5.7.6** Dado que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{tg}^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$



expanda o integrando em uma série e integre termo a termo, obtendo<sup>15</sup>

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots,$$

que é a fórmula de Leibniz para  $\pi$ . Compare a convergência da série integranda e a da série integrada em  $x = 1$ . Veja também o Exercício 5.7.18.

**5.7.7** Expanda a função fatorial incompleta

$$\gamma(n+1, x) \equiv \int_0^x e^{-t} t^n dt$$

em uma série de potências de  $x$ . Qual é a faixa de convergência da série resultante?

$$\text{RESP. } \int_0^x e^{-t} t^n dt = x^{n+1} \left[ \frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{2!(n+3)} - \dots - \frac{(-1)^p x^p}{p!(n+p+1)} + \dots \right].$$

**5.7.8** Derive a expansão de série da função beta incompleta

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = x^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1-q}{p+1} x + \dots + \frac{(1-q) \dots (n-q)}{n!(p+n)} x^n + \dots \right\}$$

para  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p > 0$ , e  $q > 0$  (se  $x = 1$ ).

**5.7.9** Avalie

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(tgx) - tg(\text{sen } x)] x^{-7}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x^{-n} j_n(x), \quad n = 3,$$

em que  $j_n(x)$  é uma função esférica de Bessel (Seção 11.7), definida por

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\text{sen } x}{x} \right).$$

$$\text{Resposta : (a) } -\frac{1}{30}, \quad (b) \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \rightarrow \frac{1}{105} \quad \text{para } n = 3.$$

**5.7.10** A teoria do transporte de nêutrons dá a seguinte expressão para o inverso do comprimento de difusão de nêutrons de  $k$ :

$$\frac{a-b}{k} tg^{-1} \left( \frac{k}{a} \right) = 1.$$

Por inversão da série ou de outra maneira, determine  $k^2$  como uma série de potências de  $b/a$ . Dê os dois primeiros termos da série.

$$\text{Resposta: } k^2 = 3ab \left( 1 - \frac{4}{5} \frac{b}{a} \right).$$

**5.7.11** Desenvolva uma expansão de série de  $y = \text{sen } h^{-1}x$  (isto é,  $\text{sen } hy = x$ ) em potências de  $x$  por

- (a) inversão da série para  $\text{sen } hy$ ,
- (b) uma expansão de Maclaurin direta.

**5.7.12** Uma função  $f(z)$  é representada por uma série **descendente** de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad R \leq z < \infty.$$

Mostre que essa expansão de série é única; isto é, se  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ ,  $R \leq z < \infty$ , então  $a_n = b_n$  para todo  $n$ .

<sup>15</sup>A expansão da série de  $tg^{-1}x$  (limite superior 1 substituído por  $x$ ) foi descoberta por James Gregory em 1671, três anos antes de Leibniz. Veja o interessante livro *A History of Pi*, 2<sup>a</sup> ed., Boulder, C.O. Golem Press (1971) e L. Berggren, J. e P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Nova York: Springer (1997).

**5.7.13** Uma série de potências converge para  $-R < x < R$ . Mostre que a série diferenciada e a série integrada têm o mesmo intervalo de convergência. (Não se preocupe com as extremidades  $x = \pm R$ .)

**5.7.14** Admitindo que  $f(x)$  pode ser expandida em uma série de potências ao redor da origem,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , com alguma faixa de convergência não-zero. Use as técnicas empregadas para provar unicidade da série para mostrar que sua série pretendida é uma série de Maclaurin:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

**5.7.15** A fórmula de Klein-Nishina para o espalhamento de fótons por elétrons contém um termo da forma

$$f(\varepsilon) = \frac{(1 + \varepsilon)}{\varepsilon^2} \left[ \frac{2 + 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} - \frac{\ln(1 + 2\varepsilon)}{\varepsilon} \right].$$

Aqui,  $\varepsilon = h\nu/mc^2$ , a razão entre a energia do fóton e a energia da massa de repouso do elétron. Ache

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon).$$

Resposta:  $\frac{4}{3}$ .

**5.7.16** O comportamento de um nêutron que está perdendo energia por colidir elasticamente com núcleos de massa  $A$  é descrito por um parâmetro  $\xi_1$ ,

$$\xi_1 = 1 + \frac{(A - 1)^2}{2A} \ln \frac{A - 1}{A + 1}.$$

Uma aproximação, boa para  $A$  grande, é

$$\xi_2 = \frac{2}{A + 2/3}.$$

Expanda  $\xi_1$  e  $\xi_2$  em potências de  $A^{-1}$ . Mostre que  $\xi_2$  concorda com  $\xi_1$  por meio de  $(A^{-1})^2$ . Ache a diferença nos coeficientes do termo  $(A^{-1})^3$ .

**5.7.17** Mostre que cada uma dessas duas integrais é igual à constante de Catalan:

$$(a) \int_0^1 \arctan t \frac{dt}{t}, \quad (b) - \int_0^1 \ln x \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Nota: Veja  $\beta(2)$  na Seção 5.9 para o valor da constante de Catalan.

**5.7.18** Calcule  $\pi$  (precisão dupla) para cada uma das seguintes expressões de arco tangente:

$$\begin{aligned} \pi &= 16tg^{-1}(1/5) - 4tg^{-1}(1/239) \\ \pi &= 24tg^{-1}(1/8) + 8tg^{-1}(1/57) + 4tg^{-1}(1/239) \\ \pi &= 48tg^{-1}(1/18) + 32tg^{-1}(1/57) - 20tg^{-1}(1/239). \end{aligned}$$

Obtenha 16 algarismos significativos. Verifique as fórmulas usando o Exercício 5.6.2.

Nota: Essas fórmulas têm sido usadas em alguns dos cálculos mais precisos de  $\pi$ .<sup>16</sup>

**5.7.19** Uma análise do fenômeno de Gibbs da Seção 14.5 leva à expressão

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi.$$

(a) Expanda o integrando em uma série e integre termo a termo. Ache o valor numérico dessa expressão para quatro algarismos significativos.

(b) Avalie essa expressão pela quadratura gaussiana, se disponível.

Resposta: 1,178980.

<sup>16</sup>D. Shanks e J. W. Wrench, “Computation of  $\pi$  to 100 000 decimals”. *Math. Comput.* 16: 76 (1962).





## 5.8 Integrais Elípticas

Integrais elípticas estão incluídas aqui em parte como uma ilustração do uso de séries de potências e em parte por seu próprio interesse intrínseco. Esse interesse inclui a ocorrência de integrais elípticas em problemas físicos (Exemplo 5.8.1 e Exercício 5.8.4) e aplicações em problemas matemáticos.

### Exemplo 5.8.1 PERÍODO DE UM PÊNDBULO SIMPLES

Para oscilações de pequena amplitude, nosso pêndulo (Figura 5.8) tem movimento harmônico simples com um período  $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$ . Para uma amplitude máxima  $\theta_M$  suficientemente grande para que  $\sin \theta_M \neq \theta_M$ , a segunda lei do movimento de Newton e a equação de Lagrange (Seção 17.7) levam a uma equação diferencial não-linear ( $\sin \theta$  é uma função não-linear de  $\theta$ ), portanto recorremos a uma abordagem diferente.

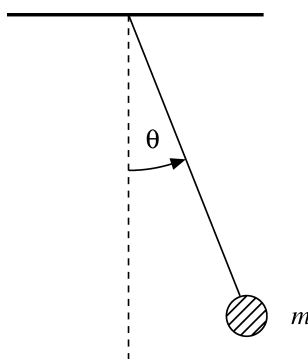


Figura 5.8: Pêndulo simples.

A massa oscilante  $m$  tem uma energia cinética de  $ml^2(d\theta/dt)^2/2$  e uma energia potencial de  $-mgl \cos \theta$  ( $\theta = \pi/2$  tomado para o zero arbitrário de energia potencial). Uma vez que  $d\theta/dt = 0$  em  $\theta = \theta_M$ , a conservação de energia dá

$$\frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_M. \quad (5.124)$$

Resolvendo para  $d\theta/dt$ , obtemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \left( \frac{2g}{l} \right)^{1/2} (\cos \theta - \cos \theta_M)^{1/2}, \quad (5.125)$$

sendo que a massa  $m$  é cancelada. Admitimos que  $t$  é zero quando  $\theta = 0$  e  $d\theta/dt > 0$ . Uma integração de  $\theta = 0$  a  $\theta = \theta_M$  resulta em

$$\int_0^{\theta_M} (\cos \theta - \cos \theta_M)^{-1/2} d\theta = \left( \frac{2g}{l} \right)^{1/2} \int_0^t dt = \left( \frac{2g}{l} \right)^{1/2} t. \quad (5.126)$$

Isso é  $\frac{1}{4}$  de um ciclo e, portanto, o tempo  $t$  é  $\frac{1}{4}$  do período  $T$ . Notamos que  $\theta \leq \theta_M$ ; com um pouco de clarividência, tentamos a substituição

$$\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sin \left( \frac{\theta_M}{2} \right) \sin \varphi. \quad (5.127)$$

Com isso, a Equação (5.126) se torna

$$T = 4 \left( \frac{l}{g} \right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \sin^2 \left( \frac{\theta_M}{2} \right) \sin^2 \varphi \right)^{-1/2} d\varphi. \quad (5.128)$$

Embora não seja uma melhoria óbvia em relação à Equação (5.126), a integral agora define a integral elíptica completa de primeira ordem,  $K(\sin^2 \theta_M/2)$ . Por expansão de série, o período de nosso pêndulo pode ser desenvolvido como uma série de potências — potências de  $\sin \theta_M/2$ :

$$T = 2\pi \left( \frac{l}{g} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_M}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_M}{2} + \dots \right\}. \quad (5.129)$$

■

### Definições

Generalizando o Exemplo 5.8.1 para incluir o limite superior como uma variável, a **integral elíptica de primeira ordem** é definida como

$$F(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2\alpha \text{sen}^2\theta)^{-1/2} d\theta, \quad (5.130a)$$

ou

$$F(x|m) = \int_0^x [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2} dt, \quad 0 \leq m < 1. \quad (5.130b)$$

(Essa é a notação de AMS-55, veja a nota de rodapé 4 para a referência.) Para  $\varphi = \pi/2, x = 1$ , temos a **integral elíptica completa de primeira espécie**

$$\begin{aligned} K(m) &= \int_0^{\pi/2} (1 - m \text{sen}^2\theta)^{-1/2} d\theta \\ &= \int_0^1 [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2} dt, \end{aligned} \quad (5.131)$$

com  $m = \text{sen}^2\alpha, 0 \leq m < 1$ .

A **integral elíptica da segunda espécie** é definida por

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2\alpha \text{sen}^2\theta)^{1/2} d\theta \quad (5.132a)$$

ou

$$E(x|m) = \int_0^x \left( \frac{1 - mt^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt, \quad 0 \leq m \leq 1. \quad (5.132b)$$

Mais uma vez, para o caso de  $\varphi = \pi/2, x = 1$ , temos a **integral elíptica completa de segunda espécie**:

$$\begin{aligned} E(m) &= \int_0^{\pi/2} (1 - m \text{sen}^2\theta)^{1/2} d\theta \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1 - mt^2}{1 - t^2} \right)^{1/2} dt, \quad 0 \leq m \leq 1. \end{aligned} \quad (5.133)$$

O Exercício 5.8.1 é um exemplo de sua ocorrência. A Figura 5.9 mostra o comportamento de  $K(m)$  e de  $E(m)$ . Tabelas extensivas estão disponíveis em AMS-55 (veja o Exercício 5.2.22 para a referência).

### Expansão de Série

Para nossa faixa  $0 \leq m < 1$ , o denominador de  $K(m)$  pode ser expandido pela série binomial

$$\begin{aligned} (1 - m \text{sen}^2\theta)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} m \text{sen}^2\theta + \frac{3}{8} m^2 \text{sen}^4\theta + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \text{sen}^{2n}\theta. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Para qualquer intervalo fechado  $[0, m_{\text{máx}}], m_{\text{máx}} < 1$ , essa série é uniformemente convergente e pode ser integrada termo a termo. Pelo Exercício 8.4.9,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (5.135)$$

Daí

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n \right\}. \quad (5.136)$$

De forma semelhante,

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right\} \quad (5.137)$$

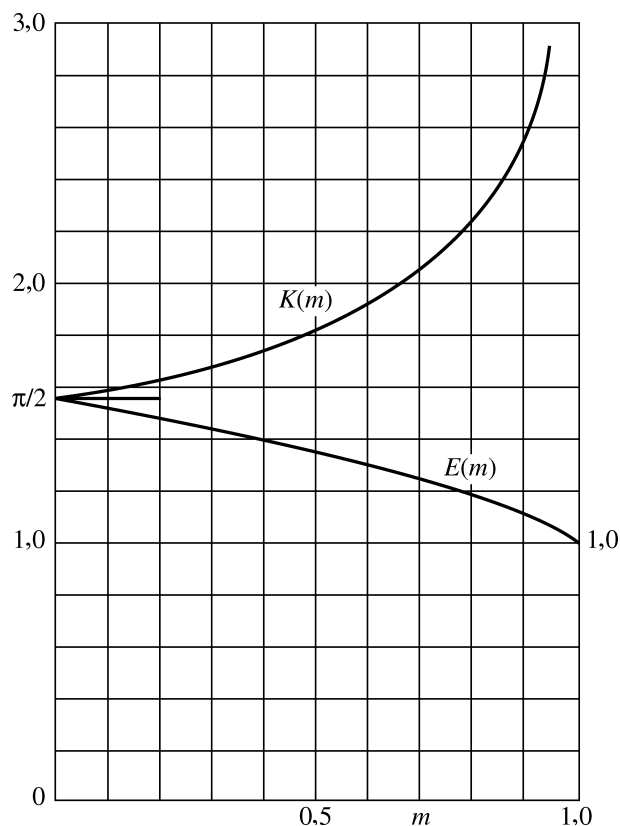


Figura 5.9: Integrais elípticas completas,  $K(m)$  e  $E(m)$ .

(Exercício 5.8.2). Na Seção 13.5 essas séries são identificadas como funções hipergeométricas, e temos

$$K(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right) \tag{5.138}$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right). \tag{5.139}$$

**Valores Limitativos**

Pelas Equações (5.136) e (5.137) ou pela definição de integrais,

$$\lim_{m \rightarrow 0} K(m) = \frac{\pi}{2}, \tag{5.140}$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} E(m) = \frac{\pi}{2}. \tag{5.141}$$

Para  $m \rightarrow 1$ , as expansões de séries têm pouca utilidade. Contudo, as integrais nos dão

$$\lim_{m \rightarrow 1} K(m) = \infty, \tag{5.142}$$

sendo que a integral diverge por logaritmos e

$$\lim_{m \rightarrow 1} E(m) = 1. \tag{5.143}$$

As integrais elípticas foram usadas extensivamente no passado para avaliar integrais. Por exemplo, integrais da forma

$$I = \int_0^x R(t, \sqrt{a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0}) dt,$$

em que  $R$  é uma função racional de  $t$  e do radical, podem ser expressas em termos de integrais elípticas. Jahnke e Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves*, Nova York: Dover (1943), Capítulo 5, dá páginas de tais transformações. Agora que temos computadores disponíveis para avaliação numérica direta, o interesse por essas integrais elípticas diminuiu. Contudo, o interesse pelas integrais elípticas ainda se mantém porque aparecem em problemas físicos — veja os Exercícios 5.8.4 e 5.8.5.

Se quiser um apanhado extensivo de funções elípticas, integrais e funções  $\theta$  de Jacobi, consulte o tratado de Whittaker e Watson, *A Course in Modern Analysis*, 4ª ed., Cambridge, UK, Cambridge University Press (1962).

### Exercícios

- 5.8.1** A elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  pode ser representada parametricamente por  $x = a \operatorname{sen} \theta$ ,  $y = b \cos \theta$ . Mostre que o comprimento do arco contido no primeiro quadrante é

$$a \int_0^{\pi/2} (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} d\theta = aE(m).$$

Aqui,  $0 \leq m = (a^2 - b^2)/a^2 \leq 1$ .

- 5.8.2** Derive a expansão de série

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \dots \right\}.$$

- 5.8.3** Mostre que

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{(K - E)}{m} = \frac{\pi}{4}.$$

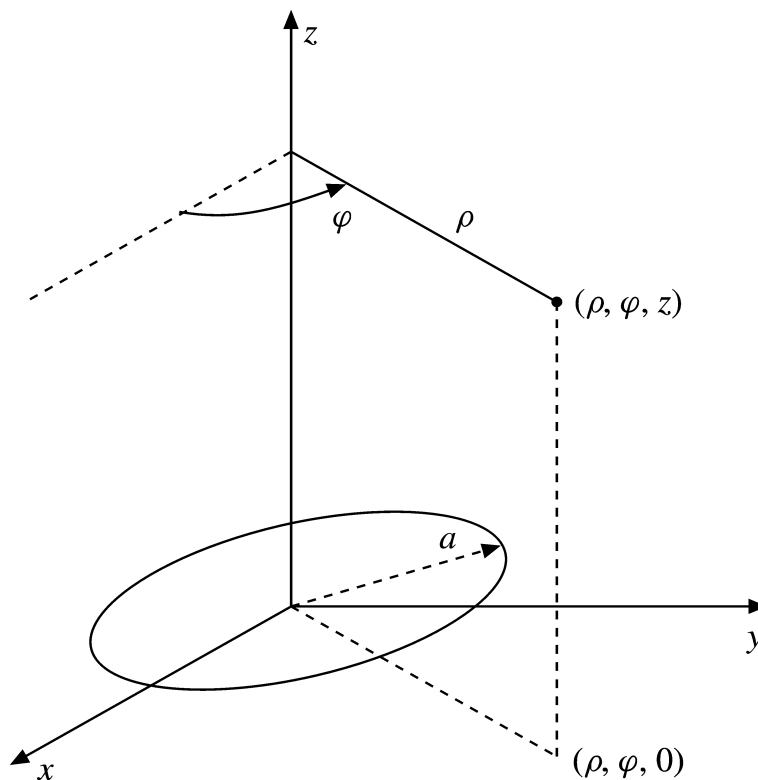


Figura 5.10: Circuito elétrico circular.

- 5.8.4** Um circuito elétrico circular no plano  $xy$ , como mostra a Figura 5.10, transporta uma corrente  $I$ . Dado que o potencial vetorial é

$$A_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha d\alpha}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \alpha)^{1/2}},$$



mostre que

$$A_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k^2) - E(k^2) \right],$$

em que

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2}.$$

*Nota:* Para extensão do Exercício 5.8.4 para **B**, veja Smythe, p. 270.<sup>17</sup>

**5.8.5** Uma análise do potencial vetorial magnético de um circuito elétrico circular leva à expressão

$$f(k^2) = k^{-2} [(2 - k^2)K(k^2) - 2E(k^2)],$$

em que  $K(k^2)$  e  $E(k^2)$  são as integrais elípticas completas da primeira e segunda espécies. Mostre que para  $k^2 \ll 1$  ( $r \gg$  raio do circuito)

$$f(k^2) \approx \frac{\pi k^2}{16}.$$

**5.8.6** Mostre que

$$(a) \frac{dE(k^2)}{dk} = \frac{1}{k}(E - K),$$

$$(b) \frac{dK(k^2)}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k}.$$

*Sugestão:* Para a parte (b), mostre que

$$E(k^2) = (1 - k^2) \int_0^{\pi/2} (1 - k \operatorname{sen}^2 \theta)^{-3/2} d\theta$$

por comparação de expansões de séries.

**5.8.7** (a) Escreva uma sub-rotina de função para calcular  $E(m)$  pela expansão de série, Equação (5.137).  
 (b) Teste sua sub-rotina de função usando-a para calcular  $m = 0, 0(0, 1)0, 9$  e compare o resultado com os valores dados por AMS-55 (veja o Exercício 5.2.22 para a referência).

**5.8.8** Repita o Exercício 5.8.7 para  $K(m)$ .

*Nota:* Essas séries para  $E(m)$ , Equação (5.137), e  $K(m)$ , Equação (5.136), convergem apenas muito lentamente para  $m$  próximo de 1. Existem séries que convergem com maior rapidez para  $E(m)$  e  $K(m)$ . Veja as *Tabelas de Integrais* de Dwight:<sup>18</sup> *n<sup>os</sup> 773.2 e 774.2*. Sua sub-rotina de computador para calcular  $E$  e  $K$  provavelmente usa aproximações polinomiais: AMS-55, Capítulo 17.

**5.8.9** Um pêndulo simples está oscilando com uma amplitude máxima de  $\theta_M$ . No limite, à medida que  $\theta_M \rightarrow 0$ , o período é 1 s. Usando a integral elíptica,  $K(k^2)$ ,  $k = \operatorname{sen}(\theta_M/2)$ , calcule o período  $T$  para  $\theta_M = 0$  ( $10^\circ$ )  $90^\circ$ .

**Cautela:** Algumas sub-rotinas de integrais elípticas requerem  $k = m^{1/2}$  como um parâmetro de entrada e não o próprio  $m$ .

Valores de verificação.	$\theta_M$	$10^\circ$	$50^\circ$	$90^\circ$
	$T(\text{seg})$	1,00193	1,05033	1,18258

**5.8.10** Calcule o potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \hat{\varphi} A_\varphi(\rho, \varphi, z)$  de um circuito circular de corrente elétrica (Exercício 5.8.4) para as faixas  $\rho/a = 2, 3, 4$  e  $z/a = 0, 1, 2, 3, 4$ .

*Nota:* Esse cálculo de integral elíptica do potencial vetorial magnético pode ser verificado pelo cálculo de uma função de Legendre associada, Exemplo 12.5.1.

**Valor de verificação.** Para  $\rho/a = 3$  e  $z/a = 0$ ;  $A_\varphi = 0, 029023\mu_0 I$ .

<sup>17</sup>W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 3<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (1969).

<sup>18</sup>H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*. Nova York: Macmillan (1947).

### 5.9 Números de Bernoulli e Fórmula de Euler-Maclaurin

Os números de Bernoulli foram introduzidos por Jacques (James, Jacob) Bernoulli. Há diversas definições equivalentes, mas é preciso tomar muito cuidado, porque alguns autores introduzem variações na numeração ou em somas algébricas. Uma abordagem relativamente simples é definir os números de Bernoulli pela série<sup>19</sup>

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}, \tag{5.144}$$

que converge para  $|x| < 2\pi$  pelo teste da razão substituta, Equação (5.153) (veja também o Exemplo 7.1.7). Diferenciando essa série de potências repetidas vezes e então estabelecendo  $x = 0$ , obtemos

$$B_n = \left[ \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right) \right]_{x=0}. \tag{5.145}$$

Especificamente,

$$B_1 = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{e^x - 1} \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}, \tag{5.146}$$

como pode ser visto pela expansão de série dos denominadores. Usando  $B_0 = 1$  e  $B_1 = -\frac{1}{2}$ , é fácil verificar que a função

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = -\frac{x}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2} \tag{5.147}$$

é par em  $x$ , portanto todo  $B_{2n+1} = 0$ .

Para derivar uma relação de recursão para os números de Bernoulli, multiplicamos

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{e^x - 1} = 1 &= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+1)!} \right\} \left\{ 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right\} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \left\{ \frac{1}{(m+1)!} - \frac{1}{2m!} \right\} \\ &\quad + \sum_{N=2}^{\infty} x^N \sum_{1 \leq n \leq N/2} \frac{B_{2n}}{(2n)!(N-2n+1)!}. \end{aligned} \tag{5.148}$$

Para  $N > 0$ , o coeficiente de  $x^N$  é zero, portanto a Equação (5.148) resulta em

$$\frac{1}{2}(N+1) - 1 = \sum_{1 \leq n \leq N/2} B_{2n} \binom{N+1}{2n} = \frac{1}{2}(N-1), \tag{5.149}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} N - \frac{1}{2} &= \sum_{n=1}^N B_{2n} \binom{2N+1}{2n}, \\ N - 1 &= \sum_{n=1}^{N-1} B_{2n} \binom{2N}{2n}. \end{aligned} \tag{5.150}$$

Pela Equação (5.150), os números de Bernoulli apresentados na Tabela 5.1 são obtidos imediatamente. Se a variável  $x$  na Equação (5.144) for substituída por  $2ix$ , obtemos uma definição alternativa (e equivalente) de  $B_{2n}$  ( $B_1$  é igualado a  $-\frac{1}{2}$  pela Equação (5.146)) pela expressão

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad -\pi < x < \pi. \tag{5.151}$$

<sup>19</sup>A função  $x/(e^x - 1)$  pode ser considerada uma **função geradora**, uma vez que gera os números de Bernoulli. Funções geradoras das funções especiais da física matemática aparecem nos Capítulos 11, 12 e 13.



Usando o método de resíduos (Seção 7.1) ou partindo da representação de produto infinito de  $\sin x$  (Seção 5.11), constatamos que

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{5.152}$$

**Tabela 5.1** Números de Bernoulli

$n$	$B_n$	$B_n$
0	1	1,0000 00000
1	$-\frac{1}{2}$	-0,5000 00000
2	$\frac{1}{6}$	0,1666 66667
4	$-\frac{1}{30}$	-0,0333 33333
6	$\frac{1}{42}$	0,0238 09524
8	$-\frac{1}{30}$	-0,0333 33333
10	$\frac{5}{66}$	0,0757 57576

*Nota:* Mais valores são dados pelo National Bureau of Standards, *Handbook of Mathematical Functions* (AMS-55). Veja a nota de rodapé 4 para a referência.

Essa representação dos números de Bernoulli foi descoberta por Euler. É imediatamente evidente pela Equação (5.152) que  $|B_{2n}|$  aumenta sem limite, à medida que  $n \rightarrow \text{infy}$ . Valores numéricos foram calculados por Glaisher.<sup>20</sup> Ilustrando o comportamento divergente dos números de Bernoulli, temos

$$B_{20} = -5,291 \times 10^2$$

$$B_{200} = -3,647 \times 10^{215}.$$

Alguns autores preferem definir os números de Bernoulli com uma versão modificada da Equação (5.152), usando

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}, \tag{5.153}$$

sendo que o índice inferior é apenas metade de nosso índice inferior e todos os sinais são positivos. Mais uma vez, quando usar outros textos ou referências, você deve verificar para ver exatamente como os números de Bernoulli são definidos.

Os números de Bernoulli ocorrem com freqüência na teoria dos números. O teorema de Staudt-Clausen afirma que

$$B_{2n} = A_n - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \dots - \frac{1}{p_k}, \tag{5.154}$$

no qual  $A_n$  é um inteiro e  $p_1, p_2, \dots, p_k$  são números primos, de modo que  $p_i - 1$  é um divisor de  $2n$ . Pode-se verificar de imediato que isso é válido para

$$B_6(A_3 = 1, p = 2, 3, 7),$$

$$B_8(A_4 = 1, p = 2, 3, 5),$$

$$B_{10}(A_5 = 1, p = 2, 3, 11),$$
(5.155)

e outros casos especiais.

Os números de Bernoulli aparecem no somatório de potências integrais dos inteiros,

$$\sum_{j=1}^N j^p, \quad p \text{ inteiro},$$

<sup>20</sup>J. W. L. Glaisher, tabela dos primeiros 250 números de Bernoulli (até a nona casa decimal) e seus logaritmos (até a décima casa decimal). *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 12: 390 (1871-1879).

e em numerosas expansões de série de funções transcendentais, incluindo  $tgx$ ,  $cotgx$ ,  $\ln |\sen x|$ ,  $(\sen x)^{-1}$ ,  $\ln |\cos x|$ ,  $\ln |tgx|$ ,  $(cotgx)^{-1}$ ,  $tgx$ , e  $cotgx \cdot cotgx$ . Por exemplo,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots \quad (5.156)$$

É bem provável que os números de Bernoulli apareçam nessas expansões de série por causa das equações definidoras (5.144), (5.150) e (5.151) e por causa de sua relação com a função zeta de Riemann,

$$\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}. \quad (5.157)$$

### Polinômios de Bernoulli

Se a Equação (5.144) for ligeiramente generalizada, temos

$$\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \frac{x^n}{n!} \quad (5.158)$$

definindo os **polinômios de Bernoulli**,  $B_n(s)$ . Os primeiros sete polinômios de Bernoulli são dados na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2** Polinômios de Bernoulli

$B_0 = 1$
$B_1 = x - \frac{1}{2}$
$B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$
$B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
$B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
$B_5 = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$
$B_6 = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$
$B_n(0) = B_n$ , número de Bernoulli

Pela função geradora, Equação (5.158),

$$B_n(0) = B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.159)$$

o polinômio de Bernoulli avaliado em zero é igual ao número de Bernoulli correspondente. Duas propriedades particularmente importantes dos polinômios de Bernoulli resultam da relação de definição, Equação (5.158): uma relação de diferenciação

$$\frac{d}{ds} B_n(s) = nB_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.160)$$

e uma relação de simetria (substitua  $x \rightarrow -x$  na Equação (5.158), e então faça  $s = 1$ )

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.161)$$

Essas relações são usadas no desenvolvimento da fórmula de integração de Euler-Maclaurin.

### Fórmula de Integração de Euler-Maclaurin

Uma das utilizações das funções de Bernoulli é na derivação da fórmula de integração de Euler-Maclaurin. Essa fórmula é usada na Seção 8.3 para o desenvolvimento de uma expressão assintótica para a função fatorial — série de Stirling.

A técnica é a integração repetida por partes, usando a Equação (5.160) para criar novas derivadas. Começamos com

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) B_0(x) dx. \quad (5.162)$$

Pela Equação (5.160) e Exercício 5.9.2,

$$B_1'(x) = B_0(x) = 1. \quad (5.163)$$





Substituindo  $B_1'(x)$  na Equação (5.162) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= f(1)B_1(1) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x) dx \\ &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x) dx. \end{aligned} \tag{5.164}$$

Mais uma vez, usando a Equação (5.160), temos

$$B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x), \tag{5.165}$$

e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{1}{2!}[f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0)] \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x) dx. \end{aligned} \tag{5.166}$$

Usando as relações

$$\begin{aligned} B_{2n}(1) &= B_{2n}(0) = B_{2n}, & n &= 0, 1, 2, \dots \\ B_{2n+1}(1) &= B_{2n+1}(0) = 0, & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{5.167}$$

e continuando esse processo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(2p)!} B_{2p} [f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 f^{(2q)}(x)B_{2q}(x) dx. \end{aligned} \tag{5.168a}$$

Essa é a fórmula de integração de Euler-Maclaurin. Ela supõe que a função  $f(x)$  tem as derivadas requeridas.

A faixa de integração na Equação (5.168a) pode ser deslocada de  $[0, 1]$  para  $[1, 2]$  substituindo  $f(x)$  por  $f(x+1)$ . Adicionando esses resultados até  $[n-1, n]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^n f(x) dx &= \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) \\ &\quad - \sum_{p=1}^q \frac{1}{(2p)!} B_{2p} [f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)] \\ &\quad + \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 B_{2q}(x) \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(2q)}(x+\nu) dx. \end{aligned} \tag{5.168b}$$

Os termos  $\frac{1}{2}f(0) + f(1) + \dots + \frac{1}{2}f(n)$  aparecem exatamente do mesmo modo como na integração trapezoidal, ou quadratura. O somatório sobre  $p$  pode ser interpretado como a aproximação trapezoidal. A Equação (5.168b) pode ser vista como uma generalização da Equação (5.22); é a forma usada no Exercício 5.9.5 para somar potências positivas de inteiros e na Seção 8.3 para a derivação da fórmula de Stirling.

A fórmula de Euler-Maclaurin costuma ser útil para somar séries convertendo-as em integrais.<sup>21</sup>

<sup>21</sup>Veja R. P. Boas e C. Stutz, Estimating sums with integrals. *Am. J. Phys.* 39: 745 (1971), para vários exemplos.

### Função Zeta de Riemann

**Tabela 5.3** Função zeta de Riemann

$s$	$\zeta(s)$
2	1,6449340668
3	1,2020569032
4	1,0823232337
5	1,0369277551
6	1,0173430620
7	1,0083492774
8	1,0040773562
9	1,0020083928
10	1,0009945751

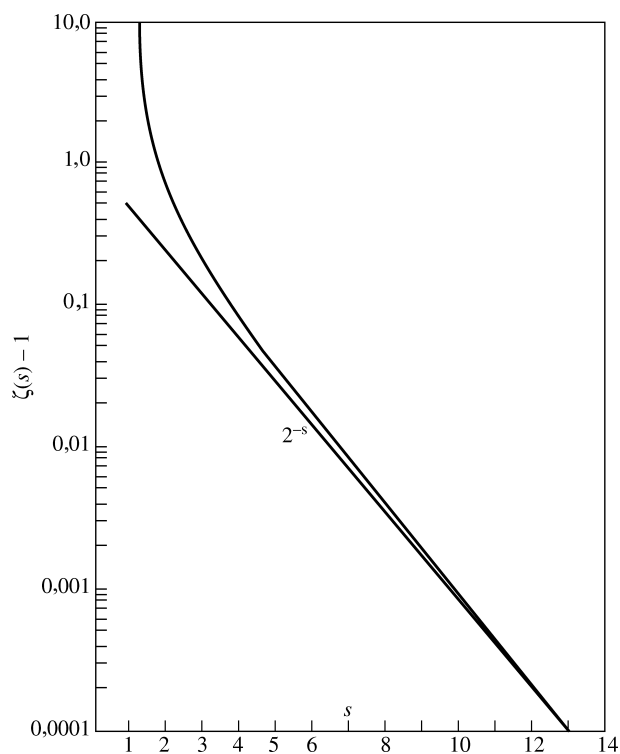


Figura 5.11: Função zeta de Riemann,  $\zeta(s) - 1$  versus  $s$ .

Essa série,  $\sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}$ , foi usada como uma série de comparação para testar convergência (Seção 5.2) e na Equação (5.152) como uma definição dos números de Bernoulli,  $B_{2n}$ . Também serve para definir a função zeta de Riemann por

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s > 1. \tag{5.169}$$

A Tabela 5.3 relaciona os valores de  $\zeta(s)$  para  $s$  inteiro,  $s = 2, 3, \dots, 10$ . Formas fechadas para  $s$  par aparecem no Exercício 5.9.6. A Figura 5.11 é um gráfico de  $\zeta(s) - 1$ . Uma expressão integral para essa função zeta de Riemann aparece no Exercício 8.2.21 como parte do desenvolvimento da função gama, e a relação funcional é dada na Seção 14.3.

O célebre produto de números primos de Euler para a função zeta de Riemann pode ser derivado como

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots - \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \right); \tag{5.170}$$



eliminando todos os  $n^{-s}$ , em que  $n$  é um múltiplo de 2.

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots - \left( \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots \right); \quad (5.171)$$

eliminando todos os termos remanescentes nos quais  $n$  é um múltiplo de 3. Continuando, temos  $\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s})(1 - 5^{-s}) \dots (1 - P^{-s})$ ,  $P$  é um número primo, e todos os termos  $n^{-s}$ , nos quais  $n$  é um múltiplo de qualquer inteiro até  $P$ , são cancelados. À medida que  $P \rightarrow \infty$ ,

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \dots (1 - P^{-s}) \rightarrow \zeta(s) \prod_{P(\text{primo})=2}^{\infty} (1 - P^{-s}) = 1. \quad (5.172)$$

Portanto,

$$\zeta(s) = \prod_{P(\text{primo})=2}^{\infty} (1 - P^{-s})^{-1}, \quad (5.173)$$

dando  $\zeta(s)$  como um produto infinito.<sup>22</sup>

Esse procedimento de cancelamento tem uma clara aplicação em computação numérica. A Equação (5.170) dará  $\zeta(s)(1 - 2^{-s})$  com a mesma precisão que a Equação (5.169) dá  $\zeta(s)$ , mas com apenas metade do número de termos. (Em qualquer dos casos, seria feita uma correção para a cauda desprezada da série pela técnica do teste da integral de Maclaurin – substituindo a série por uma integral, Seção 5.2.)

Juntamente com a função zeta de Riemann, AMS-55 (Capítulo 23. Veja o Exercício 5.2.22 para a referência) define três outras séries de Dirichlet relacionadas com  $\zeta(s)$ :

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s),$$

$$\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)^{-s} = (1 - 2^{-s})\zeta(s),$$

e

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1)^{-s}.$$

Pelos números de Bernoulli (Exercício 5.9.6) ou séries de Fourier (Exemplo 14.3.3 e Exercício 14.3.13), valores especiais são

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} \\ \eta(2) &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \\ \eta(4) &= 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720} \\ \lambda(2) &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \\ \lambda(4) &= 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \\ \beta(1) &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4} \\ \beta(3) &= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}. \end{aligned}$$

<sup>22</sup>Esse é o ponto de partida para as aplicações extensivas da função zeta de Riemann à teoria analítica dos números. Veja H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*. Nova York: Academic Press (1974); A. Ivic, *The Riemann Zeta Function*. Nova York: Wiley (1985); S. J. Patterson, *Introduction to the Theory of the Riemann Zeta Function*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1988).

A constante de Catalan,

$$\beta(2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = 0,91596559\dots,$$

é o tópico do Exercício 5.2.22.

### Melhoria da Convergência

Se tivermos de somar uma série convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cujos termos são funções racionais de  $n$ , a convergência pode ser melhorada drasticamente pela introdução da função zeta de Riemann.

#### Exemplo 5.9.1 MELHORIA DA CONVERGÊNCIA

O problema é avaliar a série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+n^2)$ . Expandindo  $(1+n^2)^{-1} = n^{-2}(1+n^{-2})^{-1}$  por divisão direta, temos

$$\begin{aligned} (1+n^2)^{-1} &= n^{-2} \left( 1 - n^{-2} + n^{-4} - \frac{n^{-6}}{1+n^{-2}} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^8 + n^6}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \zeta(2) - \zeta(4) + \zeta(6) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8 + n^6}.$$

Os valores  $\zeta$  são tabulados e a série do resto converge como  $n^{-8}$ . É claro que o processo pode ser continuado como se quiser. Você escolhe quanta álgebra fará e quanta aritmética o computador fará. Outros métodos para melhorar a efetividade computacional são dados ao final das Seções 5.2 e 5.4. ■

### Exercícios

5.9.1 Mostre que

$$tgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Sugestão:  $tgx = \cotgx - 2\cotg2x$ .

5.9.2 Mostre que os primeiros polinômios de Bernoulli são

$$\begin{aligned} B_0(s) &= 1 \\ B_1(s) &= s - \frac{1}{2} \\ B_2(s) &= s^2 - s + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Note que  $B_n(0) = B_n$ , o número de Bernoulli.

5.9.3 Mostre que  $B'_n(s) = nB_{n-1}(s)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Sugestão: Diferencie a Equação (5.158).

5.9.4 Mostre que

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0).$$

Sugestão: Volte à função geradora, Equação (5.158), ou ao Exercício 5.9.2.

5.9.5 A fórmula de integração de Euler-Maclaurin pode ser usada para a avaliação de séries finitas:

$$\sum_{m=1}^n f(m) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) + \frac{B_2}{2!} [f'(n) - f'(1)] + \dots$$

Mostre que

(a)  $\sum_{m=1}^n m = \frac{1}{2}n(n+1)$ .



$$(b) \sum_{m=1}^n m^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$$(c) \sum_{m=1}^n m^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

$$(d) \sum_{m=1}^n m^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

5.9.6 Por

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n),$$

mostre que

$$\begin{aligned} (a) \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} & (d) \zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450} \\ (b) \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} & (e) \zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93,555} \\ (c) \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945} \end{aligned}$$

5.9.7 A lei da radiação do corpo negro de Planck envolve a integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Mostre que isso é igual  $6\zeta(4)$ . Pelo Exercício 5.9.6,

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

*Sugestão:* Use a função gama, Capítulo 8.

5.9.8 Prove que

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^x dx}{(e^x - 1)^2} = n! \zeta(n).$$

Admitindo que  $n$  é real, mostre que cada lado da equação diverge se  $n = 1$ . Por conseguinte, a equação precedente acarreta a condição  $n > 1$ . Integrais como essa aparecem na teoria quântica de efeitos de transporte — condutividade térmica e elétrica.

5.9.9 A aproximação de Bloch-Gruneissen para a resistência em um metal monovalente é

$$\rho = C \frac{T^5}{\Theta^6} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^5 dx}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})},$$

em que  $\Theta$  é a temperatura de Debye característica do metal.

(a) Para  $T \rightarrow \infty$ , mostre que

$$\rho \approx \frac{C}{4} \cdot \frac{T}{\Theta^2}.$$

(b) Para  $T \rightarrow 0$ , mostre que

$$\rho \approx 5! \zeta(5) C \frac{T^5}{\Theta^6}.$$

5.9.10 Mostre que

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{1}{2} \zeta(2), \quad (b) \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \zeta(2).$$

Pelo Exercício 5.9.6,  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Note que o integrando na parte (b) diverge para  $a = 1$ , mas que a série **integrada** é convergente.

**5.9.11** A integral

$$\int_0^1 [\ln(1-x)]^2 \frac{dx}{x}$$

aparece na correção de quarta ordem do momento magnético do elétron. Mostre que ela é igual a  $2\zeta(3)$ .

*Sugestão:* Tome  $1-x = e^{-t}$ .

**5.9.12** Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} dz = 4 \left( 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right).$$

Por integração de contorno (Exercício 7.1.17), pode-se mostrar que essa expressão é igual a  $\pi^3/8$ .

**5.9.13** Para valores “pequenos” de  $x$ ,

$$\ln(x!) = -\gamma x + \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} x^n,$$

em que  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni e  $\zeta(n)$  é a função zeta de Riemann. Para quais valores de  $x$  esta série converge?

Resposta:  $-1 < x \leq 1$ .

Note que se  $x = 1$ , obtemos

$$\gamma = \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n},$$

uma série para a constante de Euler-Mascheroni. A convergência dessa série é excessivamente lenta. Para o cálculo propriamente dito de  $\gamma$ , há outras abordagens, indiretas, que são muito superiores (veja os Exercícios 5.10.11 e 8.5.16).

**5.9.14** Mostre que a expansão da série de  $\ln(x!)$  (Exercício 5.9.13) pode ser escrita como

$$(a) \ln(x!) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi x}{\text{sen } \pi x}\right) - \gamma x - \sum_{n=1}^\infty \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} x^{2n+1},$$

$$(b) \ln(x!) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi x}{\text{sen } \pi x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (1-\gamma)x - \sum_{n=1}^\infty [\zeta(2n+1) - 1] \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Determine a faixa de convergência de cada uma dessas expressões.

**5.9.15** Mostre que a constante de Catalan,  $\beta(2)$ , pode ser escrita como

$$\beta(2) = 2 \sum_{k=1}^\infty (4k-3)^{-2} - \frac{\pi^2}{8}.$$

*Sugestão:*  $\pi^2 = 6\zeta(2)$ .

**5.9.16** Derive as seguintes expansões das funções de Debye para  $n \geq 1$ :

$$\int_0^x \frac{t^n dt}{e^t - 1} = x^n \left[ \frac{1}{n} - \frac{x}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k} x^{2k}}{(2k+n)(2k)!} \right], \quad |x| < 2\pi;$$

$$\int_x^\infty \frac{t^n dt}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx} \left[ \frac{x^n}{k} + \frac{nx^{n-1}}{k^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{k^3} + \dots + \frac{n!}{k^{n+1}} \right]$$

para  $x > 0$ . A integral completa  $(0, \infty)$  é igual a  $n!\zeta(n+1)$ , Exercício 8.2.15.

**5.9.17** (a) Mostre que a equação  $\ln 2 = \sum_{s=1}^\infty (-1)^{s+1} s^{-1}$  (Exercício 5.4.1) pode ser reescrita como

$$\ln 2 = \sum_{s=2}^\infty 2^{-s} \zeta(s) + \sum_{p=1}^\infty (2p)^{-n-1} \left[ 1 - \frac{1}{2p} \right]^{-1}.$$

*Sugestão:* Considere os termos em pares.



- (b) Calcule  $\ln 2$  até cinco algarismos significativos.
- 5.9.18** (a) Mostre que a equação  $\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1)^{-1}$  (Exercício 5.7.6) pode ser reescrita como

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} 4^{-2s} \zeta(2s) - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (4p)^{-2n-2} \left[ 1 - \frac{1}{(4p)^2} \right]^{-1}.$$

- (b) Calcule  $\pi/4$  até seis algarismos significativos.
- 5.9.19** Escreva um subprograma de função ZETA( $N$ ) para calcular a função zeta de Riemann para argumento inteiro. Tabule  $\zeta(s)$  para  $s = 2, 3, 4, \dots, 20$ . Verifique os valores que calculou pela Tabela 5.3 e AMS-55, Capítulo 23. (Veja o Exercício 5.2.22 para a referência.)

*Sugestão:* Se você fornecer o subprograma de função com os valores conhecidos  $\zeta(2), \zeta(3)$ , e  $\zeta(4)$ , evitará as séries que convergem mais lentamente. O tempo de cálculo pode ser abreviado mais ainda usando-se a Equação (5.170).

- 5.9.20** Calcule o logaritmo (base 10) de  $|B_{2n}|, n = 10, 20, \dots, 100$ .
- Sugestão:* Programe  $\zeta(n)$  como um subprograma de função, Exercício 5.9.19.

**Valores de verificação.**  $\log |B_{100}| = 78,45$   
 $\log |B_{200}| = 215,56$ .

## 5.10 Séries Assintóticas

Séries assintóticas ocorrem com frequência em física. Em cálculos numéricos elas são empregadas para o cálculo preciso de uma variedade de funções. Aqui consideramos dois tipos de integrais que levam a séries assintóticas: em primeiro lugar, uma integral da forma

$$I_1(x) = \int_x^{\infty} e^{-u} f(u) du,$$

em que a variável  $x$  aparece como o limite inferior de uma integral. Em segundo lugar, consideramos a forma

$$I_2(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) du,$$

com a função  $f$  a ser expandida como uma série de Taylor (série binomial). Séries assintóticas ocorrem com frequência como soluções de equações diferenciais. Um exemplo disso aparece na Seção 11.6 como uma solução da equação de Bessel.

### Função Gama Incompleta

A natureza de uma série assintótica talvez seja mais bem ilustrada por um exemplo específico. Suponha que temos a função integral exponencial<sup>23</sup>

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du, \tag{5.174}$$

ou

$$-\text{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = E_1(x), \tag{5.175}$$

para ser avaliada para valores grandes de  $x$ . Ou vamos tomar uma generalização da função fatorial incompleta (função gama incompleta)<sup>24</sup>

$$I(x, p) = \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p} du = \Gamma(1-p, x), \tag{5.176}$$

na qual  $x$  e  $p$  são positivos. Novamente, procuramos avaliá-la para valores grandes de  $x$ .

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} I(x, p) &= \frac{e^{-x}}{x^p} - p \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-1} du \\ &= \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1) \int_x^{\infty} e^{-u} u^{-p-2} du. \end{aligned} \tag{5.177}$$

<sup>23</sup>Essa função ocorre com frequência em problemas de astrofísica que envolvem gases com distribuição de energia de Maxwell-Boltzmann.

<sup>24</sup>Veja também a Seção 8.5.

Continuando a integrar por partes, desenvolvemos a série

$$I(x, p) = e^{-x} \left( \frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(p+n-2)!}{(p-1)!x^{p+n-1}} \right) + (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} \int_x^\infty e^{-u} u^{-p-n} du. \quad (5.178)$$

Essa é uma série notável. Verificando a convergência pelo teste da raiz de d’Alembert, encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+n)!}{(p+n-1)!} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p+n}{x} = \infty \quad (5.179)$$

para todos os valores finitos de  $x$ . Portanto, nossa série, por ser uma série infinita, diverge em todo lugar! Antes de descartar a Equação (5.178) como imprestável, vamos ver quão bem uma dada soma parcial se aproxima da função fatorial incompleta,  $I(x, p)$ :

$$I(x, p) - s_n(x, p) = (-1)^{n+1} \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^\infty e^{-u} u^{-p-n-1} du = R_n(x, p). \quad (5.180)$$

Em valor absoluto

$$|I(x, p) - s_n(x, p)| \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \int_x^\infty e^{-u} u^{-p-n-1} du.$$

Quando substituimos  $u = v + x$ , a integral se torna

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-u} u^{-p-n-1} du &= e^{-x} \int_0^\infty e^{-v} (v+x)^{-p-n-1} dv \\ &= \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}} \int_0^\infty e^{-v} \left(1 + \frac{v}{x}\right)^{-p-n-1} dv. \end{aligned}$$

Para  $x$  grandes, a integral final se aproxima de 1 e

$$|I(x, p) - s_n(x, p)| \approx \frac{(p+n)!}{(p-1)!} \cdot \frac{e^{-x}}{x^{p+n+1}}. \quad (5.181)$$

Isso significa que, se tomarmos  $x$  suficientemente grande, nossa soma parcial  $s_n$  é uma aproximação arbitrariamente boa para a função da  $I(x, p)$ . Portanto, nossa série divergente (Equação (5.178)) é perfeitamente boa para cálculos de somas parciais. Por essa razão, ela costuma ser denominada série **semiconvergente**. Note que a potência de  $x$  no denominador do resto  $(p+n+1)$  é mais alta do que a potência de  $x$  no último termo incluído em  $s_n(x, p)$ ,  $(p+n)$ .

Uma vez que o sinal do resto  $R_n(x, p)$  se alterna, as somas parciais sucessivas dão, alternativamente, limites superiores e inferiores para  $I(x, p)$ . O comportamento da série (com  $p = 1$ ) como uma função do número de termos incluídos é mostrado na Figura 5.12. Temos

$$\begin{aligned} e^x E_1(x) &= e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \\ &\cong s_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \end{aligned} \quad (5.182)$$

que é avaliada em  $x = 5$ . A determinação ótima de  $e^x E_1(x)$  é dada pela melhor aproximação dos limites superiores e inferiores, isto é, entre  $s_4 = s_6 = 0,1664$  e  $s_5 = 0,1741$  para  $x = 5$ . Portanto,

$$0,1664 \leq e^x E_1(x) \Big|_{x=5} \leq 0,1741. \quad (5.183)$$

Na verdade, pelas tabelas,

$$e^x E_1(x) \Big|_{x=5} = 0,1704, \quad (5.184)$$

dentro dos limites estabelecidos por nossa expansão assintótica. Note que a inclusão de termos adicionais na expansão da série além do ponto ótimo literalmente reduz a precisão da representação. À medida que  $x$  aumenta, a amplitude entre o limite superior e o limite inferior diminui. Considerando  $x$  suficientemente grande, podemos calcular  $e^x E_1(x)$  para qualquer grau de precisão. Outras propriedades de  $E_1(x)$  são derivadas e discutidas na Seção 8.5.



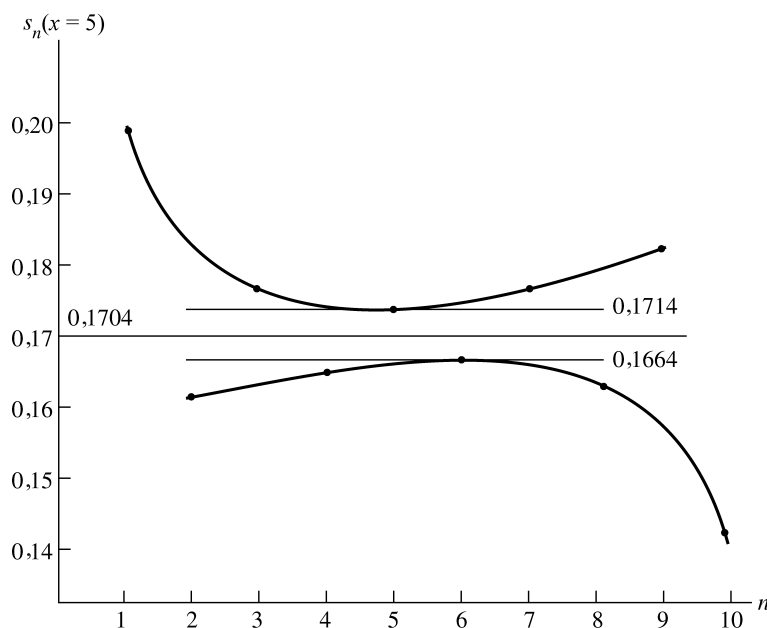


Figura 5.12: Somas parciais de  $e^x E_1(x)|_{x=5}$ .

### Integrais de Seno e Co-seno

Séries assintóticas também podem ser desenvolvidas a partir de integrais definidas se o integrando tiver o comportamento requerido. Como exemplo, as integrais de seno e co-seno (Seção 8.5) são definidas por

$$Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \tag{5.185}$$

$$si(x) = - \int_x^\infty \frac{\sen t}{t} dt. \tag{5.186}$$

Combinando essas integrais com funções trigonométricas regulares, podemos definir

$$f(x) = Ci(x)\sen x - si(x)\cos x = \int_0^\infty \frac{\sen y}{y+x} dy, \tag{5.187}$$

$$g(x) = -Ci(x)\cos x - si(x)\sen x = \int_0^\infty \frac{\cos y}{y+x} dy,$$

com a nova variável  $y = t - x$ . Partindo para variáveis complexas, Seção 6.1, temos

$$g(x) + if(x) = \int_0^\infty \frac{e^{iy}}{y+x} dy = \int_0^\infty \frac{ie^{-xu}}{1+iu} du, \tag{5.188}$$

na qual  $u = -iy/x$ . Os limites de integração, 0 a  $\infty$ , em vez de 0 a  $-i\infty$ , podem ser justificados pelo teorema de Cauchy, Seção 6.3. Racionalizando o denominador e igualando parte real com parte imaginária, obtemos

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{ue^{-xu}}{1+u^2} du, \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{1+u^2} du. \tag{5.189}$$

Para convergência das integrais devemos exigir que  $\Re(x) > 0$ .<sup>25</sup>

Agora, para desenvolver as expansões assintóticas, seja  $v = xu$  e expanda o fator precedente  $[1 + (v/x)^2]^{-1}$

<sup>25</sup> $\Re(x)$  = parte real de  $x$  (complexo), (compare com Seção 6.1).

pelo teorema binomial.<sup>26</sup> Temos

$$f(x) \approx \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-v} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{v^{2n}}{x^{2n}} dv = \frac{1}{x} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}}, \quad (5.190)$$

$$g(x) \approx \frac{1}{x^2} \int_0^\infty e^{-v} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{v^{2n+1}}{x^{2n}} dv = \frac{1}{x^2} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}.$$

Pelas Equações (5.187) e (5.190),

$$\text{Ci}(x) \approx \frac{\text{sen } x}{x} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos x}{x^2} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}, \quad (5.191)$$

$$\text{si}(x) \approx -\frac{\cos x}{x} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\text{sen } x}{x^2} \sum_{0 \leq n \leq N} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}$$

são as expansões assintóticas desejadas.

Essa técnica de expandir o integrando de uma integral definida e integrar termo a termo é aplicada na Seção 11.6, para desenvolver uma expansão assintótica da função de Bessel modificada  $K_\nu$ , e na Seção 13.5, para expansões das duas funções hipergeométricas confluentes  $M(a, c; x)$  e  $U(a, c; x)$ .

### Definição de Série Assintótica

O comportamento dessas séries (Equações (5.178) e (5.191)) é consistente com as propriedades que definem uma série assintótica.<sup>27</sup> Conforme Poincaré, consideramos<sup>28</sup>

$$x^n R_n(x) = x^n [f(x) - s_n(x)], \quad (5.192)$$

em que

$$s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}. \quad (5.193)$$

A expansão assintótica de  $f(x)$  tem as seguintes propriedades

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = 0, \quad \text{para } n \text{ fixo}, \quad (5.194)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n R_n(x) = \infty, \quad \text{para } x \text{ fixo} \quad (5.195)$$

Veja as Equações (5.178) e (5.179) para um exemplo dessas propriedades. Para a série de potências, como admitimos na forma de  $s_n(x)$ ,  $R_n(x) \sim x^{-n-1}$ . Com as condições (5.194) e (5.195) satisfeitas, escrevemos,

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}. \quad (5.196)$$

Note a utilização de  $\approx$  no lugar de  $=$ . A função  $f(x)$  é igual à série somente no limite à medida que  $x \rightarrow \infty$  e para número finito de termos na série.

Expansões assintóticas de duas funções podem ser multiplicadas, e o resultado será uma expansão assintótica do produto das duas funções.

A expansão assintótica de uma dada função  $f(t)$  pode ser integrada termo a termo (exatamente como em uma série uniformemente convergente de funções contínuas)  $x \leq t < \infty$ , e o resultado será uma expansão assintótica

<sup>26</sup>Essa etapa é válida para  $v \leq x$ . As contribuições de  $v \geq x$  serão desprezíveis (para  $x$  grande) por causa da exponencial negativa. É porque a expansão binomial não converge para  $v \geq x$  que nossa série final é assintótica em vez de convergente.

<sup>27</sup>Não é necessário que a série assintótica seja uma série de potências. A propriedade exigida é que o resto  $R_n(x)$  seja de ordem mais alta do que o último termo mantido – como na Equação (5.194).

<sup>28</sup>A definição de Poincaré permite (ou despreza) funções exponencialmente decrescentes. O refinamento da definição de Poincaré é de considerável importância para a teoria avançada de expansões assintóticas, em particular para extensões para o plano complexo. Todavia, para a finalidade de um tratamento introdutório, e em especial para cálculo numérico com  $x$  real e positivo, a abordagem de Poincaré é perfeitamente satisfatória.

<sup>29</sup>Isso exclui a série convergente de potências inversas de  $x$ . Alguns autores acham que essa exclusão é artificial e desnecessária.



de  $\int_x^\infty f(t) dt$ . Contudo, a diferenciação termo a termo é válida somente sob condições muito especiais.

Algumas funções não possuem uma expansão assintótica;  $e^x$  é um exemplo de uma função dessas. Todavia, se uma função tiver uma expansão assintótica, tem somente uma. A correspondência não é um para um; muitas funções têm a mesma expansão assintótica.

Um dos métodos mais úteis e poderosos para gerar expansões assintóticas, o método dos declínios mais acentuados, será desenvolvido na Seção 7.3. Entre as aplicações estão a derivação da fórmula de Stirling para a função fatorial (completa, Seção 8.3) e as formas assintóticas das várias funções de Bessel (Seção 11.6). Séries assintóticas ocorrem com razoável frequência na física matemática. Uma das aproximações mais antigas, e ainda importante da mecânica quântica, a expansão **WKB**, é uma série assintótica.

### Exercícios

**5.10.1** A fórmula de Stirling para o logaritmo da função fatorial

$$\ln(x!) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x - \sum_{n=1}^N \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} x^{1-2n}.$$

Os  $B_{2n}$  são os números de Bernoulli (Seção 5.9). Mostre que a fórmula de Stirling é uma expansão **assintótica**.

**5.10.2** Integrando por partes, desenvolva expansões assintóticas das integrais de Fresnel.

$$(a) C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \quad (b) s(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi u^2}{2} du.$$

Essas integrais aparecem na análise de um padrão de difração em gume de faca.

**5.10.3** Derive novamente as expansões assintóticas de  $\text{Ci}(x)$  e  $\text{si}(x)$  por repetida integração por partes.

*Sugestão:*  $\text{Ci}(x) + i \text{si}(x) = - \int_x^\infty \frac{e^{it}}{t} dt$ .

**5.10.4** Derive a expansão assintótica da função de erro de Gauss

$$\begin{aligned} \text{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &\approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n x^{2n}} \right). \end{aligned}$$

*Sugestão:*  $\text{erf}(x) = 1 - \text{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ .

Essa função, quando normalizada de modo que  $\text{erf}(\infty) = 1$ , desempenha um importante papel na teoria da probabilidade. Ela pode ser expressa em termos das integrais de Fresnel (Exercício 5.10.2), das funções gama incompletas (Seção 8.5) e das funções hipergeométricas confluentes (Seção 13.5).

**5.10.5** As expressões assintóticas para as várias funções de Bessel, Seção 11.6, contêm as séries

$$\begin{aligned} P_\nu(z) &\sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\prod_{s=1}^{2n} [4\nu^2 - (2s-1)^2]}{(2n)!(8z)^{2n}}, \\ Q_\nu(z) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{s=1}^{2n-1} [4\nu^2 - (2s-1)^2]}{(2n-1)!(8z)^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Mostre que essas duas séries são, de fato, séries assintóticas.

**5.10.6** Para  $x > 1$ ,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Teste essa série para ver se ela é uma série assintótica.

**5.10.7** Derive as seguintes séries assintóticas de números de Bernoulli para a constante de Euler-Mascheroni:

$$\gamma = \sum_{s=1}^n s^{-1} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^N \frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}.$$

*Sugestão:* Aplique a fórmula de integração de Euler-Maclaurin a  $f(x) = x^{-1}$  sobre o intervalo  $[1, n]$  para  $N = 1, 2, \dots$

**5.10.8** Desenvolva uma série assintótica para

$$\int_0^\infty e^{-xv} (1+v^2)^{-2} dv.$$

Considere  $x$  real e positivo.

Resposta:  $\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots + \frac{(-1)^n (2n)!}{x^{2n+1}}$ .

**5.10.9** Calcule somas parciais de  $e^x E_1(x)$  para  $x = 5, 10$  e  $15$  para exibir o comportamento demonstrado na Figura 5.11. Determine a largura do “gargalo” para  $x = 10$  e  $15$ , análogo à Equação (5.183).

Resposta: Largura do “gargalo”:  $n = 10; 0,000051$   
 $n = 15; 0,0000002$ .

**5.10.10** O padrão de difração em gume de faca é descrito por

$$I = 0,5I_0 \{ [C(u_0) + 0,5]^2 + [S(u_0) + 0,5]^2 \},$$

em que  $C(u_0)$  e  $S(u_0)$  são as integrais de Fresnel do Exercício 5.10.2. Aqui,  $I_0$  é a intensidade incidente e  $I$  é a intensidade difratada;  $u_0$  é proporcional à distância de afastamento do gume de faca (medida em ângulo reto em relação ao raio incidente). Calcule  $I/I_0$  para  $u_0$ , variando de  $-1, 0$  a  $+4, 0$  em passos de  $0,1$ . Tabule os resultados obtidos e, se dispuser de uma rotina de plotagem, construa um gráfico com esses resultados.

**Valor de verificação.**  $u_0 = 1, 0, I/I_0 = 1, 259226$ .

**5.10.11** A fórmula de integração de Euler-Maclaurin da Seção 5.9 fornece um modo para calcular a constante  $\gamma$  de Euler-Mascheroni com alta precisão. Usando  $f(x) = 1/x$  na Equação (5.168b) (com intervalo  $[1, n]$ ) e a definição de  $\gamma$  da (Equação 5.28), obtemos

$$\gamma = \sum_{s=1}^n s^{-1} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^N \frac{B_{2k}}{(2k)n^{2k}}.$$

Usando aritmética de dupla precisão, calcule  $\gamma$  para  $N = 1, 2, \dots$

*Nota:* D. E. Knuth, Constante de Euler até 1271 casas decimais. *Math. Comput.* 16: 275 (1962). Um cálculo ainda mais preciso aparece no Exercício 8.5.16.

Resposta: Para  $n = 1000, N = 2$   
 $\gamma = 0, 5772 1566 4901$ .

## 5.11 Produtos Infinitos

Considere uma sucessão de fatores positivos  $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdots f_n (f_i > 0)$ . Usando  $(\prod)$  para indicar produto, assim como sigma maiúsculo ( $\sum$ ) indica uma soma, temos

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n = \prod_{i=1}^n f_i. \tag{5.197}$$

Definimos  $p_n$ , um produto parcial, por analogia com  $s_n$  a soma parcial,

$$p_n = \prod_{i=1}^n f_i \tag{5.198}$$

e então investigamos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = P. \tag{5.199}$$

Se  $P$  é finito (mas não zero), dizemos que o produto infinito é convergente. Se  $P$  é infinito ou zero, o produto infinito é denominado divergente.

Uma vez que o produto divergirá até o infinito se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n > 1 \tag{5.200}$$



ou até zero para

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n < 1 \quad (\text{and } > 0), \quad (5.201)$$

é conveniente escrever nossos produtos infinitos como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

então, a condição  $a_n \rightarrow 0$  é uma condição necessária (mas não suficiente) para convergência.

O produto infinito pode ser relacionado com uma série infinita pelo método óbvio de considerar o logaritmo

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n). \quad (5.202)$$

Uma relação mais útil é estabelecida pelo teorema que vem a seguir.

### Convergência de Produto Infinito

Se  $0 \leq a_n < 1$ , os produtos infinitos  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  e  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  convergem se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergir e divergem se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergir.

Considerando o termo  $1 + a_n$ , vemos pela Equação (5.90) que

$$1 + a_n \leq e^{a_n}. \quad (5.203)$$

Por conseguinte, para o produto parcial  $p_n$ , sendo  $s_n$  a soma parcial dos  $a_i$ ,

$$p_n \leq e^{s_n}, \quad (5.204)$$

e, deixando que  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (5.205)$$

estabelecendo assim um limite superior para o produto infinito.

Para desenvolver um limite inferior, notamos que

$$p_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j + \cdots \geq s_n, \quad (5.206)$$

uma vez que  $a_i \geq 0$ . Por conseguinte,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (5.207)$$

Se a soma infinita permanecer finita, o produto infinito também permanecerá. Se a soma infinita divergir, o produto infinito também divergirá.

O caso de  $\prod (1 - a_n)$  é complicado pelos sinais negativos, mas pode-se desenvolver uma prova que depende da prova antecedente, notando que, para  $a_n < \frac{1}{2}$  (lembre-se de  $a_n \rightarrow 0$  para convergência),

$$(1 - a_n) \leq (1 + a_n)^{-1}$$

e

$$(1 - a_n) \geq (1 + 2a_n)^{-1}. \quad (5.208)$$

### Seno, Co-seno, Funções Gama

Um polinômio de enésima ordem  $P_n(x)$  com  $n$  raízes reais pode ser escrito como um produto de  $n$  fatores (veja a Seção 6.4, teorema fundamental de Gauss da álgebra):

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (5.209)$$

Desse mesmo modo, podemos esperar que uma função com um número infinito de raízes possa ser escrita como um produto infinito, um fator para cada raiz. E, de fato, é isso que acontece em funções trigonométricas. Temos duas representações de produto infinito muito úteis,

$$\boxed{\text{sen } x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}, \quad (5.210)$$

$$\boxed{\text{cos } x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]}. \quad (5.211)$$

A derivação mais conveniente e talvez a mais elegante dessas duas expressões resulta da utilização de variáveis complexas.<sup>30</sup> Por nosso teorema de convergência, Equações (5.210) e (5.211) são convergentes para todos os valores finitos de  $x$ . Especificamente, para o produto infinito para  $\text{sen } x$ ,  $a_n = x^2/n^2\pi^2$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{x^2}{\pi^2} \zeta(2) = \frac{x^2}{6}, \quad (5.212)$$

pelo Exercício 5.9.6. A série correspondente à Equação (5.211) se comporta de maneira semelhante.

A Equação (5.210) leva a dois resultados interessantes. Primeiro, se estabelecermos  $x = \pi/2$ , obtemos

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n)^2}\right] = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right]. \quad (5.213)$$

Resolvendo para  $\pi/2$ , temos

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right] = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots, \quad (5.214)$$

que é a famosa fórmula de Wallis para  $\pi/2$ .

O segundo resultado envolve a função gama ou função fatorial (Seção 8.1). Uma definição da função gama é

$$\boxed{\Gamma(x) = \left[ x e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r} \right]^{-1}}, \quad (5.215)$$

em que  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni usual (compare com a Seção 5.2). Se considerarmos o produto de  $\Gamma(x)$  e  $\Gamma(-x)$ , a Equação (5.215) leva a

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(-x) &= - \left[ x e^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r} x e^{-\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{x/r} \right]^{-1} \\ &= - \frac{1}{x^2} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.216)$$

Usando a Equação (5.210) com  $x$  substituído por  $\pi x$ , obtemos

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = - \frac{\pi}{x \text{sen } \pi x}. \quad (5.217)$$

Antecipando uma relação de recorrência desenvolvida na Seção 8.1, temos  $-x\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$ . A Equação (5.217) pode ser escrita como

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen } \pi x}}. \quad (5.218)$$

Isso será útil no tratamento da função gama (Capítulo 8).

Em termos estritos, deveríamos verificar a faixa de  $x$  para a qual a Equação (5.215) é convergente. Fica claro que fatores individuais desaparecerão para  $x = 0, -1, -2, \dots$ . Deixamos para o Exercício 5.11.9 a prova de que o produto infinito converge para todos os outros valores (finitos) de  $x$ .

Esses produtos infinitos têm uma variedade de usos na matemática. Contudo, por causa da convergência bastante lenta, não são adequados para trabalho numérico de precisão em física.

<sup>30</sup>Veja as Equações (7.25) e (7.26).



### Exercícios

5.11.1 Usando

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 \pm a_n)$$

e a expansão de Maclaurin de  $\ln(1 \pm a_n)$ , mostre que o produto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n)$  converge ou diverge com a série infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

5.11.2 Um produto infinito aparece na forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + a/n}{1 + b/n} \right),$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes. Mostre que esse produto infinito converge somente se  $a = b$ .

5.11.3 Mostre que as representações de produto infinito de  $\sin x$  e  $\cos x$  são consistentes com a identidade  $2\sin x \cos x = \sin 2x$ .

5.11.4 Determine o limite para o qual

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

converge.

5.11.5 Mostre que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$$

5.11.6 Prove que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

5.11.7 Usando as representações de produto infinito de  $\sin x$ , mostre que

$$x \cotg x = 1 - 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n\pi} \right)^{2m},$$

e, por conseguinte, que o número de Bernoulli

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

5.11.8 Verifique a identidade de Euler

$$\prod_{p=1}^{\infty} (1 + z^p) = \prod_{q=1}^{\infty} (1 - z^{2q-1})^{-1}, \quad |z| < 1.$$

5.11.9 Mostre que  $\prod_{r=1}^{\infty} (1 + x/r)e^{-x/r}$  converge para todo  $x$  finito (exceto para os zeros de  $1 + x/r$ ).  
Sugestão: Escreva o  $n$ ésimo fator como  $1 + a_n$ .

5.11.10 Calcule  $\cos x$  a partir de sua representação de produto infinito, Equação (5.211), usando (a) 10, (b) 100 e (c) 1.000 fatores no produto. Calcule o erro absoluto. Note quão lentamente os produtos parciais convergem — tornando o produto infinito bastante inadequado para trabalho numérico de precisão.

Resposta: Para 1.000 fatores,  $\cos \pi = -1,00051$ .

## Leituras Adicionais

O tópico da série infinita é tratado em muitos textos de cálculo avançado.

Bender, C. M., e S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Nova York: McGraw-Hill (1978). Recomendado, em particular, para métodos de aceleração de convergência.

Davis, H. T., *Tables of Higher Mathematical Functions*. Bloomington, IN: Principia Press (1935). O volume II contém informação extensiva sobre números e polinômios de Bernoulli.

Dingle, R. B., *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Nova York: Academic Press (1973).

Galambos, J., *Representations of Real Numbers by Infinite Series*. Berlim: Springer (1976).

Gradshteyn, I. S., e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*. 6<sup>a</sup> ed. corrigida e ampliada preparada por Alan Jeffrey. Nova York: Academic Press (2000).

Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Reimpressão, Nova tiragem, Nova York: Dover (1987).

Hansen, E., *A Table of Series and Products*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1975). Uma impressionante compilação de séries e produtos.

Hardy, G. H., *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press (1956), 2<sup>a</sup>. ed., Chelsea (1992). A obra-padrão, definitiva, sobre métodos de tratamento de séries divergentes. Hardy inclui relatos instrutivos sobre o desenvolvimento gradual dos conceitos de convergência e divergência.

Jeffrey, A., *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. San Diego: Academic Press (1995).

Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*. Londres: Blackie and Son (2<sup>a</sup>. ed.); Nova York: Hafner (1971). Nova tiragem: A. K. Peters Classics (1997). Essa é uma obra completa, abrangente e autorizada sobre séries e produtos infinitos. Neste livro são encontradas provas para quase todas as afirmações não-provadas do Capítulo 5.

Mangulis, V., *Handbook of Series for Scientists and Engineers*. Nova York: Academic Press (1965). É uma coletânea de séries muito conveniente e instrutiva. Inclui funções algébricas, séries de Fourier e séries das funções especiais: Bessel, Legendre, e assim por diante.

Olver, F. W. J., *Asymptotics and Special Functions*. Nova York: Academic Press (1974). Um desenvolvimento detalhado e de fácil leitura da teoria assintótica. É dada considerável atenção aos limites de erros para utilização em computação.

Rainville, E. D., *Infinite Series*. Nova York, Macmillan (1967). Um relato útil e de fácil leitura de constantes e funções de séries.

Sokolnikoff, I. S., e R. M. Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2<sup>a</sup> ed., Nova York; McGraw-Hill (1966). Um longo Capítulo 2 (101 páginas) apresenta séries infinitas de uma forma completa, porém de leitura muito fácil. São incluídas extensões para as soluções de equações diferenciais, séries complexas e para séries de Fourier.



## 6

# Funções de uma Variável Complexa I

## Propriedades Analíticas, Mapeamento

*Os números imaginários são um vôo maravilhoso do espírito divino;  
são quase um anfíbio entre ser e não ser.*

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ, 1702

Agora passamos ao estudo de uma variável complexa. Nessa área desenvolveremos algumas das ferramentas mais poderosas e de utilização mais ampla em toda a análise. Para mostrar, ao menos parcialmente, por que variáveis complexas são importantes, mencionamos brevemente diversas áreas de aplicação.

1. Para muitos pares de funções  $u$  e  $v$ ,  $u$  e  $v$  satisfazem a equação de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Por conseguinte, qualquer delas,  $u$  ou  $v$ , pode ser usada para descrever um potencial eletrostático bidimensional. A outra função, que dá uma família de curvas ortogonais às da primeira função, pode então ser usada para descrever o campo elétrico  $\mathbf{E}$ . Uma situação semelhante ocorre na hidrodinâmica de um fluido ideal em movimento irrotacional. A função  $u$  poderia descrever o potencial de velocidade, enquanto a função  $v$  seria então a função corrente.

Em muitos casos nos quais as funções  $u$  e  $v$  são desconhecidas, mapeamento ou transformação no plano complexo nos permite criar um sistema de coordenadas ajustado ao problema particular.

2. No Capítulo 9 veremos que as equações diferenciais de segunda ordem de interesse para a física podem ser resolvidas por séries de potências. Essas mesmas séries podem ser usadas no plano complexo para substituir  $x$  pela variável complexa  $z$ . A dependência da solução  $f(z)$  em um dado  $z_0$  do comportamento de  $f(z)$  em outro lugar nos dá uma idéia melhor do comportamento de nossa solução e uma poderosa ferramenta (continuação analítica) para ampliar a região na qual a solução é válida.

3. A mudança de um parâmetro  $k$  de real para imaginário,  $k \rightarrow ik$ , transforma a equação de Helmholtz na equação de difusão. A mesma mudança transforma as soluções da equação de Helmholtz (funções de Bessel e funções esféricas de Bessel) nas soluções da equação de difusão (funções de Bessel modificadas e funções de Bessel esféricas modificadas).

4. Integrais no plano complexo têm uma ampla variedade de aplicações úteis:

- Avaliação de integrais definidas;
- Inversão de séries de potências;
- Formação de produtos infinitos;
- Obtenção de soluções de equações diferenciais para grandes valores da variável (soluções assintóticas);
- Investigação da estabilidade de sistemas potencialmente oscilantes;
- Inversão de transformadas integrais.

5. Muitas quantidades físicas que originalmente eram reais tornam-se complexas, assim como uma teoria física simples torna-se geral. O índice de refração real da luz torna-se uma quantidade complexa quando é incluída a absorção. A energia real associada com um nível de energia torna-se complexa quando o tempo finito de vida do nível é considerado.

## 6.1 Álgebra Complexa

Um número complexo nada mais é do que um par ordenado de dois números reais,  $(a, b)$ . De modo semelhante, uma variável complexa é um par ordenado de duas variáveis reais,<sup>1</sup>

$$z \equiv (x, y). \quad (6.1)$$

A ordem é significativa. Em geral  $(a, b)$  não é igual a  $(b, a)$  e  $(x, y)$  não é igual a  $(y, x)$ . Como sempre, continuamos a escrever um número real  $(x, 0)$  simplesmente como  $x$ , e denominamos  $i \equiv (0, 1)$  a unidade imaginária.

Toda a nossa análise de variável complexa pode ser desenvolvida em termos de pares ordenados de números  $(a, b)$ , variáveis  $(x, y)$  e funções  $(u(x, y), v(x, y))$ .

Agora, definimos **adição** de números complexos em termos de suas componentes cartesianas como

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (6.2a)$$

isto é, adição vetorial bidimensional. No Capítulo 1, os pontos no plano  $xy$  são identificados com o vetor de deslocamento bidimensional  $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y$ . O resultado disso é que vetores bidimensionais análogos podem ser desenvolvidos para grande parte de nossa análise complexa. O Exercício 6.1.2 é um exemplo simples; o teorema da Cauchy, Seção 6.3, é outro.

**Multiplicação** de números complexos é definida como

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (6.2b)$$

Usando a Equação (6.2b), verificamos que  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ , portanto, também podemos identificar  $i = \sqrt{-1}$ , como sempre, e então reescrever a Equação (6.1) como

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy. \quad (6.2c)$$

É claro que o  $i$  não é necessário aqui, mas é conveniente. Ele serve para manter pares em ordem — parecido com os vetores unitários do Capítulo 1.<sup>2</sup>

### Permanência da Forma Algébrica

Todas as nossas funções elementares,  $e^z$ ,  $\sin z$ , e assim por diante, podem ser estendidas para o plano complexo (compare com o Exercício 6.1.9). Por exemplo, elas podem ser definidas por expansões de série de potências, tal como

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (6.3)$$

para a exponencial. Tais definições estão de acordo com as definições de variável real ao longo do eixo  $x$  real e estendem as funções reais correspondentes para o plano complexo. Esse resultado costuma ser chamado de **permanência da forma algébrica claro**.

É conveniente empregar uma representação gráfica da variável complexa. Plotando  $x$  — a parte real de  $z$  — como a abscissa e  $y$  — a parte imaginária de  $z$  — como a ordenada, temos o plano complexo, ou plano de Argand, mostrado na Figura 6.1. Se atribuímos valores específicos a  $x$  e  $y$ , então  $z$  corresponde a um ponto  $(x, y)$  no plano. Em termos da ordenação mencionada antes, é óbvio que o ponto  $(x, y)$  não coincide com o ponto  $(y, x)$  exceto no caso especial de  $x = y$ . Além do mais, podemos escrever, pela Figura 6.1,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (6.4a)$$

e

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (6.4b)$$

<sup>1</sup>É exatamente assim que um computador executa aritmética complexa.

<sup>2</sup>A álgebra de números complexos,  $(a, b)$ , é isomórfica com a álgebra de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(compare com o Exercício 3.2.4).

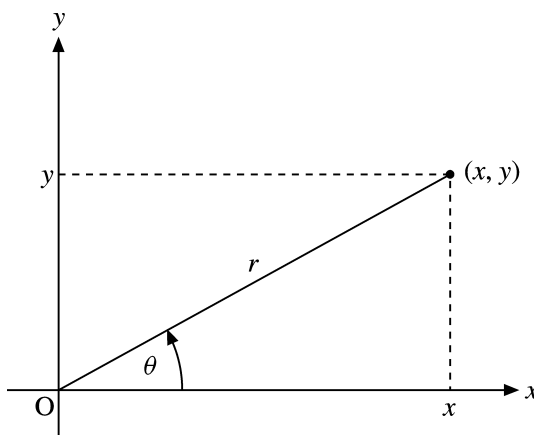


Figura 6.1: Plano complexo — diagrama de Argand.

Usando um resultado sugerido (mas não provado com rigor)<sup>3</sup> pela Seção 5.6 e o Exercício 5.6.1, temos a útil representação polar

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}. \quad (6.4c)$$

Para provar essa identidade, usamos  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1, \dots$  na expansão de Taylor das funções exponenciais e trigonométricas e separamos potências pares e ímpares em

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\theta^{2\nu}}{(2\nu)!} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\theta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Para os valores especiais  $\theta = \pi/2$  e  $\theta = \pi$ , obtemos

$$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i, \quad e^{i\pi} = \cos(\pi) = -1,$$

conexões intrigantes entre  $e$ ,  $i$  e  $\pi$ . Além do mais, a função exponencial  $e^{i\theta}$  é periódica com período  $2\pi$ , exatamente como  $\operatorname{sen} \theta$  e  $\cos \theta$ .

Nessa representação  $r$  é denominado **módulo** ou **grandeza** de  $z$  ( $r = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ) e o ângulo  $\theta$  ( $\operatorname{tg}^{-1}(y/x)$ ) é denominado o argumento ou **fase** de  $z$ . (Note que a função arco tangente  $\operatorname{tg}^{-1}(y/x)$  tem infinitamente muitos ramos.)

A escolha de representação polar, Equação (6.4c), ou representação cartesiana, Equações (6.1) e (6.2c), é uma questão de conveniência. Adição e subtração de variáveis complexas são mais fáceis na representação cartesiana, Equação (6.2a). Multiplicação, divisão, potências e raízes são mais fáceis de tratar em forma polar, Equação (6.4c).

Seja analítica ou graficamente, usando a analogia com vetores, podemos mostrar que o módulo da soma de dois números complexos não é maior do que a soma dos módulos e não é menor do que a diferença, Exercício 6.1.3,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (6.5)$$

Por causa da analogia vetorial, essas desigualdades são denominadas **triangulares**.

Usando a forma polar, Equação (6.4c), constatamos que a grandeza de um produto é o produto das grandezas:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (6.6)$$

Além disso,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (6.7)$$

<sup>3</sup>Em termos estritos, o Capítulo 5 limitou-se às variáveis reais. O desenvolvimento de expansões de séries de potências para funções complexas é retomado na Seção 6.5 (expansão de Laurent).

Por meio de nossa variável complexa  $z$ , podemos construir funções complexas  $f(z)$  ou  $w(z)$ . Então, essas funções complexas podem ser resolvidas para partes real e imaginária,

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{6.8}$$

nas quais as funções separadas  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são reais puras. Por exemplo, se  $f(z) = z^2$ , temos

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

A **parte real** de uma função  $f(z)$  será representada por  $\Re f(z)$ , ao passo que a **parte imaginária** será representada por  $\Im f(z)$ . Na Equação (6.8)

$$\Re w(z) = \text{Re}(w) = u(x, y), \quad \Im w(z) = \text{Im}(w) = v(x, y).$$

A relação entre a variável independente  $z$  e a variável dependente  $w$  talvez seja mais bem retratada como uma operação de mapeamento. Um  $z = x + iy$  dado significa um ponto no plano  $z$ . Então, o valor complexo de  $w(z)$  é um ponto no plano  $w$ . Pontos no plano  $z$  são mapeados nos pontos no plano  $w$  e curvas no plano  $z$  são mapeadas curvas no plano  $w$ , como indicado na Figura 6.2.

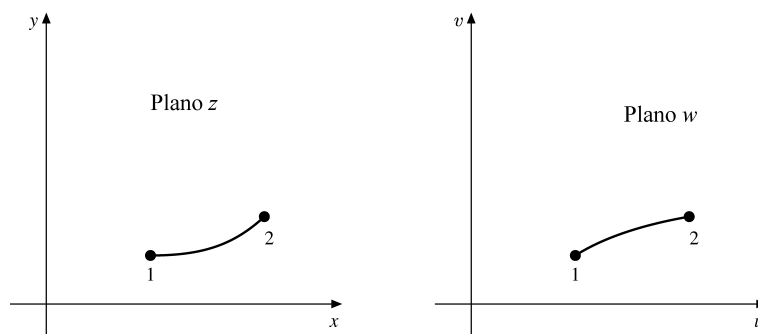


Figura 6.2: A função  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mapeia pontos no plano  $xy$  para pontos no plano  $uv$ .

### Conjugação Complexa

Em todas essas etapas, número complexo, variável complexa e função complexa, a operação de substituição de  $i$  por  $-i$  é denominada “tomar o complexo conjugado”. O complexo conjugado de  $z$  é denotado por  $z^*$ , em que<sup>4</sup>

$$z^* = x - iy. \tag{6.9}$$

A variável complexa  $z$  e seu complexo conjugado  $z^*$  são imagens especulares uma da outra refletidas no eixo  $x$ , isto é, inversão do eixo  $y$  (compare com a Figura 6.3). O produto  $zz^*$  leva a

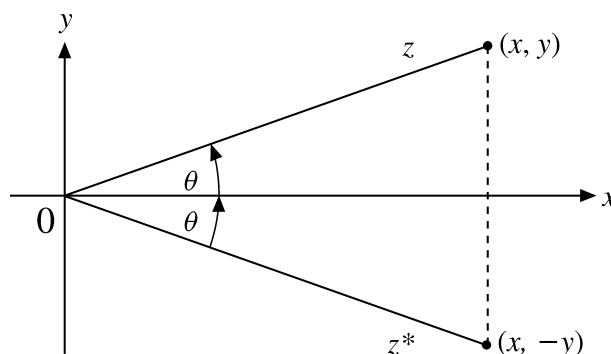


Figura 6.3: Pontos complexos conjugados.

<sup>4</sup>O complexo conjugado costuma ser denotado por  $\bar{z}$  na literatura matemática.



$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = r^2. \quad (6.10)$$

Por conseguinte,

$$(zz^*)^{1/2} = |z|,$$

a **grandeza** de  $z$ .

### Funções de uma Variável Complexa

Todas as funções elementares de variáveis reais podem ser estendidas para o plano complexo-substituindo a variável real  $x$  pela variável complexa  $z$ . Isso é um exemplo da continuação analítica mencionada na Seção 6.5. A relação de extrema importância da Equação (6.4c) é uma ilustração. Passar para o plano complexo abre novas oportunidades para análise.

#### Exemplo 6.1.1 FÓRMULA DE DE MOIVRE

Se a Equação (6.4c) (estabelecendo  $r = 1$ ) for elevada à  $n$ ésima potência, temos

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n. \quad (6.11)$$

Expandindo a exponencial, agora com argumento  $n\theta$ , obtemos

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n. \quad (6.12)$$

A fórmula de De Moivre é gerada se o lado direito da Equação (6.12) for expandido pelo teorema binomial; obtemos  $\cos n\theta$  como uma série de potências de  $\cos \theta$  e  $\operatorname{sen} \theta$ , Exercício 6.1.6.

Numerosos outros exemplos de relações entre as funções exponenciais, hiperbólicas e trigonométricas no plano complexo aparecem nos exercícios.

Ocasionalmente há complicações. O logaritmo de uma variável complexa pode ser expandido usando a representação polar

$$\ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta. \quad (6.13a)$$

Isso não está completo. No que tange ao ângulo de fase,  $\theta$ , podemos adicionar qualquer inteiro múltiplo de  $2\pi$  sem alterar  $z$ . Daí, a Equação (6.13a) deve ser

$$\ln z = \ln r e^{i(\theta+2n\pi)} = \ln r + i(\theta + 2n\pi). \quad (6.13b)$$

O parâmetro  $n$  pode ser qualquer inteiro, o que significa que  $\ln z$  é uma função de **valores múltiplos** que tem um número infinito de valores para um único par de valores reais  $r$  e  $\theta$ . Para evitar ambigüidade, a escolha mais simples é  $n = 0$  e limitar a fase a um intervalo de comprimento  $2\pi$ , tal como  $(-\pi, \pi)$ .<sup>5</sup> A reta no plano  $z$  que não é cruzada, nesse caso o eixo real negativo, é denominada **linha de corte** ou **corte de ramo**. O valor de  $\ln z$  com  $n = 0$  é denominado **valor principal** de  $\ln z$ . Uma discussão mais detalhada dessas funções, incluindo o logaritmo, aparece na Seção 6.7.

### Exercícios

- 6.1.1** (a) Ache a recíproca de  $x + iy$ , trabalhando inteiramente na representação cartesiana.  
 (b) Repita a parte (a) trabalhando em forma polar, mas expressando o resultado em forma cartesiana.
- 6.1.2** As quantidades complexas  $a = u + iv$  e  $b = x + iy$  também podem ser representadas como vetores bidimensionais  $\mathbf{a} = \hat{x}u + \hat{y}v$ ,  $\mathbf{b} = \hat{x}x + \hat{y}y$ . Mostre que

$$a^*b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\hat{z} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

<sup>5</sup>Não há nenhum padrão para a escolha de fase; a fase adequada depende de cada problema.

**6.1.3** Prove algebricamente que, para números complexos,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Interprete esse resultado em termos de vetores bidimensionais. Prove que

$$|z - 1| < |\sqrt{z^2 - 1}| < |z + 1|, \quad \text{para } \Re(z) > 0.$$

**6.1.4** Podemos definir um operador de conjugação complexa  $K$ , tal que  $Kz = z^*$ . Mostre que  $K$  não é um operador linear.

**6.1.5** Mostre que números complexos têm raízes quadradas e que as raízes quadradas estão contidas no plano complexo. Quais são as raízes quadradas de  $i$ ?

**6.1.6** Mostre que

$$(a) \cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \text{sen}^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \text{sen}^4 \theta - \dots$$

$$(b) \text{sen } n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \text{sen } \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \text{sen}^3 \theta + \dots$$

*Nota:* As quantidades  $\binom{n}{m}$  são coeficientes binomiais:  $\binom{n}{m} = n! / [(n - m)!m!]$ .

**6.1.7** Prove que

$$(a) \sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \frac{\text{sen } (Nx/2)}{\text{sen } x/2} \cos(N-1) \frac{x}{2},$$

$$(b) \sum_{n=0}^{N-1} \text{sen } nx = \frac{\text{sen } (Nx/2)}{\text{sen } x/2} \text{sen } (N-1) \frac{x}{2}.$$

Essas séries ocorrem na análise do padrão de difração de fenda múltipla. Uma outra aplicação é a análise do fenômeno de Gibbs, Seção 14.5.

*Sugestão:* As partes (a) e (b) podem ser combinadas para formar uma série geométrica (compare com a Seção a 5.1).

**6.1.8** Para  $-1 < p < 1$ , prove que

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1 - p \cos x}{1 - 2p \cos x + p^2},$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \text{sen } nx = \frac{p \text{sen } x}{1 - 2p \cos x + p^2}.$$

Essas séries ocorrem na teoria do interferômetro de Fabry-Perot.

**6.1.9** Admita que as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas são definidas para argumento complexo pela série de potências adequada.

$$\text{sen } z = \sum_{n=1, \text{ ímpar}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0, \text{ par}}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!},$$

$$\text{sen } h z = \sum_{n=1, \text{ ímpar}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s}}{(2s)!}.$$

(a) Mostre que

$$\begin{aligned} i \text{sen } z &= \sinh iz, & \text{sen } iz &= i \text{senh } z, \\ \cos z &= \cosh iz, & \cos iz &= \cosh z. \end{aligned}$$

(b) Verifique que relações funcionais familiares, tais como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\text{sen}(z_1 + z_2) = \text{sen } z_1 \cos z_2 + \text{sen } z_2 \cos z_1,$$



ainda serão válidas no plano complexo.

**6.1.10** Usando as identidades

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

estabelecidas por comparação de séries de potências, mostre que

(a)  $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

(b)  $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$

Isso demonstra que podemos ter  $|\operatorname{sen} z|, |\cos z| > 1$  no plano complexo.

**6.1.11** Pelas identidades nos Exercícios 6.1.9 e 6.1.10, mostre que

(a)  $\operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y,$

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y,$$

(b)  $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y, \quad |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \operatorname{sen}^2 y.$

**6.1.12** Prove que

(a)  $|\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{sen} x| \quad \text{(b)} \quad |\cos z| \geq |\cos x|.$

**6.1.13** Mostre que a função exponencial  $e^z$  é periódica com um período imaginário puro de  $2\pi i$ .

**6.1.14** Mostre que

(a)  $tg \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{senh} x + i \operatorname{sen} y}{\cosh x + \cos y}, \quad \text{(b)} \quad tg \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{senh} x - i \operatorname{sen} y}{\cosh x - \cos y}.$

**6.1.15** Ache todos os zeros de

(a)  $\operatorname{sen} z, \quad \text{(b)} \quad \cos z, \quad \text{(c)} \quad \operatorname{senh} z, \quad \text{(d)} \quad \cosh z.$

**6.1.16** Mostre que

(a)  $\operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}), \quad \text{(d)} \quad \operatorname{senh}^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}),$

(b)  $\cos^{-1} z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), \quad \text{(e)} \quad \cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$

(c)  $tg^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left( \frac{i + z}{i - z} \right), \quad \text{(f)} \quad tg^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right).$

*Sugestão:* 1. Expresse as funções trigonométrica e hiperbólica em termos de exponenciais.  
2. Resolva para a exponencial e então para o expoente.

**6.1.17** Na teoria quântica da fotoionização, encontramos a identidade

$$\left( \frac{ia - 1}{ia + 1} \right)^{ib} = \exp(-2b \cot^{-1} a),$$

na qual  $a$  e  $b$  são reais. Verifique essa identidade.

**6.1.18** Uma onda de luz plana de frequência angular  $\omega$  é representada por

$$e^{i\omega(t - nx/c)}.$$

Em uma certa substância, o índice real simples de refração  $n$  é substituído pela quantidade complexa  $n - ik$ . Qual é o efeito de  $k$  sobre a onda? A que  $k$  corresponde em termos físicos? A generalização de uma quantidade da forma real para a forma complexa ocorre com frequência na física. Exemplos abrangem desde o módulo complexo de Young de materiais viscoelásticos até o potencial (óptico) complexo da “bola de cristal nublada” do modelo do núcleo atômico.

**6.1.19** Vemos que, para as componentes do momento angular definidas no Exercício 2.5.14,

$$L_x - iL_y \neq (L_x + iL_y)^*.$$

Explique por que isso ocorre.

**6.1.20** Mostre que a **fase** de  $f(z) = u + iv$  é igual à parte imaginária do logaritmo de  $f(z)$ . O Exercício 8.2.13 depende desse resultado.

**6.1.21** (a) Mostre que  $e^{\ln z}$  é sempre igual a  $z$ .  
 (b) Mostre que  $\ln e^z$  nem sempre é igual a  $z$ .

**6.1.22** As representações de produto infinito da Seção 5.11 são válidas quando a variável real  $x$  é substituída pela variável complexa  $z$ . A partir dessa afirmativa, desenvolva representações de produto infinito para  
 (a)  $\sinh z$ , (b)  $\cosh z$ .

**6.1.23** A equação de movimento de uma massa  $m$  **em relação a um sistema de coordenadas em rotação** é

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - m \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right).$$

Considere o caso  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y$ , e  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$ , com  $\omega$  constante. Mostre que a substituição de  $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y$  by  $z = x + iy$  leva a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + i2\omega \frac{dz}{dt} - \omega^2 z = 0.$$

*Nota:* Essa equação diferencial ordinária pode ser resolvida pela substituição de  $z = fe^{-i\omega t}$ .

**6.1.24** Usando a aritmética complexa disponível em FORTRAN, escreva um programa para calcular a exponencial complexa  $e^z$  a partir de sua expansão de série (definição). Calcule  $e^z$  para  $z = e^{in\pi/6}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ . Tabule o ângulo de fase ( $\theta = n\pi/6$ ),  $\Re z$ ,  $\Im z$ ,  $\Re(e^z)$ ,  $\Im(e^z)$ ,  $|e^z|$  e a fase de  $e^z$ .

**Valor de verificação.**  $n = 5, \theta = 2, 61799, \Re(z) = -0, 86602,$   
 $\Im z = 0, 50000, \Re(e^z) = 0, 36913, \Im(e^z) = 0, 20166,$   
 $|e^z| = 0, 42062, \text{fase}(e^z) = 0, 50000.$

**6.1.25** Usando a aritmética complexa disponível em FORTRAN, calcule e tabule  $\Re(\sinh z)$ ,  $\Im(\sinh z)$ ,  $|\sinh z|$  e fase ( $\sinh z$ ) para  $x = 0, 0(0, 1)1, 0$  e  $y = 0, 0(0, 1)1, 0$ .

*Sugestão:* Cuidado com a divisão por zero ao calcular um ângulo como um arco tangente.

**Valor de verificação.**  $z = 0, 2 + 0, 1i, \Re(\sinh z) = 0, 20033,$   
 $\Im(\sinh z) = 0, 10184, |\sinh z| = 0, 22473,$   
 $\text{fase}(\sinh z) = 0.47030.$

**6.1.26** Repita o Exercício 6.1.25 para  $\cosh z$ .

## 6.2 Condições de Cauchy-Riemann

Agora que já estabelecemos funções complexas de uma variável complexa, passamos a diferenciá-las. A derivada de  $f(z)$ , tal como a de uma função real, é definida por

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{z + \delta z - z} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{df}{dz} = f'(z), \tag{6.14}$$

contanto que o limite seja **independente** da aproximação particular ao ponto  $z$ . Para variáveis reais, exigimos que o limite do lado direito ( $x \rightarrow x_0$ , por cima) e o limite do lado esquerdo ( $x \rightarrow x_0$ , por baixo) sejam iguais para que a derivada  $df(x)/dx$  exista em  $x = x_0$ . Agora, sendo  $z$  (ou  $z_0$ ) algum ponto em um plano, nosso requisito de que o limite seja independente da direção de aproximação é muito restritivo.

Considere incrementos  $\delta x$  e  $\delta y$  das variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente. Então,

$$\delta z = \delta x + i\delta y. \tag{6.15}$$

Além disso,

$$\delta f = \delta u + i\delta v, \tag{6.16}$$

de modo que

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}. \tag{6.17}$$





Vamos considerar o limite indicado pela Equação (6.14) por duas aproximações diferentes, como mostra a Figura 6.4. Primeiro, com  $\delta y = 0$ , deixamos que  $\delta x \rightarrow 0$ . A Equação (6.14) resulta em

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.18)$$

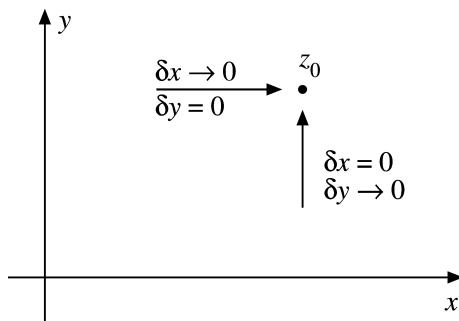


Figura 6.4: Aproximações alternativas a  $z_0$ .

admitindo-se que as derivadas parciais existam. Para uma segunda aproximação, estabelecemos  $\delta x = 0$  e então deixamos  $\delta y \rightarrow 0$ . Isso leva a

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left( -i \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6.19)$$

Como precisamos ter uma derivada  $df/dz$ , as Equações (6.18) e (6.19) devem ser idênticas. Igualando as partes reais às partes reais e as partes imaginárias às partes imaginárias (como componentes de vetores), obtemos

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.} \quad (6.20)$$

Essas são as famosas condições de **Cauchy-Riemann**. Foram descobertas por Cauchy e usadas extensivamente por Riemann em sua teoria de funções analíticas. Essas condições de Cauchy-Riemann são necessárias para a existência de uma derivada de  $f(z)$ ; isto é, se  $df/dz$  existe, as condições de Cauchy-Riemann devem valer.

Ao contrário, se as condições de Cauchy-Riemann forem satisfeitas e as derivadas parciais de  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  forem contínuas, a derivada  $df/dz$  existe. Isso pode ser mostrado escrevendo-se

$$\delta f = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta y. \quad (6.21)$$

A justificativa para essa expressão depende da continuidade das derivadas parciais de  $u$  e  $v$ . Dividindo por  $\delta z$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta z} &= \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x))\delta x + (\partial u/\partial y + i(\partial v/\partial y))\delta y}{\delta x + i\delta y} \\ &= \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)) + (\partial u/\partial y + i(\partial v/\partial y))\delta y/\delta x}{1 + i(\delta y/\delta x)}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Como  $\delta f/\delta z$  precisa ter um valor único, a dependência de  $\delta y$ ,  $\delta x$  deve ser eliminada. Aplicando as condições de Cauchy-Riemann às derivadas em  $y$ , obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.23)$$

Substituindo a Equação (6.23) na Equação (6.22), podemos cancelar a dependência  $\delta y/\delta x$  e

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.24)$$

o que mostra que  $\lim \delta f / \delta z$  é independente da direção de aproximação no plano complexo, contanto que as derivadas parciais sejam contínuas. Assim,  $\frac{df}{dz}$  existe e  $f$  é analítica em  $z$ .

Vale a pena notar que as condições de Cauchy-Riemann garantem que as curvas  $u = c_1$  serão ortogonais às curvas  $v = c_2$  (compare com a Seção 2.1). Isso é fundamental na aplicação a problemas de potencial em uma variedade de áreas da física. Se  $u = c_1$  é uma linha de energia elétrica,  $v = c_2$  é uma linha (superfície) equipotencial e vice-versa. Para ver isso, vamos escrever as condições de Cauchy-Riemann como um produto de razões de derivadas parciais,

$$\frac{u_x}{u_y} \cdot \frac{v_x}{v_y} = -1, \tag{6.25}$$

com as abreviações

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv v_y.$$

Agora, lembre-se de que o significado geométrico de  $-u_x/u_y$  é a inclinação da tangente de cada curva  $u(x, y) = \text{constante}$ , e a mesma coisa para  $v(x, y) = \text{constante}$ . Isso significa que as curvas  $u = \text{constante}$  e  $v = \text{constante}$  são mutuamente ortogonais em cada interseção. Alternativamente,

$$u_x dx + u_y dy = 0 = v_y dx - v_x dy$$

nos diz que, se  $(dx, dy)$  é tangente à curva  $u$ , então a ortogonal  $(-dy, dx)$  é tangente à curva  $v$  no ponto de interseção,  $z = (x, y)$ . Ou, o que é equivalente,  $u_x v_x + u_y v_y = 0$  implica que os **vetores gradientes**  $(u_x, u_y)$  e  $(v_x, v_y)$  são **perpendiculares**. Uma outra implicação para a teoria do potencial é desenvolvida no Exercício 6.2.1.

### Funções Analíticas

Por fim, se  $f(z)$  é diferenciável em  $z = z_0$  e em alguma pequena região em torno de  $z_0$ , dizemos que  $f(z)$  é **analítica**<sup>6</sup> em  $z = z_0$ . Se  $f(z)$  é analítica em todo o plano complexo (finito), nós a denominamos função **inteira**. Aqui, nossa teoria de variáveis complexas é uma teoria de funções analíticas de uma variável complexa, o que destaca a importância crucial das condições de Cauchy-Riemann. O conceito de analiticidade adotado em teorias avançadas da física moderna desempenha um papel crucial na teoria da dispersão (de partículas elementares). Se  $f'(z)$  não existir em  $z = z_0$ , então  $z_0$  é denominado ponto singular e adiamos seu estudo até a Seção 6.6.

Para ilustrar as condições de Cauchy-Riemann, considere dois exemplos muito simples.

#### Exemplo 6.2.1 $z^2$ É ANALÍTICA

Seja  $f(z) = z^2$ . Então a parte real  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e a parte imaginária  $v(x, y) = 2xy$ . Segundo a Equação (6.20),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vemos que  $f(z) = z^2$  satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em todo o plano complexo. Visto que as derivadas parciais são claramente contínuas, concluímos que  $f(z) = z^2$  é analítica. ■

#### Exemplo 6.2.2 $z^*$ Não é Analítica

Seja  $f(z) = z^*$ . Agora  $u = x$  e  $v = -y$ . Aplicando as condições de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

As condições de Cauchy-Riemann não são satisfeitas e  $f(z) = z^*$  não é uma função analítica de  $z$ . É interessante notar que  $f(z) = z^*$  é contínua e, portanto, é um exemplo de uma função que é contínua em todo lugar mas não diferenciável em nenhum lugar no plano complexo.

A derivada de uma função real de uma variável real é, em essência, uma característica local, no sentido de que ela fornece informação sobre a função somente em uma vizinhança local - por exemplo, como uma expansão de Taylor truncada. A existência de uma derivada de uma função de uma variável complexa tem implicações de alcance muito maior. As partes real e imaginária de nossa função analítica devem satisfazer separadamente a equação de Laplace. Esse assunto do Exercício 6.2.1. Além disso, nossa função analítica tem, garantidas, derivadas de todas as ordens, Seção 6.4. Nesse sentido, a derivada não somente comanda o comportamento local da função complexa, mas também controla o comportamento distante. ■

<sup>6</sup>Alguns autores usam o termo **holomórfica** ou **regular**.



## Exercícios

**6.2.1** As funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são, respectivamente, as partes real e imaginária de uma função analítica  $w(z)$ .

(a) Admitindo que as derivadas requeridas existem, mostre que

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Soluções da equação de Laplace, tais como  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , são denominadas **funções harmônicas**.

(b) Mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

e dê uma interpretação geométrica.

*Sugestão:* A técnica da Seção 1.6 permite que você construa vetores normais às curvas  $u(x, y) = c_i$  e  $v(x, y) = c_j$ .

**6.2.2** Mostre se a função  $f(z) = \Re(z) = x$  é analítica ou não.

**6.2.3** Agora que já mostramos que a parte real  $u(x, y)$  e a parte imaginária  $v(x, y)$  de uma função analítica  $w(z)$  satisfazem, cada uma por si, a equação de Laplace, mostre que **ambas**,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , **não podem ter nem um máximo nem um mínimo** no interior de qualquer região na qual  $w(z)$  é analítica. (Elas só podem ter pontos de sela.)

**6.2.4** Sejam  $A = \partial^2 w / \partial x^2$ ,  $B = \partial^2 w / \partial x \partial y$ ,  $C = \partial^2 w / \partial y^2$ . Pelo cálculo de funções de duas variáveis,  $w(x, y)$ , temos um **ponto de sela** se

$$B^2 - AC > 0.$$

Com  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , aplique as condições de Cauchy-Riemann e mostre que **nem**  $u(x, y)$  **nem**  $v(x, y)$  **têm um máximo ou um mínimo** em uma região finita do plano complexo. (Veja também a Seção 7.3.)

**6.2.5** Ache a função analítica

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

se (a)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ , (b)  $v(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$ .

**6.2.6** Se há alguma região comum na qual  $w_1 = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $w_2 = w_1^* = u(x, y) - iv(x, y)$  são ambas analíticas, prove que  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são constantes.

**6.2.7** A função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é analítica. Mostre que  $f^*(z^*)$  também é analítica.

**6.2.8** Usando  $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Phi(r, \theta)}$ , na qual  $R(r, \theta)$  e  $\Phi(r, \theta)$  são funções reais diferenciáveis de  $r$  e  $\theta$ , mostre que as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares se tornam

$$(a) \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (b) \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

*Sugestão:* Estabeleça a derivada primeiro com  $\delta z$  e em seguida com  $\delta z$  tangencial.

**6.2.9** Como uma extensão do Exercício 6.2.8, mostre que  $\Phi(r, \theta)$  satisfaz a equação de Laplace em coordenadas polares. A Equação (2.35) (sem o termo final e igualada a zero) é o laplaciano em coordenadas polares.

**6.2.10** O escoamento bidimensional de fluido irrotacional é convenientemente descrito por um potencial complexo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Denominamos a parte real,  $u(x, y)$ , velocidade potencial, e a parte imaginária,  $v(x, y)$ , função corrente. A velocidade do fluido  $\mathbf{V}$  é dada por  $\mathbf{V} = \nabla u$ . Se  $f(z)$  é analítica,

(a) Mostre que  $df/dz = V_x - iV_y$ ;

(b) Mostre que  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  (nenhuma fonte, nenhum mergulho);

(c) Mostre que  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$  (escoamento irrotacional, não-turbulento).

**6.2.11** Uma prova da desigualdade de Schwarz (Seção 10.4) envolve minimizar uma expressão,

$$f = \psi_{aa} + \lambda \psi_{ab} + \lambda^* \psi_{ab}^* + \lambda \lambda^* \psi_{bb} \geq 0.$$

Os  $\psi$  são integrais de produtos de funções;  $\psi_{aa}$  e  $\psi_{bb}$  são reais,  $\psi_{ab}$  é complexa e  $\lambda$  é um parâmetro complexo.

- (a) Diferencie a expressão precedente com relação a  $\lambda^*$ , tratando  $\lambda$  como um parâmetro independente, independente de  $\lambda^*$ . Mostre que igualar a derivada  $\partial f / \partial \lambda^*$  a zero resulta em

$$\lambda = -\frac{\psi_{ab}^*}{\psi_{bb}}$$

- (b) Mostre que  $\partial f / \partial \lambda = 0$  leva ao mesmo resultado.  
 (c) Sejam  $\lambda = x + iy, \lambda^* = x - iy$ . Iguale as derivadas de  $x$  e  $y$  a zero e mostre, mais uma vez, que

$$\lambda = -\frac{\psi_{ab}^*}{\psi_{bb}}$$

Essa independência de  $\lambda$  e  $\lambda^*$  aparece novamente na Seção 17.7.

**6.2.12** A função  $f(z)$  é analítica. Mostre que a derivada de  $f(z)$  em relação a  $z^*$  não existe, a menos que  $f(z)$  seja uma constante.

*Sugestão:* Use a regra da cadeia e tome  $x = (z + z^*)/2, y = (z - z^*)/2i$ .

*Nota:* Esse resultado enfatiza que nossa função analítica  $f(z)$  não é apenas uma função complexa de duas variáveis reais  $x$  e  $y$ . Ela é uma função da variável complexa  $x + iy$ .

### 6.3 Teorema Integral de Cauchy

#### Integrais de Contorno

Agora que já temos a diferenciação sob controle, passamos para a integração. A integral de uma variável complexa sobre um contorno no plano complexo pode ser definida por uma analogia fiel à integral (de Riemann) de uma função real integrada ao longo do eixo real  $x$ .

Dividimos o contorno de  $z_0$  a  $z'_0$  em  $n$  intervalos, escolhendo  $n - 1$  pontos intermediários  $z_1, z_2, \dots$  sobre o contorno (Figura 6.5). Considere a soma

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}), \tag{6.26}$$

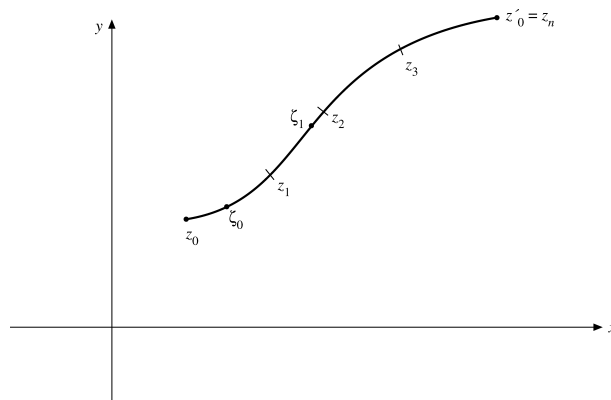


Figura 6.5: Caminho de integração.

em que  $\zeta_j$  é um ponto sobre a curva entre  $z_j$  e  $z_{j-1}$ . Agora deixe que

$$|z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0$$

para todo  $j$ . Se o  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe e é independente dos detalhes da escolha dos pontos  $z_j$  e  $\zeta_j$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_0}^{z'_0} f(z) dz. \tag{6.27}$$

O lado direito da Equação (6.27) é denominado integral de contorno de  $f(z)$  (ao longo do contorno especificado  $C$  de  $z = z_0$  a  $z = z'_0$ ).



O desenvolvimento precedente da integral de contorno é estritamente análogo à integral de Riemann de uma função real de uma variável real. Como alternativa, a integral de contorno pode ser definida por

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz &= \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y) + iv(x, y)] [dx + idy] \\ &= \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y) dx + u(x, y) dy], \end{aligned}$$

com a junção de caminho  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  especificada. Isso reduz a integral complexa à soma complexa de integrais reais, o que guarda uma certa analogia com a substituição de uma integral vetorial pela soma vetorial de integrais escalares, Seção 1.10.

Um exemplo importante é a integral de contorno  $\int_C z^n dz$ , em que  $C$  é um círculo de raio  $r > 0$  ao redor da origem  $z = 0$  no sentido matemático positivo (anti-horário). Parametrizamos o círculo como  $z = re^{i\theta}$  e  $dz = ire^{i\theta} d\theta$  em coordenadas polares da Equação (6.4c). Então, para  $n \neq -1$ , sendo  $n$  um inteiro, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C z^n dz &= \frac{r^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(n+1)\theta] d\theta \\ &= [2\pi i(n+1)]^{-1} r^{n+1} [e^{i(n+1)\theta}]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \tag{6.27a}$$

porque  $2\pi$  é um período de  $e^{i(n+1)\theta}$ , ao passo que, para  $n = -1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1, \tag{6.27b}$$

mais uma vez independente de  $r$ .

Alternativamente, podemos **integrar ao redor de um retângulo** com os vértices  $z_1, z_2, z_3, z_4$  para obter para  $n \neq -1$

$$\int z^n dz = \left. \frac{z^{n+1}}{n+1} \right|_{z_1}^{z_2} + \left. \frac{z^{n+1}}{n+1} \right|_{z_2}^{z_3} + \left. \frac{z^{n+1}}{n+1} \right|_{z_3}^{z_4} + \left. \frac{z^{n+1}}{n+1} \right|_{z_4}^{z_1} = 0,$$

porque cada ponto de vértice aparece uma vez como um limite superior e uma vez como um limite inferior que se cancelam. Para  $n = -1$ , as partes reais correspondentes dos logaritmos se cancelam de maneira semelhante, mas suas partes imaginárias envolvem os argumentos crescentes dos pontos de  $z_1$  a  $z_4$  e, quando voltamos ao primeiro vértice  $z_1$ , seu argumento aumentou de  $2\pi$  devido à multivalidade do logaritmo, portanto,  $2\pi i$  é deixado de parte como o valor da integral. Assim, **o valor da integral que envolve uma função de valor múltiplo deve ser o valor que é alcançado de um modo contínuo no caminho tomado**. Essas integrais são exemplos do teorema integral de Cauchy, que consideramos na seção seguinte.

### Prova do Teorema de Stokes

O teorema integral de Cauchy é o primeiro de dois teoremas básicos da teoria do comportamento de funções de uma variável complexa. Em primeiro lugar, oferecemos uma prova sob condições relativamente restritivas — condições que são intoleráveis para o matemático que está desenvolvendo uma linda teoria abstrata, mas que em geral são satisfeitas em problemas físicos.

Se uma função  $f(z)$  é analítica, isto é, se suas derivadas parciais são contínuas em toda alguma **região simplesmente conectada**  $R$ ,<sup>7</sup> para todo caminho fechado  $C$  (Figura 6.6) em  $R$ , e se é de valor único (o que admitimos aqui por simplicidade), a integral de linha de  $f(z)$  ao redor de  $C$  é zero ou

$$\int_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz = 0. \tag{6.27c}$$

Lembre-se de que na Seção 1.13 essa função  $f(z)$ , identificada como uma força, era denominada conservativa. O símbolo  $\oint$  é usado para enfatizar que o caminho é fechado. Note que o interior da região simplesmente conectada limitada por um contorno é aquela região que se encontra à esquerda quando se percorre a direção indicada pelo contorno; como regra, uma região simplesmente conectada é limitada por uma única curva fechada.

<sup>7</sup>Qualquer curva simples fechada (que não se intercepta a si mesma) dentro de uma região simplesmente conectada, ou domínio pode ser contraída até um único ponto que ainda pertence à região. Se uma região não é simplesmente conectada, ela é denominada multiplamente conectada. Como exemplo de região multiplamente conectada, considere o plano  $z$  com o interior do círculo unitário **excluído**.

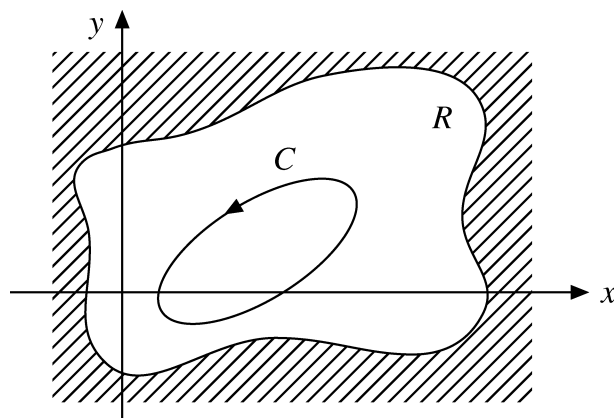


Figura 6.6: Um contorno fechado  $C$  dentro de uma região  $R$  simplesmente conexa.

Nessa forma, o teorema integral de Cauchy pode ser provado por aplicação direta do teorema de Stokes (Seção 1.12). Com  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $dz = dx + idy$ ,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Essas duas integrais de linha podem ser convertidas a integrais de superfície pelo teorema de Stokes, um procedimento que é justificado se as derivadas parciais forem contínuas dentro de  $C$ . Ao aplicar o teorema de Stokes, note que as duas integrais finais da Equação (6.28) são reais. Usando

$$\mathbf{V} = \hat{x}V_x + \hat{y}V_y,$$

o teorema de Stokes diz que

$$\oint_C (V_x dx + V_y dy) = \int \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.29)$$

Seja  $u = V_x$  e  $v = -V_y$ , para a primeira integral na última parte da Equação (6.28).<sup>8</sup> Então,

$$\begin{aligned} \oint_C (u dx - v dy) &= \oint_C (V_x dx + V_y dy) \\ &= \int \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy = - \int \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Seja  $u = V_y$  e  $v = V_x$  para a segunda integral no lado direito da Equação (6.28). Usando o teorema de Stokes mais uma vez, obtemos

$$\oint_C (v dx + u dy) = \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.31)$$

Aplicando as condições de Cauchy-Riemann, que devem valer, uma vez que, por suposição,  $f(z)$  é analítica, cada integrando desaparece e

$$\oint f(z) dz = - \int \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (6.32)$$

### Prova de Cauchy-Goursat

Isso conclui a prova do teorema integral de Cauchy. Contudo, de um ponto de vista teórico, ela é prejudicada pela necessidade de continuidade das primeiras derivadas parciais. Na verdade, como demonstrado por Goursat, essa condição não é necessária. Damos a seguir um esboço da prova de Goursat. Subdividimos a região dentro do contorno  $C$  em uma rede de pequenos quadrados, como indicado na Figura 6.7. Então,

<sup>8</sup>Na prova do teorema de Stokes, Seção 1.12,  $V_x$  e  $V_y$  são duas funções quaisquer (com derivadas parciais contínuas).

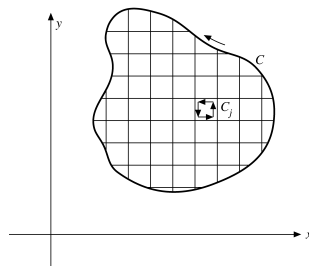


Figura 6.7: Contornos de Cauchy-Goursat.

$$\oint_C f(z) dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz, \quad (6.33)$$

e todas as integrais ao longo das linhas internas são canceladas. Para estimar a  $\oint_{C_j} f(z) dz$ , construímos a função

$$\delta_j(z, z_j) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_j}, \quad (6.34)$$

sendo  $z_j$  um ponto interior da  $j$ -ésima sub-região. Note que  $[f(z) - f(z_j)]/(z - z_j)$  é uma aproximação da derivada em  $z = z_j$ . De modo equivalente, podemos notar que, se  $f(z)$  tivesse uma expansão de Taylor (o que ainda não provamos), então  $\delta_j(z, z_j)$  seria de ordem  $z - z_j$ , aproximando-se de zero à medida que a rede ficasse cada vez mais delgada. Mas, uma vez que  $f'(z_j)$  existe, isto é, é finita, podemos fazer

$$|\delta_j(z, z_j)| < \varepsilon, \quad (6.35)$$

em que  $\varepsilon$  é uma quantidade positiva pequena escolhida arbitrariamente. Resolvendo a Equação (6.34) para  $f(z)$  e integrando ao redor de  $C_j$ , obtemos

$$\oint_{C_j} f(z) dz = \oint_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z, z_j) dz, \quad (6.36)$$

sendo que as integrais dos outros termos desaparecem.<sup>9</sup> Quando as Equações (6.35) e (6.36) são combinadas, podemos mostrar que

$$\left| \sum_j \oint_{C_j} f(z) dz \right| < A\varepsilon, \quad (6.37)$$

em que  $A$  é um termo da ordem da área da região envolvida. Visto que  $\varepsilon$  é arbitrário, deixamos que  $\varepsilon \rightarrow 0$  e concluímos que, se uma função  $f(z)$  é analítica sobre e dentro de um caminho fechado  $C$ ,

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (6.38)$$

Detalhes da prova dessa forma significativamente mais geral e mais poderosa podem ser encontrados em Churchill nas Leituras Adicionais. Na verdade, ainda podemos provar o teorema para  $f(z)$  analítica dentro do interior de  $C$  e somente contínua sobre  $C$ .

A consequência do teorema integral de Cauchy é que, para funções analíticas, a integral de linha é uma função apenas de suas extremidades, independente do caminho de integração,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) = - \int_{z_2}^{z_1} f(z) dz, \quad (6.39)$$

mais uma vez exatamente como no caso de uma força conservativa, Seção 1.13.

<sup>9</sup>  $\oint dz$  e  $\oint z dz = 0$  e pela Equação (6.27a).

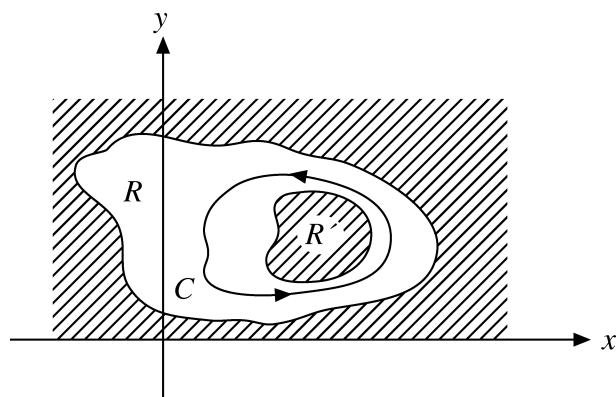


Figura 6.8: Um contorno fechado  $C$  em uma região multiplamente conexa.

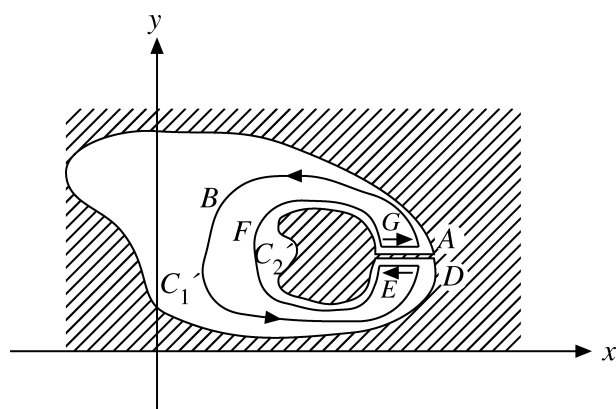


Figura 6.9: Conversão de uma região multiplamente conexa em uma região simplesmente conexa.

### Regiões Multiplamente Conexas

O enunciado original do teorema integral de Cauchy exigia uma região simplesmente conexa. Essa restrição pode ser amenizada pela criação de uma barreira, uma linha de contorno. A finalidade da construção da linha de contorno que apresentamos a seguir é permitir, dentro de uma região multiplamente conexa, a identificação de curvas que podem ser reduzidas a um ponto dentro da região, isto é, a construção de uma sub-região que é simplesmente conexa.

Considere a região multiplamente conexa da Figura 6.8, na qual  $f(z)$  não é definida para o interior,  $R'$ . O teorema integral de Cauchy não é válido para o contorno  $C$ , como já demonstrado, mas podemos construir um contorno  $C'$  para o qual o teorema vale. Desenhemos uma linha desde a região proibida interior,  $R'$ , até a região proibida exterior a  $R$ , e então construimos um novo contorno,  $C'$ , como mostra a Figura 6.9.

O novo contorno,  $C'$ , por meio de  $ABDEFGA$ , nunca cruza a linha de contorno que literalmente converte  $R$  em uma região simplesmente conexa. Uma técnica tridimensional análoga a essa foi usada na Seção 1.14 para provar a lei de Gauss. Pela Equação (6.39),

$$\int_G^A f(z) dz = - \int_E^D f(z) dz, \tag{6.40}$$

sendo que  $f(z)$  se mantém contínua por toda a linha de contorno e segmentos de linhas  $DE$  e  $GA$  arbitrariamente próximos um do outro. Então,

$$\oint_{C'} f(z) dz = \int_{ABD} f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz = 0 \tag{6.41}$$

pelo teorema integral de Cauchy, com a região  $R$  agora simplesmente conexa. Aplicando a Equação (6.39) mais uma vez com  $ABD \rightarrow C'_1$  e  $EFG \rightarrow -C'_2$ , obtemos

$$\oint_{C'_1} f(z) dz = \oint_{C'_2} f(z) dz, \tag{6.42}$$





na qual  $C'_1$  e  $C'_2$  são ambas atravessadas na mesma direção (sentido anti-horário, isto é, positivo).

É preciso enfatizar que, aqui, a linha de contorno é uma questão de conveniência matemática, para permitir a aplicação do teorema integral de Cauchy. Uma vez que  $f(z)$  é analítica na região anular, ela é necessariamente de valor único e contínua por toda qualquer linha de contorno como essa.

### Exercícios

**6.3.1** Mostre que  $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z) dz$ .

**6.3.2** Prove que

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq |f|_{\max} \cdot L,$$

em que  $|f|_{\max}$  é o valor máximo de  $|f(z)|$  ao longo do contorno  $C$  e  $L$  é o comprimento do contorno.

**6.3.3** Verifique que

$$\int_{0,0}^{1,1} z^* dz$$

depende do caminho avaliando a integral para os dois caminhos mostrados na Figura 6.10. Lembre-se de que  $f(z) = z^*$  não é uma função analítica de  $z$  e que, portanto, o teorema integral de Cauchy não se aplica.

**6.3.4** Mostre que

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + z} = 0,$$

na qual o contorno  $C$  é um círculo definido por  $|z| = R > 1$ .

*Sugestão:* A utilização direta do teorema integral de Cauchy não é válida. Por quê? A integral pode ser avaliada transformando-se para coordenadas polares e usando-se tabelas. Isso resulta em 0 para  $R > 1$  e  $2\pi i$  para  $R < 1$ .

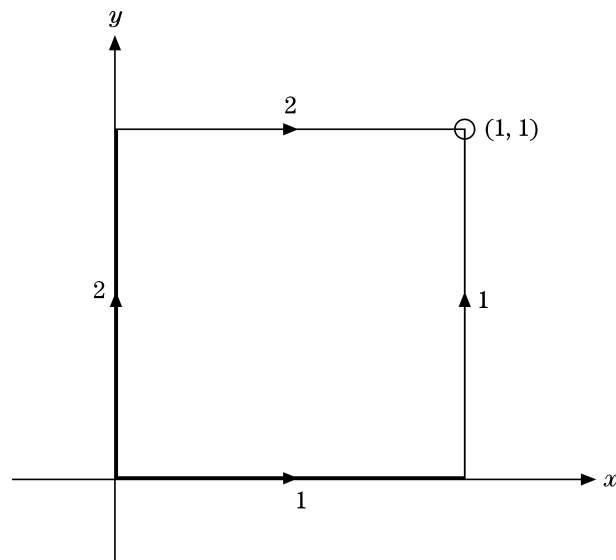


Figura 6.10: Contorno.

## 6.4 Fórmula Integral de Cauchy

Assim como na seção precedente, consideramos uma função  $f(z)$  que é analítica sobre um contorno fechado  $C$  e dentro da região interior limitada por  $C$ . Procuramos provar que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0), \tag{6.43}$$

na qual  $z_0$  é qualquer ponto na região interior limitada por  $C$ . Esse é o segundo dos dois teoremas básicos mencionados na Seção 6.3. Note que, uma vez que  $z$  está sobre o contorno  $C$ , enquanto  $z_0$  está no interior,  $z - z_0 \neq 0$ , e a equação integral, Equação (6.43), é bem definida. Embora, por suposição,  $f(z)$  seja analítica, o integrando é  $f(z)/(z - z_0)$  e não é analítico, em  $z = z_0$ , a menos que  $f(z_0) = 0$ . Se o contorno é deformado como mostrado na Figura 6.11 (ou Figura 6.9, Seção 6.3), o teorema integral de Cauchy se aplica. Pela Equação (6.42),

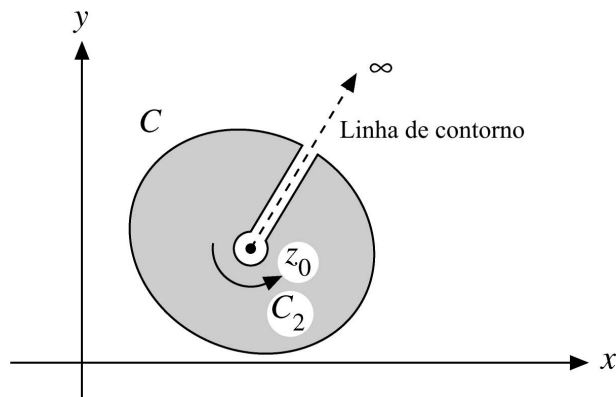


Figura 6.11: Exclusão de um ponto singular.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0, \quad (6.44)$$

em que  $C$  é o contorno externo original e  $C_2$  é o círculo que envolve o ponto  $z_0$  percorrido em direção **anti-horária**. Seja  $z = z_0 + re^{i\theta}$ , usando a representação polar por causa da forma circular do caminho ao redor de  $z_0$ . Aqui  $r$  é pequeno e eventualmente terá de se aproximar de zero. Temos (com  $dz = ire^{i\theta} d\theta$  pela Equação (6.27a))

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta.$$

Tomando o limite, à medida que  $r \rightarrow 0$ , obtemos

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = if(z_0) \int_{C_2} d\theta = 2\pi if(z_0), \quad (6.45)$$

uma vez que  $f(z)$  é analítica e, portanto, contínua em  $z = z_0$ . Isso prova a fórmula integral de Cauchy.

Eis aqui um resultado notável. O valor de uma função analítica  $f(z)$  é dado em um ponto interior  $z = z_0$ , uma vez que os valores sobre a fronteira de  $C$  sejam especificados. Isso é rigorosamente análogo a uma forma bidimensional da lei de Gauss (Seção 1.14) na qual a grandeza da carga de uma linha interior seria dada em termos da integral de superfície cilíndrica do campo elétrico  $\mathbf{E}$ .

Outra analogia é a determinação de uma função em um espaço real por uma integral da função e a correspondente função de Green (e suas derivadas) sobre a superfície limitada. A teoria da difração de Kirchhoff é um exemplo disso.

Até aqui sempre ressaltamos que  $z_0$  é um ponto interior. O que acontece se  $z_0$  for exterior a  $C$ ? Nesse caso, o integrando inteiro é analítico sobre e dentro de  $C$ . O teorema integral de Cauchy, Seção 6.3, se aplica e a integral se anula. Temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \text{ interior} \\ 0, & z_0 \text{ exterior.} \end{cases}$$

### Derivadas

A fórmula integral de Cauchy pode ser usada para obter uma expressão para a derivada de  $f(z)$ . Pela Equação (6.43), com  $f(z)$  analítica,

$$\frac{f(z_0 + \delta z_0) - f(z_0)}{\delta z_0} = \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left( \oint \frac{f(z)}{z - z_0 - \delta z_0} dz - \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right).$$



Então, por definição de derivada (Equação (6.14)),

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\delta z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \oint \frac{\delta z_0 f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)(z - z_0)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Esse resultado poderia ter sido obtido por diferenciação da Equação (6.43) sob o sinal de integral em relação a  $z_0$ . Essa abordagem formal é válida, mas a justificativa para ela está contida na análise precedente.

Essa técnica para construir derivadas pode ser repetida. Escrevemos  $f'(z_0 + \delta z_0)$  e  $f'(z_0)$ , usando a Equação (6.46). Subtraindo e dividindo por  $\delta z_0$ , e finalmente tomando o limite, à medida que  $\delta z_0 \rightarrow 0$ , temos

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3}.$$

Note que  $f^{(2)}(z_0)$  é independente da direção de  $\delta z_0$ , como deve ser. Continuando, obtemos<sup>10</sup>

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}; \quad (6.47)}$$

isto é, o requisito de que  $f(z)$  seja analítica garante não somente uma derivada de primeira ordem, mas também derivadas de **todas** as ordens! As derivadas de  $f(z)$  são automaticamente analíticas. Note que essa afirmação admite a versão de Goursat do teorema integral de Cauchy. É também por isso que a contribuição de Goursat é tão significativa no desenvolvimento de variáveis complexas.

### Teorema de Morera

Uma aplicação adicional da fórmula integral de Cauchy é na prova do **teorema de Morera**, que é o inverso do teorema integral de Cauchy. O teorema afirma o seguinte:

*Se uma função  $f(z)$  é contínua em uma região simplesmente conexa  $R$  e  $\oint_C f(z) dz = 0$  para todo contorno fechado  $C$  dentro de  $R$ , então  $f(z)$  é analítica em toda  $R$ .*

Vamos integrar  $f(z)$  de  $z_1$  a  $z_2$ . Visto que toda integral de caminho fechado de  $f(z)$  se anula, a integral é independente de caminho e depende somente de suas extremidades. Rotulamos o resultado da integração  $F(z)$ , com

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz. \quad (6.48)$$

Como identidade,

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} - f(z_1) = \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t) - f(z_1)] dt}{z_2 - z_1}, \quad (6.49)$$

usando  $t$  como uma outra variável complexa. Agora consideramos o limite à medida que  $z_2 \rightarrow z_1$ :

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t) - f(z_1)] dt}{z_2 - z_1} = 0, \quad (6.50)$$

já que  $f(t)$  é contínua.<sup>11</sup> Portanto,

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = F'(z) \Big|_{z=z_1} = f(z_1) \quad (6.51)$$

pela definição de derivada (Equação (6.14)). Já provamos que  $F'(z)$  em  $z = z_1$  existe e é igual a  $f(z_1)$ . Uma vez que  $z_1$  é qualquer ponto em  $R$ , vemos que  $F(z)$  é analítica. Então, pela fórmula integral de Cauchy (compare com a Equação (6.47)),  $F'(z) = f(z)$  também é analítica, provando o teorema de Morera.

<sup>10</sup>Essa expressão é o ponto de partida para definir derivadas de **ordem fracionária**. Veja A. Erdelyi (Ed.), *Tables of Integral Transforms*, vol. 2. Nova York: McGraw-Hill (1954). Para aplicações recentes à análise matemática, veja T. J. Osler, An integral analogue of Taylor's series and its use in computing Fourier transforms. *Math. Comput.* 26: 449 (1972), e referências nele encontradas.

<sup>11</sup>Aqui citamos o teorema do valor médio do cálculo.

Aproveitando mais uma vez nossa analogia eletrostática, poderíamos usar  $f(z)$  para representar o campo eletrostático  $\mathbf{E}$ . Se a carga líquida dentro de toda região fechada em  $R$  é zero (lei de Gauss), a densidade de carga é zero em todo lugar em  $R$ . Alternativamente, em termos da análise da Seção 1.13,  $f(z)$  representa uma força conservativa (pela definição de conservativa) e então constatamos que é sempre possível expressá-la como a derivada de uma função potencial  $F(z)$ .

Uma importante aplicação da fórmula integral de Cauchy é a **desigualdade de Cauchy**, que apresentamos a seguir. Se  $f(z) = \sum a_n z^n$  é analítica e limitada,  $|f(z)| \leq M$  sobre um círculo de raio  $r$  em torno da origem, então

$$|a_n| r^n \leq M \quad (\text{desigualdade de Cauchy}) \tag{6.52}$$

dá limites superiores para os coeficientes de sua expansão de Taylor. Para provar a Equação (6.52), vamos definir  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$  e usar a fórmula integral de Cauchy para  $a_n$ :

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq M(r) \frac{2\pi r}{2\pi r^{n+1}}.$$

Uma consequência imediata da desigualdade (6.52) é o **teorema de Liouville**: se  $f(z)$  é analítica e ligada em todo o plano complexo, ela é uma constante. De fato, se  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z$ , então a desigualdade de Cauchy (6.52) resulta em  $|a_n| \leq M r^{-n} \rightarrow 0$ , à medida que  $r \rightarrow \infty$  para  $n > 0$ . Daí,  $f(z) = a_0$ .

Ao contrário, o mais insignificante desvio de uma função analítica em relação a um valor constante implica que deve haver no mínimo uma singularidade em algum lugar no plano complexo infinito. Então, à parte as funções constantes triviais, singularidades são coisas da vida, e devemos aprender a viver com elas. Mas faremos mais do que isso. Em seguida, expandiremos uma função em uma série de Laurent em uma singularidade e usaremos singularidades para desenvolver o poderoso e útil cálculo de resíduos no Capítulo 7.

Uma famosa aplicação do teorema de Liouville resulta no **teorema fundamental da álgebra** (devido a C. F. Gauss), que diz que qualquer polinômio  $P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$  com  $n > 0$  e  $a_n \neq 0$  tem  $n$  raízes. Para provar isso, suponha que  $P(z)$  não tem nenhum zero. Então  $1/P(z)$  é analítica e ligada, à medida que  $|z| \rightarrow \infty$ . Por conseguinte,  $P(z)$  é uma constante pelo teorema de Liouville, como queríamos demonstrar. Assim,  $P(z)$  tem no mínimo uma raiz  $z_0$  e podemos dividi-lo por  $(z - z_0)$ . Então repetimos o processo para o polinômio resultante de grau  $n - 1$ . Isso leva à conclusão de que  $P(z)$  tem exatamente  $n$  raízes.

## Exercícios

**6.4.1** Mostre que

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

em que o contorno  $C$  circunda o ponto  $z = z_0$  em um sentido positivo (anti-horário). O expoente  $n$  é um inteiro. Veja também a Equação (6.27a). O cálculo de resíduos, Capítulo 7, é baseado nesse resultado.

**6.4.2** Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{m-n-1} dz, \quad m \text{ e } n \text{ inteiros}$$

(com o contorno circundando a origem uma vez, em sentido anti-horário) é uma representação do  $\delta_{mn}$ .

**6.4.3** Resolva o Exercício 6.3.4 separando o integrando em frações parciais e então aplicando o teorema integral de Cauchy para regiões multiplamente conectadas.

*Nota:* Frações parciais são explicadas na Seção 15.8 em conexão com as transformadas de Laplace.

**6.4.4** Avalie

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1},$$

em que  $C$  é o círculo  $|z| = 2$ .

**6.4.5** Admitindo que  $f(z)$  é analítica sobre e dentro de um contorno fechado  $C$  e que o ponto  $z_0$  está dentro de  $C$ , mostre que

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$



- 6.4.6** Você sabe que  $f(z)$  é analítica sobre e dentro de um contorno fechado  $C$  e suspeita que a derivada de enésima ordem  $f^{(n)}(z_0)$  é dada por

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Usando indução matemática, prove que essa expressão é correta.

- 6.4.7** (a) Uma função  $f(z)$  é analítica dentro de um contorno fechado  $C$  (e contínua em  $C$ ). Se  $f(z) \neq 0$  dentro de  $C$  e  $|f(z)| \leq M$  sobre  $C$ , mostre que

$$|f(z)| \leq M$$

para todos os pontos dentro de  $C$ .

*Sugestão:* Considere  $w(z) = 1/f(z)$ .

- (b) Se  $f(z) = 0$  dentro do contorno  $C$ , mostre que o resultado anterior não é válido e que é possível ter  $|f(z)| = 0$  em um ou mais pontos no interior com  $|f(z)| > 0$  sobre todo o contorno limitador. Cite um exemplo específico de uma função analítica que se comporta desse modo.

- 6.4.8** Usando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de enésima ordem, converta as seguintes fórmulas de Rodrigues nas integrais correspondentes ditas de Schlaefli.

- (a) Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Resposta:  $\frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1 - z^2)^n}{(z - x)^{n+1}} dz.$

- (b) Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

- (c) Laguerre:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

*Nota:* Pelas representações da integral de Schlaefli podemos desenvolver funções geradoras para essas funções especiais. Compare com as Seções 12.4, 13.1 e 13.2.

## 6.5 Expansão de Laurent

### Expansão de Taylor

A fórmula integral de Cauchy da seção anterior abre o caminho para outra derivação da série de Taylor (Seção 5.6), mas, desta vez, para funções de uma variável complexa. Suponha que estamos tentando expandir  $f(z)$  em torno de  $z = z_0$  e temos  $z = z_1$  como o ponto mais próximo no diagrama de Argand para o qual  $f(z)$  não é analítica. Construímos um círculo  $C$  com centro em  $z = z_0$  e raio menor do que  $|z_1 - z_0|$  (Figura 6.12). Uma vez que admitimos que  $z_1$  é o ponto mais próximo no qual  $f(z)$  não era analítica,  $f(z)$  é necessariamente analítica sobre e dentro de  $C$ .

Pela Equação (6.43), a fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{z' - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)[1 - (z - z_0)/(z' - z_0)]}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Aqui,  $z'$  é um ponto sobre o contorno  $C$  e  $z$  é qualquer ponto interior a  $C$ . Ainda não é válido expandir o denominador do integrando na Equação (6.53) pelo teorema binomial porque não provamos o teorema binomial para variáveis complexas. Em vez disso, notamos a identidade

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \tag{6.54}$$

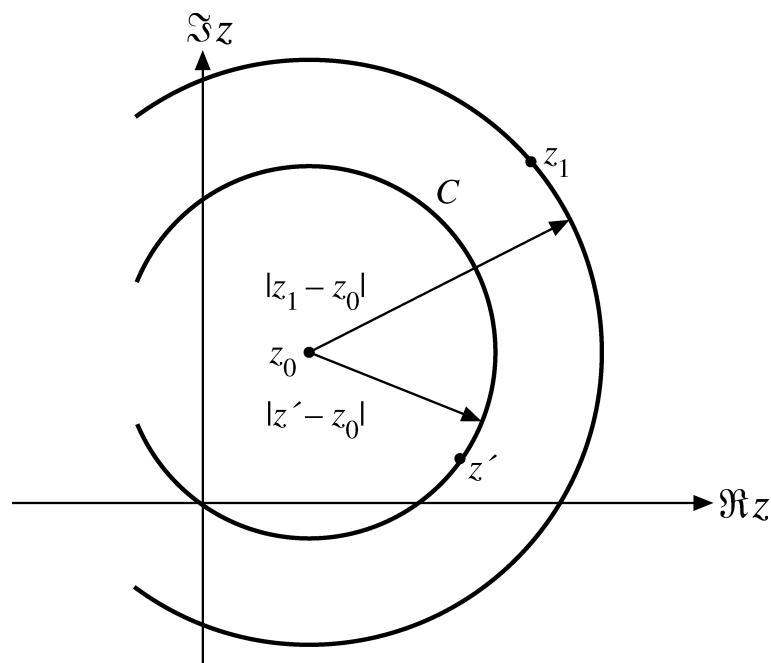


Figura 6.12: Domínio circular para a expansão de Taylor.

que pode ser verificada com facilidade multiplicando ambos os lados por  $1-t$ . A série infinita, seguindo os métodos da Seção 5.2, é convergente para  $|t| < 1$ .

Agora, para um ponto  $z$  interior  $C$ ,  $|z - z_0| < |z' - z_0|$ , e, usando a Equação (6.54), a Equação (6.53) se torna

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}. \quad (6.55)$$

Trocando a ordem de integração e o somatório (válido porque a Equação (6.54) é uniformemente convergente para  $|t| < 1$ ), obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}. \quad (6.56)$$

Referindo-nos à Equação (6.47), obtemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (6.57)$$

que é nossa desejada expansão de Taylor. Note que ela é baseada somente na suposição de que  $f(z)$  é analítica para  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ . Exatamente como para séries de potências de variável real (Seção 5.7), essa expansão é única para um dado  $z_0$ .

Pela expansão de Taylor para  $f(z)$ , um teorema binomial pode ser derivado (Exercício 6.5.2).

### Princípio de Reflexão de Schwarz

Pela expansão binomial de  $g(z) = (z - x_0)^n$  para  $n$  inteiro, é fácil ver que o conjugado complexo da função  $g$  é a função do conjugado complexo para  $x_0$  real:

$$g^*(z) = [(z - x_0)^n]^* = (z^* - x_0)^n = g(z^*). \quad (6.58)$$

Isso nos leva ao princípio de reflexão de Schwarz:

Se uma função  $f(z)$  é (1) analítica sobre alguma região incluindo o eixo real e (2) real quando  $z$  é real, então

$$f^*(z) = f(z^*). \quad (6.59)$$

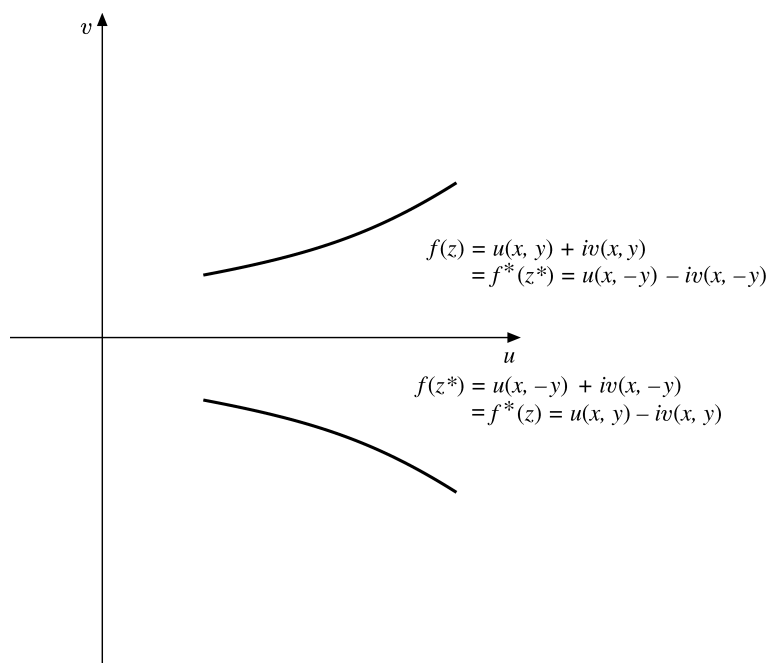


Figura 6.13: Reflexão de Schwarz.

(Veja a Figura 6.13.)

Expandindo  $f(z)$  em torno de algum ponto  $x_0$  (não-singular) sobre o eixo real,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{6.60}$$

pela Equação (6.56). Uma vez que  $f(z)$  é analítica em  $z = x_0$ , essa expansão de Taylor existe. Visto que  $f(z)$  é real quando  $z$  é real,  $f^{(n)}(x_0)$  deve ser real para todo  $n$ . Então, quando usamos a Equação (6.58), resulta imediatamente o princípio da reflexão de Schwarz, Equação (6.59). O Exercício 6.5.6 é outra forma desse princípio. Isso conclui a prova dentro de um círculo de convergência. Então, a continuação analítica permite estender esse resultado para toda a região de analiticidade.

### Continuação Analítica

É natural pensar nos valores  $f(z)$  de uma função analítica  $f$  como uma entidade única, que é usualmente definida em alguma região restrita de  $S_1$  do plano complexo, por exemplo, por uma série de Taylor (veja a Figura 6.14). Então,  $f$  é analítica dentro do **círculo de convergência**  $C_1$ , cujo raio é dado pela distância  $r_1$  do centro de  $C_1$  até a **singularidade mais próxima** de  $f$  em  $z_1$  (na Figura 6.14). Uma singularidade é qualquer ponto onde  $f$  não é analítica. Se escolhermos um ponto dentro de  $C_1$  que está mais distante da singularidade  $z_1$  do que  $r_1$  e fizermos uma expansão de Taylor de  $f$  em torno dele ( $z_2$  na Figura 6.14), então o círculo de convergência,  $C_2$ , usualmente se estenderá para além do primeiro círculo,  $C_1$ . Na região de sobreposição de ambos os círculos,  $C_1, C_2$ , a função  $f$  é unicamente definida. Na região do círculo  $C_2$  que se estende para além de  $C_1$ ,  $f(z)$  é unicamente definida pela série de Taylor em torno do centro de  $C_2$  e é analítica ali, embora nesse mesmo lugar a série de Taylor em torno do centro de  $C_1$  já não seja mais convergente. Segundo Weierstrass, esse processo é denominado **continuação analítica**. Ele define as funções analíticas em termos de sua definição original (em  $C_1$ , digamos) e todas as suas continuações.

Um exemplo específico é a função

$$f(z) = \frac{1}{1+z}, \tag{6.61}$$

que tem um pólo (simples) em  $z = -1$  e é analítica em outros lugares. A expansão de série geométrica

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \tag{6.62}$$

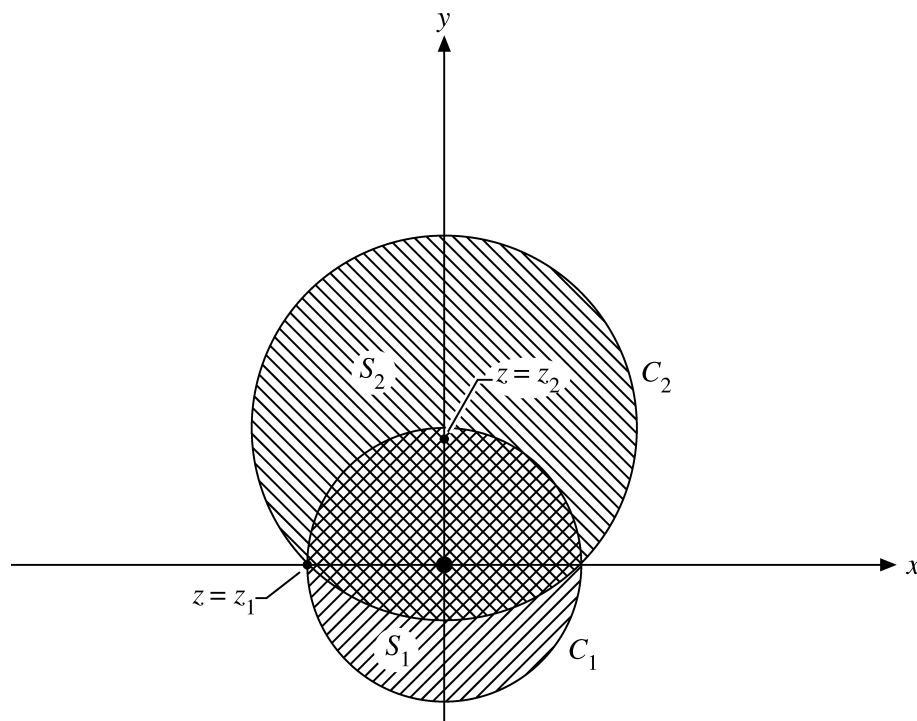


Figura 6.14: Continuação analítica.

converge para  $|z| < 1$ , isto é, dentro do círculo  $C_1$  na Figura 6.14.

Suponha que expandimos  $f(z)$  em torno de  $z = i$ , portanto,

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{(1+i)(1+(z-i)/(1+i))} \\
 &= \left[ 1 - \frac{z-i}{1+i} + \frac{(z-i)^2}{(1+i)^2} - \dots \right] \frac{1}{1+i}
 \end{aligned}
 \tag{6.63}$$

converge para  $|z-i| < |1+i| = \sqrt{2}$ . Nosso círculo de convergência é  $C_2$  na Figura 6.14. Agora,  $f(z)$  é definida pela expansão (6.63) em  $S_2$ , que se sobrepõe a  $S_1$  e se estende ainda mais longe no plano complexo.<sup>12</sup> Essa extensão é uma continuação analítica e, quando estivermos lidando apenas com pontos singulares isolados, a função poderá ser estendida indefinidamente. As Equações (6.61), (6.62) e (6.63) são três representações diferentes da mesma função. Cada representação tem seu próprio domínio de convergência. A Equação (6.62) é uma série de Maclaurin. A Equação (6.63) é uma expansão de Taylor em torno de  $z = i$ , e, pelos próximos parágrafos, vemos que a Equação (6.61) é uma série de Laurent de apenas um termo.

A continuação analítica pode tomar várias formas, e a expansão de série que acabamos de considerar não é necessariamente a técnica mais conveniente. Como técnica alternativa, usaremos uma relação funcional na Seção 8.1 para estender a função fatorial ao redor dos pontos singulares isolados  $z = -n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Como outro exemplo, a equação hipergeométrica é satisfeita pela função hipergeométrica definida pelas séries, Equação (13.115), para  $|z| < 1$ . A representação integral dada no Exercício 13.4.7 permite uma continuação para dentro do plano complexo.

### Série de Laurent

Encontramos freqüentemente funções que são analíticas e de valor único em uma região anular, digamos, de raio interno  $r$  e raio externo  $R$ , como mostra a Figura 6.15. Desenhando uma linha de contorno imaginária para

<sup>12</sup>Um dos resultados mais poderosos e belos da teoria mais abstrata de funções de uma variável complexa é que, se duas funções analíticas coincidem em qualquer região, tal como a sobreposição de  $S_1$  e  $S_2$ , ou coincidem sobre qualquer segmento de linha, elas são a mesma função no sentido de que coincidirão em todo lugar, contanto que sejam ambas bem definidas. Nesse caso, a concordância das expansões (Equações (6.62) e (6.63)) sobre a região comum a  $S_1$  e  $S_2$  estabelecerá a identidade das funções que essas expansões representam. Então a Equação (6.63) representaria uma continuação analítica ou extensão de  $f(z)$  para regiões não cobertas pela Equação (6.62). Poderíamos também dizer, com a mesma propriedade, que  $f(z) = 1/(1+z)$  é, por si, uma continuação analítica de qualquer das séries dadas pelas Equações (6.62) e (6.63).





converter nossa região em uma região simplesmente conexa, aplicamos a fórmula integral de Cauchy e, para dois círculos  $C_2$  e  $C_1$  com centro em  $z = z_0$  e raios  $r_2$  e  $r_1$ , respectivamente, em que  $r < r_2 < r_1 < R$ , temos<sup>13</sup>

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{z' - z}. \quad (6.64)$$

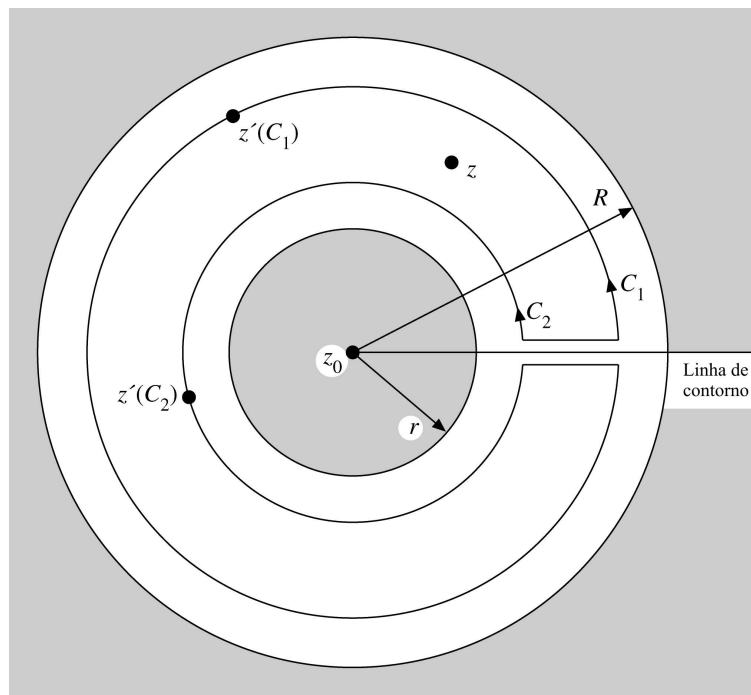


Figura 6.15:  $|z' - z_0|_{C_1} > |z - z_0|$ ;  $|z' - z_0|_{C_2} < |z - z_0|$ .

Note que na Equação (6.64) foi introduzido um sinal de menos explícito, de modo que o contorno  $C_2$  (assim como  $C_1$ ) deve ser percorrido no sentido positivo (anti-horário). Agora o tratamento da Equação (6.64) prossegue exatamente como o da Equação (6.53) no desenvolvimento da série de Taylor. Cada denominador é escrito como  $(z' - z_0) - (z - z_0)$  e expandido pelo teorema binomial, que agora resulta da série de Taylor (Equação (6.57)).

Notando que, para  $C_1$ ,  $|z' - z_0| > |z - z_0|$ , enquanto para  $C_2$ ,  $|z' - z_0| < |z - z_0|$ , encontramos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} (z' - z_0)^{n-1} f(z') dz'. \quad (6.65)$$

O sinal de menos da Equação (6.64) foi absorvido pela expansão binomial. Denominando a primeira série  $S_1$  e a segunda  $S_2$ , temos

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}, \quad (6.66)$$

que é a expansão de Taylor regular, convergente para  $|z - z_0| < |z' - z_0| = r_1$ , isto é, para todo  $z$  interior ao círculo maior,  $C_1$ . Para a segunda série na Equação (6.65), temos

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} (z' - z_0)^{n-1} f(z') dz', \quad (6.67)$$

<sup>13</sup>Podemos tomar  $r_2$  arbitrariamente próximo a  $r$ , e  $r_1$  arbitrariamente próximo a  $R$ , maximizando a área contida entre  $C_1$  e  $C_2$ .

convergente para  $|z - z_0| > |z' - z_0| = r_2$ , isto é, para todo  $z$  **exterior** ao círculo menor,  $C_2$ . Lembre-se de que  $C_2$  agora corre em sentido anti-horário.

Essas duas séries são combinadas em uma só<sup>14</sup> (uma série de Laurent) por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{6.68}$$

em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}. \tag{6.69}$$

Uma vez que na Equação (6.69) a convergência de uma expansão binomial já não é mais um problema,  $C$  pode ser qualquer contorno dentro da região anular  $r < |z - z_0| < R$  que circunda  $z_0$  uma vez em sentido anti-horário. Se admitirmos que tal região anular de convergência de fato existe, então a Equação (6.68) é a série de Laurent ou expansão de Laurent de  $f(z)$ .

A utilização da linha de contorno (Figura 6.15) é conveniente para converter a região anular em uma região simplesmente conexa. Uma vez que nossa função é analítica nessa região anular (e de valor único), a linha de contorno não é essencial e, de fato, não aparece no resultado final, Equação (6.69).

Os coeficientes da série de Laurent não precisam resultar da avaliação de integrais de contorno (que podem ser muito intratáveis). Outras técnicas, tais como expansões de séries ordinárias, podem fornecer os coeficientes.

Numerosos exemplos de séries de Laurent aparecem no Capítulo 7. Aqui, limitamo-nos a um exemplo simples para ilustrar a aplicação da Equação (6.68).

### Exemplo 6.5.1 EXPANSÃO DE LAURENT

Seja  $f(z) = [z(z - 1)]^{-1}$ . Se escolhermos  $z_0 = 0$ , então  $r = 0$  e  $R = 1$ ,  $f(z)$  diverge em  $z = 1$ . Uma expansão fracionária parcial resulta na série de Laurent

$$\frac{1}{z(z - 1)} = -\frac{1}{1 - z} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n. \tag{6.70}$$

Pelas Equações (6.70), (6.68) e (6.69), temos, então,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz'}{(z')^{n+2}(z' - 1)} = \begin{cases} -1 & \text{para } n \geq -1, \\ 0 & \text{para } n < -1. \end{cases} \tag{6.71}$$

As integrais na Equação (6.71) também podem ser avaliadas diretamente substituindo a expansão de série geométrica de  $(1 - z')^{-1}$  já utilizada na Equação (6.70) para  $(1 - z)^{-1}$ :

$$a_n = \frac{-1}{2\pi i} \oint \sum_{m=0}^{\infty} (z')^m \frac{dz'}{(z')^{n+2}}. \tag{6.72}$$

Permutando a ordem de somatório e integração (série uniformemente convergente), temos

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{dz'}{(z')^{n+2-m}}. \tag{6.73}$$

Se empregarmos a forma polar, como na Equação (6.47) (ou compare com o Exercício 6.4.1),

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{r i e^{i\theta} d\theta}{r^{n+2-m} e^{i(n+2-m)\theta}} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{n+2-m,1}, \end{aligned} \tag{6.74}$$

que está de acordo com a Equação (6.71). ■

A série de Laurent difere da série de Taylor pela característica óbvia das potências negativas de  $(z - z_0)$ . Por essa razão, a série de Laurent sempre divergirá ao menos em  $z = z_0$  e talvez até tão longe quanto alguma distância  $r$  (Figura 6.15).

<sup>14</sup>Substitua  $n$  por  $-n$  em  $S_2$  e some.



### Exercícios

**6.5.1** Desenvolva a expansão de Taylor de  $\ln(1 + z)$ .

Resposta: 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

**6.5.2** Derive a expansão binomial

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n$$

para  $m$  qualquer número real. A expansão é convergente para  $|z| < 1$ . Por quê?

**6.5.3** Uma função  $f(z)$  é analítica sobre e dentro do círculo unitário. Além disso,  $|f(z)| < 1$  para  $|z| \leq 1$  e  $f(0) = 0$ . Mostre que  $|f(z)| < |z|$  for  $|z| \leq 1$ .

*Sugestão:* Uma abordagem é mostrar que  $f(z)/z$  é analítica e então expressar  $[f(z_0)/z_0]^n$  pela fórmula integral de Cauchy. Finalmente, considere grandezas absolutas e tome a enésima raiz. Esse exercício costuma ser chamado de teorema de Schwarz.

**6.5.4** Se  $f(z)$  é uma função real da variável complexa  $z = x + iy$ , isto é, se  $f(x) = f^*(x)$ , e a expansão de Laurent em torno da origem,  $f(z) = \sum a_n z^n$ , tiver  $a_n = 0$  para  $n < -N$ , mostre que todos os coeficientes  $a_n$  são reais.

*Sugestão:* Mostre que  $z^N f(z)$  é analítica (via teorema de Morera, Seção 6.4).

**6.5.5** Uma função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  satisfaz as condições para o princípio da reflexão de Schwarz. Mostre que

(a)  $u$  é uma função par de  $y$ . (b)  $v$  é uma função ímpar de  $y$ .

**6.5.6** Uma função  $f(z)$  pode ser expandida em uma série de Laurent em torno da origem com os coeficientes  $a_n$  reais. Mostre que o conjugado complexo dessa função de  $z$  é a mesma função do conjugado complexo de  $z$ ; isto é,

$$f^*(z) = f(z^*).$$

Verifique isso explicitamente para

(a)  $f(z) = z^n$ ,  $n$  um inteiro, (b)  $f(z) = \text{sen } z$ .

Se  $f(z) = iz$  ( $a_1 = i$ ), mostre que a afirmação precedente não é válida.

**6.5.7** A função  $f(z)$  é analítica em um domínio que inclui o eixo real. Quando  $z$  é real ( $z = x$ ),  $f(x)$  é imaginário puro.

(a) Mostre que

$$f(z^*) = -[f(z)]^*.$$

(b) Para o caso específico  $f(z) = iz$ , desenvolva formas cartesianas de  $f(z)$ ,  $f(z^*)$ , e  $f^*(z)$ . Não cite o resultado geral da parte (a).

**6.5.8** Desenvolva os três primeiros termos não-zero da expansão de Laurent de

$$f(z) = (e^z - 1)^{-1}$$

em torno da origem. Note a semelhança com a função geradora do número de Bernoulli, Equação (5.144) da Seção 5.9.

**6.5.9** Prove que a expansão de Laurent de uma dada função em torno de um ponto dado é única; isto é, se

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

mostre que  $a_n = b_n$  para todo  $n$ .

*Sugestão:* Use a fórmula integral de Cauchy.

**6.5.10** (a) Desenvolva uma expansão de Laurent de  $f(z) = [z(z - 1)]^{-1}$  em torno do ponto  $z = 1$  válida para valores pequenos de  $|z - 1|$ . Especifique a faixa exata sobre a qual sua expansão é válida. Essa é uma continuação analítica da Equação (6.70).

(b) Determine a expansão de Laurent de  $f(z)$  em torno de  $z = 1$ , mas para  $|z - 1|$  grande.

*Sugestão:* Fracione essa função parcialmente e use a série geométrica.

- 6.5.11** (a) Dada  $f_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dt$  (com  $t$  real), mostre que o domínio no qual  $f_1(z)$  existe e é analítica é  $\Re(z) > 0$ .  
 (b) Mostre que  $f_2(z) = 1/z$  é igual a  $f_1(z)$  sobre  $\Re(z) > 0$  é igual a  $f_1(z)$  sobre todo o plano  $z$ , exceto para  $z = 0$ .  
 (c) Expanda  $1/z$  em torno do ponto  $z = i$ . Você terá  $f_3(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - i)^n$ . Você terá  $f_3(z)$ ?

$$\text{Resposta: } \frac{1}{z} = -i \sum_{n=0}^\infty i^n (z - i)^n, \quad |z - i| < 1.$$

## 6.6 Singularidades

A expansão de Laurent representa uma generalização da série de Taylor na presença de singularidades. Definimos o ponto  $z_0$  como um **ponto singular isolado** da função  $f(z)$  se  $f(z)$  não for analítica em  $z = z_0$  mas for analítica em todos os pontos vizinhos.

### Pólos

Na expansão de Laurent de  $f(z)$  em torno de  $z_0$ ,

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^\infty a_m(z - z_0)^m, \tag{6.75}$$

se  $a_m = 0$  para  $m < -n < 0$  e  $a_{-n} \neq 0$ , dizemos que  $z_0$  é um pólo de ordem  $n$ . Por exemplo, se  $n = 1$ , isto é, se  $a_{-1}/(z - z_0)$  é o primeiro termo que não desaparece na série de Laurent, temos um pólo de ordem 1, que costuma ser denominado pólo **simples**.

Se, por outro lado, o somatório continuar até  $m = -\infty$ , então  $z_0$  é um pólo de ordem infinita e é denominado **singularidade essencial**. Essas singularidades essenciais têm muitas características patológicas. Por exemplo, podemos mostrar que em qualquer pequena vizinhança de uma singularidade essencial de  $f(z)$  a função  $f(z)$  chega arbitrariamente próxima de qualquer (e, portanto, de toda) quantidade complexa pré-selecionada  $w_0$ .<sup>15</sup> Aqui, todo o plano  $w$  é mapeado por  $f$  para a vizinhança do ponto  $z_0$ . Um ponto de fundamental diferença entre um pólo de ordem finita  $n$  e uma singularidade essencial é que, multiplicando  $f(z)$  por  $(z - z_0)^n$ ,  $f(z)(z - z_0)^n$ , já não é mais singular em  $z_0$ . É óbvio que isso não pode ser feito para uma singularidade essencial.

O comportamento de  $f(z)$ , à medida que  $z \rightarrow \infty$ , é definido em termos do comportamento de  $f(1/t)$ , à medida que  $t \rightarrow 0$ .

Considere a função

$$\text{sen } z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{6.76}$$

À medida que  $z \rightarrow \infty$ , substituímos  $z$  por  $1/t$  para obter

$$\text{sen}\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!t^{2n+1}}. \tag{6.77}$$

Pela definição,  $\text{sen } z$  tem uma singularidade essencial no infinito. Esse resultado podia ser antecipado pelo Exercício 6.1.9, uma vez que

$$\text{sen } z = \text{sen } iy = i \text{senh } y, \quad \text{quando } x = 0,$$

e se aproxima exponencialmente do infinito, à medida que  $y \rightarrow \infty$ . Assim, embora o valor absoluto de  $\text{sen } x$  para  $x$  real seja igual ou menor do que a unidade, o valor absoluto de  $\text{sen } z$  não é limitado.

Uma função que é analítica em todo o plano complexo finito, **exceto** em pólos isolados, é denominada **meromórfica**, tais como as razões entre dois polinômios ou  $\text{tg } z$ ,  $\text{cot } z$ . Outros exemplos são funções **inteiras** que não têm singularidades no plano complexo finito, tais como  $\exp(z)$ ,  $\text{sen } z$ ,  $\text{cos } z$  (veja as Seções 5.9 e 5.11).

<sup>15</sup>Esse teorema se deve a Picard. Uma prova é dada por E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2<sup>a</sup>. ed. Nova York: Oxford University Press (1939).



### Pontos de Ramificação

Há outro tipo de singularidade que será importante no Capítulo 7. Considere

$$f(z) = z^a,$$

na qual  $a$  não é um inteiro.<sup>16</sup> À medida que  $z$  percorre o círculo unitário de  $e^0$  a  $e^{2\pi i}$ ,

$$f(z) \rightarrow e^{2\pi ai} \neq e^{0 \cdot a} = 1,$$

para  $a$  não-inteiro. Temos um ponto de ramificação na origem e outro no infinito. Se estabelecermos  $z = 1/t$ , uma análise similar de  $f(z)$  para  $t \rightarrow 0$  mostra que  $t = 0$ ; isto é,  $z = \infty$  também é um ponto de ramificação. Os pontos  $e^{0i}$  e  $e^{2\pi i}$  no plano  $z$  coincidem, mas esses **pontos coincidentes levam a valores diferentes de  $f(z)$** ; isto é,  $f(z)$  é uma função de **valor múltiplo**. O problema é resolvido construindo uma **linha de corte que une ambos os pontos de ramificação**, de modo que  $f(z)$  será unicamente especificada para um dado ponto no plano  $z$ . Para  $z^a$ , a linha de corte pode partir em qualquer ângulo. Note que, aqui, o ponto no infinito também deve ser incluído; isto é, a linha de corte pode unir pontos de ramificação finitos via o ponto no infinito. O próximo exemplo é desses casos. Se  $a = p/q$  é um número racional, então  $q$  é denominado ordem do ponto de ramificação, porque é preciso circundar o ponto de ramificação  $q$  vezes antes de voltar ao ponto de partida. Se  $a$  for irracional, então a ordem do ponto de ramificação é infinita, exatamente como no logaritmo.

Note que uma função com um ponto de ramo e uma linha de corte requerida não será contínua através da linha de corte. Muitas vezes haverá uma diferença de fase em lados opostos dessa linha de corte. Por conseguinte, as integrais de linha em lados opostos dessa linha de corte de ponto de ramo em geral não se cancelarão mutuamente. Numerosos exemplos desse caso aparecem nos exercícios.

A linha de contorno usada para converter a região multiplamente conexa em uma região simplesmente conexa (Seção 6.3) é completamente diferente. Nossa função é contínua através daquela linha de contorno, e não existe nenhuma diferença de fase.

#### Exemplo 6.6.1 PONTOS DE RAMIFICAÇÃO DE ORDEM 2

Considere a função

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2}. \tag{6.78}$$

O primeiro fator do lado direito,  $(z + 1)^{1/2}$ , tem um ponto de ramificação em  $z = -1$ . O segundo fator tem um ponto de ramificação em  $z = +1$ . No infinito  $f(z)$  tem um pólo simples. Pode-se ver melhor isso substituindo  $z = 1/t$  e fazendo uma expansão binomial em  $t = 0$ :

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \frac{1}{t}(1 - t^2)^{1/2} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^3 + \dots$$

A linha de corte tem de conectar ambos os pontos de ramificação, portanto não é possível circundar completamente qualquer dos pontos de ramificação. Para verificar a possibilidade de tomar o segmento de linha que une  $z = +1$  e  $z = -1$  como uma linha de corte, vamos seguir as fases desses dois fatores enquanto percorremos o contorno mostrado na Figura 6.16.

Por conveniência, nas mudanças de fase a seguir sejam  $z + 1 = re^{i\theta}$  e  $z - 1 = \rho e^{i\varphi}$ . Então a fase de  $f(z)$  é  $(\theta + \varphi)/2$ . Começamos no ponto 1, onde ambos,  $z + 1$  e  $z - 1$ , têm uma fase nula. Passando do ponto 1 para o  $\varphi$ , a fase de  $z - 1 = \rho e^{i\varphi}$  aumenta de  $\pi$  ( $z - 1$  se torna negativo). Então  $\varphi$  permanece constante até que o círculo seja concluído, passando de 6 para 7.  $\theta$ , a fase de  $z + 1 = re^{i\theta}$ , mostra um comportamento similar, aumentando de  $2\pi$ , à medida que passamos de 3 para 5. A fase da função  $f(z) = (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2} = r^{1/2}\rho^{1/2}e^{i(\theta+\varphi)/2}$  é  $(\theta + \varphi)/2$ . Isso está tabulado na última coluna da Tabela 6.1.

<sup>16</sup> $z = 0$  é um ponto singular, porque  $z^a$  tem somente um número finito de derivadas, ao passo que uma função analítica tem garantido um número infinito de derivadas (Seção 6.4). O problema é que  $f(z)$  não é de valor único, à medida que circundamos a origem. A fórmula integral de Cauchy não pode ser aplicada.

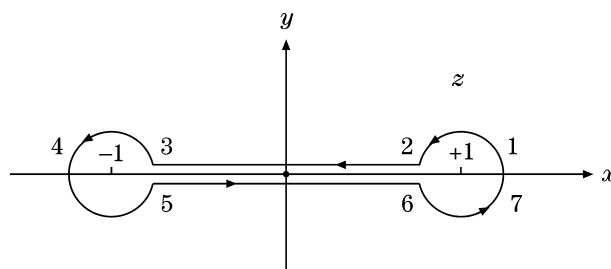


Figura 6.16: Domínio circular para a expansão de Taylor.

**Tabela 6.1** Ângulo de fase

Ponto	$\theta$	$\varphi$	$\frac{\theta + \varphi}{2}$
1	0	0	0
2	0	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$
4	$\pi$	$\pi$	$\pi$
5	$2\pi$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
6	$2\pi$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
7	$2\pi$	$2\pi$	$2\pi$

Surgem duas características:

1. A fase nos pontos 5 e 6 não é a mesma que a fase nos pontos 2 e 3. Esse comportamento pode ser esperado em um corte de ramificação.

2. A fase no ponto 7 excede a do ponto 1 de  $2\pi$ , e, portanto, a função  $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$  é **de valor único** para o contorno mostrado, circundando ambos os pontos de ramificação.

Se considerarmos o eixo  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $f(z)$ , por ser uma linha de corte, é unicamente especificada. Alternativamente, o eixo positivo  $x$ , para  $x > 1$ , e o eixo negativo  $x$ , para  $x < -1$ , podem ser tomados como linhas de corte. Os pontos de ramificação não podem ser circundados e a função permanece de valor único. Na verdade, essas duas linhas de corte são um único corte de ramificação de  $-1$  a  $+1$  via o ponto no infinito. ■

Generalizando por esse exemplo, temos que a fase de uma função

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) \cdots$$

é a soma algébrica das fases de seus fatores individuais:

$$\arg f(z) = \arg f_1(z) + \arg f_2(z) + \arg f_3(z) + \cdots$$

A fase de um fator individual pode ser considerada como o arco tangente da razão entre sua parte imaginária e sua parte real (escolhendo o ramo adequado da função arco tangente  $\text{tg}^{-1}y/x$ , que tem infinitamente muitos ramos).

$$\arg f_i(z) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{v_i}{u_i} \right).$$

Para o caso de um fator da forma

$$f_i(z) = (z - z_0),$$

a fase corresponde ao ângulo de fase de um vetor bidimensional de  $+z_0$  a  $z$ , sendo que a fase aumenta de  $2\pi$ , à medida que o ponto  $+z_0$  é circundado. Ao contrário, percorrer qualquer circuito fechado que não circunde  $z_0$  não muda a fase de  $z - z_0$ .

### Exercícios

**6.6.1** A função  $f(z)$  expandida em uma série de Laurent exibe um pólo de ordem  $m$  em  $z = z_0$ . Mostre que o coeficiente de  $(z - z_0)^{-1}$ ,  $a_{-1}$ , é dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]_{z=z_0},$$



com

$$a_{-1} = [(z - z_0)f(z)]_{z=z_0},$$

quando o pólo é um pólo simples ( $m = 1$ ). Essas equações para  $a_{-1}$  são de extrema utilidade para determinar o resíduo a ser usado no teorema do resíduo da Seção 7.1.

*Sugestão:* A técnica que foi tão bem-sucedida para provar a unicidade da série de potências, Seção 5.7, também funcionará aqui.

**6.6.2** Uma função  $f(z)$  pode ser representada por

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

na qual  $f_1(z)$  e  $f_2(z)$  são analíticas. O denominador,  $f_2(z)$ , desaparece em  $z = z_0$ , mostrando que  $f(z)$  tem um pólo em  $z = z_0$ . Contudo,  $f_1(z_0) \neq 0$ ,  $f_2'(z_0) \neq 0$ . Mostre que  $a_{-1}$ , o coeficiente de  $(z - z_0)^{-1}$  em uma expansão de Laurent de  $f(z)$  em  $z = z_0$ , é dado por

$$a_{-1} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

(Esse resultado leva ao teorema da expansão de Heaviside, Exercício 15.12.11.)

**6.6.3** Por analogia com o Exemplo 6.6.1, considere em detalhe a fase de cada fator e a fase global resultante de  $f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$  percorrendo um contorno similar ao da Figura 6.16, mas circundando os novos pontos de ramificação.

**6.6.4** A função de Legendre da segunda espécie,  $Q_\nu(z)$ , tem pontos de ramificação em  $z = \pm 1$ . Os pontos de ramo são unidos por uma linha de corte ao longo do eixo ( $x$ ) real.

(a) Mostre que  $Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln((z + 1)/(z - 1))$  é de valor único (sendo o eixo real  $-1 \leq x \leq 1$  tomado como uma linha de corte).

(b) Para argumento real  $x$  e  $|x| < 1$ , é conveniente considerar

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Mostre que

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} [Q_0(x + i0) + Q_0(x - i0)].$$

Aqui,  $x + i0$  indica que  $z$  se aproxima do eixo real por cima e  $x - i0$  indica uma aproximação por baixo.

**6.6.5** Como exemplo de uma singularidade essencial, considere  $e^{1/z}$ , à medida que  $z$  se aproxima de zero. Para qualquer número complexo  $z_0$ ,  $z_0 \neq 0$ , mostre que

$$e^{1/z} = z_0$$

tem um número infinito de soluções.

## 6.7 Mapeamento

Nas seções precedentes definimos funções analíticas e desenvolvemos algumas de suas características principais. Nesta seção introduzimos alguns dos aspectos mais geométricos de funções de variáveis complexas, aspectos que serão úteis para visualizar as operações integrais no Capítulo 7 e que são valiosas por mérito próprio para resolver a equação de Laplace em sistemas bidimensionais.

Em geometria analítica comum podemos considerar  $y = f(x)$  e então traçar  $y$  versus  $x$ . Aqui, nosso problema é mais complicado, porque  $z$  é uma função de duas variáveis,  $x$  e  $y$ . Usamos a notação

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{6.79}$$

Então, para um ponto no plano  $z$  (valores específicos para  $x$  e  $y$ ) podem corresponder valores específicos para  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  que então podem resultar em um ponto no plano  $w$ . À medida que pontos no plano  $z$  se transformam ou são mapeados para pontos no plano  $w$ , linhas ou áreas no plano  $z$  serão mapeadas para linhas ou áreas no plano  $w$ . Nossa finalidade imediata é ver como linhas e áreas são mapeadas do plano  $z$  para o plano  $w$  para várias funções simples.

### Translação

$$w = z + z_0. \tag{6.80}$$

A função  $w$  é igual à variável  $z$  mais uma constante,  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Pelas equações (6.1) e (6.79),

$$u = x + x_0, \quad v = y + y_0, \tag{6.81}$$

o que representa uma translação pura de eixos coordenados, como mostra a Figura 6.17.

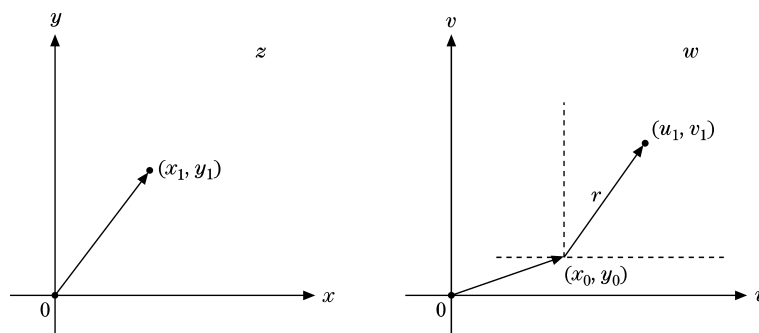


Figura 6.17: Translação.

### Rotação

$$w = zz_0. \tag{6.82}$$

Aqui é conveniente voltar à representação polar usando

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad z = r e^{i\theta} \quad \text{e} \quad z_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \tag{6.83}$$

então,

$$\rho e^{i\varphi} = r r_0 e^{i(\theta + \theta_0)}, \tag{6.84}$$

ou

$$\rho = r r_0, \quad \varphi = \theta + \theta_0. \tag{6.85}$$

Duas coisas ocorreram. Primeiro, o módulo  $r$  foi modificado, ou seja, expandido ou contraído, pelo fator  $r_0$ . Segundo, o argumento  $\theta$  foi aumentado pela constante aditiva  $\theta_0$  (Figura 6.18). Isso representa uma rotação da variável complexa através de um ângulo  $\theta_0$ . Para o caso especial de  $z_0 = i$ , temos uma rotação pura através de  $\pi/2$  radianos.

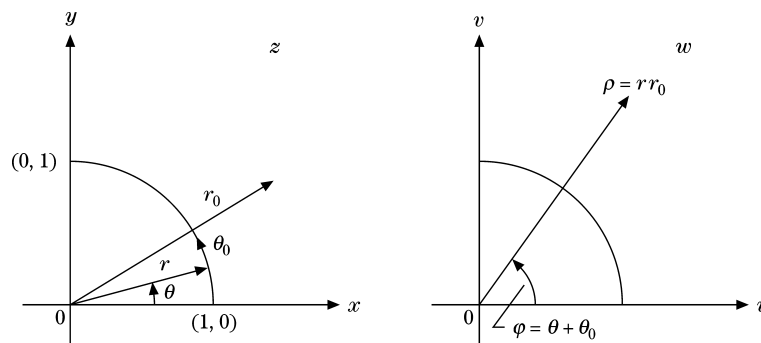


Figura 6.18: Rotação.





### Inversão

$$w = \frac{1}{z}. \tag{6.86}$$

Novamente, usando a forma polar, temos

$$\rho e^{i\varphi} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}, \tag{6.87}$$

que mostra que

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \varphi = -\theta. \tag{6.88}$$

A primeira parte da Equação (6.87) mostra aquela inversão claramente. O interior do círculo unitário é mapeado para o exterior e vice-versa (Figura 6.19). Além disso, a segunda parte da Equação (6.87) mostra que o sinal do ângulo polar é invertido. Por conseguinte, a Equação (6.88) também envolve uma reflexão do eixo  $y$ , exatamente como a equação do conjugado complexo.

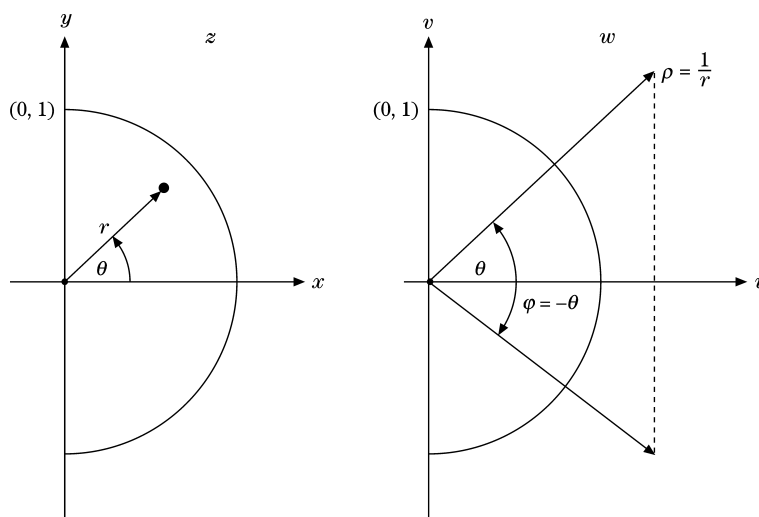


Figura 6.19: Inversão.

Para ver como curvas no plano  $z$  se transformam para o plano  $w$ , voltamos à forma cartesiana:

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}. \tag{6.89}$$

Racionalizando o lado direito pela multiplicação do numerador e do denominador por  $z^*$  e então igualando as partes reais e as partes imaginárias, temos

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & x &= \frac{u}{u^2 + v^2}, \\ v &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, & y &= -\frac{v}{u^2 + v^2}. \end{aligned} \tag{6.90}$$

Um círculo com centro na origem no plano  $z$  tem a forma

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{6.91}$$

e pelas Equações (6.90) se transforma em

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = r^2. \tag{6.92}$$

Simplificando a Equação (6.92), obtemos

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2} = \rho^2, \tag{6.93}$$

que descreve um círculo no plano  $w$  também com centro na origem.

A reta horizontal  $y = c_1$  se transforma em

$$\frac{-v}{u^2 + v^2} = c_1, \tag{6.94}$$

ou

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{(2c_1)^2}, \tag{6.95}$$

que descreve um círculo no plano  $w$  de raio  $(1/2c_1)$  e com centro em  $u = 0, v = -\frac{1}{2c_1}$  (Figura 6.20).

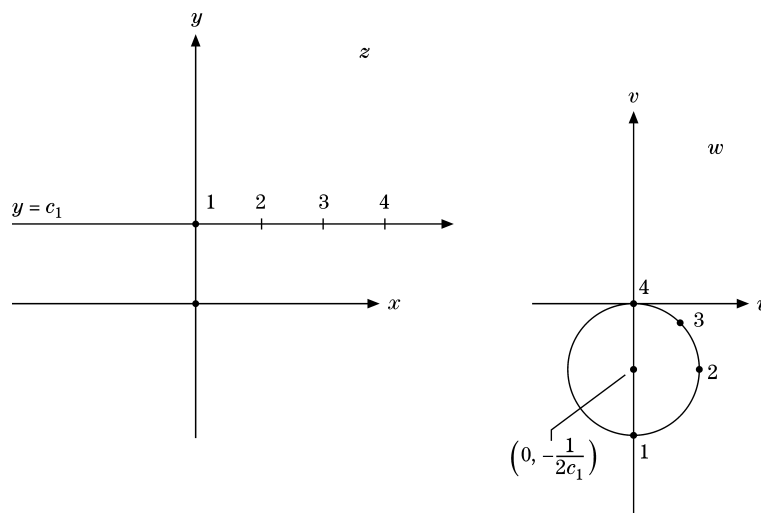


Figura 6.20: Inversão reta ↔ círculo.

Apanhamos as outras três possibilidades,  $x = \pm c_1, y = -c_1$ , rotacionando os eixos  $xy$ . Em geral, qualquer linha reta ou círculo no plano  $z$  se transformará em uma linha reta ou um círculo no plano  $w$  (compare com o Exercício 6.7.1).

### Pontos de Ramificação e Funções Multivalentes

Todas as três transformações que acabamos de discutir envolveram correspondência um-para-um de pontos no plano  $z$  para pontos no plano  $w$ . Agora, para ilustrar a variedade de transformações que são possíveis e os problemas que podem surgir, introduzimos, em primeiro lugar, uma correspondência dois-para-um e em seguida uma correspondência muitos-para-um. Por fim, consideramos as inversas dessas duas transformações.

Considere primeiro a transformação

$$w = z^2, \tag{6.96}$$

que leva a

$$\rho = r^2, \quad \varphi = 2\theta. \tag{6.97}$$

É claro que nossa transformação é não-linear porque o módulo está elevado ao quadrado, mas a característica significativa da Equação (6.96) é que o ângulo de fase ou argumento é duplicado. Isso significa que:

- primeiro quadrante de  $z$ ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\rightarrow$  semiplano superior de  $w$ ,  $0 \leq \varphi < \pi$ ,
- semiplano superior de  $z$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ ,  $\rightarrow$  todo o plano de  $w$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

O semiplano inferior de  $z$  mapeia para todo o plano de  $w$  já coberto e, por isso, cobre o plano  $w$  uma segunda vez. Essa é a nossa correspondência dois-para-um, isto é, dois pontos distintos no plano  $z_0$  e  $z_0 e^{i\pi} = -z_0$  correspondem a um único ponto  $w = z_0^2$ .

Em representação cartesiana,

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy, \tag{6.98}$$



levando a

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (6.99)$$

Por conseguinte, as retas  $u = c_1, v = c_2$  no plano  $w$  correspondem a  $x^2 - y^2 = c_1, 2xy = c_2$ , hipérboles retangulares (ortogonais) no plano  $z$  (Figura 6.21). A todo ponto sobre a hipérbole no semiplano direito,  $x^2 - y^2 = c_1$  corresponde um ponto sobre a reta  $x > 0$  e vice-versa. Contudo, todo ponto sobre a reta  $u = c_1$  também corresponde a um ponto sobre a hipérbole  $u = c_1$  no semiplano esquerdo,  $x^2 - y^2 = c_1$ , como já explicamos.

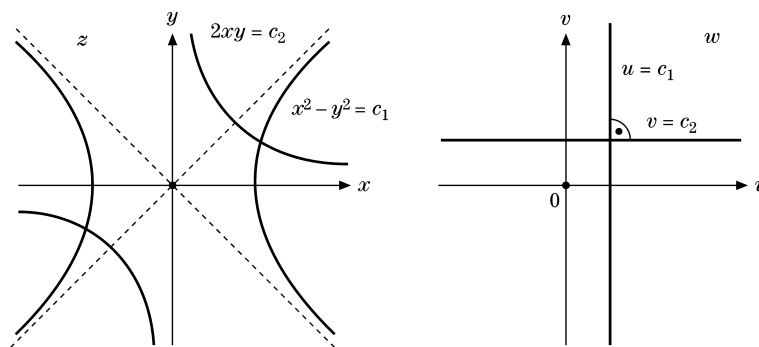


Figura 6.21: Mapeamento — coordenadas hiperbólicas.

Na Seção 6.8 mostraremos que, se retas no plano  $w$  são ortogonais, as retas correspondentes no plano  $z$  também são ortogonais, contanto que a transformação seja analítica. Uma vez que  $u = c_1$  e  $v = c_2$  sejam construídas como perpendiculares entre si, as hipérboles correspondentes no plano  $z$  são ortogonais. Construímos um novo sistema ortogonal de linhas hiperbólicas (ou superfícies, se adicionarmos um eixo perpendicular a  $x$  e  $y$ ). O Exercício 2.1.3 foi uma análise desse sistema. Deve-se notar que, se as linhas hiperbólicas forem linhas de força elétrica ou magnética, então temos uma lente quadripolar útil para focalizar raios de partículas de alta energia.

O inverso da quarta transformação (Equação (6.96)) é

$$w = z^{1/2}. \quad (6.100)$$

Pela relação

$$\rho e^{i\varphi} = r^{1/2} e^{i\theta/2} \quad (6.101)$$

e

$$2\varphi = \theta, \quad (6.102)$$

agora temos dois pontos no plano  $w$  (argumentos  $\varphi$  e  $\varphi + \pi$ ) correspondentes a um ponto no plano  $z$  (exceto para o ponto  $z = 0$ ). Ou, em outras palavras,  $\theta$  e  $\theta + 2\pi$  correspondem a  $\varphi$  e  $\varphi + \pi$ , dois pontos distintos no plano  $w$ . Essa é a variável complexa análoga à simples equação de variável real  $y^2 = x$ , na qual dois valores de  $y$ , um com sinal mais, outro com sinal menos, correspondem a cada valor de  $x$ .

Aqui, a questão importante é que podemos fazer da função  $w$  da Equação (6.100) uma função de valor único, em vez de uma função de valor duplo, se concordarmos em restringir  $\theta$  a uma faixa, tal como  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Isso pode ser feito concordando em nunca cruzar a reta  $\theta = 0$  no plano  $z$  (Figura 6.22). Essa linha de demarcação é denominada **linha de corte** ou **corte de ramificação**. Note que pontos de ramificação ocorrem em pares.

A **linha de corte une as duas singularidades do ponto de ramificação**, aqui em 0 e infinito (para o último, transforme  $z = 1/t$  para  $t \rightarrow 0$ ). Qualquer reta de  $z = 0$  a infinito serviria igualmente bem. A finalidade da linha de corte é restringir o argumento de  $z$ . Os pontos  $z$  e  $z \exp(2\pi i)$  coincidem no plano  $z$  mas resultam pontos diferentes  $w$  e  $-w = w \exp(\pi i)$  no plano  $w$ . Daí, na ausência de uma linha de corte, a função  $w = z^{1/2}$  é ambígua. Alternativamente, uma vez que a função  $w = z^{1/2}$  é de valor duplo, também podemos colar duas folhas do plano complexo  $z$  ao longo do corte de modo que  $\arg(z)$  possa crescer mais do que  $2\pi$  ao longo do corte de ramificação e continue, de  $4\pi$  em diante, na segunda folha para alcançar os mesmos valores de função para  $z$  que alcançou para  $z e^{-4\pi i}$ , isto é, o ponto de partida na primeira folha novamente. Essa construção é denominada **superfície de Riemann** de  $w = z^{1/2}$ . Encontraremos pontos de ramificação e linhas de corte (cortes de ramo) com frequência no Capítulo 7.

A transformação

$$w = e^z \quad (6.103)$$

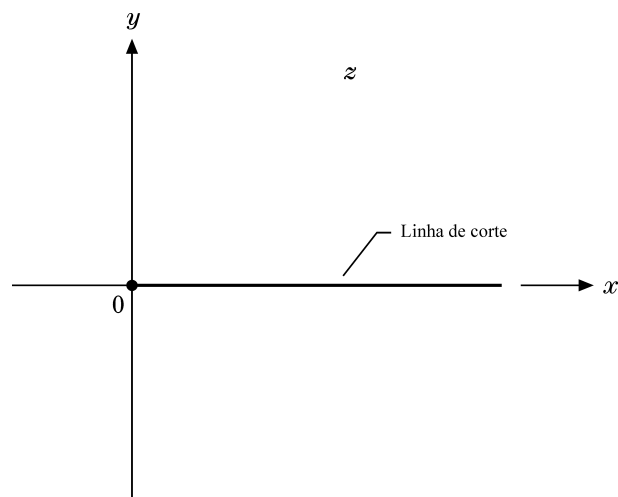


Figura 6.22: Uma linha de corte.

leva a

$$\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} . \tag{6.104}$$

Se  $y$  varia de  $0 \leq y < 2\pi$  (ou  $-\pi < y \leq \pi$ ), então  $\varphi$  abrange a mesma faixa. Mas isso é todo o  $w$ . Em outras palavras, a tira horizontal no plano  $z$  de largura  $2\pi$  mapeia para o plano  $w$  inteiro. Além disso, qualquer ponto  $x + i(y + 2n\pi)$ , no qual  $n$  seja qualquer inteiro, mapeia para o mesmo ponto (pela Equação (6.104)) no plano  $w$ . Temos uma correspondência muitos-(infinitamente muitos)-para-um.

Por fim, como a inversa da quinta transformação (Equação (6.103)), temos

$$w = \ln z. \tag{6.105}$$

Expandindo-a, obtemos

$$u + iv = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta. \tag{6.106}$$

Para um dado ponto  $z_0$  no plano  $z$  o argumento  $\theta$  é inespecífico dentro de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Isso significa que

$$v = \theta + 2n\pi, \tag{6.107}$$

e, assim como na transformação exponencial, temos uma correspondência infinitamente muitos-para-um.

A Equação (6.108) tem uma bela representação física. Se percorrermos o círculo unitário no plano  $z$ ,  $r = 1$ , e pela Equação (6.107),  $u = \ln r = 0$ ; mas  $v = \theta$ , e  $\theta$  está crescendo continuamente e continua a crescer quando  $\theta$  vai além de  $2\pi$ .

A linha de corte se une ao ponto de ramificação na origem com o infinito. Quando  $\theta$  aumenta e ultrapassa  $2\pi$ , colamos uma nova folha do plano complexo  $z$  ao longo da linha de corte etc. Percorrer o círculo unitário no plano  $z$  é como apertar um parafuso ou subir uma escada em espiral (Figura 6.23), que é a **superfície de Riemann** de  $w = \ln z$ .

Assim como no exemplo precedente, também podemos fazer com que a correspondência seja única (e a Equação (6.106) não-ambígua), restringindo  $\theta$  a uma faixa, tal como  $0 \leq \theta < 2\pi$ , tomando a reta  $\theta = 0$  (eixo real positivo) como uma linha de corte. Isso equivale a subir um, e somente um, lance completo da escada em espiral.

O conceito de mapeamento é muito amplo e útil na matemática. Nosso mapeamento de um plano complexo  $z$  para um plano complexo  $w$  é uma simples generalização de uma das definições de função: um mapeamento de  $x$  (de um conjunto) para  $y$  em um segundo conjunto. Uma forma mais sofisticada de mapeamento aparece na Seção 1.15 usamos a função delta de Dirac  $\delta(x - a)$  para mapear uma função  $f(x)$  para seu valor no ponto  $a$ . No Capítulo 15 onde são usadas transformadas integrais para mapear uma função  $f(x)$  no espaço  $x$  para uma segunda função  $F(t)$  (relacionada) no espaço  $t$ .

### Exercícios

**6.7.1** Como círculos com centro na origem no plano  $z$  se transformam em

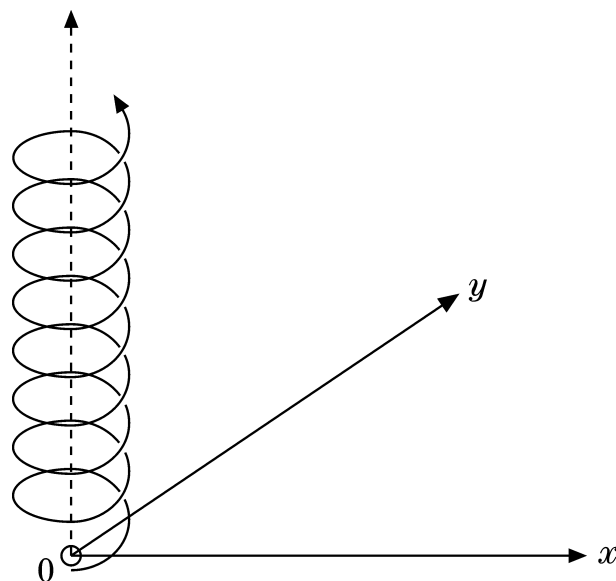


Figura 6.23: Essa é a superfície de Riemann para  $\ln z$ , uma função de valor múltiplo.

(a)  $w_1(z) = z + \frac{1}{z}$ ,      (b)  $w_2(z) = z - \frac{1}{z}$ ,      para  $z \neq 0$ ?

O que acontece quando  $|z| \rightarrow 1$ ?

**6.7.2** Que parte do plano  $z$  corresponde ao interior do círculo unitário no plano  $w$  se

(a)  $w = \frac{z-1}{z+1}$ ,      (b)  $w = \frac{z-i}{z+i}$ ?

**6.7.3** Discuta as transformações

(a)  $w(z) = \sin z$ ,      (c)  $w(z) = \sinh z$ ,  
 (b)  $w(z) = \cos z$ ,      (d)  $w(z) = \cosh z$ .

Mostre como as retas  $x = c_1$ ,  $y = c_2$  mapeiam para o plano  $w$ . Note que as últimas três transformações podem ser obtidas da primeira por translação e/ou rotação adequada.

**6.7.4** Mostre que a função

$$w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$$

é de valor único se considerarmos  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$  como uma linha de corte.

**6.7.5** Mostre que números negativos têm logaritmos no plano complexo. Em particular, ache  $\ln(-1)$ .

Resposta:  $\ln(-1) = i\pi$ .

**6.7.6** Uma representação integral da função de Bessel segue o contorno no plano  $t$  mostrado na Figura 6.24. Mapeie esse contorno para o plano  $\theta$  com  $t = e^\theta$ . Muitos exemplos adicionais de mapeamento são dados nos Capítulos 11, 12 e 13.

**6.7.7** Para  $m$  não-inteiro, mostre que a expansão binomial do Exercício 6.5.2 é válida somente para um ramo adequadamente definido da função  $(1+z)^m$ . Mostre como o plano  $z$  é cortado. Explique por que  $|z| < 1$  pode ser considerado como o círculo de convergência para a expansão desse ramo, à luz do corte que você escolheu.

**6.7.8** A expansão de Taylor dos Exercícios 6.5.2 e 6.7.7 **não** é adequada para ramos que não sejam aquele ramo da função  $(1+z)^m$  definido adequadamente para  $m$  não-inteiro. [Note que outros ramos não podem ter a mesma expansão de Taylor, já que devem ser distinguíveis.] Usando o mesmo corte de ramificação dos exercícios anteriores para todos os outros ramos, ache as expansões de Taylor correspondentes, detalhando as atribuições de fase e coeficientes de Taylor.

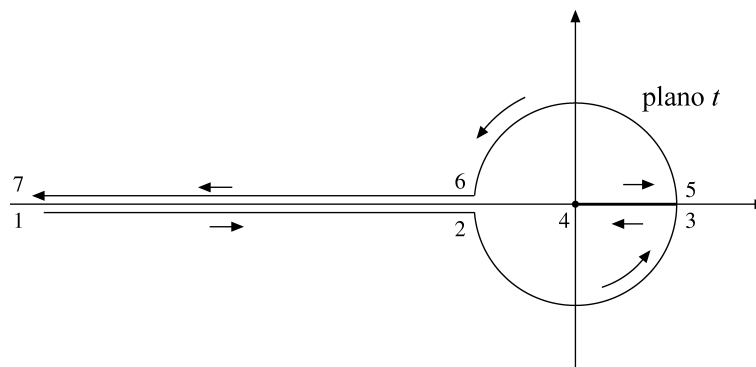


Figura 6.24: Contorno de integração da função de Bessel.

### 6.8 Mapeamento Conformal

Na Seção 6.7, hipérbolas foram mapeadas para retas e retas foram mapeadas para círculos. Ainda assim, em todas essas transformações, uma característica permaneceu constante. Essa constância foi um resultado do fato de que todas as transformações da Seção 6.7 foram analíticas.

Contanto que  $w = f(z)$  seja uma função analítica, temos

$$\frac{df}{dz} = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{6.108}$$

Admitindo que essa equação está em forma polar, podemos igualar módulo a módulo e argumento a argumento. Para o último (admitindo que  $df/dz \neq 0$ ),

$$\begin{aligned} \arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \arg \frac{df}{dz} = \alpha, \end{aligned} \tag{6.109}$$

em que  $\alpha$ , o argumento da derivada, pode depender de  $z$ , mas é uma constante para um  $z$  fixo, independente da direção de aproximação. Para perceber o significado disso, considere duas curvas  $C_z$  no plano  $z$  e a curva correspondente  $C_w$  no plano  $w$  (Figura 6.25). O incremento  $\Delta z$  é mostrado em um ângulo de  $\theta$  em relação ao eixo ( $x$ ) real, ao passo que o incremento  $\Delta w$  correspondente forma um ângulo de  $\varphi$  com o eixo real ( $u$ ). Pela Equação (6.110),

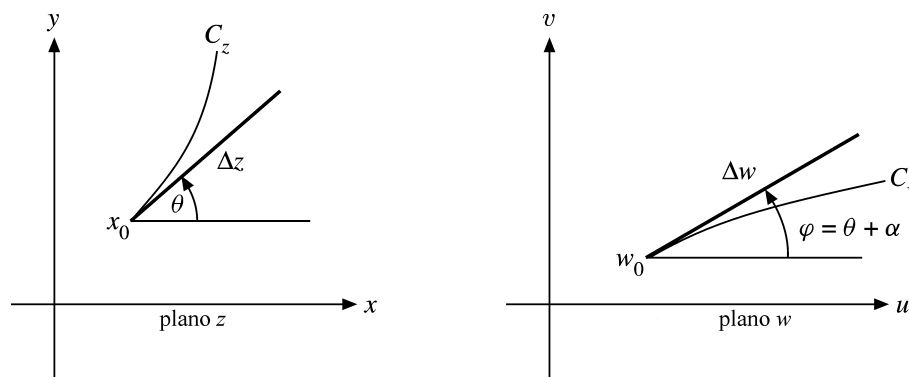


Figura 6.25: Mapeamento conformal – preservação de ângulos.

$$\varphi = \theta + \alpha, \tag{6.110}$$

ou qualquer reta no plano  $z$  é rotacionada através de um ângulo  $\alpha$  no plano  $w$ , contanto que  $w$  seja uma



transformação analítica e a derivada não seja zero.<sup>17</sup>

Uma vez que esse resultado é válido para qualquer reta que passe por  $z_0$ , ele será válido para um par de retas. Então, para o ângulo entre essas duas retas,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\theta_2 + \alpha) - (\theta_1 + \alpha) = \theta_2 - \theta_1, \quad (6.111)$$

o que mostra que o ângulo incluído é preservado sob uma transformação analítica. Essas transformações que preservam ângulos são denominadas **conformes**. A rotação de um ângulo  $\alpha$  em geral dependerá de  $z$ . Além disso,  $|f'(z)|$  será usualmente uma função de  $z$ .

Historicamente essas transformações conformes têm sido de grande importância para cientistas e engenheiros na resolução da equação de Laplace para problemas de eletrostática, hidrodinâmica, fluxo de calor, e assim por diante. Infelizmente, a abordagem da transformação conforme, embora elegante, é limitada a problemas que podem ser reduzidos a duas dimensões. O método costuma ser belo se houver alto grau de simetria presente, mas muitas vezes é impossível se a simetria for rompida ou não existir. Por causa dessas limitações e primordialmente porque os computadores eletrônicos oferecem uma alternativa útil (solução iterativa da equação diferencial parcial), omitimos os detalhes e aplicações dos mapeamentos conforme.

### Exercícios

**6.8.1** Expanda  $w(x)$  em uma série de Taylor em torno do ponto  $z = z_0$ , em que  $f'(z_0) = 0$ . (Ângulos não são preservados.) Mostre que, se as primeiras  $n - 1$  derivadas desaparecerem, mas  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ , então os ângulos no plano  $z$  com vértices em  $z = z_0$  aparecem no plano  $w$  multiplicados por  $n$ .

**6.8.2** Desenvolva as transformações que criam cada um dos quatro sistemas de coordenadas cilíndricas:

- (a) Cilíndricas circulares:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  
 $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$ .
- (b) Cilíndricas elípticas:  $x = a \cosh u \cos v$ ,  
 $y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$ .
- (c) Cilíndricas parabólicas:  $x = \xi \eta$ ,  
 $y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$ .
- (d) Bipolares:  $x = \frac{a \operatorname{senh} \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$ ,  
 $y = \frac{a \operatorname{sen} \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}$ .

*Nota:* Essas transformações não são necessariamente analíticas.

**6.8.3** Na transformação

$$e^z = \frac{a - w}{a + w},$$

como as retas coordenadas no plano  $z$  se transformam? Que sistema de coordenadas você construiu?

### Leituras Adicionais

Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, 3<sup>a</sup>. ed. Nova York: McGraw-Hill (1979). Esse texto é detalhado, minucioso, rigoroso e extensivo.

Churchill, R. V., J. W. Brown, e R. F. Verkey, *Complex Variables and Applications*, 5<sup>a</sup>. ed. Nova York: McGraw-Hill (1989). Esse texto é excelente tanto para o estudante principiante quanto para o avançado. É de fácil leitura e bastante completo. Uma prova detalhada do teorema de Cauchy-Goursat é dada no capítulo 5.

Greenleaf, F. P., *Introduction to Complex Variables*. Filadélfia: Saunders (1972). Esse livro de leitura muito fácil traz explicações detalhadas e cuidadosas.

Kurala, A., *Applied Functions of a Complex Variable*. Nova York: Wiley (Interscience) (1972). Um texto de nível intermediário dirigido a cientistas e engenheiros. Inclui muitas aplicações físicas.

Levinson, N., e R. M. Redheffer, *Complex Variables*. San Francisco: Holden-Day (1970). Esse texto é escrito para cientistas e engenheiros interessados em aplicações.

Morse, P. M., e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. Nova York: McGraw-Hill (1953). O capítulo 4 é uma apresentação de porções da teoria de funções de uma variável complexa de interesse para físicos teóricos.

Remmert, R., *Theory of Complex Functions*. Nova York: Springer (1991).

<sup>17</sup>Se  $df/dz = 0$ , seu argumento ou fase é indefinido e a transformação (analítica) não preservará necessariamente os ângulos.

- Sokolnikoff, I. S., e R. M. Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2<sup>a</sup>. ed. Nova York: McGraw-Hill (1966). O capítulo 7 trata de variáveis complexas.
- Spiegel, M. R., *Complex Variables*. Nova York: McGraw-Hill (1985). Um excelente resumo da teoria de variáveis complexas para cientistas.
- Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, 2<sup>a</sup>. ed. Nova York: Oxford University Press (1958). Um clássico.
- Watson, G. N., *Complex Integration and Cauchy's Theorem*. Nova York: Hafner (original, 1917, nova tiragem, 1960). Uma obra curta que contém um desenvolvimento rigoroso do teorema integral e da fórmula integral de Cauchy. São incluídas aplicações ao cálculo de resíduos. *Cambridge Tracts in Mathematics, and Mathematical Physics*, n<sup>o</sup> 15.

Outras referências são dadas ao final do Capítulo 15.



# 7

## Funções de uma Variável Complexa II

Neste capítulo voltamos à análise iniciada com as condições de Cauchy-Riemann no Capítulo 6 e desenvolvemos o teorema dos resíduos com importantes aplicações na avaliação de integrais definidas e partes principais de integrais de interesse para cientistas e expansão assintótica de integrais pelo método da inclinação mais acentuada. Também desenvolvemos outras funções analíticas específicas, tais como expansões de pólos de funções meromórficas e expansões de produto de funções inteiras. Incluímos relações de dispersão porque elas representam uma importante aplicação de métodos de variável complexa para físicos.

### 7.1 Cálculo de Resíduos

#### Teorema dos resíduos

Se a expansão de Laurent de uma função  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  é integrada termo a termo usando um contorno fechado que circunda um ponto singular isolado  $z_0$  uma vez em sentido anti-horário, obtemos (Exercício 6.4.1)

$$a_n \oint (z - z_0)^n dz = a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n + 1} \Big|_{z_1}^{z_1} = 0, \quad n \neq -1. \quad (7.1)$$

Contudo, se  $n = -1$ ,

$$a_{-1} \oint (z - z_0)^{-1} dz = a_{-1} \oint \frac{ir e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta}} = 2\pi i a_{-1}. \quad (7.2)$$

Resumindo as Equações (7.1) e (7.2), temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = a_{-1}. \quad (7.3)$$

A constante  $a_{-1}$ , o coeficiente de  $(z - z_0)^{-1}$  na expansão de Laurent, é denominada resíduo de  $f(z)$  em  $z = z_0$ .

Um conjunto de singularidades isoladas pode ser tratado deformando nosso contorno, como mostra a Figura 7.1. O teorema integral de Cauchy (Seção 6.3) leva a

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots = 0. \quad (7.4)$$

A integral circular ao redor de qualquer ponto singular determinado é dada pela Equação (7.3),

$$\oint_{C_i} f(z) dz = -2\pi i a_{-1, z_i}, \quad (7.5)$$

admitindo uma expansão de Laurent em torno do ponto  $z = z_i$  singular. O sinal negativo vem da integração em sentido horário, como mostra a Figura 7.1. Combinando as Equações (7.4) e (7.5), temos

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i (a_{-1z_0} + a_{-1z_1} + a_{-1z_2} + \dots) \\ &= 2\pi i \times (\text{soma dos resíduos envolvidos}). \end{aligned} \quad (7.6)$$

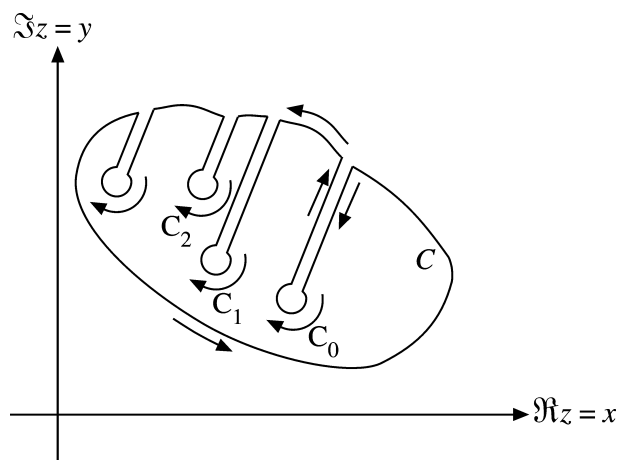


Figura 7.1: Excluindo singularidades isoladas.

Esse é o **teorema dos resíduos**. O problema de avaliar uma ou mais integrais de contorno é substituído pelo problema algébrico de calcular resíduos nos pontos singulares envolvidos.

Em primeiro lugar usamos esse teorema dos resíduos para desenvolver o conceito do valor principal de Cauchy. Então, no restante desta seção aplicamos o teorema dos resíduos a uma ampla variedade de integrais definidas de interesse matemático e físico.

Usando a transformação  $z = 1/w$  para  $w$  tendendo a 0, podemos achar a natureza de uma singularidade em  $z$  tendendo ao infinito e o resíduo de uma função  $f(z)$  com apenas singularidades isoladas e nenhum ponto de ramificação. Nesses casos sabemos que

$$\sum \{\text{resíduos no plano } z \text{ finito}\} + \{\text{resíduos em } z \rightarrow \infty\} = 0.$$

### Valor Principal de Cauchy

Ocasionalmente, um pólo isolado estará diretamente sobre o contorno de integração, fazendo com que a integral divirja. Vamos ilustrar um caso físico.

#### Exemplo 7.1.1 OSCILADOR FORÇADO CLÁSSICO

A equação diferencial não-homogênea para um oscilador harmônico forçado clássico, não-amortecido,

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \tag{7.7}$$

pode ser resolvida representando a força impulsora  $f(t) = \int \delta(t' - t) f(t') dt'$  como uma superposição de impulsos por analogia com uma distribuição de carga estendida em eletrostática.<sup>1</sup> Se resolvermos em primeiro lugar a equação diferencial mais simples

$$\ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t') \tag{7.8}$$

para  $G(t, t')$ , que é independente do termo de impulsão  $f$  (dependente do modelo), então  $x(t) = \int G(t, t') f(t') dt'$  resolve o problema original. Em primeiro lugar verificamos isso substituindo as integrais para  $x(t)$  e suas derivadas temporais na equação diferencial para  $x(t)$  usando a equação diferencial para  $G$ . Então procuramos  $G(t, t') = \int \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$  em termos de uma integral ponderada por  $\tilde{G}$ , que é sugerida por uma forma integral similar para  $\delta(t - t') = \int e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}$  (veja a Equação (1.193c) na Seção 1.15).

Ao substituir  $G$  e  $\tilde{G}$  na equação diferencial para  $G$ , obtemos

$$\int [(\omega_0^2 - \omega^2) \tilde{G} - e^{-i\omega t'}] e^{i\omega t} d\omega = 0. \tag{7.9}$$

Como essa integral é zero para todo  $t$ , a expressão entre colchetes deve desaparecer para todo  $\omega$ . Essa relação não é mais uma equação diferencial, mas uma relação algébrica que podemos resolver para  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t'}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{e^{-i\omega t'}}{2\omega_0(\omega + \omega_0)} - \frac{e^{-i\omega t'}}{2\omega_0(\omega - \omega_0)}. \tag{7.10}$$

<sup>1</sup> Adaptado de A. Yu. Grosberg, priv. comm.



Substituir  $\tilde{G}$  na integral para  $G$  resulta em

$$G(t, t') = \frac{1}{4\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega + \omega_0} - \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - \omega_0} \right] d\omega. \quad (7.11)$$

Aqui, a dependência de  $G$  de  $t - t'$  na exponencial é consistente com a mesma dependência de  $\delta(t - t')$ , seu termo de impulsão. Agora, o problema é que essa integral diverge porque o integrando aumenta muito em  $\omega = \pm\omega_0$ , uma vez que a integração passa diretamente pelo pólo de primeira ordem. Para explicar por que isso acontece, notamos que o termo de impulsão da função  $\delta$  para  $G$  inclui todas as frequências com a mesma amplitude. Em seguida, vemos que o termo de impulsão da equação para  $\tilde{G}$  em  $t' = 0$  é igual à unidade para todas as frequências  $\omega$ , incluindo o  $\omega_0$  ressonante. Sabemos pela física que forçar um oscilador a entrar em ressonância leva a uma amplitude indefinidamente crescente se não houver nenhum atrito. Com atrito, a amplitude permanece finita, mesmo em ressonância. Isso sugere a inclusão de um termo de pequeno atrito nas equações diferenciais para  $x(t)$  e  $G$ .

Com um termo de pequeno atrito  $\eta\dot{G}$ ,  $\eta > 0$ , na equação diferencial para  $G(t, t')$  (e  $\eta\dot{x}$  para  $x(t)$ ), ainda podemos resolver a equação algébrica

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\eta\omega)\tilde{G} = e^{-i\omega t'} \quad (7.12)$$

para  $\tilde{G}$  com atrito. A solução é

$$\tilde{G} = \frac{e^{-i\omega t'}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\eta\omega} = \frac{e^{-i\omega t'}}{2\Omega} \left( \frac{1}{\omega - \omega_-} - \frac{1}{\omega - \omega_+} \right), \quad (7.13)$$

$$\omega_{\pm} = \pm\Omega + \frac{i\eta}{2}, \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\eta}{2\omega_0} \right)^2}. \quad (7.14)$$

Para pequeno atrito,  $0 < \eta \ll \omega_0$ ,  $\Omega$  é quase igual a  $\omega_0$  e real, ao passo que cada  $\omega_{\pm}$  fica acrescido de uma pequena parte imaginária. Isso significa que a integração da integral para  $G$ ,

$$G(t, t') = \frac{1}{4\pi\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - \omega_-} - \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - \omega_+} \right] d\omega, \quad (7.15)$$

não encontra mais um pólo e permanece finita. ■

Esse tratamento de uma integral com um pólo retira o pólo do contorno e então considera o comportamento no limite quando ele é trazido de volta, como no Exemplo 7.1.1 para  $\eta \rightarrow 0$ . Esse exemplo também sugere tratar  $\omega$  como uma variável complexa no caso de singularidade ser um pólo de primeira ordem, deformando o caminho de integração para evitar a singularidade, o que equivale a adicionar uma pequena parte imaginária à posição do pólo e avaliar a integral por meio do teorema dos resíduos.

Por conseguinte, se o caminho da integração de uma integral  $\int \frac{dz}{z-x_0}$  para  $x_0$  real passar exatamente pelo pólo  $x_0$ , podemos deformar o contorno para incluir ou excluir o resíduo, como desejado, incluindo um desvio semicircular de **raio infinitesimal**. Isso é mostrado na Figura 7.2. Então, a integração sobre o semicírculo resulta em, com  $z - x_0 = \delta e^{i\varphi}$ ,  $dz = i\delta e^{i\varphi} d\varphi$  (veja a Equação (6.27a)),

$$\int \frac{dz}{z - x_0} = i \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = i\pi, \text{ i.e., } \pi i a_{-1} \quad \text{se em sentido anti-horário,}$$

$$\int \frac{dz}{z - x_0} = i \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi, \text{ i.e., } -\pi i a_{-1} \quad \text{se em sentido horário.}$$

Essa contribuição, + ou -, aparece no lado esquerdo da Equação (7.6). Se nosso desvio fosse em sentido horário, o resíduo não seria envolvido e não haveria nenhum termo correspondente do lado direito da Equação (7.6).

Contudo, se nosso desvio fosse em sentido anti-horário, esse resíduo seria envolvido pelo contorno  $C$  e um termo  $2\pi i a_{-1}$  apareceria no lado direito da Equação (7.6).

O resultado líquido para desvio em sentido horário ou em sentido anti-horário é que um pólo simples sobre o contorno é contado como metade do que seria caso estivesse dentro do contorno. Isso corresponde a considerar o valor principal de Cauchy. Por exemplo, vamos supor que  $f(z)$  com um pólo simples em  $z = x_0$  seja integrada

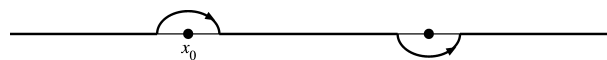


Figura 7.2: Contornando pontos singulares.

sobre todo o eixo real. O contorno é fechado com um semicírculo infinito no semiplano superior (Figura 7.3). Então,

$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= \int_{-\infty}^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{C_{x_0}} f(z) dz \\ &\quad + \int_{x_0+\delta}^{\infty} f(x) dx + \int_C \text{semicírculo infinito} \\ &= 2\pi i \sum \text{resíduos envolvidos.} \end{aligned} \tag{7.16}$$

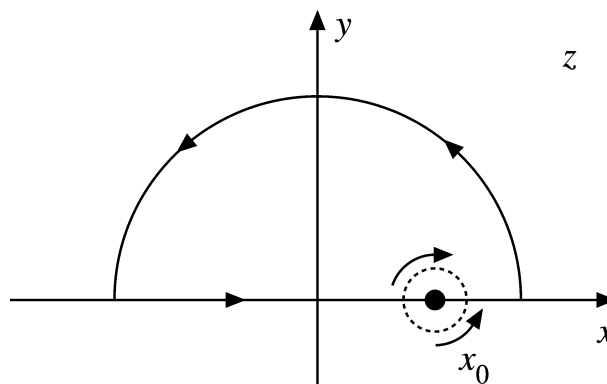


Figura 7.3: Desviando de pontos singulares.

Se o pequeno semicírculo  $C_{x_0}$  incluir  $x_0$  (por passar por baixo do eixo  $x$  em sentido anti-horário),  $x_0$  é envolvido e sua contribuição aparece **duas vezes** — como  $\pi ia_{-1}$  em  $\int_{C_{x_0}}$  e como  $2\pi ia_{-1}$  no termo  $2\pi i \sum$  de resíduos envolvidos — para uma contribuição líquida de  $\pi ia_{-1}$ . Se o pequeno semicírculo superior for selecionado,  $x_0$  é excluído. A única contribuição vem da integração **em sentido horário** sobre  $C_{x_0}$ , que resulta em  $-\pi ia_{-1}$ . Transferindo isso para a extrema direita da Equação (7.16), temos  $+\pi ia_{-1}$ , como antes.

As integrais do eixo  $x$  podem ser combinadas e pode-se permitir que o raio do semicírculo se aproxime de zero. Portanto, definimos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^{\infty} f(x) dx \right\} = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \tag{7.17}$$

$P$  indica o **valor principal** de Cauchy e representa o processo de limite precedente. Note que o valor principal de Cauchy é um processo de equilíbrio (ou de cancelamento). Na vizinhança de nossa singularidade em  $z = x_0$ ,

$$f(x) \approx \frac{a_{-1}}{x - x_0}. \tag{7.18}$$

Isso é ímpar em relação a  $x_0$ . O intervalo simétrico ou par (em relação a  $x_0$ ) dá o cancelamento das áreas sombreadas, Figura 7.4. A contribuição da singularidade é na integração em torno do semicírculo.

Em geral, se uma função  $f(x)$  tem uma singularidade  $x_0$  em algum lugar dentro do intervalo  $a \leq x_0 \leq b$  e é integrável sobre toda porção desse intervalo que não contenha o ponto  $x_0$ , então **definimos**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\delta_1} f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_{x_0+\delta_2}^b f(x) dx,$$

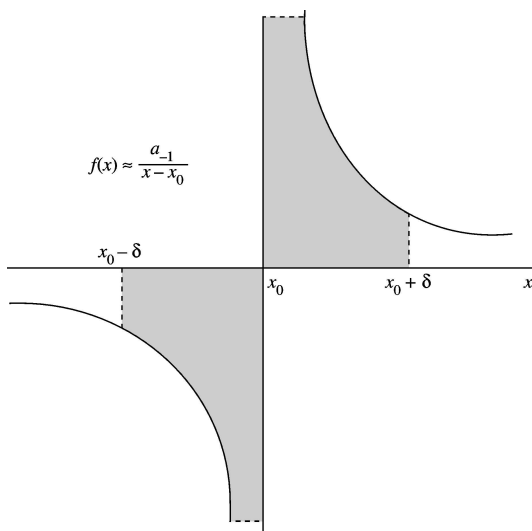


Figura 7.4: Cancelamento de um pólo simples.

quando o limite existe e,  $\delta_j \rightarrow 0$  **independentemente**; caso contrário, diz-se que a integral diverge. Se esse limite não existir, mas o limite  $\delta_1 = \delta_2 = \delta \rightarrow 0$  existir, ele é definido como o valor principal da integral.

Essa mesma técnica de limite é aplicável aos limites de integração  $\pm\infty$ . Definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \tag{7.19a}$$

se a integral existir com  $a, b$  aproximando-se de seus limites independentemente; caso contrário, a integral diverge. No caso de a integral divergir, mas

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{7.19b}$$

existir, ele é definido como seu valor principal.

### Expansão de Pólo de Funções Meromórficas

Funções analíticas  $f(z)$  que têm como singularidades somente pólos isolados são denominadas **meromórficas**. São exemplos  $\cotg z$  [de  $\frac{d}{dz} \ln \sen z$  na equação (5.210)] e razões de polinômios. Por simplicidade, vamos admitir que esses pólos em  $z = a_n$  com  $0 < |a_1| < |a_2| < \dots$  sejam todos simples, com resíduos  $b_n$ . Então, uma expansão de  $f(z)$  em termos de  $b_n(z - a_n)^{-1}$  depende, de um modo sistemático, de todas as singularidades de  $f(z)$ , em contraste com a expansão de Taylor em torno de um ponto analítico  $z_0$  de  $f(z)$  arbitrariamente escolhido ou da expansão de Laurent em torno de um dos pontos singulares de  $f(z)$ .

Vamos considerar uma série de círculos concêntricos  $C_n$  em torno da origem, de modo que  $C_n$  inclui  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mas nenhum outro pólo, seu raio  $R_n \rightarrow \infty$ , à medida que  $n \rightarrow \infty$ . Para garantir convergência, admitimos que  $|f(z)| < \varepsilon R_n$  para qualquer constante positiva pequena  $\varepsilon$  e todo  $z$  sobre  $C_n$ . Então, a série

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \{ (z - a_n)^{-1} + a_n^{-1} \} \tag{7.20}$$

converge para  $f(z)$ . Para provar esse **teorema** (que se deve a Mittag-Leffler), usamos o teorema dos resíduos para avaliar a integral de contorno para  $z$  dentro de  $C_n$ :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{a_m(a_m-z)} + \frac{f(z) - f(0)}{z}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Sobre  $C_n$  temos, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$|I_n| \leq 2\pi R_n \frac{\text{máx}_w \text{ on } C_n |f(w)|}{2\pi R_n (R_n - |z|)} < \frac{\varepsilon R_n}{R_n - |z|} \rightarrow \varepsilon$$

para  $R_n \gg |z|$ . Usar  $I_n \rightarrow 0$  na Equação (7.21) prova a Equação (7.20).

Se  $|f(z)| < \varepsilon R_n^{p+1}$ , então avaliamos de modo semelhante a integral

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w^{p+1}(w-z)} dw \rightarrow 0 \quad \text{à medida que } n \rightarrow \infty$$

e obtemos a expansão de pólo análoga

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \dots + \frac{z^p f^{(p)}(0)}{p!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{p+1}/a_n^{p+1}}{z - a_n}. \quad (7.22)$$

Note que a convergência da série nas Equações (7.20) e (7.22) é subentendida pelo limite de  $|f(z)|$  para  $|z| \rightarrow \infty$ .

### Expansão de Produto de Funções Inteiras

Uma função  $f(z)$  que é analítica para todo  $z$  finito é denominada função **inteira**. A derivada logarítmica  $f'/f$  é uma função meromórfica com uma expansão de pólo.

Se  $f(z)$  tem um zero simples em  $z = a_n$ , então  $f(z) = (z - a_n)g(z)$  com  $g(z)$  analítica e  $g(a_n) \neq 0$ . Por conseguinte, a derivada logarítmica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (z - a_n)^{-1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (7.23)$$

tem um pólo simples em  $z = a_n$  com resíduo 1,  $g'/g$  é analítica nesse ponto. Se  $f'/f$  satisfaz as condições que levam à expansão do pólo na Equação (7.20), então

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{z - a_n} \right] \quad (7.24)$$

é válida. Integrando a Equação (7.24), temos

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \ln f(z) - \ln f(0) \\ &= \frac{z f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln(z - a_n) - \ln(-a_n) + \frac{z}{a_n} \right\}, \end{aligned}$$

e exponenciando obtemos a expansão de produto

$$f(z) = f(0) \exp\left(\frac{z f'(0)}{f(0)}\right) \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}. \quad (7.25)$$

São exemplos as expansões de produto (veja o Capítulo 5) para

$$\begin{aligned} \text{sen } z &= z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/n\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \\ \text{cos } z &= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{z^2}{(n - 1/2)^2\pi^2}\right\}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Um outro exemplo é a expansão de produto da função gama, que será discutida no Capítulo 8.

Como consequência da Equação (7.23), a integral de contorno da derivada logarítmica pode ser usada para contar o número  $N_f$  de zeros (incluindo suas multiplicidades) da função  $f(z)$  dentro do contorno  $C$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f. \quad (7.27)$$



Além do mais, usando

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z), \tag{7.28}$$

vemos que a parte real na Equação (7.28) não muda à medida que  $z$  percorre o contorno uma vez, enquanto a variação correspondente, em  $\arg f$ , deve ser

$$\Delta_C \arg(f) = 2\pi N_f. \tag{7.29}$$

Isso leva ao **teorema de Rouché**: se  $f(z)$  e  $g(z)$  são analíticas dentro e sobre um contorno fechado  $C$  e  $|g(z)| < |f(z)|$  sobre  $C$ , então  $f(z)$  e  $f(z) + g(z)$  têm o mesmo número de zeros dentro de  $C$ .

Para mostrar isso, usamos

$$2\pi N_{f+g} = \Delta_C \arg(f + g) = \Delta_C \arg(f) + \Delta_C \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right).$$

Uma vez que  $|g| < |f|$  sobre  $C$ , o ponto  $w = 1 + g(z)/f(z)$  é sempre um ponto interior do círculo no plano com centro em 1 e raio 1. Por conseqüência,  $\arg(1 + g/f)$  deve voltar a seu valor original quando  $z$  percorrer o contorno  $C$  (não circunda a origem); ele não pode decrescer ou crescer por um múltiplo de  $2\pi$ , de modo que  $\Delta_C \arg(1 + g/f) = 0$ .

O teorema de Rouché pode ser usado para uma prova alternativa do teorema fundamental da álgebra: um polinômio  $\sum_{m=0}^n a_m z^m$  com  $a_n \neq 0$  tem  $n$  zeros. Definimos  $f(z) = a_n z^n$ . Então  $f$  tem um zero de multiplicidade  $n$  na origem e nenhum outro zero. Seja  $g(z) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^m$ . Aplicamos o teorema de Rouché a um círculo  $C$  com centro na origem e raio  $R > 1$ . Sobre  $C$ ,  $|f(z)| = |a_n|R^n$  e

$$|g(z)| \leq |a_0| + |a_1|R + \dots + |a_{n-1}|R^{n-1} \leq \left(\sum_{m=0}^{n-1} |a_m|\right) R^{n-1}.$$

Daí,  $|g(z)| < |f(z)|$  para  $z$  sobre  $C$ , contanto que  $R > (\sum_{m=0}^{n-1} |a_m|)/|a_n|$ . Portanto, para todos os círculos  $C$  suficientemente grandes,  $f + g = \sum_{m=0}^n a_m z^m$  tem  $n$  zeros dentro de  $C$  de acordo com o teorema de Rouché.

### Avaliação de Integrais Definidas

Integrais definidas aparecem repetidas vezes em problemas de física matemática, bem como em matemática pura. Há três técnicas moderadamente gerais que são úteis para avaliar integrais definidas: (1) integração de contorno, (2) conversão para funções gama ou beta (Capítulo 8) e (3) quadratura numérica. Entre outras abordagens estão a expansão de série com integração termo a termo e transformadas integrais. Como veremos na seqüência, o método de integração de contorno é talvez o mais versátil desses métodos, uma vez que é aplicável a uma ampla variedade de integrais.

### Integrais Definidas: $\int_0^{2\pi} f(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta$

O cálculo de resíduos é útil na avaliação de uma ampla variedade de integrais definidas em problemas de física, bem como em problemas puramente matemáticos. Consideramos, em primeiro lugar, integrais da forma

$$I = \int_0^{2\pi} f(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta, \tag{7.30}$$

em que  $f$  é finita para todos os valores de  $\theta$ . Também exigimos que  $f$  seja uma função racional de  $\text{sen } \theta$  e  $\text{cos } \theta$ , de modo que será uma função de valor único. Seja

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta.$$

Por essa expressão,

$$d\theta = -i \frac{dz}{z}, \quad \text{sen } \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \text{cos } \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}. \tag{7.31}$$

Nossa integral se torna

$$I = -i \oint f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{z}, \tag{7.32}$$

sendo o caminho de integração o círculo unitário. Pelo teorema dos resíduos, Equação (7.16),

$$I = (-i)2\pi i \sum \text{resíduos de um círculo unitário}. \tag{7.33}$$

Note que estamos atrás dos resíduos de  $f/z$ . Os Exercícios 7.1.7 a 7.1.10 ilustram integrais desse tipo.

**Exemplo 7.1.2** INTEGRAL DE COS NO DENOMINADOR

Nosso problema é avaliar a integral definida

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

Pela Equação (7.32) essa expressão se torna

$$\begin{aligned} I &= -i \oint_{\text{círculo unitário}} \frac{dz}{z[1 + (\varepsilon/2)(z + z^{-1})]} \\ &= -i \frac{2}{\varepsilon} \oint \frac{dz}{z^2 + (2/\varepsilon)z + 1}. \end{aligned}$$

O denominador tem raízes

$$z_- = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \text{e} \quad z_+ = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

em que  $z_+$  está dentro do círculo unitário e  $z_-$  está fora. Então, pela Equação (7.33) e o Exercício 6.6.1,

$$I = -i \frac{2}{\varepsilon} \cdot 2\pi i \frac{1}{2z + 2/\varepsilon} \Big|_{z=-1/\varepsilon+(1/\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

■

**Avaliação de Integrais Definidas:**  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Suponha que nossa integral definida tenha a forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{7.34}$$

e satisfaça as duas condições:

- $f(z)$  é analítica no semiplano superior, exceto para um número finito de pólos. (Admitiremos que não há nenhum pólo no eixo real. Se houver pólos presentes no plano real, eles podem ser incluídos ou excluídos como já discutimos antes nesta seção.)
- $f(z)$  desaparece tão fortemente<sup>2</sup> quanto  $1/z^2$  para  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .

Com essas condições, podemos considerar como um contorno de integração o eixo real e um semicírculo no semiplano superior, como mostra a Figura 7.5. Deixamos que o raio  $R$  do semicírculo se torne infinitamente grande. Então,

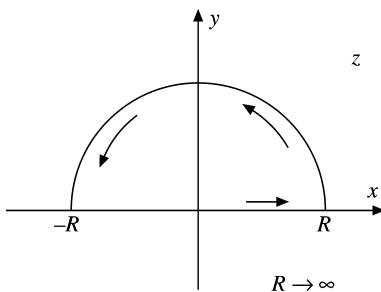


Figura 7.5: Contorno de semicírculo.

<sup>2</sup>Poderíamos usar  $f(z)$ , que se anula mais rapidamente do que  $1/z$ , e gostaríamos que  $f(z)$  fosse de valor único.





$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ &= 2\pi i \sum \text{resíduos (semiplano superior)}. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Pela segunda condição, a segunda integral (sobre o semicírculo) desaparece e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{resíduos (semiplano superior)}. \tag{7.36}$$

### Exemplo 7.1.3 INTEGRAL DE FUNÇÃO MEROMÓRFICA

Avalie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \tag{7.37}$$

Pela Equação (7.36),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \sum \text{resíduos (semiplano superior)}.$$

Aqui, e em outros problemas semelhantes, surge a pergunta: em que estão os pólos? Reescrevendo o integrando como

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i}, \tag{7.38}$$

vemos que há pólos simples (ordem 1) em  $z = i$  e  $z = -i$ .

Um pólo simples em  $z = z_0$  indica (e é indicado por) uma expansão de Laurent da forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{7.39}$$

O resíduo  $a_{-1}$  é facilmente isolado como (Exercício 6.6.1)

$$a_{-1} = (z-z_0)f(z)|_{z=z_0}. \tag{7.40}$$

Usando a Equação (7.40), constatamos que o resíduo em  $z = i$  é  $1/2i$ , ao passo que em  $z = -i$  is  $-1/2i$ .

Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \tag{7.41}$$

Aqui usamos  $a_{-1} = 1/2i$  para o resíduo do único pólo incluído em  $z = i$ . Note que é possível usar o semicírculo inferior e que essa escolha levará ao mesmo resultado,  $I = \pi$ . Um problema um pouco mais delicado é dado pelo exemplo seguinte. ■

### Avaliação de Integrais Definidas: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$

Considere a integral definida

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx, \tag{7.42}$$

com  $a$  real e positivo. (Essa é a transformada de Fourier, Capítulo 15.) Admitimos as duas condições:

- $f(z)$  é analítica no semiplano superior, exceto para um número finito de pólos.
- $\Omega \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi.$  (7.43)

Note que essa condição é menos restritiva do que a segunda condição imposta a  $f(z)$  para integrar  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  previamente.

Empregamos o contorno mostrado na Figura 7.5. A aplicação do cálculo de resídulos é a mesma que a aplicação que acabamos de considerar, mas temos de trabalhar mais para mostrar que a integral sobre o semicírculo (infinito) vai a zero. Essa integral se torna

$$I_R = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaR \cos \theta - aR \text{sen} \theta} iRe^{i\theta} d\theta. \tag{7.44}$$

Seja  $R$  tão grande que  $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| < \varepsilon$ . Então,

$$|I_R| \leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-aR \text{sen} \theta} d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \text{sen} \theta} d\theta. \tag{7.45}$$

Na faixa  $[0, \pi/2]$ ,

$$\frac{2}{\pi}\theta \leq \text{sen } \theta.$$

Portanto (Figura 7.6),

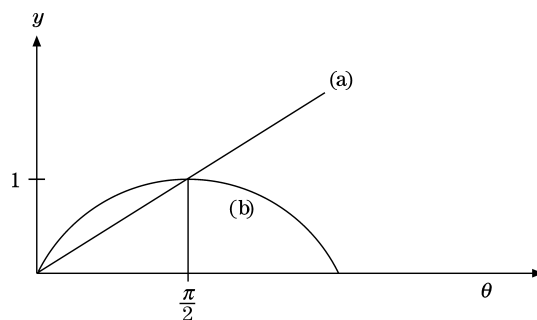


Figura 7.6: (a)  $y = (2/\pi)\theta$ , (b)  $y = \text{sen } \theta$ .

$$|I_R| \leq 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta. \tag{7.46}$$

Agora, integrando por inspeção, obtemos

$$|I_R| \leq 2\varepsilon R \frac{1 - e^{-aR}}{2aR/\pi}.$$

Por fim,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| \leq \frac{\pi}{a}\varepsilon. \tag{7.47}$$

Pela Equação (7.43),  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$  e

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0. \tag{7.48}$$

Esse útil resultado às vezes é denominado **lema de Jordan**. Com ele, estamos preparados para atacar as integrais de Fourier da forma mostrada na Equação (7.42).

Usando o contorno mostrado na Figura 7.5, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 2\pi i \sum \text{resíduos (semiplano superior)}.$$

Uma vez que a integral sobre o semicírculo superior  $I_R$  se anula à medida que  $R \rightarrow \infty$  (lema de Jordan),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum \text{resíduos (semiplano superior)} \quad (a > 0). \tag{7.49}$$

### Exemplo 7.1.4 PÓLO SIMPLES SOBRE CONTORNO DE INTEGRAÇÃO

O problema é avaliar

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx. \tag{7.50}$$

Essa expressão pode ser considerada como a parte imaginária<sup>3</sup> de

$$I_2 = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz. \tag{7.51}$$

Agora o único pólo é um pólo simples em  $z = 0$  e o resíduo nesse ponto é  $a_{-1} = 1$ , pela Equação (7.40). Escolhemos o contorno mostrado na Figura 7.7 (1) para evitar o pólo, (2) para incluir o eixo real e (3) para resultar

<sup>3</sup>Podemos usar  $\int [(e^{iz} - e^{-iz})/2iz] dz$ , mas então serão necessários dois contornos diferentes para as duas exponenciais (compare com o Exemplo 7.1.5).



um integrando pequeno, que tende a desaparecer, para  $z = iy, y \rightarrow \infty$ . Note que, nesse caso, um semicírculo grande (infinito) na parte inferior do semiplano seria desastroso. Temos

$$\oint \frac{e^{iz} dz}{z} = \int_{-R}^{-r} e^{ix} \frac{dx}{x} + \int_{C_1} \frac{e^{iz} dz}{z} + \int_r^R \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_{C_2} \frac{e^{iz} dz}{z} = 0, \quad (7.52)$$

sendo que o zero final vem do teorema dos resíduos (Equação (7.6)). Pelo lema de Jordan,

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz} dz}{z} = 0, \quad (7.53)$$

e

$$\oint \frac{e^{iz} dz}{z} = \int_{C_1} \frac{e^{iz} dz}{z} + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x} = 0. \quad (7.54)$$

A integral sobre o semicírculo pequeno resulta em  $(-)\pi i$  vezes o resíduo de 1, e menos, como resultado da trajetória em sentido horário. Tomando a parte imaginária<sup>4</sup>

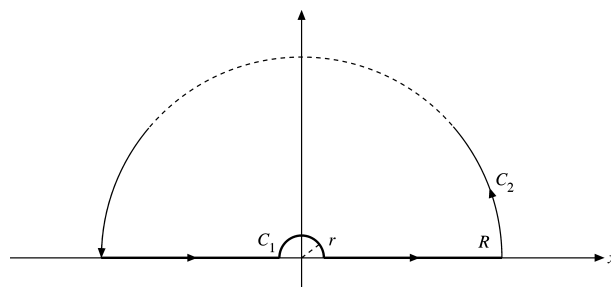


Figura 7.7: Singularidade sobre contorno.

temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi \quad (7.55)$$

ou

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (7.56)$$

O contorno da Figura 7.7, embora conveniente, não é, de modo algum, único. Uma outra opção de contorno para avaliar a Equação (7.50) é apresentada no Exercício 7.1.15.

### Exemplo 7.1.5 ESPALHAMANTO NA MECÂNICA QUÂNTICA

A análise do espalhamento na mecânica quântica leva à função

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \text{sen } x dx}{x^2 - \sigma^2}, \quad (7.57)$$

em que  $\sigma$  é real e positivo. Essa integral é divergente e, portanto, ambígua. Pelas condições físicas do problema, há ainda mais um requisito:  $I(\sigma)$  deve ter a forma  $e^{i\sigma}$ , de modo que representará uma onda espalhada emergente.

Usando

$$\text{sen } z = \frac{1}{i} \text{senh } iz = \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz}, \quad (7.58)$$

escrevemos a Equação (7.57) no plano complexo como

$$I(\sigma) = I_1 + I_2, \quad (7.59)$$

<sup>4</sup>Alternativamente, podemos combinar as integrais da Equação (7.52) como

$$\int_{-R}^{-r} e^{ix} \frac{dx}{x} + \int_r^R e^{ix} \frac{dx}{x} = \int_r^R (e^{ix} - e^{-ix}) \frac{dx}{x} = 2i \int_r^R \frac{\text{sen } x}{x} dx.$$

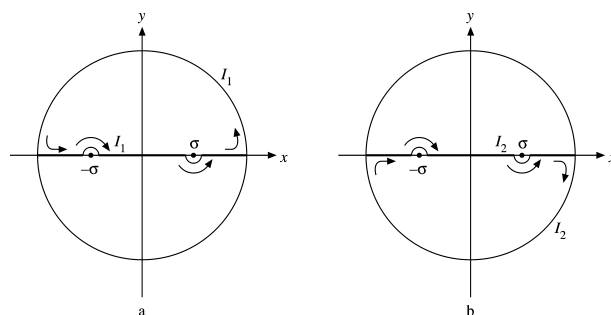


Figura 7.8: Contornos.

com

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2} dz, \\
 I_2 &= -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2} dz.
 \end{aligned}
 \tag{7.60}$$

A integral  $I_1$  é semelhante ao Exemplo 7.1.4 e, como naquele caso, podemos completar o contorno por um semicírculo infinito no semiplano superior, como mostra a Figura 7.8a. Para  $I_2$ , a exponencial é negativa, e completamos o contorno por um semicírculo infinito no semiplano inferior, como mostra a Figura 7.8b. Assim como no Exemplo 7.1.4, nenhum dos semicírculos contribui com qualquer coisa para a integral – lema de Jordan.

Há ainda o problema de localizar os pólos e avaliar os resíduos. Encontramos pólos em  $z = +\sigma$  e  $z = -\sigma$  **sobre o contorno de integração**. Os resíduos são (Exercícios 6.6.1 e 7.1.1)

	$z = \sigma$	$z = -\sigma$
$I_1$	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$
$I_2$	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$

Desviando ao redor dos pólos, como mostra a Figura 7.8 (pouco importa se formos por cima ou por baixo), constatamos que o teorema dos resíduos leva a

$$PI_1 - \pi i \left( \frac{1}{2i} \right) \frac{e^{-i\sigma}}{2} + \pi i \left( \frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} = 2\pi i \left( \frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2},
 \tag{7.61}$$

porque envolvemos a singularidade em  $z = \sigma$  mas excluímos a singularidade em  $z = -\sigma$ . De modo semelhante, mas notando que o contorno para  $I_2$  é em sentido horário,

$$PI_2 - \pi i \left( \frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2} + \pi i \left( \frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{-i\sigma}}{2} = -2\pi i \left( \frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i\sigma}}{2}.
 \tag{7.62}$$

Somando as Equações (7.61) e (7.62), temos

$$PI(\sigma) = PI_1 + PI_2 = \frac{\pi}{2} (e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}) = \pi \cosh i\sigma = \pi \cos \sigma.
 \tag{7.63}$$

Essa é uma avaliação perfeitamente boa da Equação (7.57), mas, infelizmente, a dependência do co-seno é adequada para uma onda estacionária e não para a onda espalhada emergente, como especificamos.

Para obter a forma desejada, experimentamos uma técnica diferente (compare com o Exemplo 7.1.1). Em vez de nos esquivarmos ao redor dos pontos singulares, vamos removê-los do eixo real. Especificamente, seja  $\sigma \rightarrow \sigma + i\gamma$ ,  $-\sigma \rightarrow -\sigma - i\gamma$ , em que  $\gamma$  é positivo mas pequeno e eventualmente será obrigado a se aproximar de zero; isto é, para  $I_1$  incluímos um dos pólos e para  $I_2$  incluímos o outro,

$$I_+(\sigma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\sigma + i\gamma).
 \tag{7.64}$$



Com essa simples substituição, a integral de primeira ordem  $I_1$  se torna

$$I_1(\sigma + i\gamma) = 2\pi i \left( \frac{1}{2i} \right) \frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2} \quad (7.65)$$

por aplicação direta do teorema dos resíduos. Além disso,

$$I_2(\sigma + i\gamma) = -2\pi i \left( \frac{-1}{2i} \right) \frac{e^{i(\sigma+i\gamma)}}{2}. \quad (7.66)$$

Somando as Equações (7.65) e (7.66), e então deixando  $\gamma \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_+(\sigma) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} [I_1(\sigma + i\gamma) + I_2(\sigma + i\gamma)] \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \pi e^{i(\sigma+i\gamma)} = \pi e^{i\sigma}, \end{aligned} \quad (7.67)$$

um resultado que realmente se ajusta às condições de fronteira de nosso problema de espalhamento.

É interessante notar que a substituição  $\sigma \rightarrow \sigma - i\gamma$  teria levado a

$$I_-(\sigma) = \pi e^{-i\sigma}, \quad (7.68)$$

que poderia representar uma onda incidente. Vemos que nosso resultado anterior (Equação (7.63)) é a média aritmética das Equações (7.67) e (7.68). Essa média é o valor principal de Cauchy da integral. Note que temos essas possibilidades (Equações (7.63), (7.67) e (7.68)) porque nossa integral não é definida unicamente, até que especifiquemos o processo particular de limite (ou média) a ser usado.

### Avaliação de Integrais Definidas: Formas Exponenciais

Quando há funções exponenciais ou hiperbólicas presentes no integrando, a vida fica um pouco mais complicada do que antes. Em vez de uma prescrição geral global, o contorno deve ser escolhido para se ajustar à integral específica. Esses casos são também oportunidades para ilustrar a versatilidade e o poder da integração de contorno.

Como exemplo, consideramos uma integral que será bastante útil no desenvolvimento de uma relação entre  $\Gamma(1+z)$  e  $\Gamma(1-z)$ . Note como é explorada a periodicidade ao longo do eixo imaginário.

### Exemplo 7.1.6 FUNÇÃO FATORIAL

Queremos avaliar

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1. \quad (7.69)$$

Os limites impostos a  $a$  são suficientes (mas não necessários) para evitar que a integral divirja, à medida que  $x \rightarrow \pm\infty$ . Essa integral (Equação 7.69) pode ser manipulada substituindo a variável real  $x$  pela variável complexa  $z$  e integrando ao redor do contorno mostrado na Figura 7.9. Se tomarmos o limite, à medida que  $R \rightarrow \infty$ , o eixo real, é claro, leva à integral que queremos. O caminho de retorno ao longo de  $y = 2\pi$  é escolhido para deixar invariante o denominador da integral, introduzindo, ao mesmo tempo, um fator constante  $e^{i2\pi a}$  no numerador. Temos, no plano complexo,

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{az}}{1+e^z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{i2\pi a} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \right) \\ &= (1 - e^{i2\pi a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Além disso, há duas seções verticais ( $0 \leq y \leq 2\pi$ ), que desaparecem (exponencialmente), à medida que  $R \rightarrow \infty$ .

Agora, onde estão os pólos e quais são os resíduos? Temos um pólo quando

$$e^z = e^x e^{iy} = -1. \quad (7.71)$$

A Equação (7.7) é satisfeita em  $z = 0 + i\pi$ . Por uma expansão de Laurent<sup>5</sup> em potências de  $(z - i\pi)$  verificamos, que o pólo é um pólo simples com um resíduo de  $-e^{i\pi a}$ . Então, aplicando o teorema dos resíduos,

$$(1 - e^{i2\pi a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = 2\pi i (-e^{i\pi a}). \quad (7.72)$$

<sup>5</sup> $1 + e^z = 1 + e^{z-i\pi} e^{i\pi} = 1 - e^{z-i\pi} = -(z - i\pi) \left( 1 + \frac{z-i\pi}{2!} + \frac{(z-i\pi)^2}{3!} + \dots \right)$ .

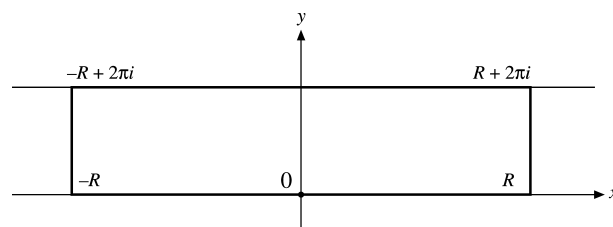


Figura 7.9: Contorno retangular.

Essa expressão se reduz rapidamente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\text{sen } a\pi}, \quad 0 < a < 1. \tag{7.73}$$

Usando a função beta (Seção 8.4), podemos mostrar que a integral é igual ao produto  $\Gamma(a)\Gamma(1 - a)$ . Isso resulta na interessante e útil relação da função fatorial

$$\Gamma(a + 1)\Gamma(1 - a) = \frac{\pi a}{\text{sen } \pi a}. \tag{7.74}$$

Embora a Equação (7.73) seja válida para a real,  $a, 0 < a < 1$ , a Equação (7.74) pode ser estendida por continuação analítica para todos os valores de  $a$ , reais e complexos, excluindo apenas valores inteiros reais. ■

Como exemplo final de integrais de contorno de funções exponenciais, consideramos, mais uma vez, os números de Bernoulli.

### Exemplo 7.1.7 NÚMEROS DE BERNOULLI

Na Seção 5.9, os números de Bernoulli foram definidos pela expansão

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \tag{7.75}$$

Substituindo  $x$  por  $z$  (continuação analítica), temos uma série de Taylor (compare com a Equação (6.47)) com

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{7.76}$$

em que o contorno  $C_0$  é ao redor da origem em sentido anti-horário com  $|z| < 2\pi$  para evitar os pólos em  $2\pi in$ .

Para  $n = 0$ , temos um pólo simples em  $z = 0$  com um resíduo de  $+1$ . Daí, pela Equação (7.25),

$$B_0 = \frac{0!}{2\pi i} \cdot 2\pi i(1) = 1. \tag{7.77}$$

Para  $n = 1$ , a singularidade em  $z = 0$  se torna um pólo de segunda ordem. Podemos mostrar que o resíduo é  $-\frac{1}{2}$  por expansão de série da exponencial, seguida por uma expansão binomial. Isso resulta em

$$B_1 = \frac{1!}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \tag{7.78}$$

Para  $n \geq 2$  esse procedimento de torna bastante tedioso, e recorreremos a um meio diferente para avaliar a Equação (7.76). O contorno é deformado, como mostra a Figura 7.10.

O novo contorno  $C$  ainda circunda a origem, como requerido, mas agora também circunda (em uma direção negativa) uma série infinita de pontos singulares ao longo do eixo imaginário em  $z = \pm p2\pi i, p = 1, 2, 3, \dots$ . A integração para a frente e para trás ao longo do eixo  $x$  se cancela e, para  $R \rightarrow \infty$ , a integração sobre o círculo infinito resulta em zero. Lembre-se de que  $n \geq 2$ . Portanto,

$$\oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = -2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \text{resíduos} \quad (z = \pm p2\pi i). \tag{7.79}$$

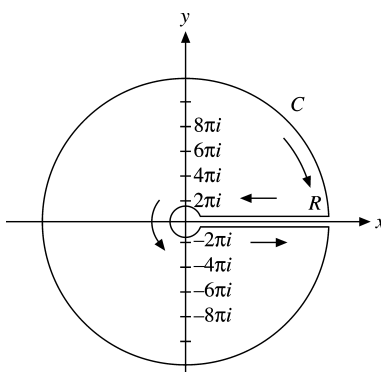


Figura 7.10: Contorno de integração para números de Bernoulli.

Em  $z = p2\pi i$ , temos um pólo simples com um resíduo  $(p2\pi i)^{-n}$ . Quando  $n$  é ímpar, o resíduo de  $z = p2\pi i$  cancela exatamente o resíduo de  $z = -p2\pi i$  e  $B_n = 0$ ,  $n = 3, 5, 7$ , e assim por diante. Para  $n$  par, os resíduos se somam, dando

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n!}{2\pi i} (-2\pi i) 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n (2\pi i)^n} \\ &= -\frac{(-1)^{n/2} 2n!}{(2\pi)^n} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-n} = -\frac{(-1)^{n/2} 2n!}{(2\pi)^n} \zeta(n) \quad (n \text{ par}), \end{aligned} \quad (7.80)$$

em que  $\zeta(n)$  é a função zeta de Riemann apresentada na Seção 5.9. A Equação (7.80) corresponde à Equação (5.152) da Seção 5.9.

### Exercícios

**7.1.1** Determine a natureza das singularidades de cada uma das seguintes funções e avalie os resíduos ( $a > 0$ ).

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| (a) $\frac{1}{z^2 + a^2}$ .       | (b) $\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$ .            |
| (c) $\frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ . | (d) $\frac{\text{sen } 1/z}{z^2 + a^2}$ .  |
| (e) $\frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}$ . | (f) $\frac{ze^{iz}}{z^2 - a^2}$ .          |
| (g) $\frac{e^{iz}}{z^2 - a^2}$ .  | (h) $\frac{z^{-k}}{z + 1}$ , $0 < k < 1$ . |

*Sugestão:* Para o ponto no infinito, use a transformação  $w = 1/z$  para  $|z| \rightarrow 0$ . Para o resíduo, transforme  $f(z) dz$  para  $g(w) dw$  e observe o comportamento de  $g(w)$ .

**7.1.2** Localize as singularidades e avalie os resíduos de cada uma das seguintes funções:

- (a)  $z^{-n}(e^z - 1)^{-1}$ ,  $z \neq 0$ ,
- (b)  $\frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}$ .
- (c) Ache uma expressão de forma fechada (isto é, que não seja uma soma) para a soma das singularidades do plano finito.
- (d) Usando o resultado da parte (c), qual é o resíduo em  $|z| \rightarrow \infty$ ?

*Sugestão:* Veja a Seção 5.9 para expressões que envolvem números de Bernoulli. Note que a Equação (5.144) não pode ser usada para investigar a singularidade em  $z \rightarrow \infty$ , uma vez que essa série só é válida para  $|z| < 2\pi$ .

- 7.1.3** A afirmação de que a integral de meia-volta ao redor de um ponto singular é igual à metade da integral de volta inteira estava limitada a pólos simples. Mostre, por um exemplo específico, que

$$\int_{\text{Semicírculo}} f(z) dz = \frac{1}{2} \oint_{\text{Círculo}} f(z) dz$$

não vale necessariamente se a integral circundar um pólo de ordem mais alta.

*Sugestão:* Experimente  $f(z) = z^{-2}$ .

- 7.1.4** A função  $f(z)$  é analítica ao longo do eixo real, exceto para um pólo de terceira ordem em  $z = x_0$ . A expansão de Laurent em torno de  $z = x_0$  tem a forma

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z - x_0)^3} + \frac{a_{-1}}{z - x_0} + g(z),$$

com  $g(z)$  analítica em  $z = x_0$ . Mostre que a técnica do valor principal de Cauchy é aplicável no sentido de que

(a)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x) dx \right\}$  é finito.

(b)  $\int_{C_{x_0}} f(z) dz = \pm i\pi a_{-1}$ ,

em que  $C_{x_0}$  denota um **semicírculo pequeno** em torno de  $z = x_0$ .

- 7.1.5** A função degrau unitária é definida como (compare com o Exercício 1.15.13)

$$u(s - a) = \begin{cases} 0, & s < a \\ 1, & s > a. \end{cases}$$

Mostre que  $u(s)$  tem as representações integrais

(a)  $u(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{x - i\varepsilon} dx,$

(b)  $u(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{x} dx.$

*Nota:* O parâmetro  $s$  é real.

- 7.1.6** A maioria das funções especiais da física matemática pode ser gerada (definida) por uma função geradora da forma

$$g(t, x) = \sum_n f_n(x) t^n.$$

Dadas as seguintes representações integrais, derive as funções geradoras correspondentes:

- (a) Bessel:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-n-1} dt.$$

- (b) Bessel modificada:

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{(x/2)(t+1/t)} t^{-n-1} dt.$$

- (c) Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} t^{-n-1} dt.$$

- (d) Hermite:

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint e^{-t^2 + 2tx} t^{-n-1} dt.$$

- (e) Laguerre:

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)t^{n+1}} dt.$$





(f) Chebyshev:

$$T_n(x) = \frac{1}{4\pi i} \oint \frac{(1-t^2)t^{-n-1}}{(1-2tx+t^2)} dt.$$

Cada um dos contornos circunda a origem e nenhum outro ponto singular.

**7.1.7** Generalizando o Exemplo 7.1.2, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2)^{1/2}}, \quad \text{para } a > |b|.$$

O que acontece se  $|b| > |a|$ ?

**7.1.8** Mostre que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}, \quad a > 1.$$

**7.1.9** Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \frac{2\pi}{1 - t^2}, \quad \text{para } |t| < 1.$$

O que acontece se  $|t| > 1$ ? O que acontece se  $|t| = 1$ ?

**7.1.10** Com o cálculo de resíduos, mostre que

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \theta \, d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(A notação de fatorial duplo é definida na Seção 8.1.)

*Sugestão:*  $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ ,  $|z| = 1$ .

**7.1.11** Avalie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} dx, \quad a > b > 0.$$

Resposta:  $\pi(a - b)$ .

**7.1.12** Prove que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

*Sugestão:*  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .

**7.1.13** O cálculo da mecânica quântica de uma probabilidade de transição leva à função  $f(t, \omega) = 2(1 - \cos \omega t)/\omega^2$ . Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \omega) d\omega = 2\pi t.$$

**7.1.14** Mostre que ( $a > 0$ )

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$

Como o lado direito será modificado se  $\cos x$  for substituído por  $\cos kx$ ?

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}.$

Como o lado direito será modificado se  $\operatorname{sen} x$  for substituído por  $\operatorname{sen} kx$ ?

Essas integrais também podem ser interpretadas como transformadas de Fourier de co-seno e seno, Capítulo 15.

**7.1.15** Use o contorno mostrado (Figura 7.11) com  $R \rightarrow \infty$  para provar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

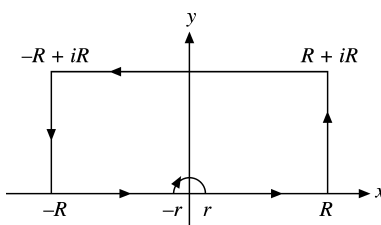


Figura 7.11: Contorno quadrado grande.

**7.1.16** Na teoria quântica de colisões atômicas encontramos a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} e^{ipt} dt,$$

na qual  $p$  é real. Mostre que

$$\begin{aligned} I &= 0, & |p| > 1 \\ I &= \pi, & |p| < 1. \end{aligned}$$

O que acontece se  $p = \pm 1$ ?

**7.1.17** Avalie

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$$

(a) por adequada expansão de série da integranda para obter

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-3},$$

(b) e por integração de contorno para obter

$$\frac{\pi^3}{8}.$$

*Sugestão:*  $x \rightarrow z = e^t$ . Experimente o contorno mostrado na Figura 7.12, deixando  $R \rightarrow \infty$ .

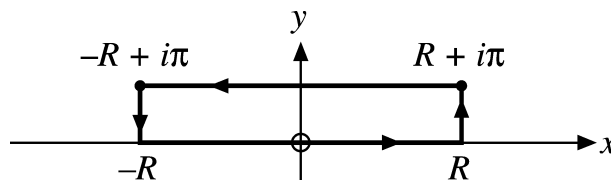


Figura 7.12: Contorno quadrado pequeno.

**7.1.18** Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi a}{\text{sen } \pi a},$$

em que  $-1 < a < 1$ . Eis aqui mais outro modo de derivar a Equação (7.74).

*Sugestão:* Use o contorno mostrado na Figura 7.13, observando que  $z = 0$  é um ponto de ramificação e o eixo  $x$  positivo é uma linha de corte. Note também os comentários sobre fases logo após o Exemplo 6.6.1.

**7.1.19** Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\text{sen } a\pi},$$

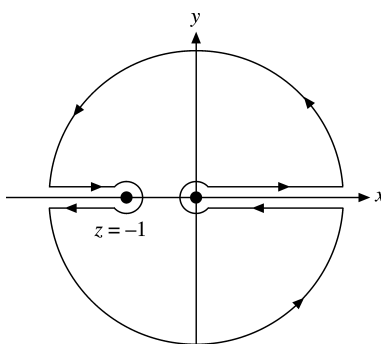


Figura 7.13: Contorno que evita ponto de ramificação e pólo.

em que  $0 < a < 1$ . Isso abre outro modo de derivar a relação de função fatorial dada pela Equação (7.74).

*Sugestão:* Você tem um ponto de ramificação e precisará de uma linha de corte. Lembre-se de que  $z^{-a} = w$  em forma polar é

$$[re^{i(\theta+2\pi n)}]^{-a} = \rho e^{i\varphi},$$

o que leva a  $-a\theta - 2an\pi = \varphi$ . Você deve restringir  $n$  a zero (ou a qualquer outro inteiro único), de modo que  $\varphi$  possa ser unicamente especificado. Experimente o contorno mostrado na Figura 7.14.

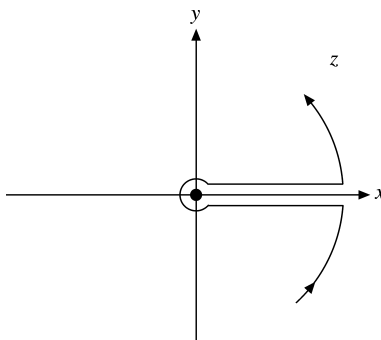


Figura 7.14: Contorno alternativo que evita ponto de ramificação.

**7.1.20** Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}, \quad a > 0.$$

**7.1.21** Avalie

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1 + x^4} dx.$$

Resposta:  $\pi/\sqrt{2}$ .

**7.1.22** Mostre que

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

*Sugestão:* Experimente o contorno mostrado na Figura 7.15.

*Nota:* Essas são as integrais de Fresnel para o caso especial de infinito como limite superior. Para o caso geral de um limite superior variável, expansões assintóticas das integrais de Fresnel são o tópico do Exercício 5.10.2. Expansões esféricas de Bessel são o tópico do Exercício 11.7.13.

**7.1.23** Diversas das integrais de Bromwich, Seção 15.12, envolvem uma porção que pode ser aproximada por

$$I(y) = \int_{a-iy}^{a+iy} \frac{e^{zt}}{z^{1/2}} dz.$$

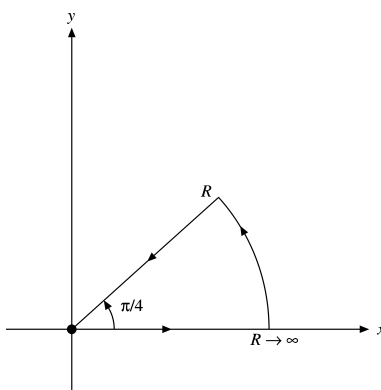


Figura 7.15: Contorno angular.

Aqui,  $a$  e  $t$  são positivos e finitos. Mostre que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I(y) = 0.$$

**7.1.24** Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\text{sen}(\pi/n)}.$$

*Sugestão:* Experimente o contorno mostrado na Figura 7.16.

**7.1.25** (a) Mostre que

$$f(z) = z^4 - 2 \cos 2\theta z^2 + 1$$

tem zeros em  $e^{i\theta} e^{-i\theta}$ ,  $-e^{i\theta}$ , e  $-e^{-i\theta}$ .

(b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \text{sen } \theta} = \frac{\pi}{2^{1/2} (1 - \cos 2\theta)^{1/2}}.$$

O Exercício 7.1.24 ( $n = 4$ ) é um caso especial desse resultado.

**7.1.26** Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1} = \frac{\pi}{2 \text{sen } \theta} = \frac{\pi}{2^{1/2} (1 - \cos 2\theta)^{1/2}}.$$

O Exercício 7.1.21 é um caso especial desse resultado.

**7.1.27** Aplique as técnicas do Exemplo 7.1.5 à avaliação da integral imprópria

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \sigma^2}.$$

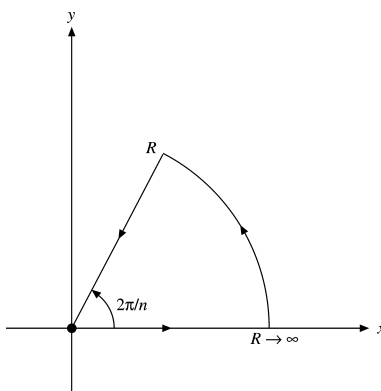


Figura 7.16: Contorno de setor.



- (a) Seja  $\sigma \rightarrow \sigma + i\gamma$ .
- (b) Seja  $\sigma \rightarrow \sigma - i\gamma$ .
- (c) Considere o valor principal de Cauchy.

**7.1.28** A integral no Exercício 7.1.17 pode ser transformada em

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{y^2}{1 + e^{-2y}} dy = \frac{\pi^3}{16}.$$

Avalie essa integral pela quadratura de Gauss-Laguerre e compare seu resultado com  $\pi^3/16$ .

Resposta: Integral = 1,93775 (10 pontos).

## 7.2 Relações de Dispersão

O conceito de relações de dispersão entrou na física com o trabalho de Kronig e Kramers na óptica. O nome **dispersão** vem de dispersão óptica, um resultado da dependência entre o índice de refração e o comprimento de onda ou frequência angular. O índice de refração  $n$  pode ter uma parte real determinada pela velocidade de fase e uma parte imaginária (negativa) determinada pela absorção, veja a Equação (7.94). Em 1926-1927, Kronig e Kramers mostraram que a parte real de  $(n^2 - 1)$  podia ser expressa como uma integral da parte imaginária. Generalizando isso, aplicaremos o rótulo **relações de dispersão** a qualquer par de equações que dêem a parte real de uma função como uma integral de sua parte imaginária e a parte imaginária como uma integral de sua parte real, Equações (7.86a) e (7.86b), que vêm a seguir. Poderíamos ter suspeitado da existência de tais relações integrais como uma integral análoga das relações diferenciais de Cauchy-Riemann, Seção 6.2.

As aplicações na física moderna são bem difundidas. Por exemplo, a parte real da função poderia descrever o espalhamento frontal de um raio gama em um campo nuclear de Coulomb (um processo dispersivo). Então, a parte imaginária descreveria a produção do par elétron-pósitron naquele mesmo campo de Coulomb (o processo de absorção). Como veremos mais adiante, as relações de dispersão podem ser consideradas uma consequência da causalidade e, portanto, são independentes dos detalhes da interação particular.

Consideramos uma função complexa  $f(z)$  que é analítica no semiplano superior e no eixo real. Também exigimos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi, \tag{7.81}$$

para que a integral sobre um semicírculo infinito se anule. A questão dessas condições é que podemos expressar  $f(z)$  pela fórmula integral de Cauchy, Equação (6.43),

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{7.82}$$

A integral sobre o semicírculo superior<sup>6</sup> desaparece, e temos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx. \tag{7.83}$$

A integral sobre o contorno mostrado na Figura 7.17 tornou-se uma integral ao longo do eixo  $x$ .

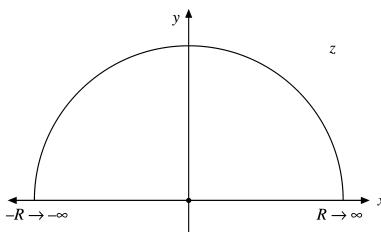


Figura 7.17: Contorno de semicírculo.

A Equação (7.83) admite que  $z_0$  está no semiplano superior — interior ao contorno fechado. Se  $z_0$  estivesse no semiplano inferior, a integral resultaria em zero pelo teorema integral de Cauchy, Seção 6.3. Agora, quer deixando

<sup>6</sup>O uso de um semicírculo para fechar o caminho de integração é conveniente, mas não obrigatório. Outros caminhos são possíveis.

que  $z_0$  se aproxime do eixo real por cima ( $z_0 - x_0$ ), quer colocando-o sobre o eixo real e considerando uma média entre a Equação (7.83) e zero, constatamos que a Equação (7.83) se torna

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad (7.84)$$

em que  $P$  indica o valor principal de Cauchy. Subdividindo a Equação (7.84) em partes real e imaginária<sup>7</sup>, obtemos

$$\begin{aligned} f(x_0) &= u(x_0) + iv(x_0) \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx - \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Por fim, igualando parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária, obtemos

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx & (7.86a) \\ v(x_0) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx. & (7.86b) \end{aligned}$$

Essas são as relações de dispersão. A parte real de nossa função complexa é expressa como uma integral sobre a parte imaginária. A parte imaginária é expressa como uma integral sobre a parte real. As partes real e imaginária são as **transformadas de Hilbert** uma da outra. Note que essas relações são significativas somente quando  $f(x)$  é uma função complexa da variável real  $x$ . Compare com o Exercício 7.2.1.

De um ponto de vista físico,  $u(x)$  e/ou  $v(x)$  representam algumas medições físicas. Então,  $f(z) = u(z) + iv(z)$  é uma continuação analítica sobre o semiplano superior, sendo que o valor sobre o eixo real serve como uma condição de fronteira.

### Relações de Simetria

Ocasionalmente,  $f(x)$  satisfará uma relação de simetria e a integral de  $-\infty$  para  $+\infty$  pode ser substituída por uma integral sobre valores positivos apenas. Isso é de considerável importância física porque a variável  $x$  poderia representar uma frequência, e somente frequências zero e positivas estão disponíveis para medições físicas. Suponha<sup>8</sup>

$$f(-x) = f^*(x). \quad (7.87)$$

Então,

$$u(-x) + iv(-x) = u(x) - iv(x). \quad (7.88)$$

A parte real de  $f(x)$  é par e a parte imaginária é ímpar.<sup>9</sup> Em problemas de dispersão da mecânica quântica, essas relações (Equação (7.88)) são denominadas condições de cruzamento. Para explorar essas **condições de cruzamento**, reescrevemos a Equação (7.86a) como

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{v(x)}{x - x_0} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx. \quad (7.89)$$

Deixando que  $x \rightarrow -x$  na integral de primeira ordem do lado direito da Equação (7.89) e substituindo  $v(-x) = -v(x)$  da Equação (7.88), obtemos

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} v(x) \left\{ \frac{1}{x + x_0} + \frac{1}{x - x_0} \right\} dx \\ &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{xv(x)}{x^2 - x_0^2} dx. \end{aligned} \quad (7.90)$$

De modo semelhante,

$$v(x_0) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x_0 u(x)}{x^2 - x_0^2} dx. \quad (7.91)$$

As relações de dispersão óptica originais de Kronig-Kramers eram dessa forma. O comportamento assintótico ( $x_0 \rightarrow \infty$ ) das Equações (7.90) e (7.91) levam às **regras da soma**, da mecânica quântica, Exercício 7.2.4.

<sup>7</sup>O segundo argumento,  $y = 0$ , é descartado:  $u(x_0, 0) \rightarrow u(x_0)$ .

<sup>8</sup>Isso não é apenas uma feliz coincidência. Ela garante que a transformada de Fourier de  $f(x)$  será real. Por sua vez, a Equação (7.87) é uma consequência da obtenção de  $f(x)$  como transformada de Fourier de uma função real.

<sup>9</sup> $u(x, 0) = u(-x, 0), v(x, 0) = -v(-x, 0)$ . Compare essas condições de simetria com as que resultam do princípio da reflexão de Schwarz, Seção 6.5.



### Dispersão Óptica

A função  $\exp[i(kx - \omega t)]$  descreve uma onda eletromagnética se movimentando ao longo do eixo  $x$  na direção positiva com velocidade  $v = \omega/k$ ;  $\omega$  é a frequência angular,  $k$  o número de onda ou vetor de propagação e  $n = ck/\omega$  é o índice de refração. Pelas equações de Maxwell, permissividade elétrica  $\varepsilon$ , e lei de Ohm com condutividade  $\sigma$ , o vetor de propagação  $k$  para um dielétrico se torna<sup>10</sup>

$$k^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \quad (7.92)$$

(com  $\mu$ , a permeabilidade magnética considerada como unidade). A presença da condutividade (o que significa absorção) dá origem a uma parte imaginária. O vetor de propagação  $k$  (e portanto o índice de refração  $n$ ) tornou-se complexo. Ao contrário, a parte imaginária (positiva) implica absorção. Para má condutividade ( $4\pi\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$ ) uma expansão binomial resulta em

$$k = \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} + i \frac{2\pi\sigma}{c\sqrt{\varepsilon}}$$

e

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i\omega(x\sqrt{\varepsilon}/c - t)} e^{-2\pi\sigma x/c\sqrt{\varepsilon}},$$

uma onda atenuada.

Voltando à expressão geral para  $k^2$ , Equação (7.92), constatamos que o índice de refração se torna

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (7.93)$$

Consideramos que  $n^2$  é uma função da variável **complexa**  $\omega$  (com  $\varepsilon$  e  $\sigma$  dependendo de  $\omega$ ). Contudo,  $n^2$  não desaparece quando  $\omega \rightarrow \infty$ , mas, em vez disso, se aproxima da unidade. Assim, para satisfazer a condição, Equação (7.81), trabalhamos com  $f(\omega) = n^2(\omega) - 1$ . As relações de dispersão óptica originais de Kronig-Kramers eram dadas na forma de

$$\begin{aligned} \Re[n^2(\omega_0) - 1] &= \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega \Im[n^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega, \\ \Im[n^2(\omega_0) - 1] &= -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega_0 \Re[n^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Conhecer o coeficiente de absorção em todas as frequências especifica a parte real do índice de refração e vice-versa.

### A relação de Parseval

Quando as funções  $u(x)$  e  $v(x)$  são transformadas de Hilbert uma da outra (dadas pelas Equações (7.86)) e cada uma é integrável ao quadrado,<sup>11</sup> as duas funções são relacionadas por

$$\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |v(x)|^2 dx. \quad (7.95)$$

Essa é a relação de Parseval.

Para derivar a Equação (7.95), começamos com

$$\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{v(s) ds}{s-x} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{v(t) dt}{t-x} dx,$$

usando a Equação (7.86a) duas vezes. Integrando em primeiro lugar com relação a  $x$ , temos

$$\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty v(s) ds \int_{-\infty}^\infty \frac{v(t) dt}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(s-x)(t-x)}. \quad (7.96)$$

<sup>10</sup>Veja J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ª ed. Nova York: Wiley (1999), Seções 7.7 e 7.10. A Equação (7.92) está em unidades gaussianas.

<sup>11</sup>Isso significa que  $\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx$  e  $\int_{-\infty}^\infty |v(x)|^2 dx$  são finitas.

Pelo Exercício 7.2.8, a integração em  $x$  resulta em uma função delta:

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(s-x)(t-x)} = \delta(s-t).$$

Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} v(s) \delta(s-t) ds. \quad (7.97)$$

Então, a integração em  $s$  é executada por inspeção, usando a propriedade definidora da função delta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(s) \delta(s-t) ds = v(t). \quad (7.98)$$

Substituindo a Equação (7.98) na Equação (7.97), temos a Equação (7.95), a relação de Parseval. Mais uma vez, em termos de óptica, a presença de refração em algumas faixas de frequência ( $n \neq 1$ ) implica a existência de absorção e vice-versa.

### Causalidade

A real significância das relações de dispersão na física é que elas são uma consequência direta de admitir que o sistema físico em questão obedece à causalidade. É difícil definir causalidade com precisão, mas o significado geral é que o efeito não pode preceder a causa. Uma onda espalhada não pode ser emitida pelo centro de espalhamento antes que a onda incidente tenha chegado até ele. Para sistemas lineares, a relação mais geral entre uma função de entrada  $G$  (a causa) e uma função de saída  $H$  (o efeito) pode ser escrita como

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t')G(t') dt'. \quad (7.99)$$

Causalidade é imposta exigindo que

$$F(t-t') = 0 \quad \text{for } t-t' < 0.$$

A Equação (7.99) dá a dependência de tempo. A dependência de frequência é obtida tomando transformadas de Fourier. Pelo teorema da convolução de Fourier, Seção 15.5,

$$h(\omega) = f(\omega)g(\omega),$$

em que  $f(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $F(t)$ , e assim por diante. Ao contrário,  $F(t)$  é a transformada de Fourier de  $f(\omega)$ .

A conexão com as relações de dispersão é dada pelo **teorema de Titchmarsh**.<sup>12</sup> O teorema afirma que, se  $f(\omega)$  é de quadrado integrável sobre o eixo  $\omega$  real, então qualquer uma das três afirmativas a seguir implica as outras duas.

1. A transformada de Fourier de  $f(\omega)$  é zero para  $t < 0$ , Equação (7.99).
2. Substituindo  $\omega$  por  $z$ , a função  $f(z)$  é analítica no plano complexo  $z$  para  $y > 0$  e se aproxima de  $f(x)$  quase em todo lugar à medida que  $y \rightarrow 0$ . Além disso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx < K \quad \text{para } y > 0;$$

isto é, a integral é limitada.

3. As partes real e imaginária de  $f(z)$  são transformadas de Hilbert uma da outra, Equações (7.86a) e (7.86b).

Admitir que a relação entre a entrada e a saída de nosso sistema linear é causal (Equação (7.99)) significa que a primeira afirmativa é satisfeita. Se  $f(\omega)$  é de quadrado integrável, então o teorema de Titchmarsh tem a terceira afirmativa como consequência e temos relações de dispersão.

<sup>12</sup>Refira-se a E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2<sup>aa</sup> ed. Nova York: Oxford University Press (1937). Para uma discussão mais informal do teorema de Titchmarsh e mais detalhes sobre causalidade, veja J. Hilgevoord, *Dispersion Relations and Causal Description*. Amsterdam: North-Holland (1962).





### Exercícios

**7.2.1** A função  $f(z)$  satisfaz as condições para as relações de dispersão. Além disso,  $f(z) = f^*(z^*)$ , o princípio da reflexão de Schwarz, Seção 6.5. Mostre que  $f(z)$  é identicamente zero.

**7.2.2** Para  $f(z)$ , tal que possamos substituir o contorno fechado da fórmula integral de Cauchy por uma integral sobre o eixo real, temos

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{x_0+\delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{x_0}} \frac{f(x)}{x-x_0} dx.$$

Aqui,  $C_{x_0}$  designa um semicírculo pequeno em torno de  $x_0$  no semiplano inferior. Mostre que essa expressão se reduz a

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx,$$

que é a Equação (7.84).

**7.2.3** (a) Para  $f(z) = e^{iz}$ , a Equação (7.81) não é válida nas extremidades,  $\arg z = 0, \pi$ . Mostre, com o auxílio do lema de Jordan, Seção 7.1, que a Equação (7.82) ainda é válida.

(b) Para  $f(z) = e^{iz}$ , verifique as relações de dispersão, Equação (7.89) ou Equações (7.90) e (7.91), por integração direta.

**7.2.4** Com  $f(x) = u(x) + iv(x)$  e  $f(x) = f^*(-x)$ , mostre que, à medida que  $x_0 \rightarrow \infty$ ,

(a)  $u(x_0) \sim -\frac{2}{\pi x_0^2} \int_0^{\infty} xv(x) dx,$

(b)  $v(x_0) \sim \frac{2}{\pi x_0} \int_0^{\infty} u(x) dx.$

Na mecânica quântica, relações dessa forma são denominadas **regras da soma**.

**7.2.5** (a) Dada a equação integral

$$\frac{1}{1+x_0^2} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-x_0} dx,$$

use transformadas de Hilbert para determinar  $u(x_0)$ .

(b) Verifique se a equação integral da parte (a) é satisfeita.

(c) Por  $f(z)|_{y=0} = u(x) + iv(x)$ , substitua  $x$  por  $z$  e determine  $f(z)$ . Verifique se as condições para as transformadas de Hilbert são satisfeitas.

(d) As condições de cruzamento são satisfeitas?

Resposta: (a)  $u(x_0) = \frac{x_0}{1+x_0^2},$  (c)  $f(z) = (z+i)^{-1}.$

**7.2.6** (a) Se a parte real do índice de refração complexo (ao quadrado) é constante (não há dispersão óptica), mostre que a parte imaginária é zero (não há absorção).

(b) Ao contrário, se não há absorção, mostre que deve haver dispersão. Em outras palavras, se a parte imaginária de  $n^2 - 1$  não é zero, mostre que a parte real de  $n^2 - 1$  não é constante.

**7.2.7** Dadas  $u(x) = x/(x^2 + 1)$  e  $v(x) = -1/(x^2 + 1)$ , mostre por avaliação direta de cada integral que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx.$$

Resposta:  $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}.$

**7.2.8** Considere  $u(x) = \delta(x)$ , uma função delta, e **admita** que as equações de transformadas de Hilbert são válidas.

(a) Mostre que

$$\delta(w) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y(y-w)}.$$

(b) Com mudanças de variáveis  $w = s - t$  e  $x = s - y$ , transforme a representação  $\delta$  da parte (a) em

$$\delta(s - t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x - s)(s - t)}.$$

*Nota:* A função  $\delta$  é discutida na Seção 1.15.

**7.2.9** Mostre que

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t(t - x)}$$

é uma representação válida da função delta no sentido de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0).$$

Admita que  $f(x)$  satisfaz a condição para a existência de uma transformada de Hilbert.

*Sugestão:* Aplique a Equação (7.84) duas vezes.

### 7.3 Método das Inclinações mais Acentuadas

#### Panorama Analítico

Ao analisar problemas de física matemática, muitas vezes achamos desejável conhecer o comportamento de uma função para grandes valores da variável ou algum parâmetro  $s$ , isto é, o comportamento assintótico da função. Exemplos específicos são fornecidos pela função gama (Capítulo 8) e por várias funções de Bessel (Capítulo 11). Todas essas funções analíticas são definidas por integrais

$$I(s) = \int_C F(z, s) dz, \tag{7.100}$$

em que  $F$  é analítica em  $z$  e depende de um parâmetro real  $s$ . Escrevemos  $F(z)$  sempre que possível.

Até aqui avaliamos tais integrais definidas de funções analíticas ao longo do eixo real deformando o caminho  $C$  para  $C'$  no plano complexo, portanto  $|F|$  torna-se pequena para todo  $z$  sobre  $C'$ . Esse método é bem-sucedido, contanto que ocorram somente pólos isolados na área entre  $C$  e  $C'$ . Os pólos são levados em conta pela aplicação do teorema dos resíduos da Seção 7.1. Os resíduos dão uma medição dos pólos simples, em que  $|F| \rightarrow \infty$ , que usualmente dominam e determinam o valor da integral.

O comportamento da integral na Equação (7.100) depende claramente do valor absoluto  $|F|$  do integrando. Além disso, os contornos de  $|F|$  muitas vezes se tornam muito pronunciados à medida que  $s$  fica grande. Vamos focalizar uma plotagem de  $|F(x + iy)|^2 = U^2(x, y) + V^2(x, y)$ , em vez da parte real  $\Re F = U$  e da parte imaginária  $\Im F = V$  separadamente. Essa plotagem de  $|F|^2$  sobre o plano complexo é denominada **panorama analítico**, nome dado por Jensen que, em 1912, provou que ela tem **somente pontos de sela e cubas mas não tem nenhum pico**. Além disso, as cubas descem até o plano complexo. Na ausência de pólos (simples), **pontos de sela**, são os próximos candidatos a **dominar a integral** na Equação (7.100). Daí o nome de **método do ponto de sela**. Em um ponto de sela, a parte real (ou imaginária)  $U$  de  $F$  tem um máximo local, o que implica que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

e, portanto, pela utilização das condições de Cauchy-Riemann da Seção 6.2,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

de modo que  $V$  tem um mínimo ou vice-versa e  $F'(z) = 0$ . O teorema de Jensen impede que  $U$  e  $V$  tenham um máximo ou um mínimo. Veja a Figura 7.18 para uma forma típica (e Exercícios 6.2.3 e 6.2.4). **Nossa estratégia será escolher o caminho  $C$  de modo que ele passe sobre o ponto de sela, que dá a contribuição dominante e, em outros lugares, passe pelos vales.** Se houver vários pontos de sela, tratamos cada um do mesmo modo, e suas contribuições serão adicionadas a  $I(s \rightarrow \infty)$ .

Para provar que não há picos, admita que haja um em  $z_0$ . Isto é,  $|F(z_0)|^2 > |F(z)|^2$  para todo  $z$  de uma vizinhança  $|z - z_0| \leq r$ . Se

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$



é a expansão de Taylor em  $z_0$ , o valor médio  $m(F)$  sobre o círculo  $z = z_0 + r \exp(i\varphi)$  se torna

$$\begin{aligned} m(F) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m^* a_n r^{m+n} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \geq |a_0|^2 = |F(z_0)|^2, \end{aligned} \tag{7.101}$$

usando ortogonalidade,  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(n - m)\varphi d\varphi = \delta_{nm}$ . Uma vez que  $m(F)$  é o valor médio de  $|F|^2$  sobre o círculo de raio  $r$ , deve existir um ponto  $z_1$  sobre ele, tal que  $|F(z_1)|^2 \geq m(F) \geq |F(z_0)|^2$ , o que contradiz o que admitimos. Por conseguinte, tal pico não pode existir.

Em seguida, vamos admitir que haja um mínimo em  $z_0$ , tal que  $0 < |F(z_0)|^2 < |F(z)|^2$  para todo  $z$  de uma vizinhança de  $z_0$ . Em outras palavras, o mergulho no vale não chega até o plano complexo. Então,  $|F(z)|^2 > 0$  e, uma vez que  $1/F(z)$  é analítica nesse ponto, ela tem uma expansão de Taylor e  $z_0$  seria um pico de  $1/|F(z)|^2$ , o que é impossível. Isso prova o teorema da Jensen. Agora voltamos nossa atenção novamente para a integral na Equação (7.100).

### Método do Ponto de Sela

Visto que cada ponto de sela  $z_0$  se encontra necessariamente acima do plano complexo, isto é,  $|F(z_0)|^2 > 0$ , escrevemos  $F$  em forma exponencial,  $e^{f(z,s)}$ , em sua vizinhança sem perda de generalidade. Note que não ter nenhum zero no plano complexo é uma propriedade característica da função exponencial. Além do mais, qualquer ponto de sela com  $F(z) = 0$  torna-se uma cuba de  $|F(z)|^2$  porque  $|F(z)|^2 \geq 0$ . Um caso em questão é a função  $z^2$  em  $z = 0$ , em que  $d(z^2)/dz = 2z = 0$ . Aqui,  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ , e  $2xy$  tem um ponto de sela em  $z = 0$ , assim como  $x^2 - y^2$ , mas  $|z|^4$  tem uma cuba nesse lugar.

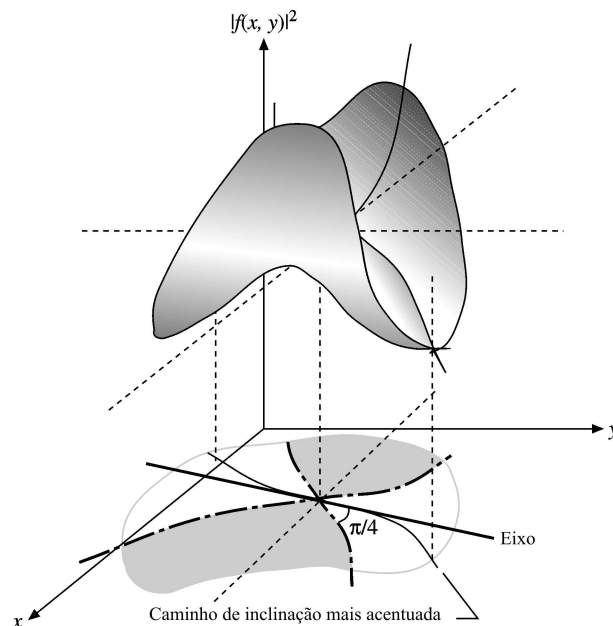


Figura 7.18: Um ponto de sela.

Em  $z_0$  o plano tangencial é horizontal, isto é,  $\frac{\partial F}{\partial z} |_{z=z_0} = 0$  ou, o que é equivalente,  $\frac{\partial f}{\partial z} |_{z=z_0} = 0$ . **Essa condição localiza o ponto de sela.** Nossa meta seguinte é determinar a **direção de inclinação mais acentuada.** Em  $z_0$ ,  $f$  tem uma série de potências

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots, \tag{7.102}$$

ou

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(f''(z_0) + \varepsilon)(z - z_0)^2, \quad (7.103)$$

após reunir todas as potências mais altas em  $\varepsilon$  (pequeno). Por simplicidade, vamos considerar  $f''(z_0) \neq 0$ . Então,

$$f''(z_0)(z - z_0)^2 = -t^2, \quad t \text{ real}, \quad (7.104)$$

define uma reta que passa por  $z_0$  (**eixo** do ponto de sela na Figura 7.18). Em  $z_0$ ,  $t = 0$ . Ao longo do eixo  $\Im f''(z_0)(z - z_0)^2$  é zero e  $v = \Im f(z) \approx \Im f(z_0)$  é constante se desprezarmos  $\varepsilon$  na Equação (7.103). A Equação (7.104) também pode ser expressa em termos de ângulos,

$$\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg f''(z_0) = \text{constante}. \quad (7.105)$$

Visto que  $|F(z)|^2 = \exp(2\Re f)$  varia monotonicamente com  $\Re f$ ,  $|F(z)|^2 \approx \exp(-t^2)$  cai exponencialmente de seu máximo em  $t = 0$  ao longo desse eixo. Daí o nome de **inclinação mais acentuada**. A reta que passa por  $z_0$  definida por

$$f''(z_0)(z - z_0)^2 = +t^2 \quad (7.106)$$

é ortogonal a esse eixo (**linha tracejada** na Figura 7.18), o que é evidente por seu ângulo

$$\arg(z - z_0) = -\frac{1}{2} \arg f''(z_0) = \text{constante}, \quad (7.107)$$

quando comparada com a Equação (7.105). Aqui,  $|F(z)|^2$  cresce exponencialmente.

As curvas  $\Re f(z) = \Re f(z_0)$  passam por  $z_0$ , portanto  $\Re[(f''(z_0) + \varepsilon)(z - z_0)^2] = 0$  ou  $(f''(z_0) + \varepsilon)(z - z_0)^2 = it$  para  $t$ . Expressando isso em ângulos como

$$\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg(f''(z_0) + \varepsilon), \quad t > 0, \quad (7.108a)$$

$$\arg(z - z_0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg(f''(z_0) + \varepsilon), \quad t < 0, \quad (7.108b)$$

e comparando com as Equações (7.105) e (7.107), notamos que essas curvas (**linhas traço-ponto** na Figura 7.18) dividem a região do ponto de sela em quatro setores, dois com  $\Re f(z) > \Re f(z_0)$  (por conseguinte  $|F(z)| > |F(z_0)|$ ), sombreados na Figura 7.18, e dois com  $\Re f(z) < \Re f(z_0)$  (por conseguinte,  $|F(z)| < |F(z_0)|$ ). Eles formam ângulos  $\pm \frac{\pi}{4}$  com o eixo. Assim, o caminho de integração tem de evitar as áreas sombreadas, em que  $|F|$  cresce. Se for escolhido um caminho para subir as inclinações acima do ponto de sela, a parte imaginária grande de  $f(z)$  leva a oscilações rápidas de  $F(z) = e^{f(z)}$  e cancela contribuições à integral.

Até aqui, nosso **tratamento tem sido geral**, exceto para  $f''(z_0) \neq 0$ , que pode ser amenizado. Agora estamos prontos para **especificar o integrando**  $F$  ainda mais, de modo a vincular a seleção do caminho com o comportamento assintótico, à medida que  $s \rightarrow \infty$ .

Admitimos que  $s$  aparece linearmente no expoente, isto é, substituímos  $\exp f(z, s) \rightarrow \exp(sf(z))$ . Essa dependência de  $s$  assegura que a contribuição do ponto de sela em  $z_0$  cresça com  $s \rightarrow \infty$ , resultando em inclinações acentuadas, como é o caso na maioria das aplicações em física. Para dar conta da região distante do ponto de sela que não é influenciada por  $s$ , incluímos uma outra função analítica,  $g(z)$ , que varia lentamente perto do ponto de sela e é independente de  $s$ .

Então, no geral, **nossa integral tem a forma mais apropriada e específica**

$$I(s) = \int_C g(z) e^{sf(z)} dz. \quad (7.109)$$

O caminho da inclinação mais acentuada é o eixo do ponto de sela quando desprezamos os termos de ordem mais alta,  $\varepsilon$ , na Equação (7.103). Com  $\varepsilon$ , o caminho da inclinação mais acentuada é a curva próxima ao eixo dentro dos setores não-sombrados, em que  $v = \Im f(z)$  é estritamente constante, enquanto  $\Im f(z)$  é apenas aproximadamente constante sobre o eixo. Aproximamos  $I(s)$  pela integral ao longo do pedaço do eixo que está dentro do trecho na Figura 7.18, em que (compare com a Equação (7.104))

$$z = z_0 + xe^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg f''(z_0), \quad a \leq x \leq b. \quad (7.110)$$



Achamos

$$I(s) \approx e^{i\alpha} \int_a^b g(z_0 + xe^{i\alpha}) \exp[sf(z_0 + xe^{i\alpha})] dx, \quad (7.111a)$$

e a parte omitida é pequena e pode ser estimada porque  $\Re(f(z) - f(z_0))$  tem um limite superior negativo, digamos  $-R$ , que depende do tamanho do trecho do ponto de sela na Figura 7.18 (isto é, os valores de  $a, b$  na Equação (7.110)) que escolhemos. Na Equação (7.111) usamos as expansões de potências

$$\begin{aligned} f(z_0 + xe^{i\alpha}) &= f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)e^{2i\alpha}x^2 + \dots, \\ g(z_0 + xe^{i\alpha}) &= g(z_0) + g'(z_0)e^{i\alpha}x + \dots, \end{aligned} \quad (7.111b)$$

e nos lembramos pela Equação (7.110) que

$$\frac{1}{2}f''(z_0)e^{2i\alpha} = -\frac{1}{2}|f''(z_0)| < 0.$$

Para o termo dominante para  $s \rightarrow \infty$  encontramos:

$$I(s) = g(z_0)e^{sf(z_0)+i\alpha} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}s|f''(z_0)|x^2} dx. \quad (7.112)$$

Uma vez que o integrando na Equação (7.112) é essencialmente zero quando  $x$  se afasta consideravelmente da origem, deixamos que  $b \rightarrow \infty$  e  $a \rightarrow -\infty$ . O pequeno erro envolvido pode ser estimado diretamente. Notando que a integral remanescente é exatamente uma integral de erro de Gauss,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2x^2} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a},$$

finalmente obtemos

$$I(s) = \frac{\sqrt{2\pi}g(z_0)e^{sf(z_0)+i\alpha}}{|sf''(z_0)|^{1/2}}, \quad (7.113)$$

em que a fase  $\alpha$  foi introduzida nas Equações (7.110) e (7.105).

Uma nota de alerta: admitimos que a única contribuição significativa à integral veio da vizinhança imediata do(s) ponto(s) de sela(s)  $z = z_0$ . Essa condição deve ser verificada para cada novo problema (Exercício 7.3.5).

### Exemplo 7.3.1 FORMA ASSINTÓTICA DA FUNÇÃO DE HANKEL $H_\nu^{(1)}(s)$

Na Seção 11.4 mostramos que as funções de Hankel, que satisfazem a equação de Bessel, podem ser definidas por

$$H_\nu^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_{1,0}}^{\infty e^{i\pi}} e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}, \quad (7.114)$$

$$H_\nu^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_{2,\infty} e^{-i\pi}}^0 e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}. \quad (7.115)$$

O contorno  $C_1$  é a curva no semiplano superior da Figura 7.19. O contorno  $C_2$  está no semiplano inferior. Aplicamos o método das inclinações mais acentuadas à primeira função de Hankel,  $H_\nu^{(1)}(s)$ , que está convenientemente na forma especificada pela Equação (7.109), com  $f(z)$  dada por

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right). \quad (7.116)$$

Diferenciando, obtemos

$$f'(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2z^2}. \quad (7.117)$$

Estabelecendo  $f'(z) = 0$ , obtemos

$$z = i, -i. \quad (7.118)$$

Por conseguinte, há pontos de sela em  $z = +i$  e  $z = -i$ . Em  $z = i$ ,  $f''(i) = -i$  ou  $\arg f''(i) = -\pi/2$ , de modo que a direção do ponto de sela é dada pela Equação (7.110) como  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ . Para a integral para

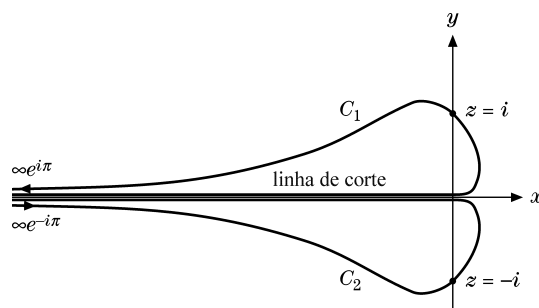


Figura 7.19: Contornos da função de Hankel.

$H_\nu^{(1)}(s)$  devemos escolher o contorno que passa pelo ponto  $z = +i$ , de modo que ele comece na origem, passe tangencialmente para fora do eixo real positivo e então prossiga em curva, passando pelo ponto de sela em  $z = +i$  na direção dada pelo ângulo  $\alpha = 3\pi/4$  e então continue até menos infinito assintoticamente ao eixo negativo real. O caminho de subida mais acentuada, que devemos evitar, tem a fase  $-\frac{1}{2} \arg f''(i) = \frac{\pi}{4}$ , de acordo com a Equação (7.107), e é ortogonal ao eixo, nosso caminho de inclinação mais rápido.

Substituição direta na Equação (7.113) com  $\alpha = 3\pi/4$  agora resulta em

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(s) &= \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{2\pi i^{-\nu-1}} e^{(s/2)(i-1/i)} e^{3\pi i/4}}{|(s/2)(-2/i^3)|^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{(i\pi/2)(-\nu-2)} e^{is} e^{i(3\pi/4)}. \end{aligned} \tag{7.119}$$

Combinando termos, obtemos

$$H_\nu^{(1)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{i(s-\nu(\pi/2)-\pi/4)} \tag{7.120}$$

como o termo dominante da expansão assintótica da função de Hankel  $H_\nu^{(1)}(s)$ . Se desejarmos termos adicionais, podemos pegá-los da série de potências de  $f$  e  $g$  na Equação (7.11b). A outra função de Hankel pode ser tratada de modo semelhante usando o ponto de sela em  $z = -i$ . ■

### Exemplo 7.3.2 FORMA ASSINTÓTICA DA FUNÇÃO FATORIAL

Em muitos problemas físicos, em particular no campo da mecânica estatística, é desejável ter uma aproximação precisa da função gama ou fatorial de números muito grandes. Conforme desenvolvimento na Seção 8.1, a função fatorial pode ser definida pela integral de Euler

$$\Gamma(1+s) = \int_0^\infty \rho^s e^{-\rho} d\rho = s^{s+1} \int_0^\infty e^{s(\ln z - z)} dz. \tag{7.121}$$

Aqui fizemos a substituição  $\rho = zs$ , de modo a converter a integral à forma requerida pela Equação (7.109). Como antes, supomos que  $s$  é real e positivo, do qual se segue que o integrando se anula nos limites 0 e  $\infty$ . Diferenciando a dependência de  $z$  que aparece no expoente, obtemos

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z - z) = \frac{1}{z} - 1, \quad f''(z) = -\frac{1}{z^2}, \tag{7.122}$$

que mostra que o ponto  $z = 1$  é um ponto de sela e  $\arg f''(1) = \arg(-1) = \pi$ . De acordo com a Equação (7.109), deixamos

$$z - 1 = x e^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg f''(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \tag{7.123}$$

com  $x$  pequeno, para descrever o contorno na vizinhança do ponto de sela. Disso vemos que a direção de inclinação mais acentuada está ao longo do eixo real, uma conclusão a que poderíamos ter chegado mais ou menos intuitivamente.

Substituição direta na Equação (7.113) com  $\alpha = 0$  agora resulta em

$$\Gamma(1+s) \approx \frac{\sqrt{2\pi} s^{s+1} e^{-s}}{|s(-1-2)|^{1/2}}. \tag{7.124}$$



Assim, o primeiro termo na expansão assintótica da função fatorial é

$$\Gamma(1 + s) \approx \sqrt{2\pi} s s^s e^{-s}. \tag{7.125}$$

Esse resultado é o primeiro termo da expansão de Stirling da função fatorial. O método de inclinação mais acentuada é provavelmente o modo mais fácil de obter esse primeiro termo. Se desejarmos mais termos na expansão, então é preferível o método da Seção 8.3. ■

No exemplo precedente o cálculo foi executado admitindo que  $s$  é real, uma admissão que não é necessária. Podemos mostrar (Exercício 7.3.6) que a Equação (7.125) também vale quando  $s$  é substituído pela variável complexa  $w$ , contanto que seja imposta condição, que a parte real de  $w$  seja grande e positiva.

*Limites assintóticos de representações integrais de funções são de extrema importância em muitas aproximações e aplicações na física:*

$$\int_C g(z) e^{sf(z)} dz \sim \frac{\sqrt{2\pi} g(z_0) e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{\sqrt{|sf''(z_0)|}}, \quad f'(z_0) = 0.$$

*O método do ponto de sela é uma opção primorosa para derivá-las e pertence à caixa de ferramentas de todo físico e engenheiro.*

### Exercícios

**7.3.1** Usando o método de inclinações mais acentuadas, avalie a segunda função de Hankel, dada por

$$H_\nu^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty C_2}^0 e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}},$$

com contorno  $C_2$ , como mostra a Figura 7.19.

Resposta:  $H_\nu^{(2)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-i(s-\pi/4-\nu\pi/2)}.$

**7.3.2** Ache o caminho mais acentuado e a expansão assintótica dominante para as integrais de Fresnel  $\int_0^s \cos x^2 dx$ ,  $\int_0^s \sin x^2 dx$ .  
*Sugestão:* Use  $\int_0^1 e^{isz^2} dz$ .

**7.3.3** (a) Ao aplicar o método de inclinação mais acentuada à função de Hankel  $H_\nu^{(1)}(s)$ , mostre que

$$\Re[f(z)] < \Re[f(z_0)] = 0$$

para  $z$  sobre o contorno  $C_1$  mas distante do ponto  $z = z_0 = i$ .

(b) Mostre que

$$\Re[f(z)] > 0 \quad \text{para} \quad 0 < r < 1, \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \\ -\pi \leq \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e

$$\Re[f(z)] < 0 \quad \text{para} \quad r > 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(Figura 7.20). É por isso que  $C_1$  pode não ser deformado para passar pelo segundo ponto de sela,  $z = -i$ . Compare e verifique as linhas traço-ponto na Figura 7.18 para esse caso.

**7.3.4** Determine a dependência assintótica das funções modificadas de Bessel  $I_\nu(x)$ , dada

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(x/2)(t+1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

O contorno começa e termina em  $t = -\infty$ , circundando a origem em um sentido positivo. Há dois pontos de sela. Somente o ponto de sela em  $z = +1$  contribui significativamente para a forma assintótica.

**7.3.5** Determine a dependência assintótica da função modificada de Bessel da segunda espécie,  $K_\nu(x)$ , usando

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(-x/2)(s+1/s)} \frac{ds}{s^{1-\nu}}.$$

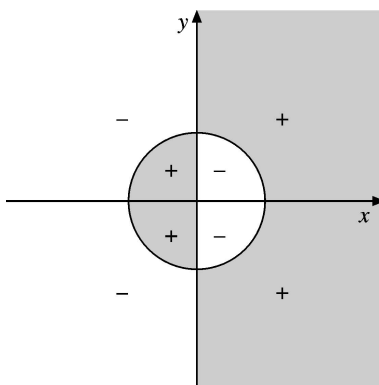


Figura 7.20:

**7.3.6** Mostre que a fórmula de Stirling,

$$\Gamma(1 + s) \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s},$$

é válida para valores complexos de  $s$  (com  $\Re(s)$  grande e positivo).

*Sugestão:* Isso envolve designar uma fase a  $s$  e então exigir que  $\Im[sf(z)] = \text{constante}$  na vizinhança do ponto de sela.

**7.3.7** Admita que  $H_\nu^{(1)}(s)$  tem uma expansão negativa de série de potências da forma

$$H_\nu^{(1)}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{i(s - \nu(\pi/2) - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} s^{-n},$$

sendo que o coeficiente do somatório é obtido pelo método da inclinação mais acentuada. Substitua na equação de Bessel e mostre que você reproduz a série assintótica para  $H_\nu^{(1)}(s)$  dada na Seção 11.6.

### Leituras Adicionais

- Nussenzveig, H. M., *Causality and Dispersion Relations*, Mathematics in Science and Engineering Series, vol. 95. Nova York: Academic Press (1972). Texto avançado que trata de causalidade e relações de dispersão no primeiro capítulo e então passa a desenvolver as implicações em uma variedade de áreas da física teórica.
- Wyld, H. W., *Mathematical Methods for Physics*. Reading, MA: Benjamin/Cummings (1976), Perseus Books (1999). Texto relativamente avançado que contém uma discussão extensiva de relações de dispersão.



## 8

# A Função Gama (Função Fatorial)

A função gama aparece ocasionalmente em problemas físicos tais como a normalização de funções de onda de Coulomb e o cálculo de probabilidades em mecânica estatística. Contudo, em geral, ela tem menos aplicação física direta e interpretação do que, digamos, as funções de Legendre e Bessel dos Capítulos 11 e 12. Mais exatamente, sua importância se origina de sua utilidade para o desenvolvimento de novas funções que têm aplicação física direta. Portanto, incluímos aqui a função gama.

### 8.1 Definições, Propriedades Simples

Há, em uso corrente, pelo menos três definições diferentes e convenientes da função gama. Nossa primeira tarefa é enunciar essas definições, desenvolver algumas conseqüências simples, diretas, e mostrar a equivalência das três formas.

#### Limite Infinito (Euler)

A primeira definição, que deve seu nome a Euler, é

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad z \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (8.1)$$

Essa definição de  $\Gamma(z)$  é útil no desenvolvimento da forma de produto infinito de Weierstrass de  $\Gamma(z)$ , Equação (8.16), e na obtenção da derivada de  $\ln \Gamma(z)$  (Seção 8.2). Aqui e em outros lugares neste capítulo,  $z$  pode ser ou real ou complexo. Substituindo  $z$  por  $z+1$ , temos

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n+1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z+n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Essa é a relação funcional básica para a função gama. Devemos observar que é uma equação de **recorrência**. Já demonstramos que a função gama pertence a uma classe geral de funções que não satisfazem nenhuma equação diferencial com coeficientes racionais. Especificamente, a função gama é uma das poucas funções da física matemática que não satisfazem nem a equação diferencial hipergeométrica (Seção 13.4) nem a equação hipergeométrica confluyente (Seção 13.5).

Além disso, pela definição,

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)} n = 1. \quad (8.3)$$

Agora, a aplicação da Equação (8.2) resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2, \dots \\ \Gamma(n) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!. \end{aligned} \quad (8.4)$$

#### Integral Definida (Euler)

Uma segunda definição, que também é freqüentemente denominada integral de Euler, é

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0. \quad (8.5)$$

A restrição imposta a  $z$  é necessária para evitar divergência da integral. Quando a função gama aparece em problemas físicos, freqüentemente é nessa forma ou em alguma variação dela, tal como

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \Re(z) > 0. \quad (8.6)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[ \ln\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0. \quad (8.7)$$

Quando  $z = \frac{1}{2}$ , a Equação (8.6) é exatamente a integral de erro de Gauss, e temos o interessante resultado

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (8.8)$$

Generalizações da Equação (8.6), as integrais gaussianas são consideradas no Exercício 8.1.11. Essa forma de integral definida de  $\Gamma(z)$ , Equação (8.5), leva à função beta, Seção 8.4.

Para mostrar a equivalência dessas duas definições, Equações (8.1) e (8.5), considere a função de duas variáveis

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad (8.9)$$

sendo  $n$  um inteiro positivo.<sup>1</sup> Visto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}, \quad (8.10)$$

pela definição da exponencial

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z) \quad (8.11)$$

pela Equação (8.5).

Voltando a  $F(z, n)$ , vamos avaliá-la em integrações sucessivas por partes. Por conveniência, seja  $u = t/n$ . Então,

$$F(z, n) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du. \quad (8.12)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\frac{F(z, n)}{n^z} = (1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du. \quad (8.13)$$

Repetindo essa operação com a parte integrada que se anula em ambas as extremidades cada vez, finalmente obtemos

$$\begin{aligned} F(z, n) &= n^z \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Essa expressão é idêntica à do lado direito da Equação (8.1). Por conseguinte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) \equiv \Gamma(z), \quad (8.15)$$

pela Equação (8.1), concluindo a prova.

<sup>1</sup>A forma de  $F(z, n)$  é sugerida pela função beta (compare com a Equação (8.6)).



### Produto Infinito (Weierstrass)

A terceira definição (forma de Weierstrass) é

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (8.16)$$

em que  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni,

$$\gamma = 0,5772156619\dots \quad (8.17)$$

Essa forma de produto infinito pode ser usada para desenvolver a identidade de reflexão, Equação (8.23), e aplicada nos exercícios, tal como o Exercício 8.1.17. Essa forma pode ser derivada da definição original (Equação (8.1)), reescrevendo-a como

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} n^z. \quad (8.18)$$

Invertendo a Equação (8.18) e usando

$$n^{-z} = e^{(-\ln n)z}, \quad (8.19)$$

obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-\ln n)z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right). \quad (8.20)$$

Multiplicando e dividindo por

$$\exp\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)z\right] = \prod_{m=1}^n e^{z/m}, \quad (8.21)$$

obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)z\right] \right\}. \quad (8.22)$$

Como mostramos na Seção 5.2, os parênteses no expoente aproximam-se de um limite, a saber,  $\gamma$ , a constante de Euler-Mascheroni. Por consequência, resulta a Equação (8.16). Mostramos na Seção 5.11 que a definição de produto infinito de Weierstrass de  $\gamma$  levava diretamente a uma importante identidade,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}z\pi}. \quad (8.23)$$

Alternativamente, podemos partir do produto de integrais de Euler

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty s^z e^{-s} ds \int_0^\infty t^{-z} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty v^z \frac{dv}{(v+1)^2} \int_0^\infty e^{-u} u du = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}, \end{aligned}$$

transformando a partir das variáveis  $s, t$  para  $u = s+t, v = s/t$ , como sugerido pela combinação de exponenciais e potências nos integrandos. O jacobiano é

$$J = - \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{array} \right| = \frac{s+t}{t^2} = \frac{(v+1)^2}{u},$$

em que  $(v+1)t = u$ . A integral  $\int_0^\infty e^{-u} u du = 1$ , ao passo que, sobre  $v$ , pode ser derivada por integração de contorno, dando  $\frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}$ .

Essa identidade também pode ser derivada por integração de contorno (Exemplo 7.1.6 e Exercícios 7.1.18 e 7.1.19) e a função beta, Seção 8.4. Fazendo  $z = \frac{1}{2}$  na Equação (8.23), obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (8.24a)$$

(tomando a raiz quadrada positiva), de acordo com a Equação (8.8).

De modo semelhante, podemos estabelecer a **fórmula de duplicação de Legendre**,

$$\Gamma(1+z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z+1). \tag{8.24b}$$

A definição de Weierstrass mostra imediatamente que  $\Gamma(z)$  tem pólos simples em  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$  e que  $[\Gamma(z)]^{-1}$  não tem nenhum pólo no plano complexo finito, o que significa que  $\Gamma(z)$  não tem nenhum zero. Esse comportamento também pode ser observado na equação (8.23), na qual notamos que  $\pi/(\text{sen } \pi z)$  nunca é igual a zero.

Na verdade, a definição de produto infinito de  $\Gamma(z)$  pode ser derivada do teorema da fatorização de Weierstrass, especificando que  $[\Gamma(z)]^{-1}$  tem zeros simples em  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ . A constante de Euler-Mascheroni é fixada impondo que  $\Gamma(1) = 1$ . Veja também as expansões de produto de funções inteiras na Seção 7.1.

Na teoria da probabilidade, a distribuição gama (densidade de probabilidade) é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{8.24c}$$

A constante  $[\beta^\alpha \Gamma(\alpha)]^{-1}$  é escolhida de modo que a probabilidade total (integrada) seja igual à unidade. Para  $x \rightarrow E$ , energia cinética,  $\alpha \rightarrow \frac{3}{2}$ , a Equação (8.24c) resulta na clássica estatística de Maxwell-Boltzmann.

### Notação Fatorial

Até aqui essa discussão foi apresentada em termos da notação clássica. Como mostrado por Jeffreys e outros, o  $-1$  do expoente  $z - 1$  em nossa segunda definição (Equação (8.5)) é um aborrecimento constante. Por conseqüência, a Equação (8.5) às vezes é reescrita como

$$\int_0^\infty e^{-t} t^z dt \equiv z!, \quad \Re(z) > -1, \tag{8.25}$$

para **definir** uma função fatorial  $z!$ . Ocasionalmente, ainda podemos encontrar a notação de Gauss,  $\prod(z)$ , para a função fatorial:

$$\prod(z) = z! = \Gamma(z+1). \tag{8.26}$$

A notação  $\Gamma$  se deve a Legendre. A função fatorial da Equação (8.25) é relacionada à função gama por

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad \text{ou} \quad \Gamma(z+1) = z!. \tag{8.27}$$

Se  $z = n$ , um inteiro positivo (Equação (8.4)), mostre que

$$z! = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \tag{8.28}$$

o familiar fatorial. Contudo, devemos notar que, uma vez que  $z!$  agora é definido pela Equação (8.25) (ou, o que é equivalente, pela Equação (8.27)), a função fatorial não é mais limitada a valores inteiros positivos do argumento (Figura 8.1).

A relação de diferença (Equação (8.2)) se torna

$$(z-1)! = \frac{z!}{z}. \tag{8.29}$$

Isso mostra imediatamente que

$$0! = 1 \tag{8.30}$$

e

$$n! = \pm\infty \quad \text{para } n, \text{ um inteiro } \mathbf{negativo}. \tag{8.31}$$

Em termos do fatorial, a Equação (8.23) se torna

$$z!(-z)! = \frac{\pi z}{\text{sen } \pi z}. \tag{8.32}$$

Restringindo-nos aos valores reais do argumento, constatamos que  $\Gamma(x+1)$  define as curvas mostradas nas Figuras 8.1 e 8.2. O mínimo da curva é

$$\Gamma(x+1) = x! = (0,46163\dots)! = 0,88560\dots \tag{8.33a}$$

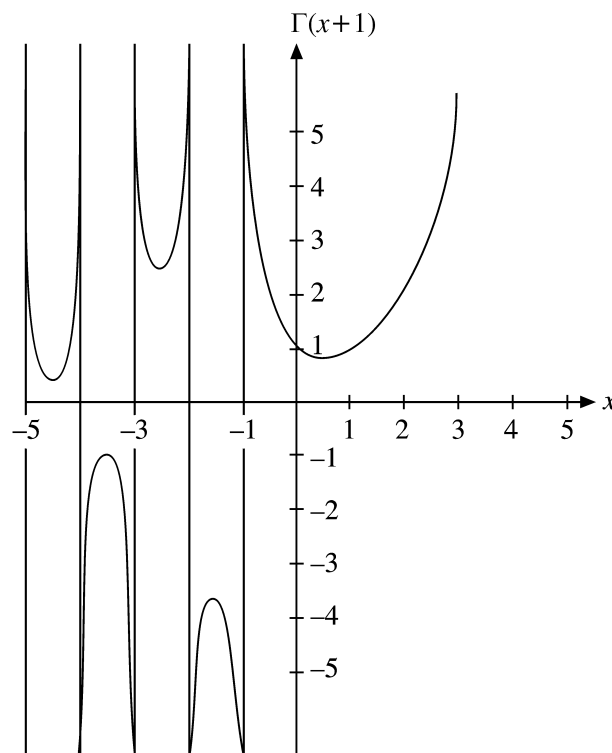


Figura 8.1: A função fatorial — extensão para argumentos negativos.

### Notação de Fatorial Duplo

Em muitos problemas de física matemática, em particular em conexão com polinômios de Legendre (Capítulo 12), encontramos produtos dos inteiros positivos ímpares e produtos dos inteiros positivos pares. Por conveniência, eles recebem rótulos especiais como fatoriais duplos:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1) &= (2n + 1)!! \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) &= (2n)!! \end{aligned} \tag{8.33b}$$

É claro que estão relacionados com as funções fatoriais regulares por

$$(2n)!! = 2^n n! \quad \text{e} \quad (2n + 1)!! = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}. \tag{8.33c}$$

Também definimos  $(-1)!! = 1$ , um caso especial que não resulta da Equação (8.33c).

### Representação Integral

Uma representação integral útil no desenvolvimento de séries assintóticas para as funções de Bessel é

$$\int_C e^{-z} z^\nu dz = (e^{2\pi i \nu} - 1) \Gamma(\nu + 1), \tag{8.34}$$

em que  $C$  é o contorno mostrado na Figura 8.3. Essa representação de integral de contorno só é útil quando  $\nu$  não é um inteiro e, então,  $z = 0$  é um **ponto de ramificação**. A Equação (8.34) pode ser verificada de imediato para  $\nu > -1$  deformando o contorno, como mostra a Figura 8.4. A integral desde  $\infty$  até a origem resulta em  $-(\nu!)$ , colocando a fase de  $z$  em 0. A integral que vai até infinito (no quarto quadrante) resulta em  $e^{2\pi i \nu} \nu!$ , sendo que a fase de  $z$  aumentou para  $2\pi$ . Uma vez que o círculo ao redor da origem nada contribui quando  $\nu > -1$ , resulta a Equação (8.34).

Muitas vezes é conveniente apresentar esse resultado sob uma forma mais simétrica:

$$\int_C e^{-z} (-z)^\nu dz = 2i \Gamma(\nu + 1) \text{sen}(\nu \pi). \tag{8.35}$$

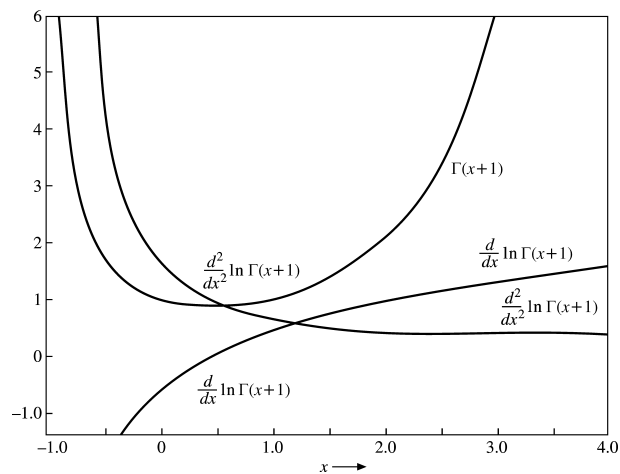


Figura 8.2: A função fatorial e as duas derivadas de primeira ordem de  $\ln(\Gamma(x + 1))$ .

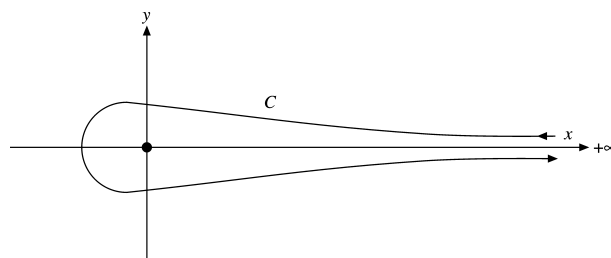


Figura 8.3: Contorno de função fatorial.

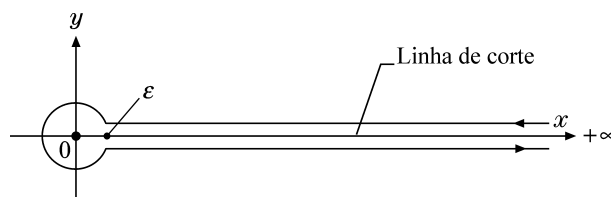


Figura 8.4: Contorno da Figura 8.3 deformado.



Essa análise estabelece as Equações (8.34) e (8.35) para  $\nu > -1$ . É relativamente simples ampliar a faixa para incluir todos os  $\nu$  não-inteiros. Em primeiro lugar, observamos que a integral existe para  $\nu < -1$ , contanto que fiquemos distantes da origem. Em segundo lugar, integrando por partes constatamos que a Equação (8.35) resulta na familiar relação de diferença (Equação (8.29)). Se tomarmos a relação de diferença para definir a função fatorial de  $\nu < -1$ , então as Equações (8.34) e 8.35) são verificadas para todo  $\nu$  (exceto inteiros negativos).

### Exercícios

**8.1.1** Derive as relações de recorrência

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

a partir da integral de Euler (Equação (8.5)),

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

**8.1.2** Em uma solução de série de potências para as funções de Legendre da segunda espécie, encontramos a expressão

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2s-1)(n+2s)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2s-2)(2s) \cdot (2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots(2n+2s+1)},$$

na qual  $s$  é um inteiro positivo. Reescreva essa expressão em termos de fatoriais.

**8.1.3** Mostre que, à medida que  $s - n \rightarrow$  inteiro negativo,

$$\frac{(s-n)!}{(2s-2n)!} \rightarrow \frac{(-1)^{n-s}(2n-2s)!}{(n-s)!}.$$

Aqui,  $s$  e  $n$  são inteiros, sendo  $s < n$ . Esse resultado pode ser usado para evitar fatoriais negativos, tal como nas representações de série das funções esféricas de Neumann e das funções de Legendre da segunda espécie.

**8.1.4** Mostre que  $\Gamma(z)$  pode ser escrita

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \Re(z) > 0,$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[ \ln\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

**8.1.5** Em uma distribuição maxwelliana a fração de partículas com velocidade entre  $v$  e  $v + dv$  é

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv,$$

sendo  $N$  o número total de partículas. A média ou valor esperado de  $v^n$  é definida como  $\langle v^n \rangle = N^{-1} \int v^n dN$ . Mostre que

$$\langle v^n \rangle = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma(3/2)}.$$

**8.1.6** Transformando a integral em uma função gama, mostre que

$$-\int_0^1 x^k \ln x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

**8.1.7** Mostre que

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right).$$

**8.1.8** Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax-1)!}{(x-1)!} = \frac{1}{a}.$$

**8.1.9** Localize os pólos de  $\Gamma(z)$ . Mostre que são pólos simples e determine os resíduos.

**8.1.10** Mostre que a equação  $x! = k$ ,  $k \neq 0$ , tem um número infinito de raízes reais.

**8.1.11** Mostre que

$$(a) \int_0^\infty x^{2s+1} \exp(-ax^2) dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}.$$

$$(b) \int_0^\infty x^{2s} \exp(-ax^2) dx = \frac{(s - \frac{1}{2})!}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s - 1)!!}{2^{s+1}a^s} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Essas integrais gaussianas são de extrema importância em mecânica estatística.

**8.1.12** (a) Desenvolva relações de recorrência para  $(2n)!!$  e para  $(2n + 1)!!$ .

(b) Use essas relações de recorrência para calcular (ou definir)  $0!!$  e  $(-1)!!$ .

Resposta:  $0!! = 1$ ,  $(-1)!! = 1$ .

**8.1.13** Para  $s$  inteiro não-negativo, mostre que

$$(-2s - 1)!! = \frac{(-1)^s}{(2s - 1)!!} = \frac{(-1)^s 2^s s!}{(2s)!}.$$

**8.1.14** Expresse o coeficiente do  $n$ ésimo termo da expansão de  $(1 + x)^{1/2}$

(a) em termos dos fatoriais de inteiros,

(b) em termos das funções de fatorial duplo (!!)

$$\text{Resposta: } a_n = (-1)^{n+1} \frac{(2n - 3)!}{2^{2n-2} n! (n - 2)!} = (-1)^{n+1} \frac{(2n - 3)!!}{(2n)!!}, \quad n = 2, 3, \dots$$

**8.1.15** Expresse o coeficiente do  $n$ ésimo termo da expansão de  $(1 + x)^{-1/2}$

(a) em termos dos fatoriais de inteiros,

(b) em termos das funções de fatorial duplo (!!).

$$\text{Resposta: } a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**8.1.16** O polinômio de Legendre pode ser escrito como

$$P_n(\cos \theta) = 2 \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \left\{ \cos n\theta + \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{2n - 1} \cos(n - 2)\theta + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n - 1)}{(2n - 1)(2n - 3)} \cos(n - 4)\theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n - 1)(n - 2)}{(2n - 1)(2n - 3)(2n - 5)} \cos(n - 6)\theta + \dots \right\}.$$

Seja  $n = 2s + 1$ .

$$P_n(\cos \theta) = P_{2s+1}(\cos \theta) = \sum_{m=0}^s a_m \cos(2m + 1)\theta.$$

Ache  $a_m$  em termos de fatoriais e de fatoriais duplos.

**8.1.17** (a) Mostre que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = (-1)^n \pi,$$

em que  $n$  é um inteiro.

(b) Expresse  $\Gamma(\frac{1}{2} + n)$  e  $\Gamma(\frac{1}{2} - n)$  separadamente em termos de  $\pi^{1/2}$  e de uma função  $a$ .

$$\text{Resposta: } \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \pi^{1/2}.$$

**8.1.18** Por uma das definições da função fatorial ou função gama, mostre que

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\sinh \pi x}.$$





**8.1.19** Prove que

$$|\Gamma(\alpha + i\beta)| = |\Gamma(\alpha)| \prod_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + \frac{\beta^2}{(\alpha + n)^2} \right]^{-1/2}.$$

Essa equação tem sido útil em cálculos da teoria da degradação beta.

**8.1.20** Mostre que

$$|(n + ib)!| = \left( \frac{\pi b}{\sinh \pi b} \right)^{1/2} \prod_{s=1}^n (s^2 + b^2)^{1/2}$$

para  $n$ , um inteiro positivo.

**8.1.21** Mostre que

$$|x!| \geq |(x + iy)!|$$

para todo  $x$ . As variáveis  $x$  e  $y$  são reais.

**8.1.22** Mostre que

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi y}.$$

**8.1.23** A densidade de probabilidade associada com a distribuição normal da estatística é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right],$$

com a faixa de  $(-\infty, \infty)$ . Mostre que

- (a) o valor médio de  $x$ ,  $\langle x \rangle$  é igual a  $\mu$ ,
- (b) o desvio-padrão  $(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2}$  é dado por  $\sigma$ .

**8.1.24** Pela distribuição gama

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

mostre que

- (a)  $\langle x \rangle$  (média) =  $\alpha\beta$ ,
- (b)  $\sigma^2$  (variância)  $\equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \alpha\beta^2$ .

**8.1.25** A função de onda de uma partícula dispersa por um potencial de Coulomb é  $\psi(r, \theta)$ . Na origem a função de onda se torna

$$\psi(0) = e^{-\pi\gamma/2} \Gamma(1 + i\gamma),$$

em que  $\gamma = Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$ . Mostre que

$$|\psi(0)|^2 = \frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma} - 1}.$$

**8.1.26** Derive a representação de integral de contorno da Equação (8.34),

$$2i\nu! \operatorname{sen} \nu\pi = \int_C e^{-z} (-z)^\nu dz.$$

**8.1.27** Escreva um subprograma de função  $FACT(N)$  (variável independente de ponto fixo) para calcular  $N!$ . Inclua provisão para rejeição e mensagem de erro adequada se  $N$  for negativo.  
*Nota:* Para  $N$  inteiro pequeno, multiplicação direta é mais simples. Para  $N$  grande, a Equação (8.55), a série de Stirling, seria adequada.

- 8.1.28** (a) Escreva um subprograma de função para calcular a razão de fatoriais duplos  $(2N - 1)!! / (2N)!!$ . Inclua provisão para  $N = 0$  e para rejeição e uma mensagem de erro se  $N$  for negativo. Calcule e tabule essa razão para  $N = 1(1)100$ .
- (b) Verifique o cálculo de seu subprograma de função para  $199!! / 200!!$ . em comparação com o valor obtido pela série de Stirling (Seção 8.3).

Resposta:  $\frac{199!!}{200!!} = 0,056348$ .

- 8.1.29** Usando GAMMA fornecida pelo FORTRAN ou uma sub-rotina fornecida por uma biblioteca para  $x!$  ou  $\Gamma(x)$ , determine o valor de  $x$  para o qual  $\Gamma(x)$  é um mínimo ( $1 \leq x \leq 2$ ) e esse mínimo valor de  $\Gamma(x)$ . Observe que, embora o valor mínimo de  $\Gamma(x)$  possa ser obtido até cerca de cinco algarismos significativos (precisão única), o valor correspondente de  $x$  é muito menos preciso. Por que essa precisão relativamente baixa?
- 8.1.30** A função fatorial expressa em forma integral pode ser avaliada pela quadratura de Gauss-Laguerre. Para uma fórmula de 10 pontos o  $x!$  resultante é teoricamente exato para  $x$  inteiro, de 0 até 19. O que acontece se  $x$  não for um inteiro? Use a quadratura de Gauss-Laguerre para avaliar  $x = 0, 0(0, 1)2, 0$ . Tabule o erro absoluto como uma função de  $x$ .

**Valor de verificação.**  $x!_{\text{exato}} - x!_{\text{quadratura}} = 0,00034$  para  $x = 1, 3$ .

## 8.2 Funções Digama e Poligama

### Funções Digama

Como podemos notar pelas três definições na Seção 8.1, é inconveniente lidar diretamente com as derivadas da função gama ou função fatorial. Em vez disso, costuma-se tomar o logaritmo natural da função fatorial (Equação (8.1)), converter o produto em uma soma e então diferenciar: isto é,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(z + 1)(z + 2) \cdots (z + n)} n^z \quad (8.36)$$

e

$$\ln \Gamma(z + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n!) + z \ln n - \ln(z + 1) - \ln(z + 2) - \cdots - \ln(z + n)], \quad (8.37)$$

na qual o logaritmo do limite é igual ao limite do logaritmo. Diferenciando em relação a  $z$ , obtemos

$$\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z + 1) \equiv \psi(z + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n - \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{z + 2} - \cdots - \frac{1}{z + n} \right), \quad (8.38)$$

que define  $\psi(z + 1)$ , a função digama. Pela definição da constante de Euler-Mascheroni,<sup>2</sup> a Equação (8.38) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \psi(z + 1) &= -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z + n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n + z)}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Uma aplicação da Equação (8.39) é na derivação da forma de série da função de Neumann (Seção 11.3). É claro que

$$\psi(1) = -\gamma = -0,577\,215\,664\,901\dots^3 \quad (8.40)$$

Um outra expressão para  $\psi(z)$ , talvez mais útil, é derivada na Seção 8.3.

### Função Poligama

A função digama pode ser diferenciada repetidas vezes, dando origem à função poligama:

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(z + 1) &\equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \ln(z!) \\ &= (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z + n)^{m+1}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8.41)$$

<sup>2</sup>Compare com as Seções 5.2 e 5.9. Somamos e subtraímos  $\sum_{s=1}^n s^{-1}$ .

<sup>3</sup> $\gamma$  foi calculada até 1.271 casas decimais por D. E. Knuth, *Math. Comput.* 16: 275 (1962), e até 3.566 casas decimais por D. W. Sweeney, *ibid.* 17: 170 (1963). Talvez seja interessante saber que a fração 228/395 dá  $\gamma$  com precisão até seis casas decimais.



Um esboço de  $\psi(x + 1)$  e  $\psi'(x + 1)$  está incluída na Figura 8.2. Uma vez que a série na Equação (8.41) define a função zeta de Riemann<sup>4</sup> (com  $z = 0$ ),

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}, \quad (8.42)$$

temos

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m + 1), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.43)$$

Os valores das funções poligama de argumento inteiro positivo,  $\psi^{(m)}(n + 1)$ , podem ser calculados usando o Exercício 8.2.6.

Em termos da notação  $\Gamma$ , talvez mais comum,

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \ln \Gamma(z) = \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \psi^{(n)}(z). \quad (8.44a)$$

### Expansão de Maclaurin, Cálculo

Agora é possível escrever uma expansão de Maclaurin para  $\ln \Gamma(z + 1)$ :

$$\ln \Gamma(z + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \psi^{(n-1)}(1) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \zeta(n) \quad (8.44b)$$

convergente para  $|z| < 1$ ; para  $z = x$ , a faixa é  $-1 < x \leq 1$ . Formas alternativas dessa série aparecem no Exercício 5.9.14. A Equação (8.44b) é um meio possível para calcular  $\Gamma(z + 1)$  para  $z$  real ou complexo, mas a série de Stirling (Seção 8.3) costuma ser melhor e, além disso, agora estão disponíveis excelentes tabelas de valores da função gama para argumentos complexos com base na utilização da série de Stirling na relação de recorrência (Equação (8.29)) está agora disponível.<sup>5</sup>

### Somatório de Séries

As funções digama e poligama também podem ser usadas em séries de somatórios. Se o termo geral da série tem a forma de uma fração racional (com a potência mais alta do índice no numerador ao menos duas unidades menor do que a potência mais alta do índice no denominador), ele pode ser transformado pelo método de frações parciais (compare com a Seção 15.8). A série infinita então pode ser expressa como uma soma finita de funções digama e poligama. A utilidade desse método depende da disponibilidade de tabelas de funções digama e poligama. Essas tabelas e exemplos de somatório de séries são dados em AMS-55, Capítulo 6 (veja referência em Leituras Adicionais).

#### Exemplo 8.2.1    CONSTANTE DE CATALAN

A constante de Catalan, Exercício 5.2.22, ou  $\beta(2)$  da Seção 5.9, é dada por

$$K = \beta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)^2}. \quad (8.44c)$$

Agrupando os termos positivos e negativos separadamente e começando com índice unitário (para se ajustar à forma de  $\psi^{(1)}$ , Equação (8.41)), obtemos

$$K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n + 1)^2} - \frac{1}{9} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n + 3)^2}.$$

Agora citando a Equação (8.41), obtemos

$$K = \frac{8}{9} + \frac{1}{16} \psi^{(1)}\left(1 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} \psi^{(1)}\left(1 + \frac{3}{4}\right). \quad (8.44d)$$

Usando os valores de  $\psi^{(1)}$  da Tabela 6.1 de AMS-55 (veja referência em Leituras Adicionais), obtemos

$$K = 0,91596559 \dots$$

Compare esse cálculo da constante de Catalan com os cálculos do Capítulo 5, seja o somatório direto, seja uma modificação usando valores da função zeta de Riemann. ■

<sup>4</sup>Veja a Seção 5.9. Para  $z \neq 0$ , essa série pode ser usada para definir uma função zeta generalizada.

<sup>5</sup>*Table of the Gamma Function for Complex Arguments*, Applied Mathematics Series n<sup>o</sup>. 34. Washington, DC: National Bureau of Standards (1954).

### Exercícios

**8.2.1** Verifique que as duas formas seguintes da função digama,

$$\psi(x+1) = \sum_{r=1}^x \frac{1}{r} - \gamma$$

e

$$\psi(x+1) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x}{r(r+x)} - \gamma,$$

são iguais uma à outra (para  $x$  inteiro positivo).

**8.2.2** Mostre que  $\psi(z+1)$  tem a expansão de série

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1}.$$

**8.2.3** Para uma expansão de série de potências de  $\ln(z!)$ , AMS-55 (veja referência em Leituras Adicionais) relaciona

$$\ln(z!) = -\ln(1+z) + z(1-\gamma) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{[\zeta(n)-1]z^n}{n}.$$

(a) Mostre que essa expressão está de acordo com a Equação (8.44b) para  $|z| < 1$ .

(b) Qual é a faixa de convergência dessa nova expressão?

**8.2.4** Mostre que

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{2n} z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

*Sugestão:* Experimente a Equação (8.32).

**8.2.5** Escreva uma definição de produto infinito de Weierstrass de  $\ln(z!)$ . Sem diferenciar, mostre que isso leva diretamente à expansão de Maclaurin de  $\ln(z!)$ , Equação (8.44b).

**8.2.6** Derive a relação de diferença para a função poligama

$$\psi^{(m)}(z+2) = \psi^{(m)}(z+1) + (-1)^m \frac{m!}{(z+1)^{m+1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**8.2.7** Mostre que, se

$$\Gamma(x+iy) = u+iv,$$

então,

$$\Gamma(x-iy) = u-iv.$$

Esse é um caso especial do princípio de reflexão de Schwarz, Seção 6.5.

**8.2.8** O símbolo de Pochhammer  $(a)_n$  é definido como

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1$$

(para  $n$  inteiro).

(a) Expresse  $(a)_n$  em termos de fatoriais.

(b) Ache  $(d/da)(a)_n$  em termos de  $(a)_n$  e funções digama.

$$\text{Resposta: } \frac{d}{da}(a)_n = (a)_n [\psi(a+n) - \psi(a)].$$

(c) Mostre que

$$(a)_{n+k} = (a+n)_k \cdot (a)_n.$$

**8.2.9** Verifique os seguintes valores especiais da forma  $\psi$  das funções digama e poligama:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi^{(1)}(1) = \zeta(2), \quad \psi^{(2)}(1) = -2\zeta(3).$$



**8.2.10** Derive a relação de recorrência da função poligama

$$\psi^{(m)}(1+z) = \psi^{(m)}(z) + (-1)^m m! / z^{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**8.2.11** Verifique

(a)  $\int_0^\infty e^{-r} \ln r \, dr = -\gamma.$

(b)  $\int_0^\infty r e^{-r} \ln r \, dr = 1 - \gamma.$

(c)  $\int_0^\infty r^n e^{-r} \ln r \, dr = (n-1)! + n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r} \ln r \, dr, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

*Sugestão:* Essas expressões podem ser verificadas por integração por partes três partes, ou diferenciando a forma integral de  $n!$  em relação a  $n$ .

**8.2.12** As funções de onda relativistas de Dirac para o hidrogênio envolvem fatores como  $[2(1-\alpha^2 Z^2)^{1/2}]!$  em que  $\alpha$ , a constante de estrutura fina, é  $\frac{1}{137}$  e  $Z$  é o número atômico. Expanda  $[2(1-\alpha^2 Z^2)^{1/2}]!$  em uma série de potências de  $\alpha^2 Z^2$ .

**8.2.13** A descrição da mecânica quântica de uma partícula em um campo de Coulomb requer que se conheça a fase da função fatorial complexa. Determine a fase de  $(1+ib)!$  para  $b$  pequeno.

**8.2.14** A energia total irradiada por um corpo negro é dada por

$$u = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Mostre que a integral nessa expressão é igual a  $3!\zeta(4)$ . [ $\zeta(4) = \pi^4/90 = 1,0823\dots$ ] O resultado final é a lei de Stefan-Boltzmann.

**8.2.15** Como generalização do resultado no Exercício 8.2.14, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{x^s dx}{e^x - 1} = s! \zeta(s+1), \quad \Re(s) > 0.$$

**8.2.16** A densidade de energia do neutrino (distribuição de Fermi) na história remota do universo é dada por

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x/kT) + 1} dx.$$

Mostre que

$$\rho_\nu = \frac{7\pi^5}{30h^3} (kT)^4.$$

**8.2.17** Prove que

$$\int_0^\infty \frac{x^s dx}{e^x + 1} = s!(1-2^{-s})\zeta(s+1), \quad \Re(s) > 0.$$

Os Exercícios 8.2.15 e 8.2.17 na verdade constituem as transformadas integrais de Mellin (compare com a Seção 15.1).

**8.2.18** Prove que

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-zt}}{1-e^{-t}} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

**8.2.19** Usando funções digama e poligama, some as séries (a)  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ , (b)  $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2-1}$ .

*Nota:* Você pode usar o Exercício 8.2.6 para calcular as funções digama necessárias.

**8.2.20** Mostre que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{(b-a)} \{ \psi(1+b) - \psi(1+a) \},$$

em que  $a \neq b$  e nem  $a$  nem  $b$  são um inteiro negativo. Tem um certo interesse comparar esse somatório com a integral correspondente,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \{ \ln(1+b) - \ln(1+a) \}.$$

A relação entre  $\psi(x)$  e  $\ln x$  é explicitada na Equação (8.51) na seção seguinte.

**8.2.21** Verifique a representação de integral de contorno de  $\zeta(s)$ ,

$$\zeta(s) = -\frac{(-s)!}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

O contorno  $C$  é o mesmo da Equação (8.35). Os pontos  $z = \pm 2n\pi i$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , são todos excluídos.

**8.2.22** Mostre que  $\zeta(s)$  é analítica em todo o plano complexo finito, exceto em  $s = 1$ , em que ela tem um pólo simples com um resíduo de  $+1$ .

*Sugestão:* A representação de integral de contorno será útil.

**8.2.23** Usando a capacidade de variável complexa da linguagem FORTRAN, calcule  $\Re(1+ib)!$ ,  $\Im(1+ib)!$ ,  $|(1+ib)!|$  e fase  $(1+ib)!$  para  $b = 0, 0(0,1)1, 0$ . Plote a fase de  $(1+ib)!$  versus  $b$ .

*Sugestão:* O Exercício 8.2.3 oferece uma abordagem conveniente. Você precisará calcular  $\zeta(n)$ .

### 8.3 Série de Stirling

Para cálculo de  $\ln(z!)$  para  $z$  muito grande (mecânica estatística) e para cálculos numéricos em valores não-inteiros de  $z$ , uma expansão de série de  $\ln(z!)$  em potências negativas de  $z$  é desejável. Talvez o modo mais elegante de derivar essa expansão seja pelo método das inclinações mais acentuadas (Seção 7.3). O método seguinte, que começa com uma fórmula de integração numérica, não requer que se conheça a integração de contorno e é particularmente direto.

#### Derivação a Partir da Fórmula de Integração de Euler-Maclaurin

A fórmula de Euler-Maclaurin para avaliar uma integral definida<sup>6</sup> é

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \dots + \frac{1}{2}f(n) - b_2[f'(n) - f'(0)] - b_4[f'''(n) - f'''(0)] - \dots, \tag{8.45}$$

na qual os  $b_{2n}$  estão relacionados com os números de Bernoulli  $B_{2n}$  (compare com a Seção 5.9) por

$$(2n)!b_{2n} = B_{2n}, \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_6 &= \frac{1}{42}, \\ B_2 &= \frac{1}{6}, & B_8 &= -\frac{1}{30}, \\ B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_{10} &= \frac{5}{66}, \text{ e assim por diante.} \end{aligned} \tag{8.47}$$

Aplicando a Equação (8.45) à integral definida

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(z+x)^2} = \frac{1}{z} \tag{8.48}$$

(para  $z$  que não esteja sobre o eixo real negativo), obtemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z^2} + \psi^{(1)}(z+1) - \frac{2!b_2}{z^3} - \frac{4!b_4}{z^5} - \dots. \tag{8.49}$$

<sup>6</sup>É obtida por repetidas integrações por partes, Seção 5.9.



Essa é a razão para usar a Equação (8.48). A avaliação de Euler-Maclaurin resulta em  $\psi^{(1)}(z + 1)$ , que é  $d^2 \ln \Gamma(z + 1)/dz^2$ .

Usando a Equação (8.46) e resolvendo para  $\psi^{(1)}(z + 1)$ , temos

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(z + 1) &= \frac{d}{dz} \psi(z + 1) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{B_2}{z^3} + \frac{B_4}{z^5} + \dots \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Uma vez que os números de Bernoulli têm forte divergência, essa série não converge. É uma série semiconvergente, ou assintótica, útil se retivermos um número suficientemente pequeno de termos (compare com a Seção 5.10).

Integrando uma vez, obtemos a função digama

$$\begin{aligned} \psi(z + 1) &= C_1 + \ln z + \frac{1}{2z} - \frac{B_2}{2z^2} - \frac{B_4}{4z^4} - \dots \\ &= C_1 + \ln z + \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Integrando a Equação (8.51) em relação a  $z$  de  $z - 1$  até  $z$ , e então deixando que  $z$  tenda ao infinito, podemos mostrar que  $C_1$ , a constante de integração, desaparece. Isso nos dá uma segunda expressão para a função digama, que muitas vezes é mais útil do que a Equação (8.38) ou (8.44b).

### Série de Stirling

A integral indefinida da função digama (Equação (8.51)) é

$$\ln \Gamma(z + 1) = C_2 + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{B_2}{2z} + \dots + \frac{B_{2n}}{2n(2n - 1)z^{2n-1}} + \dots, \quad (8.52)$$

na qual  $C_2$  é uma outra constante de integração. Para fixar  $C_2$ , achamos conveniente usar a fórmula de duplicação, ou de duplicação de Legendre, derivada na Seção 8.4,

$$\Gamma(z + 1)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{-2z}\pi^{1/2}\Gamma(2z + 1). \quad (8.53)$$

Isso pode ser provado diretamente quando  $z$  é um inteiro positivo escrevendo  $\Gamma(2z + 1)$  como um produto de termos pares vezes um produto de termos ímpares e extraíndo um fator de 2 de cada termo (Exercício 8.3.5). Substituindo a Equação (8.52) no logaritmo da fórmula de duplicação, constatamos que  $C_2$  é

$$C_2 = \frac{1}{2} \ln 2\pi, \quad (8.54)$$

resultando em

$$\ln \Gamma(z + 1) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \dots \quad (8.55)$$

Essa é a série de Stirling, uma expansão assintótica. O valor absoluto do erro é menor do que o valor absoluto do primeiro termo omitido.

As constantes de integração  $C_1$  e  $C_2$  também podem ser avaliadas por comparação com o primeiro termo da expansão em série obtido pelo método da “inclinação mais acentuada”, o que é executado na Seção 7.3.

Para ajudar a ilustrar a notável precisão da série de Stirling para  $\Gamma(s + 1)$ , a razão entre o primeiro termo da aproximação de Stirling e  $\Gamma(s + 1)$  é apresentada no gráfico da Figura 8.5. Uma tabulação dá a razão entre o primeiro termo na expansão e  $\Gamma(s + 1)$  e a razão entre os dois primeiros termos na expansão e  $\Gamma(s + 1)$  (Tabela 8.1). A derivação dessas formas é o Exercício 8.3.1.

### Exercícios

**8.3.1** Reescreva a série de Stirling para dar  $\Gamma(z + 1)$  em vez de  $\ln \Gamma(z + 1)$

$$\text{Resposta: } \Gamma(z + 1) = \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51,840z^3} + \dots\right).$$

**8.3.2** Use a fórmula de Stirling para estimar  $52!$ , o número de possíveis rearranjos de cartas em um baralho convencional.

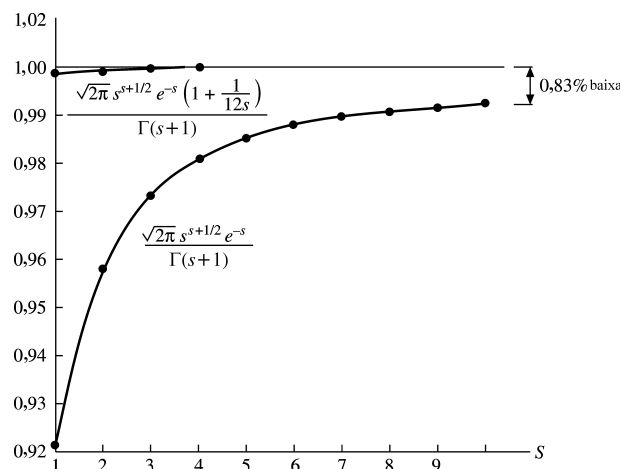


Figura 8.5: Precisão da fórmula de Stirling.

Tabela 8.1

$s$	$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \sqrt{2\pi} s^{s+1/2} e^{-s}$	$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \sqrt{2\pi} s^{s+1/2} e^{-s} \left(1 + \frac{1}{12s}\right)$
1	0,92213	0,99898
2	0,95950	0,99949
3	0,97270	0,99972
4	0,97942	0,99983
5	0,98349	0,99988
6	0,98621	0,99992
7	0,98817	0,99994
8	0,98964	0,99995
9	0,99078	0,99996
10	0,99170	0,99998

- 8.3.3 Integrando a Equação (8.51) de  $z - 1$  a  $z$ , e então deixando que  $z \rightarrow \infty$ , avalie a constante  $C_1$  na série assintótica para a função digama  $\psi(z)$ .
- 8.3.4 Mostre que a constante  $C_2$  na fórmula de Stirling é igual a  $\frac{1}{2} \ln 2\pi$  usando o logaritmo da fórmula de duplicação.
- 8.3.5 Por expansão direta, verifique a fórmula de duplicação para  $z = n + \frac{1}{2}$ , sendo  $n$  um inteiro.
- 8.3.6 Sem usar a série de Stirling, mostre que

$$(a) \ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x \, dx, \quad (b) \ln(n!) > \int_1^n \ln x \, dx; \quad n \text{ é um inteiro } \geq 2.$$

Observe que a média aritmética dessas duas integrais dá uma boa aproximação para a série de Stirling.

- 8.3.7 Teste para convergência

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{(p - \frac{1}{2})!}{p!} \right]^2 \times \frac{2p+1}{2p+2} = \pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p-1)!!(2p+1)!!}{(2p)!!(2p+2)!!}.$$

Esta série surge em uma tentativa de descrever o campo magnético criado por um circuito de corrente e por ele circundado.

- 8.3.8 Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{b-a} \frac{(x+a)!}{(x+b)!} = 1.$$





**8.3.9** Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} n^{1/2} = \pi^{-1/2}.$$

**8.3.10** Calcule o coeficiente binomial  $\binom{2n}{n}$  até cinco algarismos significativos para  $n = 10, 20$  e  $30$ .

- (a) a uma aproximação da série de Stirling através de termos em  $n^{-1}$ ,  
 (b) a um cálculo de precisão dupla.

Resposta:  $\binom{20}{10} = 1,84756 \times 10^5$ ,  $\binom{40}{20} = 1,37846 \times 10^{11}$ ,  
 $\binom{60}{30} = 1,18264 \times 10^{17}$ .

**8.3.11** Escreva um programa (ou subprograma) para calcular  $\log_{10}(x!)$  diretamente da série de Stirling. Admita que  $x \geq 10$ . (Valores menores poderiam ser calculados pela relação de recorrência fatorial.) Tabule  $\log_{10}(x!)$  versus  $x$  para  $x = 10(10)300$ . Verifique seus resultados por comparação com AMS-55 (veja essa referência em Leituras Adicionais) ou por multiplicação direta (para  $n = 10, 20$  e  $30$ ).

**Valor de verificação.**  $\log_{10}(100!) = 157,97$ .

**8.3.12** Usando a capacidade de aritmética complexa da linguagem FORTRAN, escreva uma sub-rotina para calcular  $\ln(z!)$  para  $z$  complexo com base na série de Stirling. Inclua um teste e uma mensagem de erro adequada se  $z$  estiver muito próximo de um inteiro real negativo. Verifique sua sub-rotina comparando com cálculos alternativos para  $z$  real,  $z$  imaginário puro e  $z = 1+ib$  (Exercício 8.2.23).

**Valores de verificação.**  $|(i0, 5)!| = 0,82618$   
 fase  $(i0, 5)! = -0,24406$ .

## 8.4 A Função Beta

Usando a definição de integral (Equação (8.25)), escrevemos o produto de dois fatoriais como o produto de duas integrais. Para facilitar a mudança nas variáveis, tomamos as integrais sobre uma faixa finita:

$$m!n! = \lim_{a^2 \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} e^{-u} u^m du \int_0^{a^2} e^{-v} v^n dv, \quad \begin{matrix} \Re(m) > -1, \\ \Re(n) > -1. \end{matrix} \quad (8.56a)$$

Substituindo  $u$  por  $x^2$  e  $v$  por  $y^2$ , obtemos

$$m!n! = \lim_{a \rightarrow \infty} 4 \int_0^a e^{-x^2} x^{2m+1} dx \int_0^a e^{-y^2} y^{2n+1} dy. \quad (8.56b)$$

Transformando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} m!n! &= \lim_{a \rightarrow \infty} 4 \int_0^a e^{-r^2} r^{2m+2n+3} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \\ &= (m+n+1)! 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Aqui, o elemento de área cartesiano,  $dx dy$ , foi substituído por  $r dr d\theta$  (Figura 8.6). A última igualdade na equação (8.57) resulta do Exercício 8.1.11.

A integral definida, juntamente com o fator 2, foi denominada função beta:

$$\begin{aligned} B(m+1, n+1) &\equiv 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}. \end{aligned} \quad (8.58a)$$

Do mesmo modo, em termos da função gama, e observando sua simetria,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad B(q, p) = B(p, q). \quad (8.58b)$$

A única razão para escolher  $m+1$  e  $n+1$ , em vez de  $m$  e  $n$ , como argumentos de  $B$  é estar de acordo com a função beta convencional, histórica.

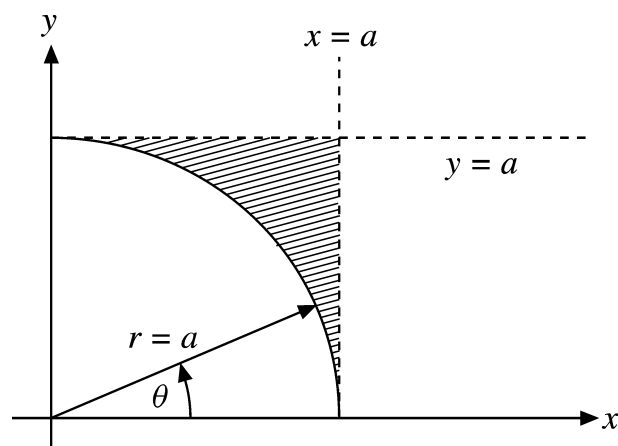


Figura 8.6: Transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

### Integrais Definidas, Formas Alternativas

A função beta é útil na avaliação de uma ampla variedade de integrais definidas. A substituição  $t = \cos^2 \theta$  converte a Equação (8.58a) em<sup>7</sup>

$$B(m+1, n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt. \quad (8.59a)$$

Substituindo  $t$  por  $x^2$ , obtemos

$$\frac{m!n!}{2(m+n+1)!} = \int_0^1 x^{2m+1} (1-x^2)^n dx. \quad (8.59b)$$

A substituição  $t = u/(1+u)$  na Equação (8.59a) resulta em mais uma forma útil,

$$\frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}} du. \quad (8.60)$$

A função beta como uma integral definida é útil para estabelecer representações integrais da função de Bessel (Exercício 11.1.18) e da função hipergeométrica (Exercício 13.4.10).

### Verificação da Relação $\pi\alpha/\text{sen } \pi\alpha$

Se considerarmos  $m = a$ ,  $n = -a$ ,  $-1 < a < 1$ , então

$$\int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^2} du = a!(-a)!. \quad (8.61)$$

Por integração de contorno, podemos demonstrar que essa integral é igual a  $\pi a/\text{sen } \pi a$  (Exercício 7.1.18), o que nos dá mais um outro método para obter a Equação (8.32).

### Derivação da Fórmula de Duplicação de Legendre

A forma da Equação (8.58a) sugere que a função beta pode ser útil na derivação da fórmula de duplicação utilizada na seção precedente. Pela Equação (8.59a) com  $m = n = z$ ,  $\Re(z) > -1$ ,

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = \int_0^1 t^z (1-t)^z dt. \quad (8.62)$$

Substituindo  $t = (1+s)/2$ , temos

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = 2^{-2z-1} \int_{-1}^1 (1-s^2)^z ds = 2^{-2z} \int_0^1 (1-s^2)^z ds. \quad (8.63)$$

<sup>7</sup>O teorema da convolução da transformada de Laplace oferece uma derivação alternativa da Equação (8.58a); compare com o Exercício 15.11.2.



A última igualdade vale porque a integranda é par. Avaliando essa integral como uma função beta (Equação (8.59b)), obtemos

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = 2^{-2z-1} \frac{z!(-\frac{1}{2})!}{(z+\frac{1}{2})!}. \quad (8.64)$$

Rearranjando termos e recordando que  $(-\frac{1}{2})! = \pi^{1/2}$ , reduzimos essa equação a uma das formas da fórmula de duplicação de Legendre,

$$z!(z+\frac{1}{2})! = 2^{-2z-1} \pi^{1/2} (2z+1)!. \quad (8.65a)$$

Dividindo por  $(z+\frac{1}{2})!$ , obtemos uma forma alternativa da fórmula de duplicação:

$$z!(z-\frac{1}{2})! = 2^{-2z} \pi^{1/2} (2z)!. \quad (8.65b)$$

Embora as integrais usadas nessa derivação sejam definidas somente por  $\Re(z) > -1$ , os resultados (Equações (8.65a) e (8.65b)) são válidos para todos os pontos  $z$  regulares por continuação analítica.<sup>8</sup>

Usando a notação de fatorial duplo (Seção 8.1), podemos reescrever a Equação (8.65a) (com  $z = n$ , um inteiro) como

$$(n+\frac{1}{2})! = \pi^{1/2} (2n+1)!! / 2^{n+1}. \quad (8.65c)$$

Isso é muitas vezes conveniente para eliminar fatoriais de frações.

### Função Beta Incompleta

Exatamente como há uma função gama incompleta (Seção 8.5), também há uma função beta incompleta,

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1, p > 0, q > 0 \quad (\text{if } x = 1). \quad (8.66)$$

É claro que  $B_{x=1}(p, q)$  se torna a função beta regular (completa), Equação (8.59a). Uma expansão de série de potências de  $B_x(p, q)$  é o tópico dos Exercícios 5.2.18 e 5.7.8. A relação com funções hipergeométricas aparece na Seção 13.4.

A função beta incompleta aparece também na teoria da probabilidade no cálculo da probabilidade de no máximo  $k$  sucessos em  $n$  tentativas independentes.<sup>9</sup>

### Exercícios

**8.4.1** Derive a fórmula de duplicação para a função fatorial integrando  $(\sin 2\theta)^{2n+1} = (2\sin\theta \cos\theta)^{2n+1}$  (e usando a função beta).

**8.4.2** Verifique as seguintes identidades de função beta:

(a)  $B(a, b) = B(a+1, b) + B(a, b+1)$ ,

(b)  $B(a, b) = \frac{a+b}{b} B(a, b+1)$ ,

(c)  $B(a, b) = \frac{b-1}{a} B(a+1, b-1)$ ,

(d)  $B(a, b)B(a+b, c) = B(b, c)B(a, b+c)$ .

**8.4.3** (a) Mostre que

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} x^{2n} dx = \begin{cases} \pi/2, & n = 0 \\ \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

(b) Mostre que

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} x^{2n} dx = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

<sup>8</sup>Se  $2z$  for um inteiro negativo, obtemos o resultado válido, mas nada esclarecedor,  $\infty = \infty$ .

<sup>9</sup>W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3<sup>a</sup>. ed. Nova York: Wiley (1968), Seção VI.10.

**8.4.4** Mostre que

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \begin{cases} 2^{2n+1} \frac{n!n!}{(2n+1)!}, & n > -1 \\ 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

**8.4.5** Avalie  $\int_{-1}^1 (1+x)^a (1-x)^b dx$  em termos da função beta.

Resposta:  $2^{a+b+1} B(a+1, b+1)$ .

**8.4.6** Mostre, por meio da função beta, que

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\text{sen } \pi\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

**8.4.7** Mostre que a integral de Dirichlet

$$\iint x^p y^q dx dy = \frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2},$$

em que a faixa de integração é o triângulo limitado pelos eixos  $x$  e  $y$  e pela reta  $x+y=1$ .

**8.4.8** Mostre que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+2xy \cos \theta)} dx dy = \frac{\theta}{2 \text{sen } \theta}.$$

Quais são os limites para  $\theta$ ?

*Sugestão:* Considere coordenadas oblíquas  $xy$ .

Resposta:  $-\pi < \theta < \pi$ .

**8.4.9** Avalie (usando a função beta)

(a)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2} \theta d\theta = \frac{(2\pi)^{3/2}}{16[(\frac{1}{4})!]^2},$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}[(n-1)/2]!}{2(n/2)!} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

**8.4.10** Avalie  $\int_0^1 (1-x^4)^{-1/2} dx$  como uma função beta.

Resposta:  $\frac{[(\frac{1}{4})!]^2 \cdot 4}{(2\pi)^{1/2}} = 1,311028777$ .

**8.4.11** Dada

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2\nu} \theta \cos(z \cos \theta) d\theta, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2},$$

mostre, com a ajuda de funções beta, que essa expressão se reduz à série de Bessel

$$J_\nu(z) = \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{1}{s!(s+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\nu},$$

identificando o  $J_\nu$  inicial como uma representação integral da função de Bessel,  $J_\nu$  (Seção 11.1).

**8.4.12** Dada a função de Legendre associada

$$P_m^m(x) = (2m-1)!!(1-x^2)^{m/2},$$

Seção 12.5, mostre que



$$(a) \int_{-1}^1 [P_m^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1} (2m)!, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(b) \int_{-1}^1 [P_m^m(x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = 2 \cdot (2m-1)!, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

**8.4.13** Mostre que

$$(a) \int_0^1 x^{2s+1} (1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!},$$

$$(b) \int_0^1 x^{2p} (1-x^2)^q dx = \frac{1}{2} \frac{(p-\frac{1}{2})!q!}{(p+q+\frac{1}{2})!}.$$

**8.4.14** Uma partícula de massa  $m$  se movimentando em um potencial simétrico que é bem descrito por  $V(x) = A|x|^n$  tem uma energia total  $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2 + V(x) = E$ . Resolvendo para  $dx/dt$  e integrando, constatamos que o período de movimento é

$$\tau = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_{\text{máx}}} \frac{dx}{(E - Ax^n)^{1/2}},$$

em que  $x_{\text{máx}}$  é um ponto crítico clássico dado por  $Ax_{\text{máx}}^n = E$ . Mostre que

$$\tau = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/n + \frac{1}{2})}.$$

**8.4.15** Com referência ao Exercício 8.4.14,

(a) Determine o limite quando  $n \rightarrow \infty$  de

$$\frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/n + \frac{1}{2})}.$$

(b) Ache  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau$  pelo comportamento da integranda  $(E - Ax^n)^{-1/2}$ .

(c) Investigue o comportamento do sistema físico (poço de potencial) quando  $n \rightarrow \infty$ . Obtenha o período por inspeção desse sistema físico limitador.

**8.4.16** Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\sinh^\alpha x}{\cosh^\beta x} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}\right), \quad -1 < \alpha < \beta.$$

*Sugestão:* Faça  $\sinh^2 x = u$ .

**8.4.17** A distribuição beta da teoria da probabilidade tem uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1},$$

com  $x$  restrito ao intervalo  $(0,1)$ . Mostre que

$$(a) \langle x \rangle (\text{média}) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

$$(b) \sigma^2 (\text{variância}) \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

**8.4.18** Por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} \theta d\theta} = 1$$

derive a fórmula de Wallis para  $\pi$ :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

**8.4.19** Tabule a função beta  $B(p, q)$  para  $q = 1, 0(0, 1)2, 0$  independentemente.

**Valor de verificação.**  $B(1, 3, 1, 7) = 0, 40774$ .

- 8.4.20** (a) Escreva uma sub-rotina para calcular a função beta incompleta  $B_x(p, q)$ . Para  $0, 5 < x \leq 1$ , você verá que é conveniente usar a relação

$$B_x(p, q) = B(p, q) - B_{1-x}(q, p).$$

- (b) Tabule  $B_x(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . Faça uma verificação aleatória de seus resultados usando a quadratura de Gauss-Legendre.

## 8.5 Funções Gama Incompletas e Funções Relacionadas

Generalizando a definição de Euler da função gama (Equação (8.5)), definimos as funções gama incompletas pelas integrais de limite variável

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \Re(a) > 0$$

e

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt. \tag{8.67}$$

É claro que as duas funções são relacionadas porque

$$\gamma(a, x) + \Gamma(a, x) = \Gamma(a). \tag{8.68}$$

Optar pelo emprego de  $\gamma(a, x)$  ou  $\Gamma(a, x)$  é apenas uma questão de conveniência. Se o parâmetro  $a$  for um inteiro positivo, a Equação (8.67) pode ser integrada completamente para dar como resultado

$$\gamma(n, x) = (n-1)! \left( 1 - e^{-x} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!} \right) \tag{8.69}$$

$$\Gamma(n, x) = (n-1)! e^{-x} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{s!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para  $a$  não-inteiro, são desenvolvidas uma expansão de série de potências de  $\gamma(a, x)$  para  $x$  pequeno e uma expansão assintótica de  $\Gamma(a, x)$  (denotada como  $I(x, p)$ ), no Exercício 5.7.7 e na Seção 5.10:

$$\gamma(a, x) = x^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!(a+n)}, \quad |x| \sim 1 \text{ (} x \text{ pequeno)},$$

$$\Gamma(a, x) = x^{a-1} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)!}{(a-1-n)!} \cdot \frac{1}{x^n} \tag{8.70}$$

$$= x^{a-1} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-a)!}{(-a)!} \cdot \frac{1}{x^n}, \quad x \gg 1 \text{ (} x \text{ grande)}. \tag{8.71}$$

Essas funções gama incompletas também podem ser expressas em termos bastante elegantes de funções hipergeométricas confluentes (compare com a Seção 13.5).

### Integral Exponencial

Embora seja pequena a frequência com que a função gama incompleta  $\Gamma(a, x)$  em sua forma geral (Equação (8.67)) é encontrada em problemas físicos, um caso especial é bastante comum e muito útil. Definimos a integral exponencial por<sup>10</sup>

$$-\text{Ei}(-x) \equiv \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = E_1(x). \tag{8.72}$$

(Veja Figura 8.7.) Aqui é preciso cautela, porque a integral na Equação (8.71) diverge logaritmicamente à medida que  $x \rightarrow 0$ . Para obter uma expansão de série para  $x$  pequeno, começamos de

<sup>10</sup>A aparição dos dois sinais de menos em  $-\text{Ei}(-x)$  é uma monstruosidade histórica. AMS-55, Capítulo 5, denota essa integral por  $E_1(x)$ . Veja referência em Leituras Adicionais.

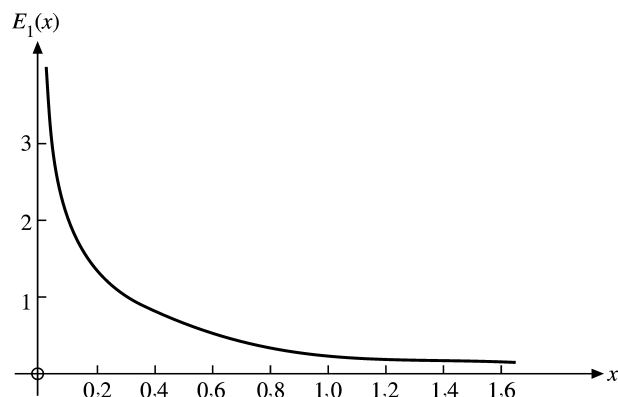


Figura 8.7: A integral exponencial,  $E_1(x) = -\text{Ei}(-x)$ .

$$E_1(x) = \Gamma(0, x) = \lim_{a \rightarrow 0} [\Gamma(a) - \gamma(a, x)]. \tag{8.73}$$

Podemos subdividir o termo divergente na expansão de série para  $\gamma(a, x)$ ,

$$E_1(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{a\Gamma(a) - x^a}{a} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}. \tag{8.74}$$

Usando a regra de l'Hôpital (Exercício 5.6.8) e

$$\frac{d}{da} \{a\Gamma(a)\} = \frac{d}{da} a! = \frac{d}{da} e^{\ln(a!)} = a! \psi(a+1), \tag{8.75}$$

e então a Equação (8.40)<sup>11</sup>, obtemos a série de convergência rápida

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}. \tag{8.76}$$

Uma expansão assintótica  $E_1(x) \approx e^{-x} [\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \dots]$  para  $x \rightarrow \infty$  é desenvolvida na Seção 5.10.

Outras formas especiais relacionadas com a integral exponencial são a integral do seno, a integral do co-seno (Figura 8.8) e a integral logarítmica, definidas por<sup>12</sup>

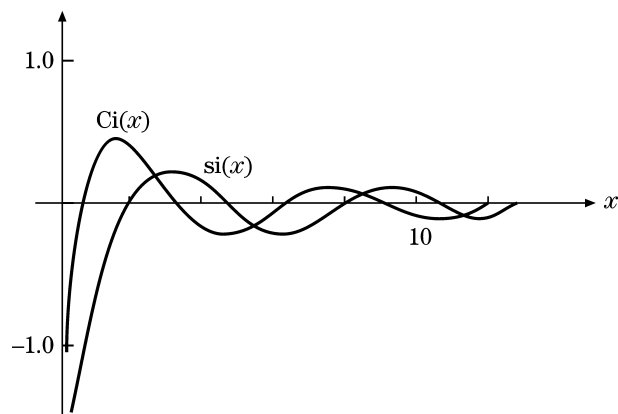


Figura 8.8: Integrais de seno e co-seno.

<sup>11</sup>  $dx^a/dx = x^a \ln x$ .

<sup>12</sup> Uma outra integral de seno é dada por  $\text{Si}(x) = \text{si}(x) + \pi/2$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{si}(x) &= - \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \\ \operatorname{Ci}(x) &= - \int_x^\infty \frac{\operatorname{cos} t}{t} dt \\ \operatorname{li}(x) &= \int_0^x \frac{du}{\ln u} = \operatorname{Ei}(\ln x) \end{aligned} \tag{8.77}$$

para seus ramos principais, sendo que, por convenção, o corte de ramificação escolhido é ao longo do eixo real negativo a partir do ponto de ramificação em zero. Transformando de argumento real para argumento imaginário, podemos mostrar que

$$\operatorname{si}(x) = \frac{1}{2i} [\operatorname{Ei}(ix) - \operatorname{Ei}(-ix)] = \frac{1}{2i} [E_1(ix) - E_1(-ix)], \tag{8.78}$$

ao passo que

$$\operatorname{Ci}(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{Ei}(ix) + \operatorname{Ei}(-ix)] = -\frac{1}{2} [E_1(ix) + E_1(-ix)], \quad |\arg x| < \frac{\pi}{2}. \tag{8.79}$$

Somando essas duas relações, obtemos

$$\operatorname{Ei}(ix) = \operatorname{Ci}(x) + i\operatorname{si}(x), \tag{8.80}$$

para mostrar que a relação entre essas integrais é exatamente análoga à relação entre  $e^{ix}$ ,  $\operatorname{cos} x$ , e  $\operatorname{sen} x$ . Referindo-nos às Equações (8.71) e (8.78), vemos que  $\operatorname{Ci}(x)$  está de acordo com as definições de AMS-55 (veja referência em Leituras Adicionais). Em termos de  $E_1$ ,

$$E_1(ix) = -\operatorname{Ci}(x) + i\operatorname{si}(x).$$

Expansões assintóticas de  $\operatorname{Ci}(x)$  e  $\operatorname{si}(x)$  são desenvolvidas na Seção 5.10. Expansões de séries de potências em torno da origem para  $\operatorname{Ci}(x)$ ,  $\operatorname{si}(x)$  e  $\operatorname{li}(x)$  podem ser obtidas a partir das expansões para a integral exponencial,  $E_1(x)$ , ou por integração direta, Exercício 8.5.10. As integrais de exponencial, de seno e de co-seno são tabuladas em AMS-55, Capítulo 5 (veja referência em Leituras Adicionais) e também podem ser acessadas por *softwares* simbólicos como Matemática, Mace, Mathcad e Reduce.

### Integrais de Erro

As integrais de erro

$$\operatorname{erf}z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc}z = 1 - \operatorname{erf}z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt \tag{8.81a}$$

(normalizadas de modo que  $\operatorname{erf} \infty = 1$ ) são introduzidas no Exercício 5.10.4 (Figura 8.9). Ali são desenvolvidas formas assintóticas. Pela forma geral dos integrandos e Equação (8.6), esperamos que  $\operatorname{erf}z$  e  $\operatorname{erfc}z$  possam ser escritas como funções gama incompletas com  $a = \frac{1}{2}$ . As relações são

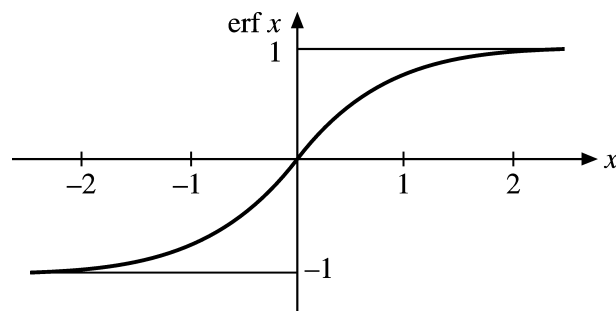


Figura 8.9: Função de erro,  $\operatorname{erf} x$ .

$$\operatorname{erf}z = \pi^{-1/2} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right), \quad \operatorname{erfc}z = \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right). \tag{8.81b}$$

A expansão de série de potências de  $\operatorname{erf} z$  resulta diretamente da Equação (8.70).





### Exercícios

**8.5.1** Mostre que

$$\gamma(a, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)!}{(a+n)!} x^{a+n}$$

- (a) Integrando repetidamente por partes.
- (b) Demonstre essa relação transformando-a na Equação (8.70).

**8.5.2** Mostre que

(a)  $\frac{d^m}{dx^m} [x^{-a} \gamma(a, x)] = (-1)^m x^{-a-m} \gamma(a+m, x),$

(b)  $\frac{d^m}{dx^m} [e^x \gamma(a, x)] = e^x \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-m)} \gamma(a-m, x).$

**8.5.3** Mostre que  $\gamma(a, x)$  e  $\Gamma(a, x)$  satisfazem as relações de recorrência

- (a)  $\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x},$
- (b)  $\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x}.$

**8.5.4** O potencial produzido por um elétron de hidrogênio 1S (Exercício 12.8.6) é dado por

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left\{ \frac{1}{2r} \gamma(3, 2r) + \Gamma(2, 2r) \right\}.$$

(a) Para  $r \ll 1$ , mostre que

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left\{ 1 - \frac{2}{3} r^2 + \dots \right\}.$$

(b) Para  $r \gg 1$ , mostre que

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Aqui,  $r$  é expresso em unidades de  $a_0$ , o raio de Bohr.

*Nota:* Para cálculo em valores intermediários de  $r$ , as Equações (8.69) são convenientes.

**8.5.5** Constatamos que o potencial de um elétron de hidrogênio 2P é (Exercício 12.8.7)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{24a_0} \left\{ \frac{1}{r} \gamma(5, r) + \Gamma(4, r) \right\} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{120a_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \gamma(7, r) + r^2 \Gamma(2, r) \right\} P_2(\cos \theta).$$

Aqui,  $r$  é expresso em unidades de  $a_0$ , o raio de Bohr.  $P_2(\cos \theta)$  é um polinômio de Legendre (Seção 12.1).

(a) Para  $r \ll 1$ , mostre que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a_0} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{120} r^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right\}.$$

(b) Para  $r \gg 1$ , mostre que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a_0 r} \left\{ 1 - \frac{6}{r^2} P_2(\cos \theta) + \dots \right\}.$$

**8.5.6** Prove que a integral exponencial tem a expansão

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!},$$

em que  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni.

**8.5.7** Mostre que  $E_1(z)$  pode ser escrita como

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} dt.$$

Mostre também que devemos impor a condição  $|\arg z| \leq \pi/2$ .

**8.5.8** A função

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt.$$

está relacionada à integral exponencial (Equação (8.71)) por uma simples troca de variável. Mostre que  $E_n(x)$  satisfaz a relação de recorrência

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n} e^{-x} - \frac{x}{n} E_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**8.5.9** Com  $E_n(x)$  como definida no Exercício 8.5.8, mostre que  $E_n(0) = 1/(n-1)$ ,  $n > 1$ .

**8.5.10** Desenvolva as seguintes expansões de séries de potências:

(a) 
$$\text{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

(b) 
$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}$$

**8.5.11** Uma análise de uma antena linear alimentada no ponto central leva à expressão

$$\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt.$$

Mostre que essa expressão é igual a  $\gamma + \ln x - \text{Ci}(x)$ .

**8.5.12** Usando a relação

$$\Gamma(a) = \gamma(a, x) + \Gamma(a, x),$$

mostre que, se  $\gamma(a, x)$  satisfaz as relações do Exercício 8.5.2, então  $\Gamma(a, x)$  deve satisfazer as mesmas relações.

**8.5.13** (a) Escreva uma sub-rotina para calcular as funções gama incompletas  $\gamma(n, x)$  e  $\Gamma(n, x)$  para  $n$  inteiro positivo. Faça uma verificação aleatória de  $\Gamma(n, x)$  por quadraturas de Gauss-Laguerre. (b) Tabule  $\gamma(n, x)$  e  $\Gamma(n, x)$  para  $x = 0, 0(0, 1)1, 0$  e  $n = 1, 2, 3$ .

**8.5.14** Calcule o potencial produzido por um elétron de hidrogênio 1S (Exercício 8.5.4) (Figura 8.10). Tabule  $V(r)/(q/4\pi\epsilon_0 a_0)$  para  $x = 0, 0(0, 1)4, 0$ . Verifique seus cálculos para  $r \ll 1$  e para  $r \gg 1$  pelo cálculo das formas limitadoras dadas no Exercício 8.5.4.

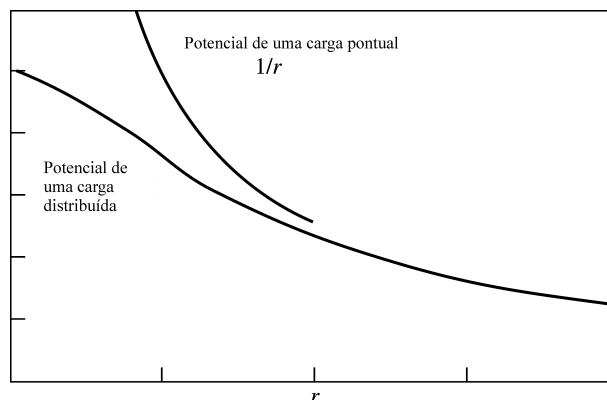


Figura 8.10: Potencial de carga distribuída produzido por um elétron de hidrogênio 1S, Exercício 8.5.14.



**8.5.15** Usando as Equações (5.182) e (8.75), calcule a integral exponencial  $E_1(x)$  para

(a)  $x = 0, 2(0, 2)1, 0$ ,      (b)  $x = 6, 0(2, 0)10, 0$ .

Programe seu próprio cálculo mas verifique cada valor usando uma sub-rotina de biblioteca, caso esteja disponível. Além disso, verifique seus cálculos em cada ponto por uma quadratura de Gauss-Laguerre.

Você constatará que a série de potências converge rapidamente e dá alta precisão para  $x$  pequeno. A série assintótica, para  $x = 10$ , dá uma precisão relativamente ruim.

**Valores de verificação.**  $E_1(1, 0) = 0, 219384$   
 $E_1(10, 0) = 4, 15697 \times 10^{-6}$ .

**8.5.16** As duas expressões para  $E_1(x)$ , 1) Equação ((5.182), uma série assintótica e 2) Equação (8.75), uma série convergente de potências, fornecem um meio para calcular a constante  $\gamma$  de Euler-Mascheroni com alta precisão. Usando precisão dupla, calcule  $\gamma$  pela Equação (8.75), com  $E_1(x)$  avaliada pela equação (5.182).

*Sugestão:* Como uma opção conveniente, considere  $x$  na faixa de 10 a 20. (O  $x$  escolhido determinará um limite para a precisão de seu resultado.) Para minimizar erros na série alternante da Equação (8.75), acumule os termos positivos e negativos separadamente.

Resposta: Para  $x = 10$  e “precisão dupla,”  $\gamma = 0, 57721566$ .

### Leituras Adicionais

- Abramowitz, M., e I. A. Stegun, (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (AMS-55). Washington, DC: National Bureau of Standards (1972), reimpresso, Dover (1974). Contém uma profusão de informações sobre funções gama, funções gama incompletas, integrais exponenciais, funções de erro e funções relacionadas, Capítulos 4 a 6.
- Artin, E., *The Gamma Function* (tradução de M. Butler). Nova York: Holt, Rinehart e Winston (1964). Demonstra que, se uma função  $f(x)$  for suave (log convexa) e igual a  $(n - 1)!$  quando  $x = n =$  inteiro, ela é a função gama.
- Davis, H. T., *Tables of the Higher Mathematical Functions*. Bloomington, IN: Principia Press (1933). O volume I contém informação extensiva sobre a função gama e as funções poligama.
- Gradshteyn, I. S., e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Nova York: Academic Press (1980).
- Luke, Y. L., *The Special Functions and Their Approximations*, vol. 1. Nova York: Academic Press (1969).
- Luke, Y. L., *Mathematical Functions and Their Approximations*. Nova York: Academic Press (1975). É um suplemento atualizado de *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (AMS-55). O Capítulo 1 trata da função gama. O Capítulo 4 trata da função gama incompleta e de uma grande quantidade de funções relacionadas.

## 9

# Equações Diferenciais

## 9.1 Equações Diferenciais Parciais

### Introdução

Em Física, saber qual é a força em uma equação de movimento usualmente leva a uma equação diferencial. Por isso, quase todas as numerosas partes avançadas da Física Teórica são formuladas em termos de equações diferenciais. Às vezes elas são equações diferenciais ordinárias de uma só variável (abreviadas para **EDOs**). Na maioria das vezes são equações diferenciais parciais (**EDPs**) de duas ou mais variáveis.

Vamos lembrar que, no cálculo, a operação de considerar uma derivada ordinária ou parcial é uma **operação linear** ( $\mathcal{L}$ ),<sup>1</sup>

$$\frac{d(a\varphi(x) + b\psi(x))}{dx} = a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\psi}{dx},$$

para EDOs que envolvem derivadas de uma única variável  $x$  e nenhuma potência quadrática,  $(d\psi/dx)^2$ , ou de ordens mais altas. De modo semelhante, para derivações parciais,

$$\frac{\partial(a\varphi(x, y) + b\psi(x, y))}{\partial x} = a\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} + b\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}.$$

Em geral,

$$\mathcal{L}(a\varphi + b\psi) = a\mathcal{L}(\varphi) + b\mathcal{L}(\psi).$$

Assim, EDOs e EDPs aparecem como equações de operador linear,

$$\mathcal{L}\psi = F, \tag{9.1}$$

em que  $F$  é uma função (fonte) conhecida de uma variável (para EDOs) ou de mais variáveis (para EDPs),  $\mathcal{L}$  é uma combinação linear de derivadas e  $\psi$  é a função desconhecida ou solução. Qualquer combinação linear de soluções é novamente uma solução se  $F = 0$ ; este é o **princípio de superposição** para EDPs homogêneas.

Uma vez que a dinâmica de muitos sistemas físicos envolve apenas duas derivadas (por exemplo, aceleração na Mecânica Clássica e o operador de energia cinética,  $\sim \nabla^2$ , na Mecânica Quântica), equações diferenciais de segunda ordem ocorrem com muita frequência na Física. (As equações de Maxwell e Dirac são de primeira ordem, mas envolvem duas funções desconhecidas. A eliminação de uma dessas funções resulta em uma equação diferencial de segunda ordem para a outra (compare com a Seção 1.9.)

### Exemplos de EDPs

Entre as EDPs encontradas com maior frequência estão as seguintes:

1. Equação de Laplace,  $\nabla^2 \psi = 0$ .

Essa equação muito comum e muito importante ocorre em estudos de

- (a) fenômenos eletromagnéticos, incluindo eletrostática, dielétricos, correntes estáveis e magnetostática,
- (b) hidrodinâmica (escoamento irrotacional de fluido perfeito e ondas superficiais),
- (c) fluxo de calor,
- (d) gravitação.

<sup>1</sup>Estamos especialmente interessados em operadores lineares porque na Mecânica Quântica as quantidades físicas são representadas por operadores lineares em um espaço de Hilbert, complexo, de número infinito de dimensões.



2. Equação de Poisson,  $\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0$ .

Em contraste com a equação homogênea de Laplace, a equação de Poisson é não-homogênea com um termo de fonte  $-\rho/\varepsilon_0$ .

3. As equações de onda (Helmholtz) e as equações de difusão independentes de tempo,  $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$ .

Essas equações aparecem em fenômenos tão diversos como

- (a) ondas elásticas em sólidos, incluindo cordas, barras e membranas vibratórias,
- (b) som ou acústica,
- (c) ondas eletromagnéticas,
- (d) reatores nucleares.

4. A equação de difusão dependente de tempo

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

e as formas quadridimensionais correspondentes que envolvem o d’alembertiano, um análogo quadridimensional do laplaciano no espaço de Minkowski,

$$\partial^\mu\partial_\mu = \partial^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

5. A equação de onda dependente de tempo,  $\partial^2\psi = 0$ .

6. A equação de potencial escalar,  $\partial^2\psi = \rho/\varepsilon_0$ .

Assim como a equação de Poisson, essa equação é não-homogênea com um termo de fonte  $\rho/\varepsilon_0$ .

7. A equação de Klein-Gordon,  $\partial^2\psi = -\mu^2\psi$ , e as equações vetoriais correspondentes, nas quais a função escalar  $\psi$  é substituída por uma função vetorial. Outras formas, mais complicadas, são comuns.

8. A equação de onda de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = E\psi,$$

para o caso independente de tempo.

9. As equações para ondas elásticas e fluidos viscosos e a equação da telegrafia.

10. Equações diferenciais parciais acopladas de Maxwell para campos elétricos e magnéticos e as de Dirac para funções de onda relativistas de elétron. Para equações de Maxwell, veja a Introdução e também a Seção 1.9.

Algumas técnicas gerais para resolver EDPs de segunda ordem são discutidas nesta seção.

1. Separação de variáveis quando a EDP é subdividida em EDOs que são relacionadas por constantes comuns que aparecem como autovalores de operadores lineares,  $\mathcal{L}\psi = l\psi$ , usualmente de uma só variável. Esse método guarda uma relação muito próxima com **simetrias da EDP e um grupo de transformações** (veja a Seção 4.2). A equação de Helmholtz, exemplo 3 da lista, tem essa forma, em que o autovalor  $k^2$  pode surgir pela separação do tempo  $t$  das variáveis espaciais. Da mesma forma, no exemplo 8 a energia  $E$  é o autovalor que surge pela separação de  $t$  de  $\mathbf{r}$  na equação de Schrödinger. Examinamos isso no Capítulo 10 com mais detalhes. A Seção 9.2 serve como introdução. EDOs podem ser atacadas pelo método de série de potências de Frobenius na Seção 9.5. O método nem sempre funciona, mas, quando funciona, é o método mais simples.
2. Conversão de uma EDP em uma equação integral usando **funções de Green** aplica-se a EDPs **não-homogêneas**, tais como os exemplos 2 e 6 dados acima. Uma introdução à técnica da função de Green é dada na Seção 9.7.
3. Outros métodos analíticos, tais como a utilização de transformadas integrais, são desenvolvidos e aplicados no Capítulo 15.

Ocasionalmente encontramos equações de ordens mais altas. Tanto na teoria do movimento lento de um fluido viscoso quanto na teoria de um corpo elástico, encontramos a equação

$$(\nabla^2)^2\psi = 0.$$

Felizmente, essas equações de ordens mais altas são relativamente raras e não serão discutidas aqui.

Embora nem tão freqüentes e talvez nem tão importantes como as EDOs de segunda ordem, EDOs de primeira ordem aparecem na Física Teórica e às vezes são etapas intermediárias para EDOs de segunda ordem. As soluções de alguns tipos mais importantes de EDOs de primeira ordem são desenvolvidas na Seção 9.2. EDPs de primeira ordem sempre podem ser reduzidas a EDOs. Esse processo é direto, porém longo, e envolve uma procura de características que são apresentadas resumidamente no texto a seguir; para mais detalhes, referimo-nos à literatura.

### Classes de EDPs e Características

EDPs de segunda ordem formam três classes: (i) EDPs elípticas envolvem  $\nabla^2$  ou  $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2$  (ii) EDPs parabólicas,  $a\partial/\partial t + \nabla^2$ ; (iii) EDPs hiperbólicas,  $c^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$ . Esses operadores canônicos aparecem por uma troca de variáveis  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  em um operador linear (para duas variáveis apenas, por simplicidade)

$$\mathcal{L} = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f, \quad (9.2)$$

que pode ser reduzido para as formas canônicas (i), (ii), (iii) conforme o discriminante  $D = ac - b^2 > 0, = 0$ , ou  $< 0$ . Se  $\xi(x, y)$  for determinada pela EDP de primeira ordem, mas não-linear,

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad (9.3)$$

então o coeficiente de  $\partial^2/\partial\xi^2$  em  $\mathcal{L}$  (isto é, Equação (9.3)) é zero. Se  $\eta$  for uma solução independente da mesma Equação (9.3), então o coeficiente de  $\partial^2/\partial\eta^2$  também é zero. O operador remanescente,  $\partial^2/\partial\xi\partial\eta$ , em  $\mathcal{L}$  é característico do caso hiperbólico (iii) com  $D < 0$  ( $a = 0 = c$  leva a  $D = -b^2 < 0$ ), em que a forma quadrática de  $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$  é fatorada e, portanto, a Equação (9.3) tem duas soluções independentes  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ . No caso elíptico (i) com  $D > 0$ , as duas soluções  $\xi, \eta$  são conjugadas complexas que, quando substituídas na Equação (9.2), removem a derivada mista de segunda ordem em vez dos outros termos de segunda ordem, resultando na forma canônica (i). No caso parabólico (ii) com  $D = 0$ , somente  $\partial^2/\partial\xi^2$  permanece em  $\mathcal{L}$ , enquanto os coeficientes das outras derivadas de segunda ordem desaparecem.

Se os coeficientes  $a, b, c$  em  $\mathcal{L}$  são funções das coordenadas, então essa classificação é apenas local; isto é, seu tipo pode mudar quando as coordenadas variam.

Vamos ilustrar a física subjacente ao **caso hiperbólico** examinando a equação de onda, Equação (9.2) (em 1 + 1 dimensões, por simplicidade)

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi = 0.$$

Visto que a Equação (9.3) agora se torna

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} - c\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} + c\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = 0$$

e é fatorada, determinamos a solução de  $\partial\xi/\partial t - c\partial\xi/\partial x = 0$ . Esta é uma função arbitrária  $\xi = F(x + ct)$ , e  $\xi = G(x - ct)$  resolve  $\partial\xi/\partial t + c\partial\xi/\partial x = 0$ , o que é imediatamente verificado. Por superposição linear, uma solução geral da equação de onda é  $\psi = F(x + ct) + G(x - ct)$ . Para funções periódicas  $F, G$  reconhecemos as retas  $x + ct$  e  $x - ct$  como as fases de ondas planas ou frentes de onda, em que nem todas as derivadas de segunda ordem de  $\psi$  na equação de onda são bem definidas. Os raios da óptica geométrica são normais a frentes de onda. Assim, as retas que são soluções da Equação (9.3) e recebem o nome de **características** ou às vezes **bicaracterísticas** (para EDPs de segunda ordem) correspondem, na literatura matemática, a frentes de onda da solução da óptica geométrica da equação de onda.

Para o **caso elíptico**, vamos considerar a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

para um potencial  $\psi$  de duas variáveis. Aqui, a equação característica,

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + i\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - i\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) = 0,$$

tem soluções conjugadas complexas:  $\xi = F(x + iy)$  para  $\partial\xi/\partial x + i(\partial\xi/\partial y) = 0$  e  $\xi = G(x - iy)$  para  $\partial\xi/\partial x - i(\partial\xi/\partial y) = 0$ . Portanto, uma solução geral da equação de Laplace é  $\psi = F(x + iy) + G(x - iy)$ , bem como as partes real e imaginária de  $\psi$ , que são denominadas funções **harmônicas**, enquanto as soluções polinomiais são denominadas **polinômios harmônicos**.



Em Mecânica Quântica, a forma de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB),  $\psi = \exp(-iS/\hbar)$ , para a solução da equação de Schrödinger, uma EDP parabólica complexa,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

leva à equação de Hamilton-Jacobi da Mecânica Clássica,

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (9.4)$$

no limite de  $\hbar \rightarrow 0$ . A clássica ação  $S$  obedece à equação de Hamilton-Jacobi, que é a análoga da Equação (9.3) da equação de Schrödinger. Substituindo  $\nabla\psi = -i\psi\nabla S/\hbar$ ,  $\partial\psi/\partial t = -i\psi(\partial S/\partial t)/\hbar$  na equação de Schrödinger, descartando  $\psi$ , o fator global que não desaparece, e tomando o limite da equação resultante, à medida que  $\hbar \rightarrow 0$ , obtemos, de fato, a Equação (9.4).

Achar soluções de EDPs resolvendo para as características é uma das diversas técnicas gerais. Se o leitor quiser mais exemplos, consulte H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Nova York: Dover (1944); K. E. Gustafson, *Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*, 2<sup>a</sup> ed., Nova York: Wiley (1987), nova tiragem, Dover (1998).

Para derivar e apreciar mais o método matemático por trás dessas soluções de EDPs hiperbólicas, parabólicas e elípticas, vamos reconsiderar a EDP (9.2) com coeficientes constantes e, a princípio,  $d = e = f = 0$  por simplicidade. De acordo com a forma das soluções de frente de onda, buscamos uma solução  $\psi = F(\xi)$  da Equação (9.2) com uma função  $\xi = \xi(t, x)$  usando as variáveis  $t, x$  em vez de  $x, y$ . Então, as derivadas parciais se tornam

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{dF}{d\xi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{dF}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \frac{dF}{d\xi} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \frac{d^2F}{d\xi^2},$$

e

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t} \frac{dF}{d\xi} + \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \frac{dF}{d\xi} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 \frac{d^2F}{d\xi^2},$$

usando a regra da cadeia da diferenciação. Quando  $\xi$  depende de  $x$  e  $t$  **linearmente**, essas derivadas parciais de  $\psi$  resultam em um único termo e, como consequência, resolvem nossa EDP (9.2). Por  $\xi = \alpha x + \beta t$  linear, obtemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = \alpha\beta \frac{d^2F}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{d^2F}{d\xi^2},$$

e nossa EDP (9.2) se torna equivalente à análoga da Equação (9.3),

$$(\alpha^2 a + 2\alpha\beta b + \beta^2 c) \frac{d^2F}{d\xi^2} = 0. \quad (9.5)$$

Uma solução de  $\frac{d^2F}{d\xi^2} = 0$  só leva à trivial  $\psi = k_1 x + k_2 t + k_3$  com  $k_i$  constantes que é linear nas coordenadas e para a qual todas as derivadas de segunda ordem desaparecem. Por outro lado, por  $\alpha^2 a + 2\alpha\beta b + \beta^2 c = 0$ , obtemos as razões

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c} [-b \pm (b^2 - ac)^{1/2}] \equiv r_{1,2} \quad (9.6)$$

como soluções da Equação (9.5) com  $\frac{d^2F}{d\xi^2} \neq 0$  em geral. As retas  $\xi_1 = x + r_1 t$  e  $\xi_2 = x + r_2 t$  resolverão a EDP (9.2), com  $\psi(x, t) = F(\xi_1) + G(\xi_2)$  correspondendo à generalização de nossos exemplos precedentes de EDPs hiperbólica e elíptica.

Para o caso parabólico, em que  $b^2 = ac$ , há somente uma razão da Equação (9.6),  $\beta/\alpha = r = -b/c$ , e uma (solução,  $\psi(x, t) = F(x - bt/c)$ ). Para achar a segunda solução geral de nossa EDP (9.2), fazemos (solução experimental) o Ansatz  $\psi(x, t) = \psi_0(x, t) \cdot G(x - bt/c)$ . Substituindo essa expressão na Equação (9.2), encontramos

$$a \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial t} + c \frac{\partial^2\psi_0}{\partial t^2} = 0,$$

para  $\psi_0$ , uma vez que substituir  $F \rightarrow G$ ,  $G$  resolve a Equação (9.5) com  $d^2G/d\xi^2 \neq 0$  em geral. A solução  $\psi_0$  pode ser qualquer solução de nossa EDP (9.2), incluindo as triviais, como  $\psi_0 = x$  e  $\psi_0 = t$ . Assim, obtemos a **solução parabólica geral**,

$$\psi(x, t) = F\left(x - \frac{b}{c}t\right) + \psi_0(x, t)G\left(x - \frac{b}{c}t\right),$$

com  $\psi_0 = x$  ou  $\psi_0 = t$ , etc.

Com o mesmo Ansatz achamos soluções de nossa EDP (9.2) com um termo de fonte, por exemplo,  $f \neq 0$ , mas, ainda  $d = e = 0$  e  $a, b, c$  constantes.

Em seguida determinamos as características, isto é, curvas as derivadas de segunda ordem das solução  $\psi$  não são bem definidas. Essas curvas são as frentes de onda ao longo das quais as soluções de nossa EDP hiperbólica (9.2) se propagam. Resolvemos nossa EDP com um termo de fonte  $f \neq 0$  e condições de fronteira de Cauchy (veja a Tabela 9.1) adequadas para EDPs hiperbólicas, em que  $\psi$  e sua derivada parcial normal  $\partial\psi/\partial n$  são especificadas sobre uma curva aberta.

$$\mathcal{C} : x = x(s), \quad t = t(s),$$

sendo o parâmetro  $s$  o comprimento sobre  $\mathcal{C}$ . Então,  $d\mathbf{r} = (dx, dt)$  é tangente e  $\hat{\mathbf{n}} ds = (dt, -dx)$  é normal à curva  $\mathcal{C}$ , e as derivadas de primeira ordem tangencial e normal são dadas pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \nabla\psi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{dt}{ds}, \\ \frac{d\psi}{dn} &= \nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dt}{ds} - \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

Por essas duas equações lineares,  $\partial\psi/\partial t$  e  $\partial\psi/\partial x$  podem ser determinadas sobre  $\mathcal{C}$ , contanto que

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} \\ \frac{dt}{ds} & -\frac{dx}{ds} \end{vmatrix} = -\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \neq 0.$$

Para as derivadas de segunda ordem usamos novamente a regra da cadeia

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{dt}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}, \tag{9.7a}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} + \frac{dt}{ds} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{9.7b}$$

Por nossa EDP (9.2) e Equações (9.7a,b), que são lineares nas derivadas de segunda ordem, elas não podem ser calculadas quando o determinante desaparece, isto é,

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} \end{vmatrix} = a\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - 2b\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds} + c\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0. \tag{9.8}$$

Pela Equação (9.8), que define as características, constatamos que a razão tangente  $dx/dt$  obedece a

$$c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2b\frac{dx}{dt} + a = 0,$$

então,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c} [b \pm (b^2 - ac)^{1/2}]. \tag{9.9}$$

Para os exemplos anteriores de equação de onda hiperbólica (e de potencial elíptico),  $b = 0$  e  $a, c$  são constantes, portanto as soluções  $\xi_i = x + tr_i$  da Equação (9.6) coincidem com as características da Equação (9.9).





### EDPs Não-Lineares

EDOs e EDPs não-lineares são uma área importante e de rápido crescimento. Antes já encontramos a mais simples das equações lineares de onda,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

como a EDP de primeira ordem das frentes de onda da equação de onda. A mais simples das equações de onda não-lineares,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \tag{9.10}$$

resulta se a velocidade local de propagação,  $c$ , não é constante, mas depende da onda  $\psi$ . Quando uma equação não-linear tem uma solução da forma  $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , em que  $\omega(k)$  varia com  $k$ , de modo que  $\omega''(k) \neq 0$ , então ela é denominada **dispersiva**. Talvez a mais conhecida equação dispersiva não-linear seja a equação de **Korteweg-deVries**

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0, \tag{9.11}$$

que modela a propagação sem perda de ondas de águas rasas e outros fenômenos. Ela é muito conhecida por suas soluções **sóliton**. Um sóliton é uma onda em movimento que tem a propriedade de persistir durante uma interação com um outro sóliton: após passarem uma pela outra, elas emergem com a mesma forma e com a mesma velocidade e adquirem não mais do que uma mudança de fase. Seja  $\psi(\xi = x - ct)$  essa onda em movimento. Quando substituída na Equação (9.11), o resultado é a EDO não-linear

$$(\psi - c) \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d^3 \psi}{d\xi^3} = 0, \tag{9.12}$$

que pode ser integrada para dar

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = c\psi - \frac{\psi^2}{2}. \tag{9.13}$$

Não há nenhuma constante de integração aditiva na Equação (9.13) para garantir que  $d^2 \psi / d\xi^2 \rightarrow 0$  com  $\psi \rightarrow 0$  para  $\xi$  grande, portanto  $\psi$  está localizada na característica  $\xi = 0$  ou  $x = ct$ . Multiplicando a Equação (9.13) por  $d\psi/d\xi$  e integrando novamente, temos como resultado

$$\left( \frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 = c\psi^2 - \frac{\psi^3}{3}, \tag{9.14}$$

em que  $d\psi/d\xi \rightarrow 0$  para  $\xi$  grande. Considerando a raiz da Equação (9.14) e integrando mais uma vez, temos como resultado a solução sóliton

$$\psi(x - ct) = \frac{3c}{\cosh^2(\sqrt{c} \frac{x-ct}{2})}. \tag{9.15}$$

Alguns tópicos não-lineares, por exemplo, a equação logística e a instalação do caos, são novamente abordadas no Capítulo 18. Se o leitor quiser mais detalhes e literatura, consulte J. Guckenheimer, P. Holmes e F. John, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, edição revista, Nova York: Springer-Verlag (1990).

### Condições de Contorno

Em geral, quando conhecemos um sistema físico em algum ponto do tempo e a lei que governa o processo físico, então conseguimos prever o desenvolvimento subsequente. Tais valores iniciais são as condições de contorno mais comuns associadas com EDOs e EDPs. Achar soluções que se ajustam a pontos, curvas ou superfícies dadas corresponde a problemas de valor de contorno. Habitualmente as soluções devem satisfazer certas condições de contorno impostas (por exemplo, assintóticas). Essas condições podem assumir três formas:

1. **Condições de contorno de Cauchy.** O valor de uma função e derivada normal especificado sobre o contorno. Em eletrostática isso significaria  $\varphi$ , o potencial, e  $E_n$ , a componente normal do campo elétrico.
2. **Condições de contorno de Dirichlet.** O valor de uma função especificado sobre o contorno.
3. **Condições de contorno de Neumann.** A derivada normal (gradiente normal) de uma função especificada sobre o contorno. No caso da eletrostática, isso seria  $E_n$  e, portanto,  $\sigma$ , a densidade superficial de carga.

Um resumo da relação entre esses três tipos de condições de contorno e os três tipos de equações parciais diferenciais bidimensionais é dado na Tabela 9.1. Se o leitor se interessar por discussões mais extensas dessas equações diferenciais parciais, pode consultar Morse e Feshbach, Capítulo 6 (veja Leituras Adicionais).

Partes da Tabela 9.1 são simplesmente uma questão de manter consistência interna ou de bom senso. Por exemplo, para a equação de Poisson com uma superfície fechada, as condições de Dirichlet levam a uma solução única, estável. As condições de Neumann, independentes das condições de Dirichlet, levam, da mesma forma, a uma solução única, estável, independente da solução de Dirichlet. Por conseguinte, as condições de contorno de Cauchy (isto é, Dirichlet mais Neumann) poderiam levar a uma inconsistência.

**Tabela 9.1**

Condições de contorno	Tipo de equação diferencial parcial		
	Elíptica	Hiperbólica	Parabólica
Condições	Laplace, Poisson em $(x, y)$	Equação de onda em $(x, t)$	Equação de difusão em $(x, t)$
<b>Cauchy</b>			
Superfície aberta	Resultados não-físicos (instabilidade)	<b>Solução única, estável</b>	Muito restritiva
Superfície fechada	Muito restritiva	Muito restritiva	Muito restritiva
<b>Dirichlet</b>			
Superfície aberta	Insuficiente	Insuficiente	<b>Solução única, estável,</b> em uma só direção
Superfície fechada	<b>Solução única, estável</b>	Solução não-única	Muito restritiva
<b>Neumann</b>			
Superfície aberta	Insuficiente	Insuficiente	<b>Solução única, estável</b> em uma só direção
Superfície fechada	<b>Solução única, estável</b>	Solução não-única	Muito restritiva

O termo **condições de contorno** inclui como um caso especial o conceito de **condições iniciais**. Por exemplo, especificar a posição inicial  $x_0$  e a velocidade inicial  $v_0$  em algum problema de dinâmica corresponderia às condições de contorno de Cauchy. A única diferença na utilização presente de condições de contorno nesses problemas unidimensionais é que vamos aplicar as condições em **ambas** as extremidades do intervalo permitido da variável.

## 9.2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

A Física envolve algumas equações diferenciais de primeira ordem. Para não deixar nada de fora (e fazer uma revisão), é bom abordar esse assunto brevemente. Aqui, consideramos equações diferenciais da forma geral

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{9.16}$$

A Equação (9.16) é claramente uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Ela é de **primeira ordem** porque contém somente a derivada de primeira ordem e nenhuma derivada de ordem mais alta. É **ordinária** porque a única derivada,  $dy/dx$ , é uma derivada ordinária ou total. A Equação (9.16) pode ser ou não **linear**, embora vamos tratar explicitamente do caso linear mais adiante, Equação (9.25).

### Variáveis Separáveis

Freqüentemente a Equação (9.16) terá a forma especial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{P(x)}{Q(y)}. \tag{9.17}$$

Então ela pode ser reescrita como

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0.$$



Integrar de  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$  resulta em

$$\int_{x_0}^x P(x) dx + \int_{y_0}^y Q(y) dy = 0.$$

Uma vez que os limites inferiores,  $x_0$  e  $y_0$ , contribuem com constantes, podemos ignorar os limites inferiores de integração e simplesmente adicionar uma constante de integração. Note que essa técnica de separação de variáveis **não** requer que a equação diferencial seja linear.

### Exemplo 9.2.1 PÁRA-QUEDISTA

Queremos achar a velocidade de queda de um pára-quedista como uma função do tempo e estamos particularmente interessados na velocidade limitadora constante  $v_0$ , que aparece por causa do arraste, tomada como quadrática,  $-bv^2$ , e que se opõe à força de atração gravitacional da Terra,  $mg$ . Escolhemos um sistema de coordenadas no qual a direção positiva é para baixo, de modo que a força gravitacional seja positiva. Por simplicidade, admitimos que o pára-quedas se abre imediatamente, isto é, no tempo  $t = 0$ , em que  $v(t = 0) = 0$ , nossa condição inicial. A lei de Newton aplicada ao pára-quedista em queda dá

$$m\dot{v} = mg - bv^2,$$

em que  $m$  inclui a massa do pára-quedas.

A velocidade terminal,  $v_0$ , pode ser encontrada pela equação de movimento quando  $t \rightarrow \infty$ ; quando não há aceleração,  $\dot{v} = 0$ , portanto,

$$bv_0^2 = mg \quad \text{ou} \quad v_0 = \sqrt{\frac{mg}{b}}.$$

Separamos as variáveis  $t$  e  $v$ ,

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v^2} = dt,$$

e integramos, decompondo o denominador em frações parciais. As raízes do denominador estão em  $v = \pm v_0$ . Por conseguinte,

$$\left(g - \frac{b}{m}v^2\right)^{-1} = \frac{m}{2v_0b} \left(\frac{1}{v + v_0} - \frac{1}{v - v_0}\right).$$

Integrando ambos os termos, temos como resultado

$$\int^v \frac{dV}{g - \frac{b}{m}V^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gb}} \ln \frac{v_0 + v}{v_0 - v} = t.$$

Resolvendo para a velocidade, obtemos

$$v = \frac{e^{2t/T} - 1}{e^{2t/T} + 1} v_0 = v_0 \frac{\sinh \frac{t}{T}}{\cosh \frac{t}{T}} = v_0 \tanh \frac{t}{T},$$

em que  $T = \sqrt{\frac{m}{gb}}$  é a constante de tempo que governa a aproximação assintótica da velocidade à velocidade-limite,  $v_0$ .

Utilizando valores numéricos,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e considerando  $b = 700 \text{ kg/m}$ ,  $m = 70 \text{ kg}$ , temos  $v_0 = \sqrt{9,8/10} \sim 1 \text{ m/s} \sim 3,6 \text{ km/h} \sim 2,23 \text{ mi/h}$ , a velocidade de um pedestre na aterrissagem, e  $T = \sqrt{\frac{m}{bg}} = 1/\sqrt{10 \cdot 9,8} \sim 0,1 \text{ s}$ . Assim, a velocidade constante  $v_0$  é alcançada em um segundo. Por fim, como é **sempre importante verificar a solução**, verificamos que nossa solução satisfaz

$$\dot{v} = \frac{\cosh t/T v_0}{\cosh t/T T} - \frac{\text{sen } h^2 t/T v_0}{\cosh^2 t/T T} = \frac{v_0}{T} - \frac{v^2}{Tv_0} = g - \frac{b}{m}v^2,$$

isto é, a equação do movimento de Newton. O caso mais realista, quando o pára-quedista está em queda livre com uma velocidade inicial  $v_i = v(0) > 0$  antes de o pára-quedas se abrir, é abordado no Exercício 9.2.18. ■

### Equações Diferenciais Exatas

Reescrevemos a Equação (9.16) como

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (9.18)$$

Diz-se que essa equação é **exata** se pudermos igualar o lado esquerdo dela a uma diferencial  $d\varphi$ ,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy. \quad (9.19)$$

Uma vez que a Equação (9.18) tem um zero na direita, procuramos uma função desconhecida  $\varphi(x, y) = \text{constante}$  e  $d\varphi = 0$ .

Temos (se tal função  $\varphi(x, y)$  existir)

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy \quad (9.20a)$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x, y). \quad (9.20b)$$

A condição necessária e suficiente para nossa equação ser exata é que as derivadas parciais de segunda ordem mistas de  $\varphi(x, y)$  (admitidas como contínuas) sejam independentes da ordem de diferenciação:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \quad (9.21)$$

Observe a semelhança com as Equações (1.133a) da Seção 1.13, “Teoria do Potencial”. Se a Equação (9.18) corresponde a um rotacional (igual a zero), então deve existir um potencial  $\varphi(x, y)$ .

Se  $\varphi(x, y)$  existir, então, pelas Equações (9.18) e (9.20a), nossa solução é

$$\varphi(x, y) = C.$$

Podemos construir  $\varphi(x, y)$  a partir de suas derivadas parciais exatamente como construímos um potencial vetorial magnético na Seção 1.13 a partir de seu rotacional. Veja os Exercícios 9.2.7 e 9.2.8.

Também pode perfeitamente acontecer que a Equação (9.18) não seja exata e que a Equação (9.21) não seja satisfeita. Contudo, sempre existe pelo menos um, e talvez uma infinidade de fatores de integração  $\alpha(x, y)$ , tal (ou tais) que

$$\alpha(x, y)P(x, y) dx + \alpha(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

seja exata. Infelizmente, um fator de integração nem sempre é óbvio ou fácil de achar. Diferente do caso da equação linear de primeira ordem que vamos considerar a seguir, não há nenhum modo sistemático para desenvolver um fator de integração para a Equação (9.18).

Uma equação diferencial na qual as variáveis foram separadas é automaticamente exata. Uma equação diferencial exata não é necessariamente separável.

O método da frente de onda da Seção 9.1 também funciona para uma EDP de primeira ordem:

$$a(x, y) \frac{\partial\psi}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \quad (9.22a)$$

Procuramos uma solução da forma  $\psi = F(\xi)$ , em que  $\xi(x, y) = \text{constante}$  para  $x$  e  $y$  define a frente de onda. Por conseguinte,

$$d\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x} dx + \frac{\partial\xi}{\partial y} dy = 0, \quad (9.22b)$$

enquanto a EDP resulta em

$$\left( a \frac{\partial\xi}{\partial x} + b \frac{\partial\xi}{\partial y} \right) \frac{dF}{d\xi} = 0, \quad (9.23a)$$

com  $dF/d\xi \neq 0$  em geral. Comparando as Equações (9.22b) e (9.23a), temos

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}, \quad (9.23b)$$



que reduz a EDP a uma ODE de primeira ordem para a tangente  $dy/dx$  da função de frente de onda  $\xi(x, y)$ .

Quando há um termo de fonte adicional na EDP,

$$a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial y} + c\psi = 0, \quad (9.23c)$$

então usamos o Ansatz  $\psi = \psi_0(x, y)F(\xi)$ , que converte nossa EDP em

$$F \left( a \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + b \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + c\psi_0 \right) + \psi_0 \frac{dF}{d\xi} \left( a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0. \quad (9.24)$$

Se pudermos imaginar uma solução  $\psi_0$  da Equação (9.23c), então a Equação (9.24) se reduz à nossa equação precedente, Equação (9.23a), da qual resulta a ODE da Equação (9.23b).

### EDOs Lineares de Primeira Ordem

Se  $f(x, y)$  na Equação (9.16) tiver a forma  $-p(x)y + q(x)$ , então a Equação (9.16) se torna

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad (9.25)$$

A Equação (9.25) é a EDO **linear** de primeira ordem mais geral. Se  $q(x) = 0$ , a Equação (9.25) é homogênea (em  $y$ ). Um  $q(x)$  não-zero pode representar um **termo de fonte** ou um **termo dominante**. A Equação (9.25) é **linear**; cada termo é linear em  $y$  ou  $dy/dx$ . Não há nenhuma potência mais alta, isto é,  $y^2$ , e nenhum produto  $y(dy/dx)$ . Note que a linearidade se refere ao  $y$  e  $dy/dx$ ;  $p(x)$  e  $q(x)$  não precisam ser lineares em  $x$ . A Equação (9.25), a mais importante dessas EDOs de primeira ordem para a Física, pode ser resolvida exatamente.

Vamos procurar um **fator de integração**  $\alpha(x)$ , de modo que

$$\alpha(x) \frac{dy}{dx} + \alpha(x)p(x)y = \alpha(x)q(x) \quad (9.26)$$

possa ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} [\alpha(x)y] = \alpha(x)q(x). \quad (9.27)$$

A finalidade disso é transformar o lado esquerdo da Equação (9.25) em uma derivada, de modo que ela possa ser integrada — por inspeção. A propósito, ela também torna a Equação (9.25) exata. Expandindo a Equação (9.27), obtemos

$$\alpha(x) \frac{dy}{dx} + \frac{d\alpha}{dx} y = \alpha(x)q(x).$$

Uma comparação com a Equação (9.26) mostra que devemos impor que

$$\frac{d\alpha}{dx} = \alpha(x)p(x). \quad (9.28)$$

Eis aqui uma equação diferencial para  $\alpha(x)$ , com as variáveis  $\alpha$  e  $x$  **separáveis**. Separamos variáveis, integramos e obtemos

$$\alpha(x) = \exp \left[ \int^x p(x) dx \right] \quad (9.29)$$

como nosso fator de integração.

Com  $\alpha(x)$  conhecido, passamos a integrar a Equação (9.27). É claro que, desde o início, esse foi o propósito de introduzir  $\alpha$ . Temos

$$\int^x \frac{d}{dx} [\alpha(x)y(x)] dx = \int^x \alpha(x)q(x) dx.$$

Agora, integrando por inspeção, temos

$$\alpha(x)y(x) = \int^x \alpha(x)q(x) dx + C.$$

As constantes provenientes de um limite de integração inferior constante estão embutidas na constante  $C$ . Dividindo por  $\alpha(x)$ , obtemos

$$y(x) = [\alpha(x)]^{-1} \left\{ \int^x \alpha(x)q(x) dx + C \right\}.$$

Por fim, substituindo na Equação (9.29) a expressão de  $\alpha$ , temos como resultado

$$y(x) = \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \left\{ \int^x \exp\left[\int^s p(t) dt\right] q(s) ds + C \right\}. \quad (9.30)$$

Aqui as variáveis (mudas) de integração foram reescritas para torná-las não-ambíguas. A Equação (9.30) é a solução geral completa da equação diferencial linear de primeira ordem, Equação (9.25). A porção

$$y_1(x) = C \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \quad (9.31)$$

corresponde ao caso  $q(x) = 0$  e é uma solução geral da equação diferencial homogênea. O outro termo na Equação (9.30),

$$y_2(x) = \exp\left[-\int^x p(t) dt\right] \int^x \exp\left[\int^s p(t) dt\right] q(s) ds, \quad (9.32)$$

é uma **solução particular correspondente ao termo de fonte específico**  $q(x)$ .

Note que, se nossa equação diferencial linear de primeira ordem é homogênea ( $q = 0$ ), então ela é separável. Caso contrário, à parte casos especiais como  $p = \text{constante}$ ,  $q = \text{constante}$  e  $q(x) = ap(x)$ , a Equação (9.25) não é separável.

Vamos resumir essa solução da EDO não-homogênea em termos de um **método denominado variação da constante**, como segue. Na primeira etapa, resolvemos a EDO homogênea por separação de variáveis como antes, o que resulta em

$$\frac{y'}{y} = -p, \quad \ln y = -\int^x p(X) dX + \ln C, \quad y(x) = Ce^{-\int^x p(X) dX}.$$

Na segunda etapa, deixamos que a constante de integração se torne dependente de  $x$ , isto é,  $C \rightarrow C(x)$ . Essa é a “variação da constante” usada para resolver a EDO não-homogênea. Diferenciando  $y(x)$ , obtemos

$$y' = -pCe^{-\int p(x) dx} + C'(x)e^{-\int p(x) dx} = -py(x) + C'(x)e^{-\int p(x) dx}.$$

Comparando com a EDO não-homogênea, encontramos a EDO para  $C$ :

$$C'e^{-\int p(x) dx} = q, \quad \text{ou} \quad C(x) = \int^x e^{\int p(Y) dY} q(X) dX.$$

Substituindo esta  $C$  em  $y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$ , reproduzimos a Equação (9.32).

### Exemplo 9.2.2 CIRCUITO RL

Para um circuito resistivo-indutivo, a lei de Kirchhoff leva a

$$\boxed{L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t)}$$

para a corrente  $I(t)$ , em que  $L$  é a indutância e  $R$  é a resistência, ambas constantes.  $V(t)$  é a tensão de entrada dependente do tempo.

Pela Equação (9.29), nosso fator de integração  $\alpha(t)$  é

$$\alpha(t) = \exp \int^t \frac{R}{L} dt = e^{Rt/L}.$$

Então, pela Equação (9.30),

$$I(t) = e^{-Rt/L} \left[ \int^t e^{Rt/L} \frac{V(t)}{L} dt + C \right],$$

com a constante  $C$  a ser determinada por uma condição inicial (uma condição de contorno).

Para o caso especial  $V(t) = V_0$ , uma constante,

$$I(t) = e^{-Rt/L} \left[ \frac{V_0}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{Rt/L} + C \right] = \frac{V_0}{R} + Ce^{-Rt/L}.$$



Se a condição inicial for  $I(0) = 0$ , então  $C = -V_0/R$  e

$$I(t) = \frac{V_0}{R} [1 - e^{-Rt/L}].$$

Agora vamos provar o *teorema* que diz que **a solução da EDO não-homogênea é única até um múltiplo arbitrário da solução da EDO homogênea.**

Para mostrar isso, suponha que ambas,  $y_1, y_2$ , resolvem a EDO não-homogênea EDO, Equação (9.25); então

$$y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = 0$$

resulta da subtração das EDOs e diz que  $y_1 - y_2$  é uma solução da EDO homogênea. A solução da ODE homogênea sempre pode ser multiplicada por uma constante arbitrária.

Também provamos o *teorema* que diz que **uma EDO homogênea de primeira ordem tem somente uma solução linearmente independente.** Essa afirmação tem o seguinte sentido: se duas soluções forem **linearmente dependentes**, por definição elas satisfazem  $ay_1(x) + by_2(x) = 0$ , com constantes não-zero  $a, b$ , para todos os valores de  $x$ . Se a única solução dessa relação linear for  $a = 0 = b$ , então diz-se que nossas soluções  $y_1$  e  $y_2$  são **linearmente independentes.**

Para provar esse teorema, suponha que ambas,  $y_1, y_2$ , resolvem a EDO homogênea. Então,

$$\frac{y_1'}{y_1} = -p(x) = \frac{y_2'}{y_2} \quad \text{implica} \quad W(x) \equiv y_1' y_2 - y_1 y_2' \equiv 0. \tag{9.33}$$

O determinante funcional  $W$  é denominado **wronskiano do par**  $y_1, y_2$ . Agora, mostramos que  $W \equiv 0$  é a condição para que eles sejam linearmente dependentes. Admitindo dependência linear, isto é,

$$ay_1(x) + by_2(x) = 0$$

com constantes não-zero  $a, b$ , para todos os valores de  $x$ , diferenciamos essa relação linear para obter uma outra relação linear,

$$ay_1'(x) + by_2'(x) = 0.$$

A condição para que essas duas equações lineares homogêneas nas incógnitas  $a, b$  tenham uma solução não-trivial é que seu determinante seja zero, ou seja,  $W = 0$ .

Ao contrário, por  $W = 0$ , resulta dependência linear, porque podemos achar uma solução não-trivial da relação

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2}$$

por integração, que resulta em

$$\ln y_1 = \ln y_2 + \ln C \quad \text{ou} \quad y_1 = C y_2.$$

Dependência linear e wronskiano são generalizados para três ou mais funções na Seção 9.6.

### Exercícios

- 9.2.1** Pela lei de Kirchhoff, a corrente  $I$  em um circuito  $RC$  (resistivo-capacitivo) (Figura 9.1) obedece à equação

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

- (a) Ache  $I(t)$ .  
 (b) Para uma capacitância de  $10.000 \mu\text{F}$  carregada a  $100 \text{ V}$  e descarregada por meio de uma resistência de  $1 \text{ M}\Omega$ , ache a corrente  $I$  para  $t = 0$  e para  $t = 100$  segundos.

*Nota:* A tensão inicial é  $I_0 R$  ou  $Q/C$ , em que  $Q = \int_0^\infty I(t) dt$ .

- 9.2.2** A transformada de Laplace da equação de Bessel ( $n = 0$ ) leva a

$$(s^2 + 1)f'(s) + sf(s) = 0.$$

Resolva para  $f(s)$ .

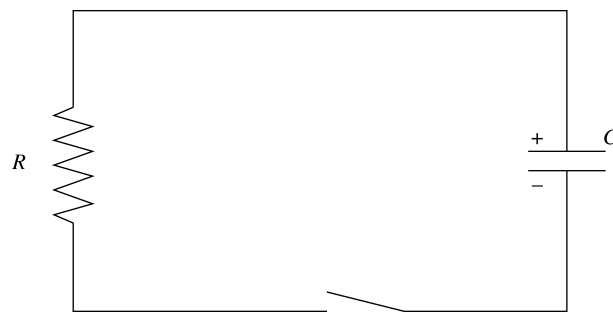


Figura 9.1: Circuito RC

**9.2.3** A degradação de uma população por colisões catastróficas de dois corpos é descrita por

$$\frac{dN}{dt} = -kN^2.$$

Essa é uma equação diferencial **não-linear** de primeira ordem. Derive a solução

$$N(t) = N_0 \left( 1 + \frac{t}{\tau_0} \right)^{-1},$$

em que  $\tau_0 = (kN_0)^{-1}$ . Isso implica uma população infinita em  $t = -\tau_0$ .

**9.2.4** A taxa de uma determinada reação química  $A + B \rightarrow C$  é proporcional às concentrações dos reagentes  $A$  e  $B$ :

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha [A(0) - C(t)] [B(0) - C(t)].$$

(a) Ache  $C(t)$  para  $A(0) \neq B(0)$ .

(b) Ache  $C(t)$  para  $A(0) = B(0)$ .

A condição inicial é que  $C(0) = 0$ .

**9.2.5** Um barco navegando ao longo da costa experimenta uma força de resistência proporcional a  $v^n$ ,  $v$  sendo a velocidade instantânea do barco. A segunda lei de Newton leva a

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^n.$$

Com  $v(t = 0) = v_0$ ,  $x(t = 0) = 0$ , integre para achar  $v$  como uma função do tempo e  $v$  como uma função da distância.

**9.2.6** Na equação diferencial de primeira ordem  $dy/dx = f(x, y)$  a função  $f(x, y)$  é uma função da razão  $y/x$ :

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x).$$

Mostre que a substituição de  $u = y/x$  leva a uma equação separável em  $u$  e  $x$ .

**9.2.7** A equação diferencial

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

é **exata**. Construa uma solução

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = \text{constante}.$$

**9.2.8** A equação diferencial

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$





é exata. Se

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy,$$

mostre que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y).$$

Por conseguinte,  $\varphi(x, y) = \text{constante}$  é uma solução da equação diferencial original.

**9.2.9** Prove que a Equação (9.26) é exata no sentido da Equação (9.21), contanto que  $\alpha(x)$  satisfaça a Equação (9.28).

**9.2.10** Uma certa equação diferencial tem a forma

$$f(x) dx + g(x)h(y) dy = 0,$$

sendo que nenhuma das funções  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(y)$  é identicamente zero. Mostre que uma condição necessária e suficiente para essa equação ser exata é que  $g(x) = \text{constante}$ .

**9.2.11** Mostre que

$$y(x) = \exp \left[ - \int^x p(t) dt \right] \left\{ \int^x \exp \left[ \int^s p(t) dt \right] q(s) ds + C \right\}$$

é uma solução de

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

por diferenciação da expressão para  $y(x)$  e substituição na equação diferencial.

**9.2.12** O movimento de um corpo em queda em um meio resistente pode ser descrito por

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

quando a força de retardação é proporcional à velocidade,  $v$ . Ache a velocidade. Avalie a constante de integração impondo que  $v(0) = 0$ .

**9.2.13** Núcleos radioativos decaem conforme a lei

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

sendo  $N$  a concentração de um dado nuclídeo e  $\lambda$  a constante particular de decaimento. Em uma série radioativa de  $n$  nuclídeos diferentes, começando com  $N_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad \text{e assim por diante.} \end{aligned}$$

Ache  $N_2(t)$  para as condições  $N_1(0) = N_0$  e  $N_2(0) = 0$ .

**9.2.14** A taxa de evaporação de uma determinada gota esférica de líquido (densidade constante) é proporcional à área de sua superfície. Admitindo que esse seja o único mecanismo de perda de massa, ache o raio da gota como uma função do tempo.

**9.2.15** Na equação diferencial linear homogênea

$$\frac{dv}{dt} = -av$$

as variáveis são separáveis. Quando as variáveis são separadas, a equação é exata. Resolva essa equação diferencial sujeita a  $v(0) = v_0$  pelos três métodos a seguir:

- Separando variáveis e integrando.
- Tratando a equação de variável separada como exata.
- Usando o resultado para uma equação diferencial linear homogênea.

Resposta:  $v(t) = v_0 e^{-at}$ .

**9.2.16** A equação de Bernoulli,

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n,$$

é não-linear para  $n \neq 0$  ou 1. Mostre que a substituição  $u = y^{1-n}$  reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear (veja a seção 18.4).

Resposta:  $\frac{du}{dx} + (1-n)f(x)u = (1-n)g(x)$ .

**9.2.17** Resolva a equação linear de primeira ordem, Equação (9.25), admitindo que  $y(x) = u(x)v(x)$ , onde  $v(x)$  é uma solução da equação homogênea correspondente [ $q(x) = 0$ ]. Este é o método de **variação de parâmetros** devido a Lagrange. Aplicamos o método a equações de segunda ordem no Exercício 9.6.25.

**9.2.18** (a) Resolva o Exemplo 9.2.1 para uma velocidade inicial  $v_i = 60$  mi/h, quando o pára-quedas se abre. Ache  $v(t)$ . (b) Para um pára-quedista em queda livre, use o coeficiente de atrito  $b = 0,25$  kg/m e massa  $m = 70$  kg. Qual é a velocidade limitadora neste caso?

### 9.3 Separação de Variáveis

As equações da Física Matemática listadas na Seção 9.1 são todas equações diferenciais parciais. Nossa primeira técnica para sua solução subdivide a equação diferencial parcial de  $n$  variáveis em  $n$  equações diferenciais ordinárias. Cada separação introduz uma constante de separação arbitrária. Se temos  $n$  variáveis, temos de introduzir  $n - 1$  constantes, determinadas pelas condições impostas no problema que estamos resolvendo.

#### Coordenadas Cartesianas

Em coordenadas cartesianas, a equação de Helmholtz se torna

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0, \tag{9.34}$$

usando a Equação (2.27) para o laplaciano. No momento, deixe que  $k^2$  seja uma constante. Talvez o modo mais simples de tratar uma equação diferencial parcial como a Equação (9.34) seja subdividi-la em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, o que pode ser feito como segue. Seja

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{9.35}$$

e substitua essa expressão de volta na Equação (9.34). Como sabemos que a Equação (9.35) é válida? Quando os operadores diferenciais em várias variáveis são aditivos na EDP, isto é, quando não há nenhum produto de operadores diferenciais em variáveis diferentes, o método de separação costuma funcionar. Continuamos a fazer as coisas no espírito do “vamos experimentar para ver se funciona”. Se nossa tentativa for bem-sucedida, então a Equação (9.35) será justificada. Se não for bem-sucedida, logo saberemos e então tentaremos um outro ataque, tal como funções de Green, transformadas integrais ou análise numérica de força bruta. Admitindo que  $\psi$  seja dada pela Equação (9.35), a Equação (9.34) se torna

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0. \tag{9.36}$$

Dividindo por  $\psi = XYZ$  e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \tag{9.37}$$

A Equação (9.37) exhibe uma separação de variáveis. O lado esquerdo é uma função de  $x$  apenas, ao passo que o lado direito depende somente de  $y$  e  $z$  e não de  $x$ . Mas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são todas coordenadas independentes. O fato de a igualdade de ambos os lados depender de variáveis diferentes significa que o comportamento de  $x$  como uma



variável independente não é determinado por  $y$  e  $z$ . Por conseguinte, cada lado deve ser igual a uma constante, uma constante de separação. Escolhemos<sup>2</sup>

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2, \quad (9.38)$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2. \quad (9.39)$$

Agora, voltando nossa atenção para a Equação (9.39), obtemos

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}, \quad (9.40)$$

e conseguimos uma segunda separação. Agora temos uma função de  $y$  igualada a uma função de  $z$ , como antes. Nós a resolvemos, como antes, igualando cada lado a uma outra constante de separação,<sup>2</sup>  $-m^2$ ,

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2, \quad (9.41)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2, \quad (9.42)$$

introduzindo uma constante  $n^2$  por  $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$  para produzir um conjunto simétrico de equações. Agora temos três EDOs ((9.38), (9.41) e (9.42)) para substituir a Equação (9.34). Nossa suposição (Equação (9.35)) foi bem-sucedida e, por conseguinte, justificada.

Nossa solução deve ser rotulada de acordo com a escolha que fizemos das constantes  $l$ ,  $m$  e  $n$ , isto é,

$$\psi_{lm}(x, y, z) = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z). \quad (9.43)$$

Contanto que sujeitos às condições do problema que está sendo resolvido e à condição  $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ , podemos escolher  $l$ ,  $m$  e  $n$  como quisermos, e a Equação (9.43) ainda será uma solução da Equação (9.34), contanto que  $X_l(x)$  seja uma solução da Equação (9.38), e assim por diante. Nós desenvolvemos **a solução mais geral** da Equação (9.34) considerando uma **combinação linear de soluções**  $\psi_{lm}$ ,

$$\Psi = \sum_{l,m} a_{lm} \psi_{lm}. \quad (9.44)$$

Por fim, os coeficientes da constante  $a_{lm}$  são escolhidos de modo a permitir que  $\Psi$  satisfaça as condições de fronteira do problema, que, como regra, leva a um conjunto discreto de valores  $l, m$ .

### Coordenadas Cilíndricas Circulares

Como nossa função desconhecida  $\psi$  depende de  $\rho$ ,  $\varphi$  e  $z$ , a equação de Helmholtz se torna (veja a Seção 2.4 para  $\nabla^2$ )

$$\nabla^2 \psi(\rho, \varphi, z) + k^2 \psi(\rho, \varphi, z) = 0, \quad (9.45)$$

ou

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (9.46)$$

Como antes, admitimos uma forma fatorada para  $\psi$ ,

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (9.47)$$

Substituindo na Equação (9.46), temos

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + P\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0. \quad (9.48)$$

<sup>2</sup>A escolha de sinal, completamente arbitrária aqui, em problemas específicos será fixada pela necessidade de satisfazer condições de contorno específicas.

Todas as derivadas parciais se tornaram derivadas ordinárias. Dividindo por  $P\Phi Z$  e passando a derivada  $z$  para o lado direito, temos como resultado

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (9.49)$$

Novamente, uma função de  $z$  do lado direito parece depender de uma função de  $\rho$  e  $\varphi$  do lado esquerdo. Resolvemos isso igualando cada lado da equação (9.49) à mesma constante. Vamos escolher<sup>3</sup>  $-l^2$ . Então,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 Z \quad (9.50)$$

e

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -l^2. \quad (9.51)$$

Fazendo  $k^2 + l^2 = n^2$ , multiplicando por  $\rho^2$ , e rearranjando termos, obtemos

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}. \quad (9.52)$$

Podemos estabelecer o lado direito para  $m^2$  e

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi. \quad (9.53)$$

Por fim, para a dependência de  $\rho$ , temos

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2) P = 0. \quad (9.54)$$

Essa é a equação diferencial de Bessel. As soluções e suas propriedades são apresentadas no Capítulo 11. A separação de variáveis da equação de Laplace em coordenadas parabólicas também dá origem à equação de Bessel. Podemos observar que a equação de Bessel é notória pela variedade de disfarces sob os quais pode aparecer. Se o leitor quiser uma tabulação extensiva de possíveis formas, pode consultar *Tables of Functions* por Jahnke e Emde.<sup>4</sup>

A equação de Helmholtz original, uma EDP tridimensional, foi substituída por três EDOs, Equações (9.50), (9.53) e (9.54). Uma solução da equação de Helmholtz é

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (9.55)$$

Identificando as soluções específicas  $P, \Phi, Z$  por índices, vemos que a solução mais geral da equação de Helmholtz é uma combinação linear das soluções de produto:

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} a_{mn} P_{mn}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_n(z). \quad (9.56)$$

### Coordenadas Polares Esféricas

Vamos tentar separar a equação de Helmholtz, mais uma vez com  $k^2$  constante, em coordenadas polares esféricas. Usando a Equação (2.48), obtemos

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = -k^2 \psi. \quad (9.57)$$

Agora, por analogia com a Equação (9.35), experimentamos

$$\boxed{\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).} \quad (9.58)$$

<sup>3</sup>A escolha de sinal da constante de separação é arbitrária. Contudo, escolhemos um sinal de menos para a coordenada axial  $z$  na expectativa de uma possível dependência exponencial de  $z$  (pela Equação (9.50)). Escolhemos um sinal positivo para a coordenada azimutal  $\varphi$  na expectativa de uma dependência periódica de  $\varphi$  (pela Equação (9.53)).

<sup>4</sup>E. Jahnke e F. Emde, *Tables of functions*, 4<sup>a</sup>. ed. revista, Nova York: Dover (1945), p. 146; também E. Jahnke, F. Emde e F. Lösch, *Tables of Higher Functions*, 6<sup>a</sup> ed., Nova York: McGraw-Hill (1960).



Substituindo de volta na Equação (9.57) e dividindo por  $R\Theta\Phi$ , temos

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -k^2. \quad (9.59)$$

Note que, agora, todas as derivadas são derivadas ordinárias em vez de parciais. Multiplicando por  $r^2 \sin^2\theta$ , podemos isolar  $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\varphi^2)$  para obter<sup>5</sup>

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = r^2 \sin^2\theta \left[ -k^2 - \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2 \sin\theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right]. \quad (9.60)$$

A Equação (9.60) relaciona uma função apenas de  $\varphi$  a uma função de  $r$  e de  $\theta$  apenas. Uma vez que  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  são variáveis independentes, igualamos cada lado da Equação (9.60) a uma constante. Em quase todos os problemas físicos  $\varphi$  aparecerá como um ângulo de azimute. Isso sugere uma solução periódica em vez de uma exponencial. Com isso em mente, vamos usar  $-m^2$  como a constante de separação que, nesse caso, deve ser um inteiro ao quadrado. Então,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (9.61)$$

e

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2\theta} = -k^2. \quad (9.62)$$

Multiplicando a Equação (9.62) por  $r^2$  e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = -\frac{1}{\sin\theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}. \quad (9.63)$$

Mais uma vez, as variáveis são separadas. Igualamos cada lado a uma constante,  $Q$ , e finalmente obtemos

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta + Q\Theta = 0, \quad (9.64)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0. \quad (9.65)$$

Mais uma vez substituímos a equação diferencial parcial de três variáveis por três EDOs. As soluções dessas EDOs são discutidas nos Capítulos 11 e 12. No Capítulo 12, por exemplo, a Equação (9.64) é identificada como a equação associada de Legendre, na qual a constante  $Q$  se torna  $l(l+1)$ ;  $l$  é um inteiro não-negativo porque  $\theta$  é uma variável angular. Se  $k^2$  é uma constante (positiva), a Equação (9.65) se torna a equação esférica de Bessel da Seção 11.7.

Novamente, nossa solução mais geral pode ser escrita

$$\psi_{Qm}(r, \theta, \varphi) = \sum_{Q,m} a_{Qm} R_Q(r) \Theta_{Qm}(\theta) \Phi_m(\varphi). \quad (9.66)$$

A restrição de que  $k^2$  seja uma constante é desnecessariamente severa. O processo de separação ainda será possível para  $k^2$  tão geral quanto

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} h(\varphi) + k'^2. \quad (9.67)$$

No problema do átomo de hidrogênio, um dos exemplos mais importantes da equação de onda de Schrödinger com uma solução de forma fechada é  $k^2 = f(r)$ , com  $k^2$  independente de  $\theta$ ,  $\varphi$ . A Equação (9.65) para o átomo de hidrogênio se torna a equação associada de Laguerre.

A grande importância dessa separação de variáveis em coordenadas polares esféricas se origina do fato de que o caso  $k^2 = k^2(r)$  abrange uma imensa parte da Física: uma grande quantidade das teorias de gravitação, eletrostática e da física atômica, nuclear e de partículas. Além disso, com  $k^2 = k^2(r)$ , a dependência angular é isolada nas Equações (9.61) e (9.64), **que podem ser resolvidas exatamente**.

<sup>5</sup>Aqui, a ordem na qual as variáveis são separadas não é única. Muitos textos de Mecânica Quântica mostram primeiro a subdivisão da dependência de  $r$ .

Por fim, para ilustrar como a constante  $m$  na Equação (9.61) é restrita, observamos que  $\varphi$  em coordenadas polares esféricas e cilíndricas é um ângulo de azimute. Se este é um problema clássico, certamente vamos exigir que a solução azimutal  $\Phi(\varphi)$  seja de valor único; isto é,

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{9.68}$$

Isso equivale a exigir que a solução azimutal tenha um período de  $2\pi$ .<sup>6</sup> Por conseguinte,  $m$  deve ser um inteiro. Qual inteiro será depende dos detalhes do problema. Se o inteiro  $|m| > 1$ , então  $\Phi$  terá o período  $2\pi/m$ . Sempre que uma coordenada corresponde a um eixo de translação ou a um ângulo de azimute, a equação separada tem a forma

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi)$$

para  $\varphi$ , o ângulo de azimute, e

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \pm a^2Z(z) \tag{9.69}$$

para  $z$ , um eixo de translação do sistema de coordenadas cilíndricas. Claro que as soluções são  $\text{sen} az$  e  $\text{cos} az$ , para  $-a^2$ , e a função hiperbólica correspondente (ou exponenciais)  $\text{sen} haz$  e  $\text{cos} haz$  para  $+a^2$ .

**Tabela 9.2** Soluções em coordenadas polares esféricas<sup>a</sup>

		$\psi = \sum_{l,m} a_{lm}\psi_{lm}$		
1.	$\nabla^2 \psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen} m\varphi \end{Bmatrix}^b$
2.	$\nabla^2 \psi + k^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen} m\varphi \end{Bmatrix}^b$
3.	$\nabla^2 \psi - k^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} i_l(kr) \\ k_l(kr) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen} m\varphi \end{Bmatrix}^b$

<sup>a</sup>Referências para algumas das funções  $P_l^m(\cos \theta)$ ,  $m = 0$ , Seção 12.1;  $m \neq 0$ , Seção 12.5;  $Q_l^m(\cos \theta)$ , Seção 12.10;  $j_l(kr)$ ,  $n_l(kr)$ ,  $i_l(kr)$ , e  $k_l(kr)$ , Seção 11.7.  
<sup>b</sup> $\cos m\varphi$  e  $\text{sen} m\varphi$  podem ser substituídos por  $e^{\pm im\varphi}$ .

Entre outras EDOs que aparecem de vez em quando estão as equações de Laguerre e as equações associadas de Laguerre do problema de suprema importância do átomo de hidrogênio na Mecânica Quântica:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0, \tag{9.70}$$

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (1+k-x) \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0. \tag{9.71}$$

Pela teoria da Mecânica Quântica do oscilador linear, temos a equação de Hermite

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0. \tag{9.72}$$

Por fim, de vez em quando encontramos a equação diferencial de Chebyshev,

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0. \tag{9.73}$$

Para referência conveniente, as formas das soluções da equação de Laplace, da equação de Helmholtz e da equação de difusão para coordenadas polares esféricas estão reunidas na Tabela 9.2. As soluções da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas circulares são apresentadas na Tabela 9.3.

<sup>6</sup>Isso também se aplica à maioria dos problemas de Mecânica Quântica, mas o argumento é muito mais complicado. Se  $m$  não for um inteiro, as relações de grupo de rotação e as relações de operador progressivo (Seção 4.3) são rompidas. Compare com E. Merzbacher, Single valuedness of wave functions. *Am. J. Phys.* 30: 237 (1962).



Propriedades gerais que resultam da forma das equações diferenciais são discutidas no Capítulo 10. As soluções individuais são desenvolvidas e aplicadas nos Capítulos 11-13.

O físico praticante pode encontrar, e provavelmente encontrará, outras EDOs de segunda ordem, algumas das quais talvez seja possível transformar nos exemplos estudados aqui. Algumas dessas EDOs podem ser resolvidas pelas técnicas das Seções 9.5 e 9.6. Outras talvez precisem de um computador para uma solução numérica.

**Tabela 9.3** Soluções em coordenadas cilíndricas circulares

$$\psi = \sum_{m,\alpha} a_{m\alpha} \psi_{m\alpha}$$

a.	$\nabla^2 \psi + \alpha^2 \psi = 0$	$\psi_{m\alpha} = \begin{Bmatrix} J_m(\alpha\rho) \\ N_m(\alpha\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen}m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-\alpha z} \\ e^{\alpha z} \end{Bmatrix}$
b.	$\nabla^2 \psi - \alpha^2 \psi = 0$	$\psi_{m\alpha} = \begin{Bmatrix} I_m(\alpha\rho) \\ K_m(\alpha\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen}m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha z \\ \text{sen} \alpha z \end{Bmatrix}$
c.	$\nabla^2 \psi = 0$	$\psi_m = \begin{Bmatrix} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \text{sen}m\varphi \end{Bmatrix}$

<sup>a</sup>Referências para as funções radiais são  $J_m(\alpha\rho)$ , Seção 11.1;  $N_m(\alpha\rho)$ , Seção 11.3;  $I_m(\alpha\rho)$  e  $K_m(\alpha\rho)$ , Seção 11.5.

Referimo-nos à segunda edição deste texto para outros importantes sistemas de coordenadas.

- Para colocar em perspectiva o método de separação para resolver EDPs, vamos revisá-lo como uma consequência de uma simetria da EDP. Considere como exemplo a equação estacionária de Schrödinger  $H\psi = E\psi$  com um potencial  $V(r)$  que depende somente da distância radial  $r$ . Então, essa EDP é invariante sob rotações que compreendem um grupo  $\text{SO}(3)$ . Seu gerador diagonal é o operador de momento angular orbital  $L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$ , e sua invariante quadrática (de Casimir) é  $\mathbf{L}^2$ . Visto que ambas comutam com  $H$  (veja a Seção 4.3), acabamos com três equações de autovalor separadas:

$$H\psi = E\psi, \quad \mathbf{L}^2\psi = l(l+1)\psi, \quad L_z\psi = m\psi.$$

Substituindo  $L_z^2$  em  $\mathbf{L}^2$  por seu autovalor  $m^2$ , a EDO para  $\mathbf{L}^2$  se torna a EDO de Legendre e, de modo semelhante,  $H\psi = E\psi$  se torna a EDO radial do método de separação em coordenadas polares esféricas.

- Para coordenadas cilíndricas, a EDP é invariante sob rotações em torno do eixo  $z$  somente, o que forma um subgrupo de  $\text{SO}(3)$ . Essa invariância resulta no gerador  $L_z = -i\partial/\partial\varphi$  e na EDO azimutal separada  $L_z\psi = m\psi$ , como antes. Se o potencial  $V$  for invariante sob translações ao longo do eixo  $z$ , então o gerador  $-i\partial/\partial z$  dá a EDO separada na variável  $z$ .
- Em geral (veja a Seção 4.3), há  $n$  geradores mutuamente comutativos  $H_i$ , com autovalores  $m_i$  do (clássico) grupo de Lie,  $G$  de ordem  $n$  e as invariantes de Casimir correspondentes  $C_i$  com autovalores  $c_i$ , que resultam nas EDOs separadas

$$H_i\psi = m_i\psi, \quad C_i\psi = c_i\psi,$$

além da EDO  $H\psi = E\psi$  (agora) radial.

### Exercícios

- 9.3.1** Deixando o operador  $\nabla^2 + k^2$  agir sobre a forma geral  $a_1\psi_1(x, y, z) + a_2\psi_2(x, y, z)$ , mostre que ela é linear, isto é, que  $(\nabla^2 + k^2)(a_1\psi_1 + a_2\psi_2) = a_1(\nabla^2 + k^2)\psi_1 + a_2(\nabla^2 + k^2)\psi_2$ .
- 9.3.2** Mostre que a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0,$$

ainda é separável em coordenadas cilíndricas circulares se  $k^2$  for generalizada para  $k^2 + f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)$ .

- 9.3.3** Separe variáveis na equação de Helmholtz em coordenadas polares esféricas, subdividindo **em primeiro lugar** a dependência radial. Mostre que suas equações separadas têm a mesma forma que as Equações (9.61), (9.64) e (9.65).

**9.3.4** Verifique que

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + \left[ k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0$$

é separável (em coordenadas polares esféricas). As funções  $f, g$  e  $h$  são funções só das duas variáveis indicadas;  $k^2$  é uma constante.

**9.3.5** Uma partícula atômica (na Mecânica Quântica) está confinada dentro de uma caixa retangular de lados  $a, b$  e  $c$ . A partícula é descrita por uma função de onda  $\psi$  que satisfaz a equação de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi.$$

A função de onda deve se anular em cada superfície da caixa (mas não para ser identicamente zero). Essa condição impõe restrições às constantes de separação e, portanto, à energia  $E$ . Qual é o menor valor de  $E$  para o qual tal solução pode ser obtida?

Resposta:  $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$

**9.3.6** Para um sólido esférico homogêneo com difusibilidade térmica constante  $K$ , e nenhuma fonte de calor, a equação de condução de calor se torna

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = K \nabla^2 T(r, t).$$

Admita uma solução da forma

$$T = R(r)T(t)$$

e separe variáveis. Mostre que a equação radial pode assumir a forma padrão

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [\alpha^2 r^2 - n(n+1)] R = 0; \quad n = \text{inteiro.}$$

As soluções dessa equação são denominadas **funções esféricas de Bessel**.

**9.3.7** Separe variáveis na equação de difusão do Exercício 9.3.6 em coordenadas cilíndricas circulares. Admita que você pode desprezar efeitos finais e considere  $T = T(\rho, t)$ .

**9.3.8** O operador de momento angular da mecânica quântica é dado por  $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ . Mostre que

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} \psi = l(l+1) \psi$$

leva à equação associada de Legendre.

*Sugestão:* Os Exercícios 1.9.9 e 2.5.16 podem ajudar.

**9.3.9** A equação de onda unidimensional de Schrödinger para uma partícula em um campo de potencial  $V = \frac{1}{2} kx^2$  é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E\psi(x).$$

(a) Usando  $\xi = ax$  e uma constante  $\lambda$ , temos

$$a = \left( \frac{mk}{\hbar^2} \right)^{1/4}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar} \left( \frac{m}{k} \right)^{1/2};$$

mostre que

$$\frac{d^2 \psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) \psi(\xi) = 0.$$

(b) Substituindo

$$\psi(\xi) = y(\xi) e^{-\xi^2/2},$$

mostre que  $y(\xi)$  satisfaz a equação diferencial de Hermite.





**9.3.10** Verifique que as seguintes são soluções da equação de Laplace:

$$(a) \psi_1 = 1/r, r \neq 0, \quad (b) \psi_2 = \frac{1}{2r} \ln \frac{r+z}{r-z}.$$

*Nota:* As  $z$  derivadas de  $1/r$  geram os polinômios de Legendre,  $P_n(\cos \theta)$ , Exercício 12.1.7. As  $z$  derivadas de  $(1/2r) \ln[(r+z)/(r-z)]$  geram as funções de Legendre,  $Q_n(\cos \theta)$ .

**9.3.11** Se  $\Psi$  é uma solução da equação de Laplace,  $\nabla^2 \Psi = 0$ , mostre que  $\partial \Psi / \partial z$  também é uma solução.

## 9.4 Pontos Singulares

Nesta seção apresentamos o conceito de ponto singular ou singularidade (como aplicado a uma equação diferencial). O interesse nesse conceito surge de sua utilidade para (1) classificar EDOs e (2) investigar a viabilidade de uma solução de série. Essa viabilidade é o tópico do teorema de Fuchs, Seções 9.5 e 9.6.

Todas as EDOs listadas na Seção 9.3 podem ser resolvidas para  $d^2y/dx^2$ . Usando a notação  $d^2y/dx^2 = y''$ , temos<sup>7</sup>

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (9.74)$$

Se escrevermos nossa equação diferencial homogênea de segunda ordem (em  $y$ ) como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (9.75)$$

estamos prontos para definir pontos ordinários e singulares. Se as funções  $P(x)$  e  $Q(x)$  permanecerem finitas em  $x = x_0$ , o ponto  $x = x_0$  será um ponto ordinário. Contudo, se  $P(x)$  ou  $Q(x)$  (ou ambos) divergir à medida que  $x \rightarrow x_0$ , o ponto  $x_0$  será um ponto singular. Usando a Equação (9.75), podemos distinguir entre duas espécies de pontos, singulares.

1. Se  $P(x)$  ou  $Q(x)$  divergir, à medida que  $x \rightarrow x_0$ , mas  $(x - x_0)P(x)$  e  $(x - x_0)^2Q(x)$  permanecerem finitas, à medida que  $x \rightarrow x_0$ , então  $x = x_0$  será denominado ponto singular **regular** ou não-essencial.
2. Se  $P(x)$  divergir mais rapidamente do que  $1/(x - x_0)$ , de modo que  $(x - x_0)P(x)$  vai ao infinito, à medida que  $x \rightarrow x_0$  ou  $Q(x)$  divergir mais rapidamente do que  $1/(x - x_0)^2$ , de modo que  $(x - x_0)^2Q(x)$  vai ao infinito, à medida que  $x \rightarrow x_0$ , então o ponto  $x = x_0$  será denominado **singularidade irregular** ou **essencial**.

Essas definições são válidas para todos os valores finitos de  $x_0$ . A análise do ponto  $x \rightarrow \infty$  é semelhante ao tratamento de funções de uma variável complexa (Seção 6.6). Estabelecemos  $x = 1/z$ , substituímos na equação diferencial e então deixamos que  $z \rightarrow 0$ . Trocando variáveis nas derivadas, temos

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy(z^{-1})}{dz} = -z^2 \frac{dy(z^{-1})}{dz}, \quad (9.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{dy(x)}{dx} \right] \frac{dz}{dx} = (-z^2) \left[ -2z \frac{dy(z^{-1})}{dz} - z^2 \frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2} \right] \\ &= 2z^3 \frac{dy(z^{-1})}{dz} + z^4 \frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Usando esses resultados, transformamos a Equação (9.75) em

$$z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + [2z^3 - z^2 P(z^{-1})] \frac{dy}{dz} + Q(z^{-1})y = 0. \quad (9.78)$$

Nesse caso, o comportamento de  $x = \infty (z = 0)$  depende do comportamento dos novos coeficientes,

$$\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} \quad \text{e} \quad \frac{Q(z^{-1})}{z^4},$$

à medida que  $z \rightarrow 0$ . Se essas duas expressões permanecerem finitas, o ponto  $x = \infty$  é um ponto ordinário. Se elas divergirem não mais rapidamente do que  $1/z$  e  $1/z^2$ , respectivamente, o ponto  $x = \infty$  será um ponto singular regular; caso contrário, será um ponto singular irregular (uma singularidade essencial).

<sup>7</sup>Essa notação “com linha”,  $y' = dy/dx$ , foi introduzida por Lagrange no final do século XVIII como uma abreviação para a notação de Leibniz, mais explícita, porém mais trabalhosa,  $dy/dx$ .

### Exemplo 9.4.1

A equação de Bessel é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{9.79}$$

Comparando-a com a Equação (9.75), temos

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2},$$

**Tabela 9.4**

Equação	Singularidade Regular $x =$	Singularidade Irregular $x =$
1. <b>Hipergeométrica</b> $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x-c]y' + aby = 0.$	0, 1, $\infty$	–
2. <b>Legendre</b> $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$	–1, 1, $\infty$	–
3. <b>Chebyshev</b> $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$	–1, 1, $\infty$	–
4. <b>Hipergeométrica confluyente</b> $xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$	0	$\infty$
5. <b>Bessel</b> $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$	0	$\infty$
6. <b>Laguerre<sup>a</sup></b> $xy'' + (1-x)y' + ay = 0.$	0	$\infty$
7. <b>Oscilador harmônico simples</b> $y'' + \omega^2y = 0.$	–	$\infty$
8. <b>Hermite</b> $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$	–	$\infty$

<sup>a</sup>As equações associadas têm os mesmos pontos singulares.

o que mostra que o ponto  $x = 0$  é uma singularidade regular. Por inspeção, vemos que não há outros pontos singulares na faixa finita. À medida que  $x \rightarrow \infty (z \rightarrow 0)$ , temos, pela Equação (9.78), os coeficientes

$$\frac{2z - z}{z^2} \quad \text{e} \quad \frac{1 - n^2z^2}{z^4}.$$

Uma vez que a última expressão diverge como  $z^4$ , o ponto  $x = \infty$  é uma singularidade irregular, ou essencial. ■

As equações diferenciais ordinárias da Seção 9.3, mais duas outras equações, a hipergeométrica e a hipergeométrica confluyente, têm pontos singulares, como mostra a Tabela 9.4.

Veremos que todas as primeiras três equações da Tabela 9.4, hipergeométrica, Legendre e Chebyshev, têm três pontos singulares regulares. A equação hipergeométrica, com singularidades regulares em 0, 1 e  $\infty$  é considerada o padrão, a forma canônica. Então, as soluções das outras duas podem ser expressas em termos das soluções dela, as funções hipergeométricas, o que faremos no Capítulo 13.

De modo semelhante, a equação hipergeométrica confluyente é considerada a forma canônica de uma equação diferencial linear de segunda ordem com um ponto singular regular e um ponto singular irregular.

### Exercícios

- 9.4.1** Mostre que a equação de Legendre tem singularidades regulares em  $x = -1, 1, \text{ e } \infty$ .
- 9.4.2** Mostre que a equação de Laguerre, assim como a equação de Bessel, tem uma singularidade regular em  $x = 0$  e uma singularidade irregular em  $x = \infty$ .
- 9.4.3** Mostre que a substituição

$$x \rightarrow \frac{1-x}{2}, \quad a = -l, \quad b = l + 1, \quad c = 1$$

converte a equação hipergeométrica na equação de Legendre.



## 9.5 Soluções de Série — Método de Frobenius

Nesta seção desenvolvemos um método para obter uma solução da EDO linear homogênea de segunda ordem. O método, uma expansão de série, sempre funcionará, contanto que o ponto de expansão não seja pior do que um ponto singular regular. Em Física, essa condição muito branda é quase sempre satisfeita.

Uma EDO **linear homogênea de segunda ordem** pode ser colocada na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \quad (9.80)$$

A equação é **homogênea** porque cada termo contém  $y(x)$  ou uma derivada; **linear**, porque cada  $y$ ,  $dy/dx$  ou  $d^2y/dx^2$  aparece como a primeira potência – e nenhum produto. Nesta seção desenvolvemos (ao menos) uma solução da Equação (9.80). Na Seção 9.6 desenvolvemos a **segunda solução, independente, e provamos que não existe nenhuma terceira solução independente**. Por conseguinte, a **solução mais geral** da Equação (9.80) pode ser escrita como

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x). \quad (9.81)$$

Nosso problema físico pode levar a uma EDO linear **não-homogênea**, de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x). \quad (9.82)$$

A função da direita,  $F(x)$ , representa uma fonte (tal como uma carga eletrostática) ou uma força propulsora (tal como em um oscilador forçado). Soluções específicas dessa equação não-homogênea são abordadas rapidamente no Exercício 9.6.25. Elas são exploradas com um certo detalhe usando as técnicas de função de Green, nas Seções 9.7 e 10.5, e com uma técnica de  $t$  transformada de Laplace na Seção 15.11. Denominando essa solução  $y_p$ , podemos adicioná-la a qualquer solução da equação homogênea correspondente, a Equação (9.80). Daí, a **solução mais geral** da Equação (9.82) é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x). \quad (9.83)$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  serão eventualmente fixadas por condições de contorno.

Por enquanto, admitimos que  $F(x) = 0$  e que nossa equação diferencial é homogênea. Tentaremos desenvolver uma solução para nossa equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, Equação (9.80), pela substituição por uma série de potências com coeficientes indeterminados. Também está disponível como um parâmetro a potência do menor termo da série que não se anula. Como ilustração, aplicamos o método a duas equações diferenciais importantes, primeiro à equação do oscilador linear (clássico)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y = 0, \quad (9.84)$$

com soluções conhecidas  $y = \text{sen}\omega x, \cos\omega x$ .

Experimentamos

$$\begin{aligned} y(x) &= x^k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}x^{k+\lambda}, \quad a_0 \neq 0, \end{aligned} \quad (9.85)$$

com o expoente  $k$  e todos os coeficientes  $a_{\lambda}$  ainda indeterminados. Note que  $k$  não precisa ser um inteiro. Diferenciando duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)x^{k+\lambda-1}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na Equação (9.84), temos

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2} + \omega^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}x^{k+\lambda} = 0. \quad (9.86)$$

Pela nossa análise da unicidade da série de potências (Capítulo 5), os coeficientes de cada potência de  $x$  no lado esquerdo da Equação (9.86) devem desaparecer individualmente.

A potência mais baixa de  $x$  que aparece na Equação (9.86) é  $x^{k-2}$ , para  $\lambda = 0$  no primeiro somatório. A exigência de que o coeficiente desapareça<sup>8</sup> resulta em

$$a_0 k(k-1) = 0.$$

Escolhemos  $a_0$  como o coeficiente dos termos mais baixos que não desaparecem da série (Equação (9.85)); daí, por definição,  $a_0 \neq 0$ . Por conseguinte, temos

$$k(k-1) = 0. \tag{9.87}$$

Denominamos essa equação, que vem do coeficiente da potência mais baixa de  $x$ , **equação indicial**. A equação indicial e suas raízes têm importância crítica para nossa análise. Se  $k = 1$ , o coeficiente  $a_1(k+1)k$  de  $x^{k-1}$  deve desaparecer, de modo que  $a_1 = 0$ . Claro que nesse exemplo devemos exigir que  $k = 0$  ou  $k = 1$ .

Antes de considerarmos essas duas possibilidades para  $k$ , voltamos à Equação (9.86) e impomos que os coeficientes líquidos restantes, digamos, o coeficiente de  $x^{k+j}$  ( $j \geq 0$ ), desapareçam. Estabelecemos  $\lambda = j + 2$  no primeiro somatório e  $\lambda = j$  no segundo. (São somatórios independentes e  $\lambda$  é um índice mudo). Isso resulta em

$$a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1) + \omega^2 a_j = 0$$

ou

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)}. \tag{9.88}$$

Essa é uma **relação de recorrência** de dois termos.<sup>9</sup> Dado  $a_j$ , podemos calcular  $a_{j+2}$  e então  $a_{j+4}$ ,  $a_{j+6}$ , e assim por diante, até o ponto que desejarmos. Note que, para esse exemplo, se começarmos com  $a_0$ , a Equação (9.88) leva aos coeficientes pares  $a_2$ ,  $a_4$ , e assim por diante, e ignora  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_5$ , e assim por diante. Visto que  $a_1$  é arbitrário se  $k = 0$  e necessariamente zero se  $k = 1$ , vamos igualá-lo a zero (compare com os Exercícios 9.5.3 e 9.5.4) e então, pela Equação (9.88)

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0,$$

e todos os coeficientes de número ímpar desaparecem. As potências ímpares de  $x$  na verdade reaparecerão quando for usada a **segunda** raiz da equação indicial.

Voltando à Equação (9.87), nossa equação indicial, em primeiro lugar experimentamos a solução  $k = 0$ . A relação de recorrência (Equação (9.88)) se torna

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)}, \tag{9.89}$$

o que leva a

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} = -\frac{\omega^2}{2!} a_0, \\ a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{3 \cdot 4} = +\frac{\omega^4}{4!} a_0, \\ a_6 &= -a_4 \frac{\omega^2}{5 \cdot 6} = -\frac{\omega^6}{6!} a_0, \text{ e assim por diante.} \end{aligned}$$

Por inspeção (e indução matemática),

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0, \tag{9.90}$$

e nossa solução é

$$y(x)_{k=0} = a_0 \left[ 1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \dots \right] = a_0 \cos \omega x. \tag{9.91}$$

<sup>8</sup>Ver a unicidade de séries de potência, Seção 5.7.

<sup>9</sup>A relação de recorrência pode envolver três termos, isto é,  $a_{j+2}$ , dependendo de  $a_j$  e  $a_{j-2}$ . A Equação (13.2) para as funções de Hermite fornecem um exemplo desse comportamento.



Se escolhermos a raiz da equação indicial  $k = 1$  (Equação (9.88)), a relação de recorrência se torna

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)}. \tag{9.92}$$

Substituindo em  $j = 0, 2, 4$ , sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} = -\frac{\omega^2}{3!} a_0, \\ a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{4 \cdot 5} = +\frac{\omega^4}{5!} a_0, \\ a_6 &= -a_4 \frac{\omega^2}{6 \cdot 7} = -\frac{\omega^6}{7!} a_0, \text{ e assim por diante.} \end{aligned}$$

Mais uma vez, por inspeção e indução matemática,

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0. \tag{9.93}$$

Para essa escolha,  $k = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} y(x)_{k=1} &= a_0 x \left[ 1 - \frac{(\omega x)^2}{3!} + \frac{(\omega x)^4}{5!} - \frac{(\omega x)^6}{7!} + \dots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \left[ (\omega x) - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \dots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \text{sen} \omega x. \end{aligned} \tag{9.94}$$

Para resumir essa abordagem, podemos escrever a Equação (9.86) esquematicamente, como mostra a Figura 9.2. Pela unicidade da série de potências (Seção 5.7), o coeficiente total de cada potência de  $x$  deve desaparecer por si só. A exigência de que o primeiro coeficiente (1) desapareça leva à equação indicial, Equação (9.87). O segundo coeficiente é manipulado estabelecendo  $a_1 = 0$ . A desapareição do coeficiente de  $x^k$  (e de potências mais altas, tomadas uma por vez) leva à relação de recorrência, Equação (9.88).

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & & \text{II} & & \text{III} & & \text{IV} \\ \boxed{a_0 k(k-1)} x^{k-2} & + & \boxed{a_1(k+1)k} x^{k-1} & + & \boxed{\frac{a_2(k+2)(k+1)}{a_0 \omega^2}} x^k & + & \boxed{\frac{a_3(k+3)(k+2)}{a_1 \omega^2}} x^{k+1} + \dots \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \end{array} = 0$$

Figura 9.2: Relação de recorrência de expansão de série de potências.

Essa substituição de série, conhecida como método de Frobenius, nos deu duas soluções de série da equação do oscilador linear. Contudo, há dois pontos nessas soluções de série que precisam ser muito enfatizados:

1. A solução de série sempre deve ser substituída de volta na equação diferencial para ver se funciona, uma precaução contra erros algébricos e lógicos. Se funcionar, ela é uma solução.
2. A aceitabilidade de uma solução de série depende de sua convergência (incluindo convergência assintótica). É bem possível que o método de Frobenius dê uma solução de série que satisfaça a equação diferencial original quando substituída na equação, mas que **não** convirja na região de interesse. A equação diferencial de Legendre ilustra essa situação.

### Expansão em Torno de $x_0$

A Equação (9.85) é uma expansão em torno da origem,  $x_0 = 0$ . É perfeitamente possível substituir a Equação (9.85) por

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} (x - x_0)^{k+\lambda}, \quad a_0 \neq 0. \tag{9.95}$$

De fato, no caso das equações de Legendre, Chebyshev e hipergeométricas, escolher  $x_0 = 1$  tem algumas vantagens. O ponto  $x_0$  não deve ser escolhido em uma singularidade essencial — ou nosso método de Frobenius provavelmente falhará. A série resultante ( $x_0$  um ponto ordinário ou um ponto singular regular) será válida onde ela convergir. Você pode esperar algum tipo de divergência quando  $|x - x_0| = |z_s - x_0|$ , em que  $z_s$  é a singularidade mais próxima de  $x_0$  (no plano complexo).

### Simetria de Soluções

Vamos observar que obtemos uma solução de simetria par,  $y_1(x) = y_1(-x)$ , e uma de simetria ímpar,  $y_2(x) = -y_2(-x)$ . Isso não é apenas um acidente, mas uma consequência direta da forma da EDO. Escrevendo uma EDO geral como

$$\mathcal{L}(x)y(x) = 0, \tag{9.96}$$

na qual  $\mathcal{L}(x)$  é o operador diferencial, vemos que, para a equação do oscilador linear (Equação (9.84)),  $\mathcal{L}(x)$  é par sob paridade; isto é,

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x). \tag{9.97}$$

Sempre que o operador diferencial tiver uma paridade ou simetria específica, par ou ímpar, podemos permutar  $+x$  e  $-x$ , e a Equação (9.96) se torna

$$\pm\mathcal{L}(x)y(-x) = 0, \tag{9.98}$$

+ se  $\mathcal{L}(x)$  for par, - se  $\mathcal{L}(x)$  for ímpar. É claro que, se  $y(x)$  for uma solução da equação diferencial,  $y(-x)$  também é uma solução. Então, qualquer solução pode ser resolvida em partes par e ímpar,

$$y(x) = \frac{1}{2}[y(x) + y(-x)] + \frac{1}{2}[y(x) - y(-x)], \tag{9.99}$$

sendo que o primeiro colchete da direita dá uma solução par, e o segundo, uma solução ímpar.

Se nos referirmos à Seção 9.4, podemos ver que todas as equações (ou operadores diferenciais) de Legendre, Chebyshev, Bessel, oscilador harmônico simples e Hermite exibem essa paridade par; isto é, sua  $P(x)$  na Equação (9.80) é ímpar e  $Q(x)$  é par. Soluções de todas essas equações podem ser apresentadas como séries de potências pares de  $x$  e séries separadas de potências ímpares de  $x$ . O operador diferencial de Laguerre não tem simetria par nem ímpar; daí, não podemos esperar que suas soluções exibam paridade par ou ímpar. Nossa ênfase na paridade se origina primariamente da importância da paridade na Mecânica Quântica. Constatamos que funções de onda habitualmente são pares ou ímpares, o que quer dizer que elas têm uma paridade definida. A maioria das interações (o decaimento beta é uma grande exceção) também é par ou ímpar, e o resultado é que a paridade é conservada.

### Limitações da Abordagem de Série – Equação de Bessel

Essa abordagem sobre a equação do oscilador linear talvez tenha sido um pouco fácil demais. Substituindo as séries de potências (Equação (9.85)) na equação diferencial (Equação (9.84)), obtemos duas soluções independentes sem problema algum.

Para ter uma idéia do que pode acontecer, tentamos resolver a equação de Bessel,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \tag{9.100}$$

usando  $y'$  em lugar de  $dy/dx$  e  $y''$  em lugar de  $d^2y/dx^2$ . Novamente, admitindo uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}x^{k+\lambda},$$

diferenciamos e substituímos na Equação (9.100). O resultado é

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)x^{k+\lambda} \\ & + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}x^{k+\lambda+2} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}n^2x^{k+\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{9.101}$$

Fazendo  $\lambda = 0$ , obtemos o coeficiente de  $x^k$ , a potência mais baixa de  $x$  que aparece do lado esquerdo,

$$a_0[k(k-1) + k - n^2] = 0, \tag{9.102}$$



e novamente  $a_0 \neq 0$  por definição. Por conseguinte, a Equação (9.102) resulta na equação **indicial**

$$k^2 - n^2 = 0, \tag{9.103}$$

com soluções  $k = \pm n$ .

É interessante examinar o coeficiente de  $x^{k+1}$  também. Nesse caso, obtemos

$$a_1[(k+1)k + k + 1 - n^2] = 0,$$

ou

$$a_1(k+1-n)(k+1+n) = 0. \tag{9.104}$$

Para  $k = \pm n$ , nem  $k+1-n$  nem  $k+1+n$  desaparece, e nós **devemos** exigir que  $a_1 = 0$ .<sup>10</sup>

Passando para o coeficiente de  $x^{k+j}$  para  $k = n$ , fazemos  $\lambda = j$  no primeiro, segundo e quarto termos da Equação (9.101) e  $\lambda = j-2$  no terceiro termo. Impondo que o coeficiente resultante de  $x^{k+1}$  desapareça, obtemos

$$a_j[(n+j)(n+j-1) + (n+j) - n^2] + a_{j-2} = 0.$$

Quando  $j$  é substituído por  $j+2$ , essa expressão pode ser reescrita para  $j \geq 0$  como

$$a_{j+2} = -a_j \frac{1}{(j+2)(2n+j+2)}, \tag{9.105}$$

que é a relação de recorrência desejada. A aplicação repetida dessa relação de recorrência leva a

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{1}{2(2n+2)} = -\frac{a_0 n!}{2^2 1!(n+1)!}, \\ a_4 &= -a_2 \frac{1}{4(2n+4)} = -\frac{a_0 n!}{2^4 2!(n+2)!}, \\ a_6 &= -a_4 \frac{1}{6(2n+6)} = -\frac{a_0 n!}{2^6 3!(n+3)!}, \text{ e assim por diante,} \end{aligned}$$

e, em geral,

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{a_0 n!}{2^{2p} p!(n+p)!}. \tag{9.106}$$

Inserindo esses coeficientes em nossa solução de série admitida, temos

$$y(x) = a_0 x^n \left[ 1 - \frac{n! x^2}{2^2 1!(n+1)!} + \frac{n! x^4}{2^4 2!(n+2)!} - \dots \right]. \tag{9.107}$$

Em forma de somatório

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n! x^{n+2j}}{2^{2j} j!(n+j)!} \\ &= a_0 2^n n! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}. \end{aligned} \tag{9.108}$$

No Capítulo 11 o somatório final é identificado como a função de Bessel  $J_n(x)$ . Note que essa solução,  $J_n(x)$ , tem simetria par ou simetria ímpar,<sup>11</sup> como seria de esperar da forma da equação de Bessel.

Quando  $k = -n$  e  $n$  não é um inteiro, podemos gerar uma segunda série distinta, a ser rotulada  $J_{-n}(x)$ . Contudo, quando  $-n$  é um inteiro negativo, começa a dificuldade. A relação de recorrência para os coeficientes  $a_j$  ainda é dada pela Equação (9.105), mas com  $2n$  substituído por  $-2n$ . Então, quando  $j+2 = 2n$  ou  $j = 2(n-1)$ , o coeficiente  $a_{j+2}$  aumenta demais e não temos nenhuma solução de série. Essa catástrofe pode ser remediada na Equação (9.108), como é feito no Capítulo 11, e o resultado é que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \text{ um inteiro.} \tag{9.109}$$

<sup>10</sup>  $k = \pm n = -\frac{1}{2}$  são exceções.

<sup>11</sup>  $J_n(x)$  é uma função par se  $n$  for um inteiro par, uma função ímpar se  $n$  for um inteiro ímpar. Para  $n$  não-inteiro, o  $x^n$  não tem tal simetria simples.

A segunda solução simplesmente reproduz a primeira. Não conseguimos construir uma segunda solução independente para a equação de Bessel por essa técnica de série quando  $n$  é um inteiro.

Substituindo em uma série infinita, obtivemos duas soluções para a equação do oscilador linear e uma para a equação de Bessel (duas se  $n$  não for um inteiro). A resposta às perguntas “Sempre podemos fazer isso?”, “Esse método sempre funcionará?” é não, não podemos fazer isso sempre. Esse método de solução de série nem sempre funcionará.

### Singularidades Regulares e Irregulares

O sucesso do método de substituição de série depende das raízes da equação indicial e do grau de singularidade dos coeficientes na equação diferencial. Para entender melhor o efeito dos coeficientes da equação nessa abordagem ingênua de substituição de série, considere quatro equações simples:

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = 0, \tag{9.110a}$$

$$y'' - \frac{6}{x^3}y = 0, \tag{9.110b}$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0, \tag{9.110c}$$

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0. \tag{9.110d}$$

O leitor pode mostrar com facilidade que, para a Equação (9.110a), a equação indicial é

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

resultando em  $k = 3, -2$ . Visto que a equação é homogênea em  $x$  (contando  $d^2/dx^2$  como  $x^{-2}$ ), não há nenhuma relação de recorrência. Contudo, ficamos com duas soluções perfeitamente boas,  $x^3$  e  $x^{-2}$ .

A Equação (9.110b) difere da Equação (9.110a) por somente uma potência de  $x$ , mas isso envia a equação indicial a

$$-6a_0 = 0,$$

sem absolutamente nenhuma solução, porque concordamos que  $a_0 \neq 0$ . Nossa substituição de série funcionou para a Equação (9.110a), que tinha só uma singularidade regular, mas não para a Equação (9.110b), que tem um ponto singular irregular na origem.

Continuando com a Equação (9.110c), adicionamos um termo  $y'/x$ . A equação indicial é

$$k^2 - a^2 = 0,$$

mas, novamente, não há nenhuma relação de recorrência. As soluções são  $y = x^a, x^{-a}$ , ambas séries de um único termo, perfeitamente aceitáveis.

Quando mudamos a potência de  $x$  no coeficiente de  $y'$  de  $-1$ , para  $-2$ , Equação (9.110d), há uma drástica mudança na solução. A equação indicial (com apenas o termo  $y'$  contribuindo) se torna

$$k = 0.$$

Há uma relação de recorrência,

$$a_{j+1} = +a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1}.$$

A menos que o parâmetro  $a$  seja selecionado para fazer com que a série termine, temos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j(j+1)}{j+1} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j^2}{j} = \infty. \end{aligned}$$

Daí, nossa solução de série diverge para todo  $x \neq 0$ . Mais uma vez, nosso método funcionou para a Equação (9.110c) com uma singularidade regular, mas falhou quando tínhamos a singularidade irregular da Equação (9.110d).





## Teorema de Fuchs

A resposta à pergunta básica, quando podemos esperar que o método de substituição de série funcione, é dada pelo teorema de Fuchs, que afirma que sempre podemos obter ao menos uma solução de série de potências, contanto que estejamos expandindo em torno de um ponto que é um ponto ordinário ou, na pior das hipóteses, um ponto singular regular.

Se tentarmos uma expansão em torno de uma singularidade irregular ou essencial, nosso método pode falhar, como falhou para as Equações (9.110b) e (9.110d). Felizmente, as equações mais importantes da Física Matemática, listadas na Seção 9.4, não têm nenhuma singularidade irregular no plano finito. Uma discussão mais detalhada do teorema de Fuchs aparece na Seção 9.6.

Pela Tabela 9.4, Seção 9.4, o infinito é visto como um ponto singular para todas as equações consideradas. Para ilustrar ainda melhor o teorema de Fuchs, a equação de Legendre (tendo infinito como uma singularidade regular) tem uma solução de série convergente em potências negativas do argumento (Seção 12.10). Ao contrário, a equação de Bessel (com uma singularidade irregular no infinito) resulta em séries assintóticas (Seções 5.10 e 11.6). Essas soluções assintóticas são de extrema utilidade.

## Resumo

Se estivermos expandindo em torno de um ponto ordinário ou, na pior das hipóteses, em torno de uma singularidade regular, a abordagem de substituição de série resultará em pelo menos uma solução (teorema de Fuchs).

Obter uma ou duas soluções distintas depende das raízes da equação indicial.

1. Se as duas raízes da equação indicial forem iguais, podemos obter só uma solução por esse método de substituição de série.
2. Se a diferença entre as duas raízes for um número não-inteiro, podem ser obtidas duas soluções independentes.
3. Se a diferença entre as duas raízes for um número inteiro, a maior das duas resultará em uma solução.

A menor raiz pode ou não dar uma solução, dependendo do comportamento dos coeficientes. Na equação do oscilador linear obtemos duas soluções; para a equação de Bessel, obtemos só uma solução.

A utilidade da solução de série em termos do que é a solução (isto é, números) depende da rapidez de convergência da série e da disponibilidade dos coeficientes. Muitas EDOs não resultarão em relações de recorrência simples e atraentes para os coeficientes. Em geral, a série disponível provavelmente será útil para  $|x|$  (ou  $|x - x_0|$ ) muito pequeno. Podemos utilizar computadores para determinar coeficientes adicionais de série usando uma linguagem simbólica como Mathematica,<sup>12</sup> Maple,<sup>13</sup> ou Reduce.<sup>14</sup> Entretanto, para trabalho numérico, muitas vezes o melhor será a integração numérica direta.

## Exercícios

- 9.5.1** Teorema da unicidade. A função  $y(x)$  satisfaz uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. Em  $x = x_0$ ,  $y(x) = y_0$  e  $dy/dx = y'_0$ . Mostre que  $y(x)$  é única e que nenhuma outra solução dessa equação diferencial passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  com uma inclinação de  $y'_0$ .  
*Sugestão:* Admita que uma segunda solução satisfaça essas condições e compare com as expansões da série de Taylor.
- 9.5.2** Tentou-se uma solução de série da Equação (9.80) por expansão em torno do ponto  $x = x_0$ . Se  $x_0$  é um ponto ordinário, mostre que a equação indicial tem raízes  $k = 0, 1$ .
- 9.5.3** No desenvolvimento de uma solução de série da equação do oscilador harmônico simples (OHS), o segundo coeficiente da série  $a_1$  foi desprezado exceto para o igualar a zero. Desenvolva uma segunda equação do tipo indicial a partir do coeficiente da próxima potência mais baixa de  $x$ ,  $x^{k-1}$ ,  
(a) (equação OHS com  $k = 0$ ). Mostre que se pode atribuir qualquer valor finito a  $a_1$  (incluindo zero).  
(b) (equação OHS com  $k = 1$ ). Mostre que  $a_1$  deve ser igualado a zero.
- 9.5.4** Analise as soluções de série das seguintes equações diferenciais para ver quando  $a_1$  **pode** ser igualado a zero sem que nada seja irrevogavelmente perdido e quando  $a_1$  **deve** ser igualado a zero.  
(a) Legendre, (b) Chebyshev, (c) Bessel, (d) Hermite.

<sup>12</sup>S. Wolfram, *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Nova York: Addison Wesley (1991).

<sup>13</sup>A. Heck, *Introduction to Maple*, Nova York: Springer (1993).

<sup>14</sup>G. Rayna, *Reduce Software for Algebraic Computation*, Nova York: Springer (1987).

- Resposta: (a) Legendre, (b) Chebyshev e (d) Hermite: Para  $k = 0$ ,  $a_1$  **pode** ser igualado a zero; para  $k = 1$ ,  $a_1$ , **deve** ser igualado a zero.  
 (c) Bessel:  $a_1$  **deve** ser igualado a zero (exceto para  $k = \pm n = -\frac{1}{2}$ ).

**9.5.5** Resolva a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

por substituição direta de série.

- (a) Verifique que a equação indicial é

$$k(k - 1) = 0.$$

- (b) Usando  $k = 0$ , obtenha uma série de potências pares de  $x$  ( $a_1 = 0$ ).

$$y_{\text{par}} = a_0 \left[ 1 - \frac{n(n + 1)}{2!}x^2 + \frac{n(n - 2)(n + 1)(n + 3)}{4!}x^4 + \dots \right],$$

em que

$$a_{j+2} = \frac{j(j + 1) - n(n + 1)}{(j + 1)(j + 2)}a_j.$$

- (c) Usando  $k = 1$ , desenvolva uma série de potências ímpares de  $x$  ( $a_1 = 1$ ).

$$y_{\text{ímpar}} = a_1 \left[ x - \frac{(n - 1)(n + 2)}{3!}x^3 + \frac{(n - 1)(n - 3)(n + 2)(n + 4)}{5!}x^5 + \dots \right],$$

onde

$$a_{j+2} = \frac{(j + 1)(j + 2) - n(n + 1)}{(j + 2)(j + 3)}a_j.$$

- (d) Mostre que ambas as soluções,  $y_{\text{par}}$  e  $y_{\text{ímpar}}$ , divergem para  $x = \pm 1$  **se a série continuar até o infinito.**  
 (e) Por fim, mostre que, por uma escolha adequada de  $n$ , uma série por vez pode ser convertida em um polinômio, evitando assim a catástrofe da divergência. Em Mecânica Quântica essa restrição de  $n$  a valores inteiros corresponde à **quantização do momento angular.**

**9.5.6** Desenvolva soluções de série para a equação diferencial de Hermite

- (a)  $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$ .

Resposta:  $k(k - 1) = 0$ , equação indicial.

Para  $k = 0$ ,

$$a_{j+2} = 2a_j \frac{j - \alpha}{(j + 1)(j + 2)} \quad (j),$$

$$y_{\text{par}} = a_0 \left[ 1 + \frac{2(-\alpha)x^2}{2!} + \frac{2^2(-\alpha)(2 - \alpha)x^4}{4!} + \dots \right].$$

Para  $k = 1$ ,

$$a_{j+2} = 2a_j \frac{j + 1 - \alpha}{(j + 2)(j + 3)} \quad (j \text{ par}),$$

$$y_{\text{ímpar}} = a_1 \left[ x + \frac{2(1 - \alpha)x^3}{3!} + \frac{2^2(1 - \alpha)(3 - \alpha)x^5}{5!} + \dots \right].$$

- (b) Mostre que ambas as soluções de série são convergentes para todo  $x$ , sendo que, para índices grandes, a razão entre coeficientes sucessivos se comporta como a razão correspondente na expansão de  $\exp(x^2)$ .  
 (c) Mostre que, por escolha adequada de  $\alpha$ , as soluções de série podem ser abreviadas e convertidas a polinômios finitos. (Esses polinômios, adequadamente normalizados, se tornam polinômios de Hermite na Seção 13.1.)



**9.5.7** A EDO de Laguerre é

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Desenvolva uma solução de série selecionando o parâmetro  $n$  para transformar sua série em um polinômio.

**9.5.8** Resolva a equação de Chebyshev

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0,$$

por substituição de série. Quais restrições são impostas a  $n$  se você exigir que a solução da série convirja para  $x = \pm 1$ ?

Resposta: A série infinita realmente converge para  $x = \pm 1$  e não existe nenhuma restrição imposta a  $n$  (compare com o Exercício 5.2.16).

**9.5.9** Resolva

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0,$$

escolhendo a raiz da equação indicial para obter uma série **ímpar** de potências de  $x$ . Uma vez que a série divergirá para  $x = 1$ , escolha  $n$  para convertê-la em um polinômio.

$$k(k-1) = 0.$$

Para  $k = 1$ ,

$$a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+3) - n(n+2)}{(j+2)(j+3)} a_j.$$

**9.5.10** Obtenha uma solução de série da equação hipergeométrica

$$x(x-1)y'' + [(1+a+b)x-c]y' + aby = 0.$$

Teste sua solução para convergência.

**9.5.11** Obtenha duas soluções de série da equação hipergeométrica confluyente

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$$

Teste suas soluções para convergência.

**9.5.12** Uma análise baseada na Mecânica Quântica do efeito de Stark (coordenadas parabólicas) leva à equação diferencial

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{du}{d\xi} \right) + \left( \frac{1}{2} E \xi + \alpha - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4} F \xi^2 \right) u = 0.$$

Aqui,  $\alpha$  é uma constante de separação,  $E$  é a energia total e  $F$  é uma constante, em que  $Fz$  é a energia potencial acrescentada ao sistema pela introdução de um campo elétrico. Usando a maior raiz da equação indicial, desenvolva uma solução de série de potências em torno de  $\xi = 0$ . Avalie os três primeiros coeficientes em termos de  $a_0$ .

Equação indicial  $k^2 - \frac{m^2}{4} = 0,$

$$u(\xi) = a_0 \xi^{m/2} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{m+1} \xi + \left[ \frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)} - \frac{E}{4(m+2)} \right] \xi^2 + \dots \right\}.$$

Note que a perturbação  $F$  não aparece até a inclusão de  $a_3$ .

**9.5.13** Para o caso especial de não haver nenhuma dependência azimutal, a análise de Mecânica Quântica do íon molecular do hidrogênio leva à equação

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta^2) \frac{du}{d\eta} \right] + \alpha u + \beta \eta^2 u = 0.$$

Desenvolva uma solução de série de potências para  $u(\eta)$ . Avalie os três primeiros coeficientes que não desaparecem em termos de  $a_0$ .

$$\text{Equação indicial} \quad k(k-1) = 0,$$

$$u_{k=1} = a_0 \eta \left\{ 1 + \frac{2-\alpha}{6} \eta^2 + \left[ \frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120} - \frac{\beta}{20} \right] \eta^4 + \dots \right\}.$$

**9.5.14** Para uma boa aproximação, a interação de dois núcleos pode ser descrita por um potencial mesônico

$$V = \frac{Ae^{-ax}}{x},$$

atrativo para  $A$  negativo. Desenvolva uma solução de série da equação de onda de Schrödinger resultante.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - V)\psi = 0$$

através dos três coeficientes que não desaparecem.

$$\psi = a_0 \left\{ x + \frac{1}{2} A' x^2 + \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{2} A'^2 - E' - aA' \right] x^3 + \dots \right\},$$

em que “linha” indica multiplicação por  $2m/\hbar^2$ .

**9.5.15** A energia potencial de um elétron próximo ao núcleo de um átomo complexo é dada por

$$V = \frac{Ze^2}{r} (1 + b_1 r + b_2 r^2),$$

em que os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  surgem de efeitos de *screening*. Para o caso de momento angular zero, mostre que os três primeiros termos da solução da equação de Schrödinger têm a mesma forma que os do Exercício 9.5.14. Por translação adequada de coeficientes ou parâmetros, escreva os três primeiros termos em uma expansão de série da função de onda.

**9.5.16** Se o parâmetro  $a^2$  na Equação (9.110d) for igual a 2, a Equação (9.110d) se torna

$$y'' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Pela equação indicial e pela relação de recorrência, **derive** uma solução  $y = 1 + 2x + 2x^2$ . Verifique que ela é de fato uma solução substituindo-a de volta na equação diferencial.

**9.5.17** A função modificada de Bessel  $I_0(x)$  satisfaz a equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} I_0(x) + x \frac{d}{dx} I_0(x) - x^2 I_0(x) = 0.$$

Pelo Exercício 7.3.4 verifica-se que o termo dominante em uma expansão assintótica é

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Suponha uma série da forma

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \{ 1 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \dots \}.$$

Determine os coeficientes  $b_1$  e  $b_2$ .

$$\text{Resposta: } b_1 = \frac{1}{8}, \quad b_2 = \frac{9}{128}.$$

**9.5.18** A solução par da série de potências de equação de Legendre é dada pelo Exercício 9.5.5. Considere  $a_0 = 1$  e  $n$  um inteiro que não seja par, digamos,  $n = 0, 5$ . Calcule as somas parciais da série através de  $x^{200}, x^{400}, x^{600}, \dots, x^{2000}$  para  $x = 0,95(0,01)1,00$ . Além disso, escreva o termo individual correspondente a cada uma dessas potências.

*Nota:* Esse cálculo **não** constitui prova de convergência em  $x = 0,99$  ou divergência em  $x = 1,00$ , mas você talvez possa ver a diferença no comportamento da seqüência de somas parciais para esses dois valores de  $x$ .



- 9.5.19** (a) A solução ímpar da série de potências da Equação de Hermite é dada pelo Exercício 9.5.6. Considere  $a_0 = 1$ . Avalie essa série para  $\alpha = 0, x = 1, 2, 3$ . Interrompa seu cálculo após o último termo calculado ter caído abaixo do termo máximo por um fator de  $10^6$  ou mais. Estabeleça um limite superior para o erro cometido por ignorar os termos restantes na série infinita.
- (b) Como verificação do cálculo da parte (a), mostre que a série de Hermite  $y_{\text{ímpar}}(\alpha = 0)$  corresponde a  $\int_0^x \exp(x^2) dx$ .
- (c) Calcule essa integral para  $x = 1, 2, 3$ .

## 9.6 Uma Segunda Solução

Na Seção 9.5 foi desenvolvida uma solução de EDO homogênea de segunda ordem por substituição em uma série de potências. Pelo teorema de Fuchs isso é possível, contanto que a série de potências seja uma expansão ao redor de um ponto ordinário ou de uma singularidade não-essencial.<sup>15</sup> Não há nenhuma garantia de que essa abordagem resultará nas duas soluções independentes que esperamos de uma EDO linear de segunda ordem. Na verdade, provaremos que tal EDO tem no máximo duas soluções linearmente independentes. De fato, a técnica rendeu somente uma solução para a equação de Bessel ( $n$  inteiro). Nesta seção também desenvolvemos dois métodos para obter uma segunda solução independente: um método integral e uma série de potências contendo um termo logarítmico. Contudo, em primeiro lugar consideramos a questão da independência de um conjunto de funções.

### Independência Linear de Soluções

Dado um conjunto de funções  $\varphi_\lambda$ , um critério para dependência linear é a existência de uma relação da forma

$$\sum_{\lambda} k_{\lambda} \varphi_{\lambda} = 0, \tag{9.111}$$

na qual nem todos os coeficientes  $k_{\lambda}$  são zero. Por outro lado, se a única solução da Equação (9.111) é  $k_{\lambda} = 0$  para todo  $\lambda$ , diz-se que o conjunto de funções  $\varphi_{\lambda}$  é linearmente **independente**.

Pensar na dependência linear de vetores pode ajudar. Considere **A**, **B** e **C** em espaço tridimensional, com  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \neq 0$ . Nesse caso, não existe nenhuma relação não-trivial da forma

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0 \tag{9.112}$$

**A**, **B**, e **C** são linearmente independentes. Por outro lado, qualquer quarto vetor, **D**, pode ser expresso como uma combinação linear de **A**, **B** e **C** (veja a Seção 3.1). Sempre podemos escrever a equação da forma

$$\mathbf{D} - a\mathbf{A} - b\mathbf{B} - c\mathbf{C} = 0, \tag{9.113}$$

e os quatro vetores **não** são linearmente independentes. Os três vetores não-coplanares **A**, **B** e **C** abrangem nosso espaço tridimensional real.

Se um conjunto de vetores ou funções são mutuamente ortogonais, então são automaticamente linearmente independentes. Ortogonalidade implica independência linear. Isso pode ser demonstrado com facilidade considerando o os produtos internos (produto escalar ou produto interno para vetores, integral de ortogonalidade da Seção 10.2 para funções).

Vamos admitir que as funções  $\varphi_{\lambda}$  são diferenciáveis como necessário. Então, diferenciando a Equação (9.111) repetidas vezes, geramos um conjunto de equações

$$\sum_{\lambda} k_{\lambda} \varphi'_{\lambda} = 0, \tag{9.114}$$

$$\sum_{\lambda} k_{\lambda} \varphi''_{\lambda} = 0, \tag{9.115}$$

e assim por diante. Isso nos dá um conjunto de equações lineares homogêneas no qual  $k_{\lambda}$  são as quantidades desconhecidas. Pela Seção 3.1 há uma solução  $k_{\lambda} \neq 0$  somente se o determinante dos coeficientes dos  $k_{\lambda}$  desaparecer. Isso significa

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0. \tag{9.116}$$

<sup>15</sup>É por isso que a classificação de singularidades na Seção 9.4 é de vital importância.

Esse determinante é denominado **wronskiano**.

1. Se o wronskiano não for igual a zero, então a Equação (9.111) não tem nenhuma solução, exceto  $k_\lambda = 0$ . Por conseguinte, o conjunto de funções  $\varphi_\lambda$  é linearmente independente.
2. Se o wronskiano desaparecer em valores isolados do argumento, isso não prova necessariamente a dependência linear (a menos que o conjunto de funções tenha só duas funções). Contudo, se o wronskiano for zero sobre toda a faixa da variável, as funções  $\varphi_\lambda$  são linearmente dependentes sobre essa faixa<sup>16</sup> (compare com o Exercício 9.5.2 para o caso simples de duas funções).

### Exemplo 9.6.1 INDEPENDÊNCIA LINEAR

As soluções da equação do oscilador linear (9.84) são  $\varphi_1 = \text{sen}\omega x, \varphi_2 = \text{cos}\omega x$ . O wronskiano se torna

$$\begin{vmatrix} \text{sen}\omega x & \text{cos}\omega x \\ \omega \text{cos}\omega x & -\omega \text{sen}\omega x \end{vmatrix} = -\omega \neq 0.$$

Por conseqüência, essas duas soluções,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , são linearmente independentes. Para apenas duas funções isso significa que não é um múltiplo da outra, o que é obviamente verdadeiro nesse caso.

Você sabe que

$$\text{sen}\omega x = \pm(1 - \text{cos}^2 \omega x)^{1/2},$$

mas essa **não** é uma relação **linear** da forma da Equação (9.111).

### Exemplos 9.6.2 DEPENDÊNCIA LINEAR

Para ilustrar a dependência linear, considere as soluções da equação de difusão unidimensional. Temos  $\varphi_1 = e^x$  e  $\varphi_2 = e^{-x}$ , e adicionamos  $\varphi_3 = \text{cosh } x$ , também uma solução. O wronskiano é

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \text{cosh } x \\ e^x & -e^{-x} & \text{senh } x \\ e^x & e^{-x} & \text{cosh } x \end{vmatrix} = 0.$$

O determinante desaparece para todo  $x$  porque a primeira e a terceira linhas são idênticas. Daí,  $e^x, e^{-x}$  e  $\text{cosh } x$  são linearmente dependentes e, de fato, temos uma relação da forma da Equação (9.111):

$$e^x + e^{-x} - 2 \text{cosh } x = 0, \text{ com } k_\lambda \neq 0.$$

Agora estamos prontos para provar o **teorema que diz que uma EDO homogênea de segunda ordem tem duas soluções linearmente independentes**.

Suponha que  $y_1, y_2, y_3$  sejam três soluções da ODE homogênea (9.80). Então formamos o wronskiano  $W_{jk} = y_j y'_k - y'_j y_k$  de qualquer par  $y_j, y_k$  delas e recordamos que  $W'_{jk} = y_j y''_k - y''_j y_k$ . Dividimos cada EDO por  $y$ , obtendo  $-Q$  em seus lados direitos, portanto,

$$\frac{y''_j}{y_j} + P \frac{y'_j}{y_j} = -Q(x) = \frac{y''_k}{y_k} + P \frac{y'_k}{y_k}.$$

Multiplicando por  $y_j y_k$ , achamos

$$(y_j y''_k - y''_j y_k) + P(y_j y'_k - y'_j y_k) = 0, \quad \text{ou} \quad W'_{jk} = -P W_{jk} \tag{9.117}$$

para qualquer par de soluções. Por fim, avaliamos o wronskiano de todas as três soluções, expandido-o ao longo da segunda linha e usando as EDOs para o  $W_{jk}$ :

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} = -y'_1 W'_{23} + y'_2 W'_{13} - y'_3 W'_{12} \\ &= P(y'_1 W_{23} - y'_2 W_{13} + y'_3 W_{12}) = -P \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

<sup>16</sup>Compare com H. Lass, *Elements of Pure and Applied Mathematics*, Nova York: McGraw-Hill (1957), p. 187, para prova dessa asserção. Admite-se que as funções têm derivadas contínuas e que no mínimo um dos menores da linha de baixo da Equação (9.116) (expansão de Laplace) não desaparece em  $[a, b]$ , o intervalo que está em consideração.



O wronskiano que se anula,  $W = 0$ , por causa de duas linhas idênticas, é exatamente a condição para dependência linear das soluções  $y_j$ . Assim, há no máximo duas soluções linearmente independentes da EDO homogênea. De modo semelhante, podemos provar que uma EDO linear homogênea de enésima ordem tem  $n$  soluções linearmente independentes  $y_j$ , portanto a solução geral  $y(x) = \sum c_j y_j(x)$  é uma combinação linear delas.

### Uma Segunda Solução

Voltando à nossa EDO linear homogênea de segunda ordem da forma geral

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{9.118}$$

sejam  $y_1$  e  $y_2$  duas soluções independentes. Então, por definição, o wronskiano é

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2. \tag{9.119}$$

Diferenciando o wronskiano, obtemos

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1 [-P(x)y_2' - Q(x)y_2] - y_2 [-P(x)y_1' - Q(x)y_1] \\ &= -P(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2). \end{aligned}$$

A expressão entre parênteses é exatamente  $W$ , o wronskiano, e temos

$$W' = -P(x)W. \tag{9.120}$$

No caso especial em que  $P(x) = 0$ , isto é,

$$y'' + Q(x)y = 0, \tag{9.121}$$

o wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \text{constante}. \tag{9.122}$$

Visto que nossa equação diferencial original é homogênea, podemos multiplicar as soluções  $y_1$  e  $y_2$  por quaisquer constantes que desejarmos e organizar para que o wronskiano seja igual à unidade (ou  $-1$ ). Esse caso,  $P(x) = 0$ , aparece com mais freqüência do que poderíamos esperar. Lembre-se de que a porção de  $\nabla^2 (\frac{\psi}{r})$  em coordenadas polares esféricas que envolve derivadas radiais não contém nenhuma derivada radial de primeira ordem. Por fim, toda equação diferencial linear de segunda ordem pode ser transformada em uma equação da forma da Equação (9.121) (compare com o Exercício 9.6.11).

Para o caso geral, agora vamos admitir que temos uma solução da Equação (9.118) por uma substituição de série (ou por suposição). Passamos agora a desenvolver uma segunda solução, independente, para a qual  $W \neq 0$ . Reescrevendo a Equação (9.120) como,

$$\frac{dW}{W} = -P dx,$$

integramos sobre a variável  $x$ , de  $a$  a  $x$ , para obter

$$\ln \frac{W(x)}{W(a)} = - \int_a^x P(x_1) dx_1,$$

ou<sup>17</sup>

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x P(x_1) dx_1 \right]. \tag{9.123}$$

Mas

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right). \tag{9.124}$$

Combinando as equações (9.123) e (9.124), temos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = W(a) \frac{\exp \left[ - \int_a^x P(x_1) dx_1 \right]}{y_1^2}. \tag{9.125}$$

<sup>17</sup>Se  $P(x)$  permanecer finita no domínio de interesse,  $W(x) \neq 0$ , menos que  $W(a) = 0$ . Isto é, o wronskiano de nossas duas soluções ou é identicamente igual a zero ou nunca é zero. Contudo, se  $P(x)$  não permanecer finita em nosso intervalo, então  $W(x)$  pode ter zeros isolados naquele domínio e devemos ter cuidado para escolher  $a$ , de modo que  $W(a) \neq 0$ .

Por fim, integrando a Equação (9.125) de  $x_2 = b$  a  $x_2 = x$ , obtemos

$$y_2(x) = y_1(x)W(a) \int_b^x \frac{\exp[-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2. \tag{9.126}$$

Aqui,  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias e um termo  $y_1(x)y_2(b)/y_1(b)$  foi descartado porque não leva a nada de novo. Uma vez que  $W(a)$ , o wronskiano avaliado em  $x = a$ , é uma constante e nossas soluções para a equação diferencial homogênea sempre contêm um fator normalizador desconhecido, fazemos  $W(a) = 1$  e escrevemos

$$y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{\exp[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2. \tag{9.127}$$

Note que os limites inferiores  $x_1 = a$  e  $x_2 = b$  foram omitidos. Se fossem conservados, simplesmente dariam uma contribuição igual a uma constante vezes a primeira solução conhecida,  $y_1(x)$ , e, por conseguinte, nada acrescentariam de novo. Se tivermos o importante caso especial de  $P(x) = 0$ , a Equação (9.127) se reduz a

$$y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2}. \tag{9.128}$$

Isso significa que, usando a Equação (9.127) ou a Equação (9.128), podemos tomar uma solução conhecida e, por integração, gerar uma segunda solução independente da Equação (9.118). Essa técnica é usada na Seção 12.10 para gerar uma segunda solução da equação diferencial de Legendre.

### Exemplo 9.6.3 UMA SEGUNDA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DO OSCILADOR LINEAR

Por  $d^2y/dx^2 + y = 0$ , com  $P(x) = 0$ , seja uma solução de  $y_1 = \text{sen}x$ . Aplicando a Equação (9.128), obtemos

$$y_2(x) = \text{sen}x \int_b^x \frac{dx_2}{\text{sen}^2x_2} = \text{sen}x(-\text{cot}gx) = -\cos x,$$

que é claramente independente (não um múltiplo linear) de  $\text{sen}x$ . ■

### Forma de Série da Segunda Solução

A seguinte seqüência de operações pode nos dar uma idéia melhor da natureza da segunda solução de nossa equação diferencial.

1. Expresse  $P(x)$  e  $Q(x)$  na Equação (9.118) como

$$P(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j. \tag{9.129}$$

Os limites mais baixos dos somatórios são selecionados para criar a singularidade **regular** mais forte possível (na origem). Essas condições satisfazem exatamente o teorema de Fuchs e assim nos ajudam a entender melhor esse teorema.

2. Desenvolva alguns dos primeiros termos de uma solução de série de potências, como na Seção 9.5.
3. Usando essa solução como  $y_1$ , obtenha uma segunda solução do tipo de série,  $y_2$ , com a Equação (9.127), integrando termo a termo.

Passando para a etapa 1, temos

$$y'' + (p_{-1}x^{-1} + p_0 + p_1x + \dots)y' + (q_{-2}x^{-2} + q_{-1}x^{-1} + \dots)y = 0, \tag{9.130}$$

na qual o ponto  $x = 0$ , na pior das hipóteses, é um ponto singular regular. Se  $p_{-1} = q_{-1} = q_{-2} = 0$ , ele se reduz a um ponto ordinário. Substituindo

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda}$$

(etapa 2), obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1)a_{\lambda}x^{k+\lambda-2} + \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)a_{\lambda}x^{k+\lambda-1} \\ & + \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}x^{k+\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{9.131}$$





Admitindo que  $p_{-1} \neq 0, q_{-2} \neq 0$ , nossa equação indicial é

$$k(k-1) + p_{-1}k + q_{-2} = 0,$$

que estabelece o coeficiente líquido de  $x^{k-2}$  como igual a zero. A expressão reduz a expressão a

$$k^2 + (p_{-1} - 1)k + q_{-2} = 0. \quad (9.132)$$

Denotamos as duas raízes dessa equação indicial por  $k = \alpha$  e  $k = \alpha - n$ , em que  $n$  é zero ou um inteiro positivo. (Se  $n$  não for um inteiro, esperamos duas soluções de série independentes pelos métodos da Seção 9.5 e pronto). Então,

$$(k - \alpha)(k - \alpha + n) = 0, \quad (9.133)$$

ou

$$k^2 + (n - 2\alpha)k + \alpha(\alpha - n) = 0,$$

e igualando coeficientes de  $k$  nas Equações (9.132) e (9.133), temos

$$p_{-1} - 1 = n - 2\alpha. \quad (9.134)$$

A solução de série conhecida correspondente à raiz maior  $k = \alpha$  pode ser escrita como

$$y_1 = x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda.$$

Substituindo essa solução de série na Equação (9.127) (etapa 3), deparamos-nos com

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp(-\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1)}{x_2^{2\alpha} (\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda)^2} dx_2, \quad (9.135)$$

em que as soluções  $y_1$  e  $y_2$  foram normalizadas, de modo que o wronskiano  $W(a) = 1$ . Atacando o fator exponencial em primeiro lugar, temos

$$\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 = p_{-1} \ln x_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + f(a) \quad (9.136)$$

sendo  $f(a)$  uma constante de integração que pode depender de  $a$ . Por conseqüência,

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\int_a^{x_2} \sum_i p_i x_1^i dx_1\right) \\ &= \exp[-f(a)] x_2^{-p_{-1}} \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}\right) \\ &= \exp[-f(a)] x_2^{-p_{-1}} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + \frac{1}{2!} \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}\right)^2 + \dots\right]. \end{aligned} \quad (9.137)$$

Essa expansão de série final da exponencial certamente é convergente se a expansão original do coeficiente  $P(x)$  for uniformemente convergente.

O denominador na Equação (9.135) pode ser manipulado escrevendo-se

$$\left[x_2^{2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2\right]^{-1} = x_2^{-2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^{-2} = x_2^{-2\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x_2^\lambda. \quad (9.138)$$

Desprezando fatores constantes que de qualquer modo serão apanhados pela imposição de  $W(a) = 1$ , obtemos

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-p_{-1}-2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x_2^\lambda\right) dx_2. \quad (9.139)$$

Pela Equação (9.134),

$$x_2^{-p-1-2\alpha} = x_2^{-n-1}, \tag{9.140}$$

e aqui admitimos que  $n$  é um inteiro. Substituindo esse resultado na Equação (9.139), obtemos

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x (c_0 x_2^{-n-1} + c_1 x_2^{-n} + c_2 x_2^{-n+1} + \dots + c_n x_2^{-1} + \dots) dx_2. \tag{9.141}$$

A integração indicada na Equação (9.141) leva a um coeficiente  $y_1(x)$  que consiste em duas partes:

1. Uma série de potências começando com  $x^{-n}$ .
2. Um termo logarítmico da integração de  $x^{-1}$  (quando  $\lambda = n$ ). Esse termo sempre aparece quando  $n$  é um inteiro, **a menos que**  $c_n$  desapareça.<sup>18</sup>

### Exemplo 9.6.4 UMA SEGUNDA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BESSEL

Pela equação de Bessel, equação (9.100) (dividida por  $x^2$  para ficar de acordo com a Equação (9.118)), temos

$$P(x) = x^{-1} \quad Q(x) = 1 \quad \text{para o caso de } n = 0.$$

Daí,  $p_{-1} = 1$ ,  $q_0 = 1$ ; todos os outros  $p_i$  e  $q_j$  desaparecem. A equação indicial de Bessel é

$$k^2 = 0$$

(Equação (9.103) com  $n = 0$ ). Por conseguinte, verificamos as Equações (9.132) a (9.134) com  $n$  e  $\alpha = 0$ .

Nossa primeira solução está disponível pela Equação (9.108). Dando-lhe um novo rótulo para ficar de acordo com o Capítulo 11 (e usando  $a_0 = 1$ ), obtemos<sup>19</sup>

$$y_1(x) = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - O(x^6). \tag{9.142a}$$

Agora, substituindo tudo isso na Equação (9.127), temos o caso específico correspondente à Equação (9.135):

$$y_2(x) = J_0(x) \int^x \frac{\exp[-\int^{x_2} x_1^{-1} dx_1]}{[1 - x_2^2/4 + x_2^4/64 - \dots]^2} dx_2. \tag{9.142b}$$

Pelo numerador do integrando,

$$\exp\left[-\int^{x_2} \frac{dx_1}{x_1}\right] = \exp[-\ln x_2] = \frac{1}{x_2}.$$

Isso corresponde ao  $x_2^{-p-1}$  na Equação (9.137). Do denominador do integrando, usando uma expansão binomial, obtemos

$$\left[1 - \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_2^4}{64}\right]^{-2} = 1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + \dots.$$

Correspondente à Equação (9.139), temos

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \int^x \frac{1}{x_2} \left[1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + \dots\right] dx_2 \\ &= J_0(x) \left\{ \ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots \right\}. \end{aligned} \tag{9.142c}$$

Vamos verificar esse resultado. Pelas Equações (11.62) e (11.64), que dão a forma padrão da segunda solução (são necessários termos de ordens mais altas),

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} [\ln x - \ln 2 + \gamma] J_0(x) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \dots \right\}. \tag{9.142d}$$

Surgem dois pontos: (1) uma vez que a equação de Bessel é homogênea, podemos multiplicar  $y_2(x)$  por qualquer constante. Para ficar compatível com  $N_0(x)$ , multiplicamos nosso  $y_2(x)$  por  $2/\pi$ . (2) Para nossa segunda solução,

<sup>18</sup>Para considerações de paridade, consideramos que  $\ln x$  é  $\ln |x|$ , par.

<sup>19</sup>O  $O$  maiúsculo (ordem de) como escrito aqui significa termos proporcionais a  $x^6$  e possivelmente potências mais altas de  $x$ .



$(2/\pi)y_2(x)$ , podemos adicionar qualquer constante múltipla da primeira solução. Mais uma vez, para ficar compatível com  $N_0(x)$ , adicionamos

$$\frac{2}{\pi}[-\ln 2 + \gamma]J_0(x),$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Mascheroni usual (Seção 5.2).<sup>20</sup> Nossa nova segunda solução modificada é

$$y_2(x) = \frac{2}{\pi}[\ln x - \ln 2 + \gamma]J_0(x) + \frac{2}{\pi}J_0(x)\left\{\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots\right\}. \quad (9.142e)$$

Agora, a comparação com  $N_0(x)$  se torna uma simples multiplicação de  $J_0(x)$  da Equação (9.142a) e da chave da Equação (9.142c). A multiplicação confere, por meio dos termos de ordem  $x^2$  e  $x^4$ , que é tudo o que transportamos. Nossa segunda solução pelas Equações (9.127) e (9.135) está de acordo com a segunda solução padrão, a função de Neumann,  $N_0(x)$ .

Pela análise precedente, a segunda solução da Equação (9.118),  $y_2(x)$ , pode ser escrita como

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{j=-n}^{\infty} d_j x^{j+\alpha}, \quad (9.142f)$$

a primeira solução vezes  $\ln x$  e uma outra série de potências, esta começando com  $x^{\alpha-n}$ , o que significa que podemos procurar um termo logarítmico quando a equação indicial da Seção 9.5 der apenas uma solução de série. Com a forma da segunda solução especificada pela Equação (9.142f), podemos substituir a Equação (9.142f) na equação diferencial original e determinar os coeficientes  $d_j$  exatamente como na Seção 9.5. Talvez valha a pena notar que não é necessária nenhuma expansão de série de  $\ln x$ .  $\ln x$  será descartado na substituição; suas derivadas sobreviverão. ■

A segunda solução usualmente divergirá na origem por causa do fator logarítmico e das potências negativas de  $x$  na série. Por essa razão,  $y_2(x)$  normalmente é denominada **solução irregular**. A primeira solução de série,  $y_1(x)$ , que usualmente converge na origem, é denominada **solução regular**. A questão do comportamento na origem é discutida com mais detalhes nos Capítulos 11 e 12, nos quais voltamos às funções de Bessel, funções modificadas de Bessel e funções de Legendre.

### Resumo

As duas soluções de ambas as seções (juntamente com os exercícios) dão uma **solução completa** de nossa EDO linear homogênea de segunda ordem — admitindo que o ponto de expansão não é pior do que uma singularidade regular. Ao menos uma solução sempre pode ser obtida por substituição de série (Seção 9.5). Uma **segunda solução, linearmente independente**, pode ser construída pela dupla integral **wronskiana** Equação (9.127). Isso é tudo: **não existe nenhuma terceira solução linearmente independente** (compare com o Exercício 9.6.10).

A EDO linear **não-homogênea**, de segunda ordem terá uma solução **adicional: solução particular**. Essa solução particular pode ser obtida pelo método de variação de parâmetros, Exercício 9.6.25, ou por técnicas como a função de Green, Seção 9.7.

### Exercícios

**9.6.1** Você sabe que os três vetores unitários  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são mutuamente perpendiculares (ortogonais). Mostre que  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são linearmente independentes. Especificamente, mostre que não existe nenhuma relação da forma da Equação (9.111) para  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ .

**9.6.2** O critério para a **independência** linear de três vetores **A**, **B** e **C** é que a equação

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0$$

(análoga à Equação (9.111)) não tenha nenhuma outra solução, exceto a trivial  $a = b = c = 0$ . Usando componentes  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ , e assim por diante, estabeleça o critério determinante para a existência ou não-existência de uma solução não-trivial para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Mostre que seu critério é equivalente ao produto escalar triplo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \neq 0$ .

<sup>20</sup>A função de Neumann  $N_0$  é definida como é para conseguir propriedades assintóticas convenientes, Seções 11.3 e 11.6.

9.6.3 Usando o determinante wronskiano, mostre que o conjunto de funções

$$\left\{ 1, \frac{x^n}{n!} (n = 1, 2, \dots, N) \right\}$$

é linearmente independente.

9.6.4 Se o wronskiano de duas funções  $y_1$  e  $y_2$  é identicamente zero, mostre por integração direta que

$$y_1 = cy_2,$$

isto é, que  $y_1$  e  $y_2$  são dependentes. Admita que as funções têm derivadas contínuas e que ao menos uma das funções não desaparece no intervalo considerado.

9.6.5 Constata-se que o wronskiano de duas funções é zero em  $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$  para  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno. Mostre que esse wronskiano desaparece para todo  $x$  e que as funções são linearmente dependentes.

9.6.6 As três funções  $\text{sen}x$ ,  $e^x$ , e  $e^{-x}$  são linearmente independentes. Não é possível escrever nenhuma função como uma combinação linear das outras duas. Mostre que o wronskiano de  $\text{sen}x$ ,  $e^x$ , e  $e^{-x}$  desaparece, mas somente em pontos isolados.

Resposta:  $W = 4\text{sen}x$ ,

$$W = 0 \text{ para } x = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

9.6.7 Considere duas funções  $\varphi_1 = x$  e  $\varphi_2 = |x| = x \text{sgn} x$  (Figura 9.3). A função  $\text{sgn} x$  é o sinal de  $x$ . Uma vez que  $\varphi_1' = 1$  e  $\varphi_2' = \text{sgn} x$ ,  $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$  para qualquer intervalo, incluindo  $[-1, +1]$ . O desaparecimento do wronskiano em  $[-1, +1]$  prova que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são linearmente dependentes? É claro que não são. O que está errado?

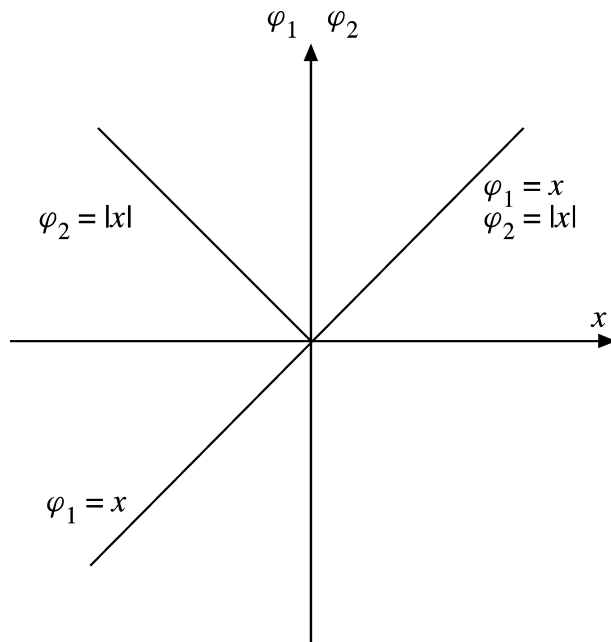


Figura 9.3:  $x$  e  $|x|$ .

9.6.8 Explique que a **independência linear** não significa a ausência de qualquer dependência. Ilustre seu argumento com  $\cosh x$  e  $e^x$ .

9.6.9 A equação diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

tem uma solução regular  $P_n(x)$  e uma solução irregular  $Q_n(x)$ . Mostre que o wronskiano de  $P_n$  e  $Q_n$  é dado por

$$P_n(x)Q_n'(x) - P_n'(x)Q_n(x) = \frac{A_n}{1 - x^2},$$



com  $A_n$  **independente** de  $x$ .

**9.6.10** Mostre, por meio do wronskiano, que uma EDO linear homogênea de segunda ordem da forma

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

**não pode ter três soluções independentes.** (Admita uma terceira solução e mostre que o wronskiano desaparece para todo  $x$ .)

**9.6.11** Transforme nossa EDO linear de segunda ordem

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

pela substituição

$$y = z \exp\left[-\frac{1}{2} \int^x P(t) dt\right]$$

e mostre que a equação diferencial resultante para  $z$  é

$$z'' + q(x)z = 0,$$

em que

$$q(x) = Q(x) - \frac{1}{2}P'(x) - \frac{1}{4}P^2(x).$$

*Nota:* Essa substituição pode ser derivada pela técnica do Exercício 9.6.24.

**9.6.12** Use o resultado do Exercício 9.6.11 para mostrar que se pode esperar que a substituição de  $\varphi(r)$  por  $r\varphi(r)$  elimine a derivada de primeira ordem do laplaciano em coordenadas polares esféricas. Veja também o Exercício 2.5.18(b).

**9.6.13** Por diferenciação direta e substituição, mostre que

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp[-\int^s P(t) dt]}{[y_1(s)]^2} ds$$

satisfaz (assim como  $y_1(x)$ ) a EDO

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = 0.$$

*Nota:* A fórmula de Leibniz para a derivada de uma integral é

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f[h(\alpha), \alpha] \frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f[g(\alpha), \alpha] \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}.$$

**9.6.14** Na equação

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp[-\int^s P(t) dt]}{[y_1(s)]^2} ds$$

$y_1(x)$  satisfaz

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0.$$

A função  $y_2(x)$  é uma segunda solução linearmente **independente** da mesma equação. Mostre que a inclusão de limites inferiores nas duas integrais não leva a nada de novo, isto é, apenas gera um fator constante global e uma constante que é um múltiplo da solução conhecida  $y_1(x)$ .

**9.6.15** Dado que uma solução de

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R = 0$$

é  $R = r^m$ , mostre que a Equação (9.127) prevê uma segunda solução,  $R = r^{-m}$ .

**9.6.16** Usando  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)!$  como uma solução da equação do oscilador linear, siga a análise que culminou na Equação (9.142f) e mostre que  $c_1 = 0$ , de modo que, nesse caso, a segunda solução não contém um termo logarítmico.

**9.6.17** Mostre que, quando  $n$  **não** é um inteiro na EDO de Bessel, Equação (9.100), a segunda solução da equação de Bessel, obtida pela Equação (9.127), **não** contém um termo logarítmico.

**9.6.18** (a) Uma solução da equação diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

para  $\alpha = 0$  é  $y_1(x) = 1$ . Ache uma segunda solução,  $y_2(x)$ , usando a Equação (9.127). Mostre que sua segunda solução é equivalente a  $y_{\text{ímpar}}$  (Exercício 9.5.6).

(b) Ache uma segunda solução para  $\alpha = 1$ , em que  $y_1(x) = x$ , usando a Equação (9.127). Mostre que sua segunda solução é equivalente a  $y_{\text{par}}$  (Exercício 9.5.6).

**9.6.19** Uma solução da equação diferencial de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

para  $n = 0$  é  $y_1(x) = 1$ . Usando a Equação (9.127), desenvolva uma segunda solução, linearmente independente. Exiba explicitamente o termo logarítmico.

**9.6.20** Para a equação de Laguerre com  $n = 0$ ,

$$y_2(x) = \int^x \frac{e^s}{s} ds.$$

(a) Escreva  $y_2(x)$  como um logaritmo mais uma série de potências.

(b) Verifique que a forma integral de  $y_2(x)$ , dada anteriormente, é uma solução da equação de Laguerre ( $n = 0$ ) por diferenciação direta da integral e substituição na equação diferencial.

(c) Verifique que a forma de série de  $y_2(x)$ , parte (a), é uma solução diferenciando a série e a substituindo de volta na equação de Laguerre.

**9.6.21** Uma solução da equação de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

para  $n = 0$  é  $y_1 = 1$ .

(a) Usando a Equação (9.127), desenvolva uma segunda solução, linearmente independente.

(b) Ache uma segunda solução por integração direta da equação de Chebyshev.

*Sugestão:* Faça  $v = y'$  e integre. Compare seu resultado com a segunda solução dada na Seção 13.3.

Resposta: (a)  $y_2 = \text{sen}^{-1}x$ .

(b) A segunda solução,  $V_n(x)$ , não é definida para  $n = 0$ .

**9.6.22** Uma solução da equação de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

para  $n = 1$  é  $y_1(x) = x$ . Estabeleça a solução de dupla integral wronskiana e derive uma segunda solução,  $y_2(x)$ .

Resposta:  $y_2 = -(1 - x^2)^{1/2}$ .

**9.6.23** A equação de onda radial de Schrödinger tem a forma

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + l(l+1) \frac{\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] y(r) = Ey(r).$$

A energia potencial  $V(r)$  pode ser expandida em torno da origem como

$$V(r) = \frac{b_{-1}}{r} + b_0 + b_1r + \dots$$

(a) Mostre que há uma solução (regular) começando com  $r^{l+1}$ .

(b) Pela Equação (9.128), mostre que a solução irregular diverge na origem quando  $r^{-l}$ .



**9.6.24** Mostre que, se admitirmos que a segunda solução,  $y_2$ , tem a forma  $y_2(x) = y_1(x)f(x)$ , substituí-la de volta na equação original

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

leva a

$$f(x) = \int^x \frac{\exp[-\int^s P(t)dt]}{[y_1(s)]^2} ds,$$

de acordo com a Equação (9.127).

**9.6.25** Se nossa EDO linear de segunda ordem for não-homogênea, isto é, da forma da Equação (9.82), a **solução mais geral** é

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_p(x).$$

( $y_1$  e  $y_2$  são soluções independentes da equação homogênea.)

Mostre que

$$y_p(x) = y_2(x) \int^x \frac{y_1(s)F(s) ds}{W\{y_1(s), y_2(s)\}} - y_1(x) \int^x \frac{y_2(s)F(s) ds}{W\{y_1(s), y_2(s)\}},$$

com  $W\{y_1(x), y_2(x)\}$  o wronskiano de  $y_1(s)$  e  $y_2(s)$ .

*Sugestão:* Assim como no Exercício 9.6.24, faça  $y_p(x) = y_1(x)v(x)$  e desenvolva uma equação diferencial de primeira ordem para  $v'(x)$ .

**9.6.26** (a) Mostre que

$$y'' + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} y = 0$$

tem duas soluções:

$$y_1(x) = a_0 x^{(1+\alpha)/2},$$

$$y_2(x) = a_0 x^{(1-\alpha)/2}.$$

(b) Para  $\alpha = 0$ , as duas soluções linearmente independentes da parte (a) se reduzem a  $y_{10} = a_0 x^{1/2}$ . Usando a Equação (9.128), derive uma segunda solução,

$$y_{20}(x) = a_0 x^{1/2} \ln x.$$

Verifique que  $y_{20}$  é, de fato, uma solução.

(c) Mostre que a segunda solução da parte (b) pode ser obtida como um caso-limite pelas duas soluções da parte (a):

$$y_{20}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{y_1 - y_2}{\alpha} \right).$$

## 9.7 Equação Não-Homogênea — Função de Green

A substituição de série da Seção 9.5 e a dupla integral wronskiana da Seção 9.6 dão a solução mais geral da EDO linear **homogênea** de segunda ordem. A solução específica,  $y_p$ , linearmente dependente do termo fonte ( $F(x)$  da Equação (9.82)) pode ser extraída pelo método de variação de parâmetros, Exercício 9.6.25. Nesta seção, recorreremos a um método de solução diferente — a função de Green.

Uma analogia eletrostática é muito útil para uma breve introdução ao método da função de Green, como aplicado à solução da EDP não-homogênea. Na presença de cargas, o potencial eletrostático  $\psi$  satisfaz a equação não-homogênea de Poisson (compare com a Seção 1.14),

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{unidades mks}), \quad (9.143)$$

e a equação homogênea de Laplace,

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (9.144)$$

na ausência de carga elétrica ( $\rho = 0$ ). Se as cargas forem cargas pontuais  $q_i$ , sabemos que a solução é

$$\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (9.145)$$

uma superposição de soluções de carga aplicada a um ponto único obtida pela lei de Coulomb para a força entre duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$ ,

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (9.146)$$

Por substituição das cargas pontuais discretas por uma carga distribuída da forma espalhada, a densidade de carga  $\rho$ , Equação (9.145), se torna

$$\psi(r=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} d\tau \quad (9.147)$$

ou, para o potencial em  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$  distante da origem e da carga em  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ ,

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_2. \quad (9.148)$$

Usamos  $\psi$  como o potencial correspondente à distribuição de carga dada e, por conseguinte, satisfazemos a equação de Poisson (9.143). Entretanto, para satisfazer a equação de Poisson com uma fonte pontual no ponto definido por  $\mathbf{r}_2$ , precisamos de uma função  $G$ , que denominamos função de Green:

$$\boxed{\nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (9.149)$$

Então, em termo físicos,  $G$  é o potencial em  $\mathbf{r}_1$  correspondente a uma fonte unitária em  $\mathbf{r}_2$ . Pelo teorema de Green (Seção 1.11, Equação (11.104)),

$$\int (\psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \psi) d\tau_2 = \int (\psi \nabla G - G \nabla \psi) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (9.150)$$

Admitindo que o integrando caia mais rapidamente do que  $r^{-2}$ , podemos simplificar nosso problema considerando o volume tão grande que a integral de superfície desaparece, deixando

$$\int \psi \nabla^2 G d\tau_2 = \int G \nabla^2 \psi d\tau_2, \quad (9.151)$$

ou, por substituição nas Equações (9.143) e (9.149), temos

$$-\int \psi(\mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\tau_2 = -\int \frac{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_2)}{\epsilon_0} d\tau_2. \quad (9.152)$$

A integração empregando a propriedade definidora da função delta de Dirac (Equação (1.171b)) resulta em

$$\boxed{\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_2) d\tau_2}. \quad (9.153)$$

Note que usamos a Equação (9.149) para eliminar  $\nabla^2 G$ , mas que a função  $G$  em si ainda é desconhecida. Na Seção 1.14, lei de Gauss, constatamos que

$$\int \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = \begin{cases} 0, \\ -4\pi, \end{cases} \quad (9.154)$$

0, se o volume não incluir a origem, e  $-4\pi$ , se a origem for incluída. Esse resultado da Seção 1.14 pode ser reescrito como na Equação (1.170), ou

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta(\mathbf{r}), \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi r_{12}} \right) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (9.155)$$

que corresponde a um deslocamento da carga eletrostática desde a origem até a posição  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ . Aqui,  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , e a função delta de Dirac  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  desaparece, a menos que  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . Por conseguinte, comparando as Equações (9.149) e (9.155), a função  $G$  (função de Green) é dada por

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (9.156)$$





A solução de nossa equação diferencial (equação de Poisson) é

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_2, \quad (9.157)$$

em total concordância com a Equação (9.148). Na verdade,  $\psi(\mathbf{r}_1)$ , Equação (9.157), é a solução particular da equação de Poisson. Podemos adicionar soluções da equação de Laplace (compare com Equação (9.83)). Tais soluções poderiam descrever um campo externo.

Esses resultados serão generalizados para a equação diferencial linear de segunda ordem, mas não-homogênea

$$\mathcal{L}y(\mathbf{r}_1) = -f(\mathbf{r}_1), \quad (9.158)$$

em que  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial linear. A função de Green é considerada uma solução de

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (9.159)$$

análoga à Equação (9.149). A função de Green depende de condições de contorno que podem não ser mais aquelas da eletrostática em uma região de extensão infinita. Então, a solução particular  $y(\mathbf{r}_1)$  se torna

$$y(\mathbf{r}_1) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) d\tau_2. \quad (9.160)$$

(Também pode haver uma integral sobre uma superfície limitadora, dependendo das condições especificadas.)

*Resumindo, de modo mais geral a função de Green, que costuma ser escrita  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  como um lembrete de seu nome, é uma solução da Equação (9.149) ou da Equação (9.159). Ela entra em uma solução integral de nossa equação diferencial, como nas equações (9.148) e (9.153). Para o caso simples porém importante da eletrostática, obtemos a função de Green,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , pela lei de Gauss, comparando as Equações (9.149) e (9.155). Por fim, pela solução final (Equação (9.157)), é possível desenvolver uma interpretação física da função de Green. Ela ocorre como uma função ponderadora ou função propagadora que acentua ou reduz o efeito do elemento de carga  $\rho(\mathbf{r}_2) d\tau_2$ , conforme sua distância do ponto de campo  $\mathbf{r}_1$ . A função de Green,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , dá o efeito de uma fonte pontual unitária em  $\mathbf{r}_2$  na produção de um potencial em  $\mathbf{r}_1$ . É assim que ela foi introduzida na Equação (9.149); é assim que ela aparece na Equação (9.157).*

### Simetria da Função de Green

Uma importante propriedade da função de Green é a simetria de suas duas variáveis, isto é,

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (9.161)$$

Embora seja óbvio no caso eletrostático que acabamos de considerar, isso pode ser provado sob condições mais gerais. No lugar da Equação (9.149), vamos impor que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  satisfaça<sup>21</sup>

$$\nabla \cdot [p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] + \lambda q(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (9.162)$$

correspondente a uma fonte pontual matemática em  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ . Aqui, as funções  $p(\mathbf{r})$  e  $q(\mathbf{r})$  são bem-comportadas mas, por outro lado, são funções arbitrárias de  $\mathbf{r}$ . A função de Green,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ , satisfaz a mesma equação, mas o índice inferior 1 é substituído pelo índice 2. As funções de Green,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  e  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ , têm os mesmos valores sobre uma dada superfície  $S$  de algum volume de extensão finita ou infinita, e suas derivadas normais têm os mesmos valores sobre a superfície  $S$  ou essas funções de Green se anulam em  $S$  (condições de contorno de Dirichlet, Seção 9.1).<sup>22</sup> Então,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  é uma espécie de potencial em  $\mathbf{r}$ , criado por uma fonte pontual unitária em  $\mathbf{r}_2$ .

Multiplicamos a equação para  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  por  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  e a equação para  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  por  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ , e então subtraímos as duas:

$$\begin{aligned} & G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\nabla \cdot [p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\nabla \cdot [p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] \\ &= -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (9.163)$$

<sup>21</sup>A Equação (9.162) é uma versão tridimensional não-homogênea da equação de autovalor **auto-adjunta**, Equação (10.8).

<sup>22</sup>Qualquer tentativa de exigir que as derivadas normais desapareçam na superfície (condições de Neumann, Seção 9.1) leva a problemas com a lei de Gauss. É como exigir que  $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$  quando você sabe perfeitamente bem que há alguma carga elétrica dentro da superfície.

O primeiro termo na Equação (9.163),

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \nabla \cdot [\mathbf{p}(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)],$$

pode ser substituído por

$$\nabla \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \mathbf{p}(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] - \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1).$$

Uma transformação similar é executada no segundo termo. Então, integrando sobre o volume cuja superfície é  $S$  e usando o teorema de Green, obtemos uma integral de superfície

$$\begin{aligned} \int_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \mathbf{p}(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \mathbf{p}(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] \cdot d\sigma \\ = -G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (9.164)$$

Os termos do lado direito aparecem quando usamos as funções delta de Dirac na Equação (9.163) e efetuamos a integração do volume. Com as condições de fronteira impostas anteriormente sobre a função de Green, a integral de superfície desaparece e

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (9.165)$$

que mostra que a função de Green é simétrica. Se as autofunções forem complexas, as condições de fronteira correspondentes às equações (10.19) a (10.20) são adequadas. A Equação (9.165) se torna

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (9.166)$$

Note que essa propriedade de simetria vale para funções de Green em toda equação na forma da Equação (9.162). No Capítulo 10 daremos o nome de *auto-adjuntas* a equações dessa forma. A simetria é a base de vários teoremas de reciprocidade; o efeito de uma carga em  $\mathbf{r}_2$  sobre o potencial em  $\mathbf{r}_1$  é o mesmo que o efeito de uma carga em  $\mathbf{r}_1$  sobre o potencial em  $\mathbf{r}_2$ .

Essa utilização de funções de Green é uma poderosa técnica para resolver muitos dos mais difíceis problemas da Física Matemática.

### Forma das Funções de Green

Vamos admitir que  $\mathcal{L}$  seja um operador diferencial auto-adjunto da forma geral<sup>23</sup>

$$\mathcal{L}_1 = \nabla_1 \cdot [\mathbf{p}(\mathbf{r}_1) \nabla_1] + q(\mathbf{r}_1). \quad (9.167)$$

Aqui, o índice 1 em  $\mathcal{L}$  acentua que  $\mathcal{L}$  opera sobre  $\mathbf{r}_1$ . Então, como uma simples generalização do teorema de Green, Equação (1.104), temos

$$\int (v \mathcal{L}_2 u - u \mathcal{L}_2 v) d\tau_2 = \int p(v \nabla_2 u - u \nabla_2 v) \cdot d\sigma_2, \quad (9.168)$$

na qual todas as quantidades têm  $\mathbf{r}_2$  como seu argumento. (Para verificar a Equação (9.168), tome a divergência do integrando da integral de superfície). Fazemos  $u(\mathbf{r}_2) = y(\mathbf{r}_2)$ , de modo que a Equação (9.158) se aplica e  $v(\mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , de modo que a Equação (9.159) se aplica. (Lembre-se de que  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ .) Substituindo no teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int \{-G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) + y(\mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\} d\tau_2 \\ = \int p(\mathbf{r}_2) \{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \nabla_2 y(\mathbf{r}_2) - y(\mathbf{r}_2) \nabla_2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\} \cdot d\sigma_2. \end{aligned} \quad (9.169)$$

Quando integramos sobre a função delta de Dirac

$$\begin{aligned} y(\mathbf{r}_1) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) d\tau_2 \\ + \int p(\mathbf{r}_2) \{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \nabla_2 y(\mathbf{r}_2) - y(\mathbf{r}_2) \nabla_2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\} \cdot d\sigma_2, \end{aligned} \quad (9.170)$$

<sup>23</sup>  $\mathcal{L}_1$  pode estar em 1, 2 ou 3 dimensões (com interpretação adequada de  $\nabla_1$ ).



nossa solução para a Equação (9.158) aparece como uma integral de volume mais uma integral de superfície. Se **ambas**,  $y$  e  $G$ , satisfazem as condições de contorno de Dirichlet ou se ambas satisfazem as condições de contorno de Neumann, a integral de superfície se anula e recuperamos a Equação (9.160). A integral de volume é uma integral ponderada sobre o termo de fonte  $f(\mathbf{r}_2)$  com nossa função de Green  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  como a função ponderadora.

Para o caso especial de  $p(\mathbf{r}_1) = 1$  e  $q(\mathbf{r}_1) = 0$ ,  $\mathcal{L}$  é  $\nabla^2$ , o laplaciano. Vamos integrar

$$\nabla_1^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (9.171)$$

sobre um pequeno volume que inclui a fonte pontual. Então:

$$\int \nabla_1 \cdot \nabla_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\tau_1 = - \int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\tau_1 = -1. \quad (9.172)$$

A integral de volume da esquerda pode ser transformada pelo teorema de Gauss, assim como no desenvolvimento da lei de Gauss, Seção 1.14. Constatamos que

$$\int \nabla_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cdot d\sigma_1 = -1. \quad (9.173)$$

Diga-se de passagem que isso mostra que pode não ser possível impor uma condição de contorno de Neumann, que a derivada normal da função de Green,  $\partial G/\partial n$ , desaparece em toda a superfície.

Se estivermos em espaço tridimensional, a Equação (9.173) é satisfeita, tomando

$$\frac{\partial}{\partial r_{12}} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \quad (9.174)$$

A integração é sobre a superfície de uma esfera com centro em  $\mathbf{r}_2$ . A integral da Equação (9.174) é

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (9.175)$$

de acordo com a Seção 1.14.

Se estivermos em espaço bidimensional, a Equação (9.173) é satisfeita, tomando

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{12}} G(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|\rho_1 - \rho_2|}, \quad (9.176)$$

sendo  $\mathbf{r}$  substituído por  $\rho$ ,  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  e sendo a integração sobre a circunferência de um círculo com centro em  $\rho_2$ . Aqui,  $\rho_{12} = |\rho_1 - \rho_2|$ . Integrando a Equação (9.176), obtemos

$$G(\rho_1, \rho_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho_1 - \rho_2|. \quad (9.177)$$

Podemos adicionar a  $G(\rho_1, \rho_2)$  (e a  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ) qualquer múltiplo da solução regular da equação homogênea (de Laplace), conforme necessário para satisfazer as condições de contorno.

O comportamento da função de Green para o operador de Laplace na vizinhança da fonte pontual  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  mostrado pelas Equações (9.175) e (9.177) facilita a identificação das funções de Green para os outros casos, tais como a equação de Helmholtz e a equação modificada de Helmholtz.

1. Para  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ ,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  deve satisfazer a equação diferencial **homogênea**

$$\mathcal{L}_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2. \quad (9.178)$$

2. À medida que  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$  (ou  $\rho_1 \rightarrow \rho_2$ ),

$$G(\rho_1, \rho_2) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln |\rho_1 - \rho_2|, \quad \text{espaço bidimensional}, \quad (9.179)$$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad \text{espaço tridimensional}. \quad (9.180)$$

O termo  $\pm k^2$  no operador não afeta o comportamento de  $G$  perto do ponto singular  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . Por conveniência, as funções de Green para os operadores de Laplace, de Helmholtz e de Helmholtz modificada estão relacionadas na Tabela 9.5.

**Tabela 9.5** Funções de Green<sup>a</sup>

	Laplace $\nabla^2$	Helmholtz $\nabla^2 + k^2$	Helmholtz modificada $\nabla^2 - k^2$
Espaço unidimensional para $(-\infty, \infty)$	Nenhuma solução	$\frac{i}{2k} \exp(ik x_1 - x_2 )$	$\frac{1}{2k} \exp(-k x_1 - x_2 )$
Espaço bidimensional	$-\frac{1}{2\pi} \ln  \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 $	$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 )$	$\frac{1}{2\pi} K_0(k \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 )$
Espaço tridimensional	$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }$	$\frac{\exp(ik \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 )}{4\pi \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }$	$\frac{\exp(-k \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 )}{4\pi \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }$

<sup>a</sup> Essas são as funções de Green que satisfazem a condição de fronteira  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$ , quando  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \infty$  para os operadores de Laplace e Helmholtz modificados. Para o operador de Helmholtz,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  corresponde a uma onda de saída.  $H_0^{(1)}$  é a função de Hankel da Seção 11.4.  $K_0$  é a função modificada de Bessel da Seção 11.5.

### Expansão de Coordenadas Polares Esféricas<sup>24</sup>

Como determinação alternativa da função de Green do operador de Laplace, vamos admitir uma expansão harmônica esférica da forma

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r_1, r_2) Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2), \tag{9.181}$$

em que o índice  $l$  do somatório é o mesmo para os harmônicos esféricos, como uma consequência da simetria da função de Green. Agora, determinaremos as funções radiais  $g_l(r_1, r_2)$ . Pelos Exercícios 1.15.11 e 12.6.6,

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &= \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \end{aligned} \tag{9.182}$$

Substituindo as Equações (9.181) e (9.182) na equação diferencial da função de Green, Equação (9.171), e fazendo uso da ortogonalidade dos harmônicos esféricos, obtemos a equação radial

$$r_1 \frac{d^2}{dr_1^2} [r_1 g_l(r_1, r_2)] - l(l+1)g_l(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2). \tag{9.183}$$

Agora temos um problema unidimensional. As soluções<sup>25</sup> da equação homogênea correspondente são  $r_1^l$  e  $r_1^{-l-1}$ . Se exigirmos que  $g_l$  permaneça finita à medida que  $r_1 \rightarrow 0$  e desapareça quando  $r_1 \rightarrow \infty$ , a técnica da Seção 10.5 leva a

$$g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2l+1} \begin{cases} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}}, & r_1 < r_2, \\ \frac{r_2^l}{r_1^{l+1}}, & r_1 > r_2, \end{cases} \tag{9.184}$$

ou

$$g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}. \tag{9.185}$$

Daí, nossa função de Green é

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \tag{9.186}$$

<sup>24</sup>Esta seção é opcional aqui e pode ser adiada até o Capítulo 12.

<sup>25</sup>Compare com a Tabela 9.2.



Uma vez que já temos  $G(r_1, r_2)$  em forma fechada, Equação (9.175), podemos escrever

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \quad (9.187)$$

Uma utilização imediata para essa expansão harmônica esférica da função de Green é no desenvolvimento de uma expansão multipolar eletrostática. O potencial para uma distribuição arbitrária de carga é

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_2$$

(que é a Equação (9.148)). Substituindo a Equação (9.187), obtemos

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{1}{2l+1} \frac{Y_l^m(\theta_1, \varphi_1)}{r_1^{l+1}} \cdot \int \rho(\mathbf{r}_2) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) r_2^l d\varphi_2 \sin\theta_2 d\theta_2 r_2^2 dr_2 \right\}, \text{ para } r_1 > r_2.$$

Essa é a **expansão multipolar**. A importância relativa dos vários termos no somatório duplo depende da forma da fonte,  $\rho(\mathbf{r}_2)$ .

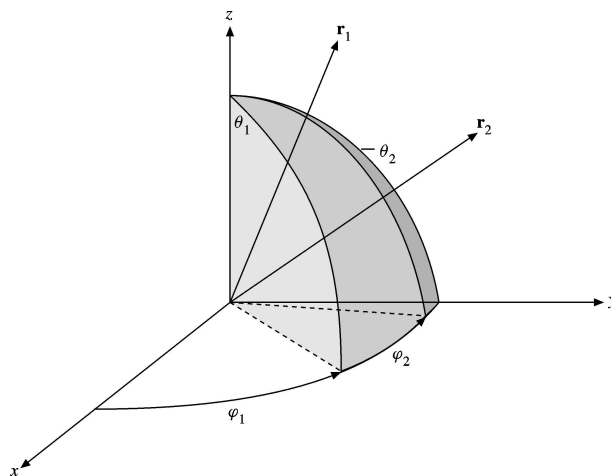


Figura 9.4: Coordenadas polares esféricas

### Teorema da Adição de Polinômio de Legendre<sup>26</sup>

Pela expressão geradora para polinômios de Legendre, Equação (12.4a),

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (9.188)$$

em que  $\gamma$  é o ângulo incluído entre os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , Figura 9.4. Igualando as Equações (9.187) e (9.188), temos o teorema da adição de polinômios de Legendre:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \quad (9.189)$$

É instrutivo comparar essa derivação com a trabalhosa derivação quântica da Seção 12.8, que leva à Equação (12.177).

<sup>26</sup>Esta seção é opcional aqui e pode ser adiada até o Capítulo 12.

### Expansão de Coordenada Cilíndrica Circular<sup>27</sup>

Por analogia com a expansão de coordenada polar esférica precedente, escrevemos

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{\rho_1} \delta(\rho_1 - \rho_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \delta(z_1 - z_2) \\ &= \frac{1}{\rho_1} \delta(\rho_1 - \rho_2) \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z_1 - z_2)} dk, \end{aligned} \quad (9.190)$$

usando o Exercício 12.6.5, a Equação (1.193c) e o valor principal de Cauchy. Mas, por que um somatório para a dependência de  $\varphi$  e uma integração para a dependência de  $z$ ? O requisito de que a dependência azimutal seja de valor único quantiza  $m$ , daí o somatório. Nenhuma restrição como essa se aplica a  $k$ .

Para evitar problemas com valores negativos de  $k$ , mais tarde escrevemos a Equação (9.190) como

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\rho_1} \delta(\rho_1 - \rho_2) \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(z_1 - z_2) dk. \quad (9.191)$$

Admitimos uma expansão similar da função de Green,

$$G(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(\rho_1, \rho_2) e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} \int_0^{\infty} \cos k(z_1 - z_2) dk, \quad (9.192)$$

com os coeficientes  $g_m(\rho_1, \rho_2)$  dependentes de  $\rho$  a serem determinados. Substituindo na Equação (9.171), agora em coordenadas cilíndricas circulares, constatamos que, se  $g(\rho_1, \rho_2)$  satisfizer

$$\frac{d}{d\rho_1} \left[ \rho_1 \frac{dg_m}{d\rho_1} \right] - \left[ k^2 \rho_1 + \frac{m^2}{\rho_1} \right] g_m = -\delta(\rho_1 - \rho_2), \quad (9.193)$$

então a Equação (9.171) é satisfeita.

O operador na Equação (9.193) é identificado como o operador modificado de Bessel (em forma auto-adjunta). Por conseguinte, as soluções da equação homogênea correspondente são  $u_1 = I_m(k\rho)$ ,  $u_2 = K_m(k\rho)$ . Como no caso da coordenada polar esférica, impomos que  $G$  seja finita em  $\rho_1 = 0$  e que se anule, à medida que  $\rho_1 \rightarrow \infty$ . Então, a técnica da Seção 10.5 resulta em

$$g_m(\rho_1, \rho_2) = -\frac{1}{A} I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}). \quad (9.194)$$

Essa expressão corresponde à Equação (9.155). A constante  $A$  vem do wronskiano (veja a Equação (9.120):

$$I_m(k\rho) K'_m(k\rho) - I'_m(k\rho) K_m(k\rho) = \frac{A}{P(k\rho)}. \quad (9.195)$$

Pelo Exercício 11.5.10,  $A = -1$  e

$$g_m(\rho_1, \rho_2) = I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}). \quad (9.196)$$

Por conseguinte, nossa função de Green em coordenada cilíndrica circular é

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} \cos k(z_1 - z_2) dk. \end{aligned} \quad (9.197)$$

O Exercício 9.7.14 é um caso especial desse resultado.

<sup>27</sup>Esta seção é opcional aqui e pode ser adiada até o Capítulo 11.



### Exemplo 9.7.1 ESPALHAMENTO EM MECÂNICA QUÂNTICA — SOLUÇÃO DE SÉRIE DE NEUMANN

A Teoria quântica do espalhamento dá uma boa ilustração de técnicas de equação integral e uma aplicação de uma função de Green. Nosso quadro físico de espalhamento é o que apresentamos a seguir. Um feixe de partículas está em movimento ao longo do eixo  $z$  negativo em direção à origem. Uma pequena fração das partículas é espalhada pelo potencial  $V(\mathbf{r})$  como uma onda esférica de saída. Nossa função de onda  $\psi(\mathbf{r})$  deve satisfazer a equação de Schrödinger, independente do tempo.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (9.198a)$$

ou

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + k^2\psi(\mathbf{r}) = -\left[-\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\right], \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (9.198b)$$

Pelo quadro físico que acabamos de apresentar, procuramos uma solução que tenha uma forma **assintótica**

$$\psi(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (9.199)$$

Aqui,  $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$  é a onda plana incidente<sup>28</sup>, sendo que  $\mathbf{k}_0$ , o vetor de propagação, leva o índice inferior 0 para indicar que ele está na direção  $\theta = 0$  (eixo  $z$ ). As grandezas  $k_0$  e  $k$  são iguais (ignorando o recuo),  $e^{ikr}/r$  é a onda esférica de saída com um fator de amplitude  $f_k(\theta, \varphi)$  dependente do ângulo e da energia.<sup>29</sup> O vetor  $\mathbf{k}$  tem a direção da onda de saída espalhada. Em textos de Mecânica Quântica é demonstrado que a probabilidade de espalhamento diferencial,  $d\sigma/d\Omega$ , a seção de choque de espalhamento por unidade de ângulo sólido, é dada por  $|f_k(\theta, \varphi)|^2$ .

Identificando  $[-(2m/\hbar^2)V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})]$  com  $f(\mathbf{r})$  da Equação (9.158), temos

$$\psi(\mathbf{r}_1) = -\int \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_2)G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_2 \quad (9.200)$$

pela Equação (9.170). Essa expressão não tem a forma assintótica desejada da Equação (9.199), mas podemos adicionar  $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1}$  à Equação (9.200), uma solução da equação homogênea, e colocar  $\psi(\mathbf{r})$  na forma desejada:

$$\psi(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} - \int \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_2)G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3r_2. \quad (9.201)$$

Nossa função de Green é a função de Green do operador  $\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2$  (Equação (9.198)), satisfazendo a condição de contorno de que ele descreva uma onda de saída. Então, pela Tabela 9.5,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)/(4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$

$$\psi(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} - \int \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_2) \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3r_2. \quad (9.202)$$

Essa equação integral, análoga à equação de onda original de Schrödinger, é **exata**. Empregando a técnica de série de Neumann da Seção 16.3 (lembre-se de que a probabilidade de espalhamento é muito pequena), temos

$$\psi_0(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1}, \quad (9.203a)$$

que é a interpretação física de ausência de espalhamento.

Substituindo  $\psi_0(\mathbf{r}_2) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2}$  na integral, obtemos o primeiro termo de correção,

$$\psi_1(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} - \int \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2) \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2} d^3r_2. \quad (9.203b)$$

Esta é a famosa **aproximação de Born**. Espera-se que ela seja muito precisa para potenciais fracos e energia incidente alta. Se desejarmos uma aproximação mais precisa, a série de Neumann pode ser continuada.<sup>30</sup> ■

<sup>28</sup>Por simplicidade, admitimos um feixe incidente contínuo. Em um tratamento mais sofisticado e mais realista, a Equação (9.199) seria uma componente de um pacote de ondas de Fourier.

<sup>29</sup>Se  $V(\mathbf{r})$  representar uma força central,  $f_k$  será uma função de  $\theta$  apenas, independente de azimute.

<sup>30</sup>Isso admite que a série de Neumann é convergente. Em algumas situações físicas ela não é convergente, e então é preciso utilizar outras técnicas.

### Exemplo 9.7.2 ESPALHAMENTO EM MECÂNICA QUÂNTICA — FUNÇÃO DE GREEN

Mais uma vez, consideramos a equação de onda de Schrödinger (Equação 198b) para o problema do espalhamento. Desta vez usamos técnicas de transformada de Fourier e derivamos a forma desejada da função de Green por integração de contorno. Substituindo a forma assintótica desejada da solução (com  $k$  substituído por  $k_0$ ),

$$\psi(\mathbf{r}) \sim e^{ik_0z} + f_{k_0}(\theta, \varphi) \frac{e^{ik_0r}}{r} = e^{ik_0z} + \Phi(\mathbf{r}), \quad (9.204)$$

na equação de onda de Schrödinger, Equação (9.198b), temos como resultado

$$(\nabla^2 + k_0^2)\Phi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{ik_0z} + U(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \quad (9.205a)$$

Aqui,

$$\frac{\hbar^2}{2m}U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}),$$

o potencial perturbador de espalhamento. Uma vez que a probabilidade de dispersão é muito menor do que 1, espera-se que o segundo termo do lado direito da Equação (9.205a) seja desprezível (em relação ao primeiro termo do lado direito) e, por isso, nós o descartamos. Note que estamos **aproximando** nossa equação diferencial com

$$(\nabla^2 + k_0^2)\Phi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{ik_0z}. \quad (9.205b)$$

Agora, passamos a resolver a Equação (9.205b), uma EDP não-homogênea. O operador diferencial  $\nabla^2$  gera um conjunto contínuo de autofunções

$$\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -k^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (9.206)$$

em que

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Essas autofunções de onda plana formam um conjunto contínuo mas ortonormal, no sentido de que

$$\int \psi_{\mathbf{k}_1}^*(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}) d^3r = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

(compare com Equação (15.21d)).<sup>31</sup> Usamos essas autofunções para derivar uma função de Green.

Expandimos a função desconhecida  $\Phi(\mathbf{r}_1)$  nessas autofunções,

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = \int A_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1) d^3k_1, \quad (9.207)$$

uma integral de Fourier com  $A_{\mathbf{k}_1}$ , os coeficientes desconhecidos. Substituindo a Equação (9.207) na Equação (9.205b) e usando a Equação (9.206), obtemos

$$\int A_{\mathbf{k}}(k_0^2 - k^2)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d^3k = U(\mathbf{r})e^{ik_0z}. \quad (9.208)$$

Usando a técnica já conhecida de multiplicar por  $\psi_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r})$  e integrando sobre as coordenadas espaciais, temos

$$\begin{aligned} \int A_{\mathbf{k}_1}(k_0^2 - k_1^2) d^3k_1 \int \psi_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}) d^3r &= A_{\mathbf{k}_2}(k_0^2 - k_2^2) \\ &= \int \psi_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r})U(\mathbf{r})e^{ik_0z} d^3r. \end{aligned} \quad (9.209)$$

Resolvendo para  $A_{\mathbf{k}_2}$  e substituindo na Equação (9.207), temos

$$\Phi(\mathbf{r}_2) = \int \left[ (k_0^2 - k_2^2)^{-1} \int \psi_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r}_1)U(\mathbf{r}_1)e^{ik_0z_1} d^3r_1 \right] \psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_2) d^3k_2. \quad (9.210)$$

Daí,

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = \int \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)(k_0^2 - k_1^2)^{-1} d^3k_1 \int \psi_{\mathbf{k}_1}^*(\mathbf{r}_2)U(\mathbf{r}_2)e^{ik_0z_2} d^3r_2, \quad (9.211)$$

<sup>31</sup>  $d^3r = dx dy dz$ , um elemento de volume (tridimensional) em espaço de  $\mathbf{r}$ .





substituindo  $\mathbf{k}_2$  por  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{r}_1$  por  $\mathbf{r}_2$  para ficar de acordo com a Equação (9.207). Invertendo a ordem de integração, temos

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = - \int G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_2) e^{ik_0 z_2} d^3 r_2, \quad (9.212)$$

em que  $G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , nossa função de Green, é dada por

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \frac{\psi_{\mathbf{k}_1}^*(\mathbf{r}_2) \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)}{k_1^2 - k_0^2} d^3 k_1, \quad (9.213)$$

análoga à Equação (10.90) da Seção 10.5 para autofunções discretas. A Equação (9.212) deve ser comparada com a solução de função de Green da equação de Poisson (9.157).

Talvez valha a pena avaliar essa integral para acentuar mais uma vez o papel vital desempenhado pelas condições de fronteira. Usando as autofunções da Equação (9.206) e

$$d^3 k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi,$$

obtemos

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\rho \cos\theta}}{k^2 - k_0^2} d\varphi \sin\theta d\theta k^2 dk. \quad (9.214)$$

Aqui,  $k\rho \cos\theta$  substituiu  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , sendo que  $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  indica o eixo polar em espaço  $k$ . Integrando sobre  $\varphi$  por inspeção, apanhamos um  $2\pi$ . Então, a integração em  $\theta$  leva a

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi^2 \rho i} \int_0^\infty \frac{e^{ik\rho} - e^{-ik\rho}}{k^2 - k_0^2} k dk, \quad (9.215)$$

e, visto que o integrando é uma função par de  $k$ , podemos estabelecer

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{8\pi^2 \rho i} \int_{-\infty}^\infty \frac{(e^{i\kappa} - e^{-i\kappa})}{\kappa^2 - \sigma^2} \kappa d\kappa. \quad (9.216)$$

A última etapa é realizada antecipando a avaliação de  $G_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  como uma integral de contorno. Os símbolos  $\kappa$  e  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) representam  $k\rho$  e  $k_0\rho$ , respectivamente.

Se a integral da Equação (9.216) for interpretada como uma integral de Riemann, a integral não existe. Isso implica que  $\mathcal{L}^{-1}$  não existe e, em um sentido literal, ela não existe.  $\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2$  é singular, uma vez que existem soluções triviais  $\psi$  para as quais a equação homogênea  $\mathcal{L}\psi = 0$ . Evitamos esse problema introduzindo um parâmetro  $\gamma$ , definindo um operador  $\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ , diferente e tomando o limite, à medida que  $\gamma \rightarrow 0$ .

Subdividindo a integral em duas partes, de modo que cada parte possa ser escrita como uma integral de contorno adequada, temos

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{8\pi^2 \rho i} \oint_{C_1} \frac{\kappa e^{i\kappa} d\kappa}{\kappa^2 - \sigma^2} + \frac{1}{8\pi^2 \rho i} \oint_{C_2} \frac{\kappa e^{-i\kappa} d\kappa}{\kappa^2 - \sigma^2}. \quad (9.217)$$

O contorno  $C_1$  é fechado por um semicírculo no semiplano superior,  $C_2$ , por um semicírculo no semiplano inferior. Essas integrais foram avaliadas no Capítulo 7 usando semicírculos infinitesimais adequadamente escolhidos para circundar os pontos singulares  $\kappa = \pm\sigma$ . Como procedimento alternativo, em primeiro lugar vamos deslocar os pontos singulares do eixo real substituindo  $\sigma$  por  $\sigma + i\gamma$  e então, após avaliação, considerando o limite quando  $\gamma \rightarrow 0$  (Figura 9.5).

Para  $\gamma$  positivo, o contorno  $C_1$  envolve o ponto singular  $\kappa = \sigma + i\gamma$ , e a primeira integral contribui com

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{i(\sigma+i\gamma)}.$$

Pela segunda integral, também obtemos

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{i(\sigma+i\gamma)},$$

sendo a singularidade envolvida  $\kappa = -(\sigma + i\gamma)$ . Voltando à Equação (9.217) e deixando  $\gamma \rightarrow 0$ , temos

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\rho} e^{i\sigma} = \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (9.218)$$

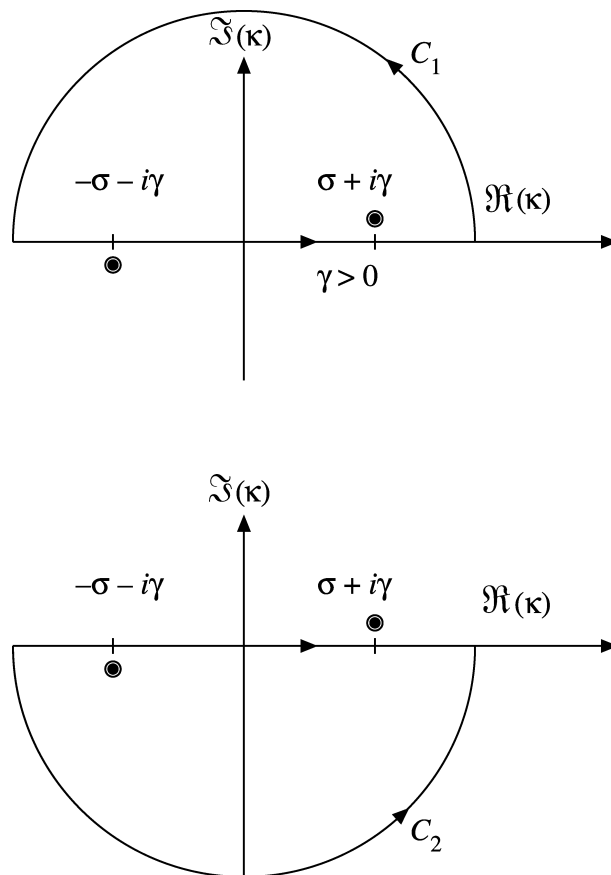


Figura 9.5: Possíveis contornos de integração da função de Green

em total concordância com o Exercício 9.7.16. Esse resultado depende de começar com  $\gamma$  positivo. Se tivéssemos escolhido  $\gamma$  negativo, nossa função de Green teria incluído  $e^{-i\sigma}$ , que corresponde a uma onda de **entrada**. A escolha de  $\gamma$  positivo é determinada pelas condições de contorno que desejamos satisfazer.

As Equações (9.212) e (9.218) reproduzem a onda espalhada na Equação (9.203b) e constitui uma solução exata da Equação (9.205b) aproximada. Os Exercícios 9.7.18 e 9.7.20 ampliam esses resultados. ■

### Exercícios

9.7.1 Verifique a Equação (9.168),

$$\int (v\mathcal{L}_2u - u\mathcal{L}_2v) d\tau_2 = \int p(v\nabla_2u - u\nabla_2v) \cdot d\sigma_2.$$

9.7.2 Mostre que os termos  $+k^2$  no operador de Helmholtz e  $-k^2$  no operador modificado de Helmholtz não afetam o comportamento de  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  na vizinhança imediata do ponto singular  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . Especificamente, mostre que

$$\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0} \int k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\tau_2 = 1.$$

9.7.3 Mostre que

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

satisfaz os dois critérios adequados e, por conseguinte, é uma função de Green para a equação de Helmholtz.



- 9.7.4** (a) Ache a função de Green para a equação tridimensional de Helmholtz, Exercício 9.7.3, quando a onda é uma onda estacionária.  
 (b) Como essa função de Green está relacionada com as funções esféricas de Bessel?

**9.7.5** A equação homogênea de Helmholtz

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$$

tem autovalores  $\lambda_i^2$  e autofunções  $\varphi_i$ . Mostre que a função de Green correspondente que satisfaz

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \lambda^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

pode ser escrita como

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{r}_1)\varphi_i(\mathbf{r}_2)}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

Uma expansão dessa forma é denominada expansão **bilinear**. Se a função de Green estiver disponível na forma **fechada**, isso nos dá um meio de gerar funções.

**9.7.6** Um potencial eletrostático (unidades mks) é

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^{-ar}}{r}.$$

Reconstrua a distribuição de carga elétrica que produzirá esse potencial. Note que  $\varphi(r)$  desaparece exponencialmente para  $r$  grande, o que demonstra que a carga líquida é zero.

$$\text{Resposta: } \rho(r) = Z\delta(r) - \frac{Za^2}{4\pi} \frac{e^{-ar}}{r}.$$

**9.7.7** Transforme a EDO

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} - k^2 y(r) + V_0 \frac{e^{-r}}{r} y(r) = 0$$

e as condições de contorno  $y(0) = y(\infty) = 0$  em uma equação integral de Fredholm da forma

$$y(r) = \lambda \int_0^{\infty} G(r, t) \frac{e^{-t}}{t} y(t) dt.$$

As quantidades  $V_0 = \lambda$  e  $k^2$  são constantes. A EDO é derivada da equação de onda de Schrödinger com um potencial mesônico:

$$G(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{-kt} \sinh kr, & 0 \leq r < t, \\ \frac{1}{k} e^{-kr} \sinh kt, & t < r < \infty. \end{cases}$$

**9.7.8** Um anel condutor de raio  $a$  (Exemplo 12.3.3) pode ser descrito por

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi a^2} \delta(r - a) \delta(\cos \theta).$$

Usando a função de Green conhecida para esse sistema, a Equação (9.187), ache o potencial eletrostático.

*Sugestão:* O Exercício 12.6.3 será útil.

**9.7.9** Mudando uma constante de separação de  $k^2$  para  $-k^2$  e colocando a descontinuidade da derivada de primeira ordem na dependência  $z$ , mostre que

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} J_m(k\rho_1) J_m(k\rho_2) e^{-k|z_1 - z_2|} dk.$$

*Sugestão:* O  $\delta(\rho_1 - \rho_2)$  requerido pode ser obtido do Exercício 15.1.2.

**9.7.10** Derive a expansão

$$\frac{\exp[ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|]}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} j_l(kr_1)h_l^{(1)}(kr_2), \quad r_1 < r_2 \\ j_l(kr_2)h_l^{(1)}(kr_1), \quad r_1 > r_2 \end{array} \right\} \\ \times \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2).$$

*Sugestão:* O lado esquerdo é uma função Green conhecida. Admita uma expansão harmônica esférica e trabalhe na dependência radial remanescente. A relação de fechamento do harmônico esférico, Exercício 12.6.6, abrange a dependência angular.

**9.7.11** Mostre que a função de Green para o operador modificado de Helmholtz

$$\frac{\exp(-k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

tem a expansão coordenada polar esférica

$$\frac{\exp(-k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = k \sum_{l=0}^{\infty} i_l(kr_<) k_l(kr_>) \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2).$$

*Nota:* As funções esféricas modificadas de Bessel  $i_l(kr)$  e  $k_l(kr)$  são definidas no Exercício 11.7.15.

**9.7.12** Pela função esférica de Green do Exercício 9.7.10, derive a expansão de onda plana

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \gamma),$$

em que  $\gamma$  é o ângulo incluído entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}$ . Essa é a equação de Rayleigh do Exercício 12.4.7.

*Sugestão:* Considere  $r_2 \gg r_1$ , de modo que

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow r_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = r_2 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1}{k}.$$

Deixe que  $r_2 \rightarrow \infty$  e cancele um fator de  $e^{ikr_2}/r_2$ .

**9.7.13** Pelos resultados dos Exercícios 9.7.10 e 9.7.12, mostre que

$$e^{ix} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(x).$$

**9.7.14** (a) Pela expansão em coordenada cilíndrica circular da função de Green de Laplace (Equação (9.197)), mostre que

$$\frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(k\rho) \cos kz \, dk.$$

Esse mesmo resultado é obtido diretamente no Exercício 15.3.11.

(b) Como caso especial da parte (a), mostre que

$$\int_0^{\infty} K_0(k) \, dk = \frac{\pi}{2}.$$

**9.7.15** Observando que

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$



é uma autofunção de

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_k(\mathbf{r}) = 0,$$

(Equação (9.206)), mostre que a função de Green de  $\mathcal{L} = \nabla^2$  pode ser expandida como

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{d^3k}{k^2}.$$

**9.7.16** Usando transformadas de Fourier, mostre que a função de Green que satisfaz a equação não-homogênea de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2)G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

é

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{k^2 - k_0^2} d^3k,$$

de acordo com a Equação (9.213).

**9.7.17** A equação básica da teoria da difração escalar de Kirchhoff é

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left[ \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \nabla \psi(\mathbf{r}_2) - \psi(\mathbf{r}_2) \nabla \left( \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} \right) \right] \cdot d\sigma_2,$$

em que  $\psi$  satisfaz a equação homogênea de Helmholtz e  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Derive essa equação. Admita que  $\mathbf{r}_1$  é interior à superfície fechada  $S_2$ .

*Sugestão:* Use o teorema de Green.

**9.7.18** A aproximação de Born para a onda espalhada é dada pelas Equações (9.203b) e (9.211). Pela forma assintótica, pela Equação (9.199),

$$f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{i\mathbf{k}r}}{r} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int V(\mathbf{r}_2) \frac{e^{i\mathbf{k}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2} d^3r_2.$$

Para um potencial de dispersão  $V(\mathbf{r}_2)$  que é independente de ângulos e para  $r \gg r_2$ , mostre que

$$f_k(\theta, \varphi) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r_2 V(\mathbf{r}_2) \frac{\text{sen}(|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}|r_2)}{|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}|} dr_2.$$

Aqui,  $\mathbf{k}_0$  está na direção  $\theta = 0$  (eixo  $z$  original), ao passo que  $\mathbf{k}$  está na direção  $(\theta, \varphi)$ . As grandezas são iguais:  $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}|$ ;  $m$  é a massa reduzida.

*Sugestão:* Você tem o Exercício 9.7.12 para simplificar a exponencial e o Exercício 15.3.20 para modificar a transformada exponencial de Fourier tridimensional em transformada de seno de Fourier unidimensional.

**9.7.19** Calcule a amplitude de dispersão  $f_k(\theta, \varphi)$  para um potencial mesônico  $V(r) = V_0(e^{-\alpha r}/\alpha r)$ .

*Sugestão:* Esse potencial particular permite que a integral de Born, Exercício 9.7.18, seja avaliada como uma transformada de Laplace.

$$\text{Resposta: } f_k(\theta, \varphi) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha} \frac{1}{\alpha^2 + (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2}.$$

**9.7.20** O potencial mesônico  $V(r) = V_0(e^{-\alpha r}/\alpha r)$  pode ser usado para descrever o espalhamento de Coulomb de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ . Fazemos  $\alpha \rightarrow 0$  e  $V_0 \rightarrow 0$ , mas tomamos a razão  $V_0/\alpha$  como  $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ . (Para unidades gaussianas, omita o  $4\pi\epsilon_0$ .) Mostre que a seção de choque diferencial de espalhamento  $d\sigma/d\Omega = |f_k(\theta, \varphi)|^2$  é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{16E^2 \text{sen}^4(\theta/2)}, \quad E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Acontece (coincidentalmente) que essa aproximação de Born está em exata concordância com os cálculos exatos da Mecânica Quântica e também com o clássico cálculo de Rutherford.

## 9.8 EDP de Fluxo de Calor ou de Difusão

Agora voltamos para uma EDP especial para desenvolver métodos razoavelmente gerais para adaptar uma solução especial de uma EDP a condições de contorno, introduzindo parâmetros que também se aplicam a outras EDPs de segunda ordem com coeficientes constantes. Até certo ponto, eles são complementares ao método básico de separação já estudado para achar soluções de um modo sistemático.

Selecionamos a EDP completa de difusão dependente de tempo como um meio isotrópico. Admitimos que a isotropia não é grande coisa em matéria de restrição porque, no caso de termos diferentes taxas (constantes) de difusão em diferentes direções (por exemplo, na madeira), nossa EDP de fluxo de calor toma a forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (9.219)$$

se colocarmos os eixos coordenados ao longo das principais direções de anisotropia. Agora, simplesmente elevamos as coordenadas usando as substituições  $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$  para recuperar a forma isotrópica original da Equação (9.219),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \quad (9.220)$$

para a função de distribuição de temperatura  $\Phi(\xi, \eta, \zeta, t) = \psi(x, y, z, t)$ .

Por simplicidade, em primeiro lugar resolvemos a EDP dependente de tempo para um meio unidimensional homogêneo, um longo bastão de metal na direção  $x$ , digamos,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (9.221)$$

em que  $a$  constante mede a difusividade ou condutividade de calor,  $y$ , do meio. Tentamos resolver essa EDP linear com coeficientes constantes com o relevante **Ansatz do produto exponencial**  $\psi = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta t}$ , que, quando substituído na Equação (9.221), resolve a EDP com a restrição  $\beta = a^2 \alpha^2$  para os parâmetros. Buscamos soluções que se degradam exponencialmente para tempos grandes, isto é, soluções com valores  $\beta$  negativos e, por conseguinte, estabelecemos  $\alpha = i\omega, \alpha^2 = -\omega^2$  para  $\omega$  real, e temos

$$\psi(x, t) = e^{i\omega x} e^{-\omega^2 a^2 t} = (\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x) e^{-\omega^2 a^2 t}.$$

Formando combinações lineares reais, obtemos a solução

$$\psi(\mathbf{x}, t) = (A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x) e^{-\omega^2 a^2 t},$$

para qualquer escolha de  $A, B, \omega$ , que são introduzidos para satisfazer condições de contorno. Fazendo o somatório sobre múltiplos  $n\omega$  da frequência básica para condições periódicas de contorno ou **integrando sobre o parâmetro**  $\omega$  para condições gerais de contorno (não-periódicas), encontramos uma solução,

$$\psi(x, t) = \int [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x] e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega, \quad (9.222)$$

que é suficientemente geral para ser adaptada a condições de contorno em, digamos,  $t = 0$ . Quando a condição de contorno dá uma temperatura não-zero  $\psi_0$ , como acontece para nosso bastão, então o método do somatório se aplica (expansão de Fourier da condição de contorno). Se o espaço for irrestrito (como no caso de um bastão de extensão infinita), a integral de Fourier se aplica.

- Esse somatório ou integração sobre parâmetros é um dos métodos padrões para generalizar soluções de EDPs específicas de modo a adaptá-las às condições de contorno.

### Exemplo 9.8.1 UMA CONDIÇÃO DE CONTORNO ESPECÍFICA

Vamos resolver explicitamente um caso unidimensional em que a temperatura no tempo  $t = 0$  é  $\psi_0(x) = 1 =$  constante no intervalo entre  $x = +1$  e  $x = -1$  e zero para  $x > 1$  e  $x < -1$ . Nas extremidade,  $x = \pm 1$ , a temperatura é sempre mantida em zero.

Para um intervalo finito escolhemos as soluções espaciais  $\cos(l\pi x/2)$  da Equação (9.221) para  $l$  inteiro, porque elas desaparecem em  $x = \pm 1$ . Assim, em  $t = 0$ , nossa solução é uma série de Fourier,

$$\psi(x, 0) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos \frac{\pi l x}{2} = 1, \quad -1 < x < 1$$



com coeficientes (veja a Seção 14.1.)

$$\begin{aligned} a_l &= \int_{-1}^1 1 \cdot \cos \frac{\pi l x}{2} = \frac{2}{l\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi l x}{2} \Big|_{x=-1}^1 \\ &= \frac{4}{\pi l} \operatorname{sen} \frac{l\pi}{2} = \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi}, \quad l = 2m + 1; \\ a_l &= 0, \quad l = 2m. \end{aligned}$$

Incluindo sua dependência do tempo, a solução completa é dada pela série

$$\psi(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos \left[ (2m+1) \frac{\pi x}{2} \right] e^{-t((2m+1)\pi a/2)^2}, \quad (9.223)$$

que converge absolutamente para  $t > 0$ , mas apenas condicionalmente em  $t = 0$ , como resultado da descontinuidade em  $x = \pm 1$ .

Sem a restrição à temperatura zero nas extremidades do intervalo finito dado, a série de Fourier é substituída por uma integral de Fourier. Nesse caso, a solução geral é dada pela Equação (9.222). Em  $t = 0$ , a distribuição de temperatura dada  $\psi_0 = 1$  dá os coeficientes como (veja a Seção 15.3)

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \omega x \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \omega x}{\omega} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\pi \omega}, \quad B(\omega) = 0.$$

Por conseguinte,

$$\psi(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} \cos(\omega x) e^{-a^2 \omega^2 t} \, d\omega. \quad (9.224)$$

Em **três dimensões** o correspondente Ansatz exponencial  $\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/a+\beta t}$  leva a uma solução com a relação  $\beta = -\mathbf{k}^2 = -k^2$  para seu parâmetro, e a forma tridimensional da Equação (9.221) se torna

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0, \quad (9.225)$$

que é a equação de **Helmholtz**, a qual pode ser resolvida pelo método de separação exatamente como antes a equação de Laplace em coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas, sob condições de contorno adequadamente generalizadas.

Em coordenadas cartesianas, com o Ansatz do produto da Equação (9.35), as EDOs separadas de  $x$  e  $y$  da Equação (9.221) são as mesmas que as Equações (9.38) e (9.41), enquanto a EDO de  $z$ , Equação (9.42), generaliza para

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = n^2 > 0, \quad (9.226)$$

em que introduzimos uma outra constante de separação  $n^2$ , restringida por

$$k^2 = l^2 + m^2 - n^2, \quad (9.227)$$

para produzir um conjunto simétrico de equações. Agora, nossa solução da equação de Helmholtz, Equação (9.225) é rotulada de acordo com a escolha de todas as três constantes de separação  $l, m, n$  sujeita à restrição da Equação (9.227). Como antes, a EDO em  $z$ , Equação (9.226), dá como resultado soluções  $\sim e^{-nz}$  que decaem exponencialmente. A condição de contorno em  $z = 0$  fixa os coeficientes de expansão  $a_{lm}$ , como na Equação (9.44).

Agora, em coordenadas cilíndricas, usamos a constante de separação  $l^2$  para a EDO em  $z$ , tendo em mente uma solução que decai exponencialmente,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 Z > 0, \quad (9.228)$$

portanto,  $Z \sim e^{-lz}$ , porque a temperatura cai a zero em  $z$  grande. Se estabelecermos  $k^2 + l^2 = n^2$ , as Equações (9.53) e (9.54) continuam as mesmas, portanto acabamos com a mesma expansão de Fourier-Bessel, Equação (9.56), como antes.

Em coordenadas esféricas com condições de contorno radiais, o método de separação leva às mesmas EDOs angulares das Equações (9.61) e (9.64), e a EDO radial agora se torna

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0, \quad Q = l(l+1), \quad (9.229)$$

isto é, da Equação (9.65), cujas soluções são as funções esféricas de Bessel da Seção 11.7. Elas estão relacionadas na Tabela 9.2.

A restrição de que  $k^2$  seja uma constante é desnecessariamente severa. O processo de separação ainda funcionará com EDP de Helmholtz para  $k^2$  tão geral quanto

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) + k'^2. \quad (9.230)$$

No átomo de hidrogênio temos  $k^2 = f(r)$  na equação de onda de Schrödinger, e isso leva a uma solução de forma fechada que envolve polinômios de Laguerre.

### Soluções Alternativas

Em uma nova abordagem da EDP de fluxo de calor sugerida por experimentos, voltamos agora à EDP unidimensional, Equação (9.221), em busca de soluções de uma nova forma funcional  $\psi(x, t) = u(x/\sqrt{t})$ , que é sugerida pelo Exemplo 15.1.1. Substituindo  $u(\xi)$ ,  $\xi = x/\sqrt{t}$ , na Equação (9.221), usando

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{u'}{\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{u''}{t}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{x}{2\sqrt{t^3}} u' \quad (9.231)$$

com a notação  $u'(\xi) \equiv \frac{du}{d\xi}$ , a EDP é reduzida à EDO

$$2a^2 u''(\xi) + \xi u'(\xi) = 0. \quad (9.232)$$

Escrevendo essa EDO como

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{\xi}{2a^2},$$

podemos integrá-la uma vez para obter  $\ln u' = -\frac{\xi^2}{4a^2} + \ln C_1$ , com uma constante de integração  $C_1$ . Exponenciando e integrando novamente, encontramos a solução

$$u(\xi) = C_1 \int_0^\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi + C_2, \quad (9.233)$$

que envolve duas constantes de integração  $C_i$ . A normalização dessa solução no tempo  $t = 0$  e temperatura  $+1$  para  $x > 0$  e  $-1$  para  $x < 0$ , nossas condições de contorno, fixa as constantes  $C_i$ ; portanto,

$$\psi = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad (9.234)$$

em que  $\Phi$  denota a função erro de Gauss (veja o Exercício 5.10.4). Para uma derivação usando a transformada de Fourier, veja o Exemplo 15.1.1. Precisamos generalizar essa solução específica para adaptá-la às condições de contorno.

Com essa finalidade, agora geramos **novas soluções da EDP com coeficientes constantes diferenciando uma solução especial**, Equação (9.234). Em outras palavras, se  $\psi(x, t)$  resolve a EDP na Equação (9.221),  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  também resolvem, porque essas derivadas e as diferenciações da EDP comutam; isto é, a ordem na qual elas são efetuadas não importa. Observe com cuidado que esse método deixa de funcionar se qualquer coeficiente da EDP depender explicitamente de  $t$  ou  $x$ . Todavia, EDPs com coeficientes constantes são presença dominante na Física. Alguns exemplos são as equações de movimento de Newton (EDOs) na Mecânica Clássica, as equações de onda da Eletrodinâmica e as equações de Poisson e Laplace da Eletrostática e da Gravidade. Mesmo as equações de





campo não-lineares da Relatividade Geral de Einstein assumem essa forma especial em coordenadas geodésicas locais.

Portanto, diferenciando a Equação (9.234) em relação a  $x$ , encontramos a solução mais simples, mais básica,

$$\psi_1(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, \quad (9.235)$$

e, repetindo o processo, uma outra solução básica,

$$\psi_2(x, t) = \frac{x}{2a^3\sqrt{t^3\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \quad (9.236)$$

Mais uma vez, essas soluções têm de ser generalizadas para adaptá-las a condições de contorno. E há ainda um outro método de gerar novas soluções de uma EDP com coeficientes constantes: podemos **transportar** uma dada solução, por exemplo,  $\psi_1(x, t) \rightarrow \psi_1(x - \alpha, t)$ , e então **integrá-la sobre o parâmetro de translação**  $\alpha$ . Por conseguinte,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}} d\alpha \quad (9.237)$$

é novamente uma solução que reescrevemos usando a substituição

$$\xi = \frac{x - \alpha}{2a\sqrt{t}}, \quad \alpha = x - 2a\xi\sqrt{t}, \quad d\alpha = -2a d\xi \sqrt{t}. \quad (9.238)$$

Assim, constatamos que

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(x - 2a\xi\sqrt{t}) e^{-\xi^2} d\xi \quad (9.239)$$

é uma solução de nossa EDP. Sob essa forma, reconhecemos a significância da função peso  $C(x)$  do método de translação porque, em  $t = 0$ ,  $\psi(x, 0) = C(x) = \psi_0(x)$  é determinada pela condição de contorno, e  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ . Por conseguinte, também podemos escrever a solução como

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x - 2a\xi\sqrt{t}) e^{-\xi^2} d\xi, \quad (9.240)$$

demonstrando explicitamente o papel da condição de contorno. Pela Equação (9.240), vemos que a distribuição inicial de temperatura,  $\psi_0(x)$ , se expande com o tempo e é atenuada pela função peso de Gauss.

### Exemplo 9.8.2 NOVAMENTE A CONDIÇÃO DE CONTORNO ESPECIAL

Vamos expressar a solução do Exemplo 9.8.1 em termos da solução de função erro da Equação (9.234). A condição de contorno em  $t = 0$  é  $\psi_0(x) = 1$  para  $-1 < x < 1$  e zero para  $|x| > 1$ . Pela Equação (9.240), achamos os limites sobre a variável de integração  $\xi$  estabelecendo  $x - 2a\xi\sqrt{t} = \pm 1$ , o que dá como resultado as extremidades de integração  $\xi = (\pm 1 + x)/2a\sqrt{t}$ . Por conseguinte, nossa solução se torna

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Usando a função erro definida na Equação (9.234), também podemos escrever essa solução da seguinte maneira:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{2a\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (9.241)$$

Comparando essa forma de nossa solução com a do Exemplo 9.8.1, vemos que podemos expressar a Equação (9.241) como a integral de Fourier do Exemplo 9.8.1, uma identidade que dá a integral de Fourier integral, Equação (9.224), em forma fechada da função erro tabulada.

Por fim, consideramos o caso do fluxo de calor para um meio **esfericamente simétrico** estendido, com centro na origem, o que prescreve coordenadas polares  $r, \theta, \varphi$ . Esperamos uma solução da forma  $\psi(\mathbf{r}, t) = u(r, t)$ . Usando a Equação (2.48), encontramos a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (9.242)$$

que transformamos na EDP de fluxo de calor unidimensional pela substituição

$$u = \frac{v(r, t)}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r^3}. \quad (9.243)$$

Essa expressão resulta na EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \quad (9.244)$$

### Exemplo 9.8.3 FLUXO DE CALOR ESFERICAMENTE SIMÉTRICO

Vamos aplicar a EDP de fluxo de calor unidimensional com a solução da Equação (9.234) a um fluxo de calor esfericamente simétrico sob condições de fronteira razoavelmente comuns, em que  $x$  é liberado pela variável radial. Inicialmente, temos temperatura zero em todos os lugares. Então, no tempo  $t = 0$ , uma quantidade finita de energia térmica  $Q$  é liberada na origem, espalhando-se uniformemente em todas as direções. Qual é a distribuição de temperatura espacial e temporal?

Inspecionando nossa solução especial na Equação (9.236), vemos que, para  $t \rightarrow 0$ , a temperatura

$$\frac{v(r, t)}{r} = \frac{C}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \quad (9.245)$$

vai a zero para todo  $r \neq 0$ , portanto a temperatura inicial zero está garantida. À medida que  $t \rightarrow \infty$ , a temperatura  $v/r \rightarrow 0$  para todo  $r$ , incluindo a origem, o que está implícito em nossas condições de contorno. A constante  $C$  pode ser determinada por conservação de energia, o que dá a restrição

$$Q = \sigma \rho \int \frac{v}{r} d^3r = \frac{4\pi\sigma\rho C}{\sqrt{t^3}} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} dr = 8\sqrt{\pi^3} \sigma \rho a^3 C, \quad (9.246)$$

em que  $\rho$  é a densidade constante do meio e  $\sigma$  é seu calor específico. Aqui, elevamos novamente a variável de integração e integramos por partes para obter

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} r^2 dr = (2a\sqrt{t})^3 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^2 d\xi,$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^2 d\xi = -\frac{\xi}{2} e^{-\xi^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

A temperatura, como dada pela Equação (9.245) a qualquer instante, que está em  $t$ , é uma distribuição gaussiana que se achata à medida que o tempo aumenta, porque sua largura é proporcional a  $\sqrt{t}$ . Por ser uma função do tempo, a temperatura é proporcional a  $t^{-3/2} e^{-T/t}$ , com  $T \equiv r^2/4a^2$ , que se eleva de zero até um máximo e então volta a cair para zero para tempos grandes. Para achar o máximo, estabelecemos

$$\frac{d}{dt} (t^{-3/2} e^{-T/t}) = t^{-5/2} e^{-T/t} \left( \frac{T}{t} - \frac{3}{2} \right) = 0, \quad (9.247)$$

pela qual encontramos  $t = 2T/3$ .

No caso de **simetria cilíndrica** (no plano  $z = 0$  em coordenadas polares planas  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi$ ) procuramos uma temperatura  $\psi = u(\rho, t)$  que então satisfaça a EDO (usando a Equação (2.35) na equação de difusão)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), \quad (9.248)$$



que é a planar análoga da Equação (9.244). Essa EDO também tem soluções com a dependência funcional  $\rho/\sqrt{t} \equiv r$ . Por substituição,

$$u = v\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\rho v'}{2t^{3/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{v'}{\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{v''}{t}, \quad (9.249)$$

na Equação (9.248) com a notação  $v' \equiv \frac{dv}{dr}$ , encontramos a EDO

$$a^2 v'' + \left(\frac{a^2}{r} + \frac{r}{2}\right) v' = 0. \quad (9.250)$$

Essa é uma EDO de primeira ordem para  $v'$ , que podemos integrar quando separamos as variáveis  $v$  e  $r$  como

$$\frac{v''}{v'} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2a^2}\right). \quad (9.251)$$

Isso resulta em

$$v(r) = \frac{C}{r} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} = C \frac{\sqrt{t}}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}}. \quad (9.252)$$

Essa solução especial para simetria cilíndrica pode ser generalizada e adaptada de modo semelhante a condições de contorno, como o caso esférico. Por fim, a dependência  $z$  pode ser fatorada porque  $z$  separa da variável radial polar plana  $\rho$ .

*Resumindo, EDPs podem ser resolvidas com condições iniciais, exatamente como EDOs ou com condições de contorno que prescrevem o valor da solução ou sua derivada em superfícies, curvas ou pontos de contorno. Quando a solução é prescrita sobre o contorno, a EDP é denominada problema de Dirichlet; se a derivada normal da solução é prescrita sobre o contorno, a EDP é denominada problema de Neumann.*

*Quando a temperatura inicial é prescrita para uma equação de calor unidimensional ou tridimensional (com simetria esférica ou cilíndrica), ela se torna uma função peso da solução, em termos de uma integral sobre a solução gaussiana genérica. A equação de calor tridimensional, com condições de fronteira esféricas ou cilíndricas, é resolvida por separação das variáveis, o que leva a autofunções em cada variável separada e a autovalores como constantes de separação. Para intervalos de contorno finitos em cada coordenada espacial, a soma sobre constantes de separação leva a uma solução de série de Fourier, enquanto condições de contorno infinitas levam a uma solução de integral de Fourier. O método de separação de variáveis tenta resolver uma EDP escrevendo a solução como um produto de funções de uma variável cada. As condições gerais para que o método de separação funcione são fornecidas pelas propriedades de simetria da EDP, à qual se aplica a teoria de grupo contínuo.*

## Leituras Adicionais

- Bateman, H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 1<sup>a</sup>. ed. (1932). Grande número de aplicações de várias equações diferenciais parciais em física clássica. Excelentes exemplos da utilização de diferentes sistemas coordenados — coordenadas elipsoidais, parabolóides, toroidais, e assim por diante.
- Cohen, H., *Mathematics for Scientists and Engineers*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1992).
- Courant, R., e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1 (edição em inglês). Nova York: Interscience (1953), Wiley (1989). Esta é uma das obras clássicas da Física Matemática. Publicada pela primeira vez na Alemanha, em 1924, a edição revisada em inglês é uma excelente referência para um tratamento rigoroso de funções de Green e para uma ampla variedade de outros tópicos de Física Matemática.
- Davis, P. J., e P. Rabinowitz, *Numerical Integration*. Waltham, MA: Blaisdell (1967). Esse livro abrange grande quantidade de material sob a forma de fácil leitura. O Apêndice 1 (*On the Practical Evaluation of Integrals*, por M. Abramowitz) é excelente como visão global.
- Garcia, A. L., *Numerical Methods for Physics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1994).
- Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (1973), nova tiragem, Dover (1987). Esse texto bem escrito discute uma ampla variedade de métodos numéricos para zeros de funções para a transformada rápida de Fourier. Todos os tópicos são selecionados e desenvolvidos tendo em mente um computador moderno.
- Hubbard, J., e B. H. West, *Differential Equations*. Berlim: Springer (1995).

- Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. Nova York: Dover (1956). A obra clássica da teoria de equações diferenciais ordinárias.
- Lapidus, L., e J. H. Seinfeld, *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations*. Nova York: Academic Press (1971). Uma discussão detalhada e abrangente de técnicas numéricas, com ênfase nos métodos de Runge-Kutta e previsor-corretor. Apresenta com muita clareza trabalhos recentes sobre a melhoria de características como a estabilidade.
- Margenau, H., e G. M. Murhpy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 2<sup>a</sup> ed. Princeton, NJ: Van Nostrand (1956). O Capítulo 5 abrange coordenadas curvilíneas e o 13 trata de sistemas coordenados específicos.
- Miller, R. K., e A.N. Michel, *Ordinary Differential Equations*. Nova York: Academic Press (1982).
- Morse, P. M., e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. Nova York: McGraw-Hill (1953). O Capítulo 5 inclui uma descrição de diversos sistemas coordenados diferentes. Note que Morse e Feshbach não se furtam de usar sistemas de coordenadas levógeros até mesmo para coordenadas cartesianas. Por todo esse livro excelente (e difícil) há muitos exemplos da utilização dos vários sistemas de coordenadas na resolução de problemas físicos. O Capítulo 7 é uma discussão particularmente detalhada, completa, de funções de Green do ponto de vista da Física Matemática. Contudo, observe que Morse e Feshbach freqüentemente escolhem uma fonte de  $4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  no lugar da nossa  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . É dada considerável atenção a regiões limitadas.
- Murphy, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. Um tratamento minucioso, de leitura relativamente fácil de equações diferenciais ordinárias, lineares e não-lineares.
- Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, e W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, 2<sup>a</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1992).
- Ralston, A., e H. Wilf, ed., *Mathematical Methods for Digital Computers*. Nova York: Wiley (1960).
- Ritger, P. D., e N. J. Rose, *Differential Equations with Applications*. Nova York: McGraw-Hill (1968).
- Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Wiley (1997).
- Stoer, J., e R. Burlirsch, *Introduction to Numerical Analysis*. Nova York: Springer-Verlag (1992).
- Stroud, A. H., *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, Séries, vol. 10. Nova York: Springer-Verlag (1974). Uma discussão equilibrada, de fácil leitura e muito útil de vários métodos de integração de equações diferenciais. Stroud está familiarizado com o trabalho nessa área e dá numerosas referências.

## 10

# Teoria de Sturm-Liouville — Funções Ortogonais

No capítulo anterior desenvolvemos duas soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem e provamos que não existia nenhuma terceira solução linearmente independente. Neste capítulo a ênfase passa da solução da equação diferencial para o desenvolvimento e entendimento de propriedades gerais das soluções. Há uma estreita analogia entre os conceitos deste capítulo e os da álgebra linear no Capítulo 3. Aqui, as funções desempenham o papel que os vetores desempenhavam lá, e os operadores lineares desempenham o papel que as matrizes desempenhavam no Capítulo 3. A diagonalização de uma matriz real simétrica no Capítulo 3 corresponde aqui à solução de uma EDO definida por um operador **auto-adjunto**  $\mathcal{L}$  em termos de suas autofunções, que são as análogas “contínuas” dos autovetores no Capítulo 3. As hamiltonianas da Mecânica Quântica e suas autofunções de energia são exemplos da analogia correspondente entre matrizes hermitianas e operadores hermitianos.

Na Seção 10.1 são apresentados os conceitos de operador auto-adjunto, autofunção e autovalor e de operador hermitiano. O conceito de operador auto-adjunto, dado em primeiro lugar em termos de equações diferenciais, é então definido de acordo com a utilização em Mecânica Quântica, em que autofunções assumem valores complexos. As propriedades vitais de realidade de autovalores e ortogonalidade de autofunções são derivadas na Seção 10.2. Na Seção 10.3 discutimos o procedimento de Gram-Schmidt para construir sistematicamente conjuntos de funções ortogonais. Por fim, a propriedade geral de completude de um conjunto de autofunções é explorada na Seção 10.4, e na Seção 10.5 retomamos as funções de

### 10.1 EDO Auto-Adjuntas

No Capítulo 9 estudamos, classificamos e resolvemos EDO lineares de segunda ordem correspondentes a operadores diferenciais lineares de segunda ordem da forma geral

$$\mathcal{L}u(x) = p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} u(x) + p_1(x) \frac{d}{dx} u(x) + p_2(x) u(x). \quad (10.1)$$

Os coeficientes  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$  são funções reais de  $x$  e, sobre a região de interesse,  $a \leq x \leq b$ , as primeiras  $2 - i$  derivadas de  $p_i(x)$  são contínuas. Referindo-nos à Equação (9.118), vemos que  $P(x) = p_1(x)/p_0(x)$  e  $Q(x) = p_2(x)/p_0(x)$ . Por conseguinte,  $p_0(x)$  não deve desaparecer para  $a < x < b$ . Agora, os zeros de  $p_0(x)$  são pontos singulares (Seção 9.4) e a afirmação precedente significa que nosso intervalo  $[a, b]$  deve ser tal que não haja nele nenhum ponto singular. Pode haver, e muitas vezes há, pontos singulares nas fronteiras.

Para um operador linear  $\mathcal{L}$ , o análogo de uma forma quadrática para uma matriz no Capítulo 3 é a integral

$$\begin{aligned} \langle u | \mathcal{L} | u \rangle &\equiv \langle u | \mathcal{L} u \rangle \equiv \int_a^b u(x) \mathcal{L} u(x) dx \\ &= \int_a^b u \{ p_0 u'' + p_1 u' + p_2 u \} dx, \end{aligned} \quad (10.2)$$

em que as linhas da função real  $u(x)$  denotam derivadas, como sempre, e, por simplicidade, admitimos que  $u(x)$  é real. Se passarmos as derivadas para o primeiro fator,  $u$ , na Equação (10.2) integrando por partes uma vez ou duas

vezes, temos como resultado a expressão equivalente

$$\begin{aligned} \langle u|\mathcal{L}|u\rangle &= [u(x)(p_1 - p'_0)u(x)]_{x=a}^b \\ &+ \int_a^b \left\{ \frac{d^2}{dx^2}[p_0u] - \frac{d}{dx}[p_1u] + p_2u \right\} u dx. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Se exigirmos que as integrais nas Equações (10.2) e (10.3) sejam idênticas para **todas as funções  $u$  (diferenciáveis duas vezes)**, então os integrandos têm de ser iguais. Assim, a comparação resulta em

$$u(p''_0 - p'_1)u + 2u(p'_0 - p_1)u' = 0,$$

ou

$$p'_0(x) = p_1(x), \quad (10.4)$$

e, como bônus, os termos nas fronteiras  $x = a$  e  $x = b$  na Equação (10.3) também desaparecem.

Por causa da analogia com a matriz transposta no Capítulo 3, é conveniente definir o operador linear na Equação 10.3),

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}u &= \frac{d^2}{dx^2}[p_0u] - \frac{d}{dx}[p_1u] + p_2u \\ &= p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + (2p'_0 - p_1) \frac{du}{dx} + (p''_0 - p'_1 + p_2)u, \end{aligned} \quad (10.5)$$

como o **operador adjunto**<sup>1</sup>  $\bar{\mathcal{L}}$ . Definimos o operador adjunto  $\bar{\mathcal{L}}$  e mostramos que, se a Equação 10.4) for satisfeita,  $\langle \bar{\mathcal{L}}u|u\rangle = \langle u|\mathcal{L}u\rangle$ . Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar de um modo mais geral que  $\langle v|\mathcal{L}u\rangle = \langle \mathcal{L}v|u\rangle$ . Quando essa condição é satisfeita,

$$\boxed{\bar{\mathcal{L}}u = \mathcal{L}u = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x),} \quad (10.6)$$

diz-se que o operador  $\mathcal{L}$  é **auto-adjunto**. Aqui, para o caso auto-adjunto,  $p_0(x)$ , é substituído por  $p(x)$  e  $p_2(x)$  por  $q(x)$ , para evitar índices desnecessários. A forma da Equação (10.6) permite efetuar duas integrações por partes na Equação (10.3) e Equação (10.22) e seguintes sem termos integrados.<sup>2</sup> Note que um dado operador não é inerentemente auto-adjunto; essa sua condição depende das propriedades do espaço funcional no qual ele age e das condições de fronteira.

Em um levantamento das EDO introduzidas na Seção 9.3, a equação de Legendre e a equação do oscilador linear são auto-adjuntas, mas outras, tais como as equações de Laguerre e Hermite, não são. Contudo, a teoria de equações diferenciais lineares de segunda ordem auto-adjuntas é perfeitamente geral porque **sempre** podemos transformar o operador não-auto-adjunto na forma auto-adjunta requerida. Considere a Equação (10.1) com  $p'_0 \neq p_1$ . Se multiplicarmos  $\mathcal{L}$  por<sup>3</sup>

$$\frac{1}{p_0(x)} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right],$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0(x)} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right] \mathcal{L}u(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right] \frac{du(x)}{dx} \right\} \\ &+ \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \cdot \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right] u, \end{aligned} \quad (10.7)$$

<sup>1</sup>O operador **adjunto** guarda uma relação de certo modo forçada com a matriz **adjunta**. Uma justificativa melhor para a nomenclatura é encontrada em uma comparação do operador **auto-adjunto** (mais condições de fronteira adequadas) com a matriz **adjunta**. As propriedades significativas são desenvolvidas na Seção 10.2.

<sup>2</sup>A maior importância da forma auto-adjunta (mais condições de fronteira) ficará evidente na Seção 10.2. Além disso, serão exigidas formas auto-adjuntas para desenvolver funções de Green na Seção 10.5.

<sup>3</sup>Se multiplicarmos  $\mathcal{L}$  por  $f(x)/p_0(x)$  e então impusermos que

$$f'(x) = \frac{fp_1}{p_0},$$

de modo que o novo operador será auto-adjunto, obtemos

$$f(x) = \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right].$$



que é claramente auto-adjunta (veja a Equação (10.6)). Note  $p_0(x)$  no denominador. É por isso que impomos que  $p_0(x) \neq 0, a < x < b$ . No desenvolvimento a seguir, admitimos que  $\mathcal{L}$  foi colocado na forma auto-adjunta.

### Autofunções, Autovalores

A equação de onda de Schrödinger

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

é o exemplo mais importante de uma equação de autovalor em Física; aqui, o operador diferencial  $\mathcal{L}$  é definido pela hamiltoniana  $H$  e não pode mais ser real, e o autovalor se torna a energia total  $E$  do sistema. A autofunção  $\psi(x)$  pode ser complexa e costuma ser denominada **função de onda**. Uma formulação variacional dessa equação de Schrödinger aparece na Seção 17.7. Com base em propriedades esféricas, cilíndricas ou algumas outras propriedades de simetria, uma EDP tridimensional ou quadridimensional ou equação de autovalor, tal como a equação de Schrödinger, pode ser separada em equações de autovalor de uma única variável cada. As Equações (9.41), (9.42), (9.50) e (9.53) são exemplos. Contudo, às vezes uma equação de autovalor toma a forma mais geral auto-adjunta

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0, \tag{10.8}$$

em que a constante  $\lambda$  é o autovalor<sup>4</sup> e  $w(x)$  é um peso conhecido ou função densidade;  $w(x) > 0$  exceto possivelmente em pontos isolados nos quais  $w(x) = 0$ . (Na Seção 10.1),  $w(x) \equiv 1$ .) Para uma dada escolha do parâmetro  $\lambda$ , uma função,  $u_\lambda(x)$ , que satisfaz a Equação (10.8) e **as condições de fronteira impostas**, é denominada **autofunção** correspondente a  $\lambda$ . A constante  $\lambda$  então é denominada **autovalor** pelos matemáticos. Não há nenhuma garantia de que existirá uma autofunção  $u_\lambda(x)$  para uma escolha arbitrária do parâmetro  $\lambda$ . Na verdade, o requisito de que haja uma autofunção costuma restringir os valores aceitáveis de  $\lambda$  a um conjunto discreto. Exemplos disso para as equações de Legendre, Hermite e Chebyshev aparecem nos exercício da Seção 9.5. Aqui, adotamos a abordagem matemática do processo de quantização da Mecânica Quântica.

O produto interno de duas funções,  $\langle v|u \rangle = \int_a^b v^*(x)w(x)u(x) dx$ , depende da função peso e generaliza nossa definição anterior, em que  $w(x) \equiv 1$ . A função peso também modifica a definição de **ortogonalidade** de duas autofunções: elas são ortogonais se seu produto interno  $\langle u_\lambda|u_\lambda \rangle = 0$ . A função peso extra  $w(x)$  às vezes aparece como uma função de onda assintótica  $\psi_\infty$  que é um fator comum em todas as soluções de uma EDP, tal como a equação de Schrödinger, por exemplo, quando o potencial  $V(x) \rightarrow 0$ , à medida que  $x \rightarrow \infty$  em  $H = T + V$ . Podemos achar  $\psi_\infty$  quando estabelecemos  $V = 0$  na equação de Schrödinger. Uma outra fonte para  $w(x)$  pode ser uma barreira de momento angular não-zero  $l(l+1)/x^2$  em uma EDP ou EDO separada, Equação (9.65), que tem uma singularidade regular e domina em  $x \rightarrow 0$ . Nesse caso, a equação indicial, tal como a Equação (9.87) ou (9.103), mostra que a função de onda tem  $x^l$  como um fator global. Visto que a função de onda entra duas vezes em elementos de matriz e relações de ortogonalidade, as funções peso da Tabela 10.1 vêm desses fatores comuns em ambas as funções de onda radiais. É assim que surge o  $\exp(-x)$  para polinômios de Laguerre e  $x^k \exp(-x)$  para polinômios associados de Laguerre na Tabela 10.1.

**Tabela 10.1**

Equação	$p(x)$	$q(x)$	$\lambda$	$w(x)$
Legendre <sup>a</sup>	$1 - x^2$	0	$l(l+1)$	1
Legendre deslocada <sup>a</sup>	$x(1-x)$	0	$l(l+1)$	1
Legendre associada <sup>a</sup>	$1 - x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$l(l+1)$	1
Chebyshev I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	$n^2$	$(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev deslocada I	$[x(1-x)]^{1/2}$	0	$n^2$	$[x(1-x)]^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$n(n+2)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Ultrasférica (Gegenbauer)	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$n(n+2\alpha)$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
Bessel <sup>b</sup> , $0 \leq x \leq a$	$x$	$-n^2/x$	$a^2$	$x$
Laguerre, $0 \leq x < \infty$	$xe^{-x}$	0	$\alpha$	$e^{-x}$
Laguerre associada <sup>c</sup>	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha - k$	$x^k e^{-x}$
Hermite, $0 \leq x < \infty$	$e^{-x^2}$	0	$2\alpha$	$e^{-x^2}$
Oscilador harmônico simples <sup>d</sup>	1	0	$n^2$	1

<sup>a</sup> $l = 0, 1, \dots, -l \leq m \leq l$  são inteiros e  $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq x \leq 1$  para Legendre deslocada.

<sup>b</sup>A ortogonalidade de funções de Bessel é bastante especial. Compare com a Seção 11.2 para detalhes. Um segundo tipo de ortogonalidade é desenvolvido na Equação (11.174).

<sup>c</sup> $k$  é um inteiro não-negativo. Para mais detalhes, veja a Tabela 10.2.

<sup>d</sup>Isso formará a base para o Capítulo 14, série de Fourier.

<sup>4</sup>Note que essa definição matemática do autovalor difere por um sinal da utilização em Física.

### Exemplo 10.1.1 EQUAÇÃO DE LEGENDRE

A equação de Legendre é dada por

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n + 1)u = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (10.9)$$

Pelas Equações (10.1), (10.8) e (10.9),

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 - x^2 = p, & w(x) &= 1, \\ p_1(x) &= -2x = p', & \lambda &= n(n + 1), \\ p_2(x) &= 0 = q. \end{aligned}$$

Lembre-se de que nossas soluções de série da equação de Legendre (Exercício 9.5.5)<sup>5</sup> divergiam, a menos que  $n$  fosse restrito a um dos inteiros. Isso representa uma quantização do autovalor  $\lambda$ . ■

Quando as equações do Capítulo 9 são transformadas para a forma auto-adjunta, encontramos os seguintes valores dos coeficientes e parâmetros (Tabela 10.1). O coeficiente  $p(x)$  é o coeficiente da derivada de segunda ordem da autofunção. O autovalor  $\lambda$  é o parâmetro que está disponível em um termo da forma  $\lambda w(x)u(x)$ ; qualquer dependência de  $x$  à parte a autofunção se torna a função de peso  $w(x)$ . Se houver um outro termo que contenha a autofunção (não as derivadas), o coeficiente da autofunção nesse termo adicional é identificado como  $q(x)$ . Se nenhum termo desses estiver presente,  $q(x)$  é zero.

### Exemplo 10.1.2 DÊUTERON

Uma idéia mais detalhada dos conceitos de autofunção e autovalor pode ser dada por um modelo extremamente simples do dêuteron, um estado ligado de um nêutron e próton. Por experimentação, a energia de ligação de cerca de  $2 \text{ MeV} \ll Mc^2$ , com  $M = M_p = M_n$ , a massa comum de nêutron e próton, cuja pequena diferença de massa desprezamos. Devido ao curto alcance da força nuclear, as propriedades do dêuteron não dependem muito da forma detalhada do potencial de interação. Assim, a interação nuclear nêutron-próton pode ser modelada por um poço de potencial quadrado esfericamente simétrico:  $V = V_0 < 0$  para  $0 \leq r < a$ ,  $V = 0$  para  $r > a$ . A equação de onda de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{M} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi, \quad (10.10)$$

em que o autovalor de energia  $E < 0$  para um estado ligado. Para o estado fundamental, o momento angular orbital  $l = 0$  porque para  $l \neq 0$  há a barreira adicional de momento angular positivo. Assim, com  $\psi = \psi(r)$ , podemos escrever  $u(r) = r\psi(r)$  e, usando o Exercício 2.5.18, a equação de onda se torna

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k_1^2 u = 0, \quad (10.11)$$

com

$$k_1^2 = \frac{M}{\hbar^2} (E - V_0) > 0 \quad (10.12)$$

para a faixa interna,  $0 \leq r < a$ . Para  $a < r < \infty$ , temos

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - k_2^2 u = 0, \quad (10.13)$$

com

$$k_2^2 = -\frac{ME}{\hbar^2} > 0. \quad (10.14)$$

A condição de fronteira de que  $\psi$  permaneça finito em  $r = 0$  implica  $u(0) = 0$  e

$$u_1(r) = \text{sen } k_1 r, \quad 0 \leq r < a. \quad (10.15)$$

No intervalo fora do poço de potencial, temos uma combinação linear das duas exponenciais,

$$u_2(r) = A \exp k_2 r + B \exp(-k_2 r), \quad a < r < \infty. \quad (10.16)$$

<sup>5</sup>Compare também com os Exercícios 5.2.15 e 12.10.





A continuidade da densidade de partícula e de corrente exige que  $u_1(a) = u_2(a)$  e que  $u_1'(a) = u_2'(a)$ . Essas **condições de junção** ou **compatibilidade** resultam em

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} k_1 a &= A \exp k_2 a + B \exp(-k_2 a), \\ k_1 \cos k_1 a &= k_2 A \exp k_2 a - k_2 B \exp(-k_2 a). \end{aligned} \quad (10.17)$$

A condição de que realmente tenhamos uma condição ligada próton-nêutron é que  $\int_0^\infty u^2(r) dr = 1$ . Esse vínculo pode ser cumprido se impusermos uma condição de contorno de que  $\psi(r)$  permaneça finita quando  $r \rightarrow \infty$ . E isso, por sua vez, significa que  $A = 0$ . Dividindo o par de equações precedentes (para cancelar  $B$ ), obtemos

$$\operatorname{tg} k_1 a = -\frac{k_1}{k_2} = -\sqrt{\frac{E - V_0}{-E}}, \quad (10.18)$$

uma equação transcendental para a energia  $E$  com somente certas soluções discretas. Se  $E$  for tal que a Equação (10.18) pode ser satisfeita, nossas soluções  $u_1(r)$  e  $u_2(r)$  podem satisfazer as condições de contorno. Se a Equação (10.18) não for satisfeita, **não existe nenhuma solução aceitável**. Os valores de  $E$  para os quais a Equação (10.18) é satisfeita são os autovalores; as funções correspondentes,  $u_1$  e  $u_2$  (ou  $\psi$ ) são as autofunções. Para o problema do dêuteron existe um (e somente um) valor negativo de  $E$  que satisfaz a Equação (10.18); isto é, o dêuteron tem um e somente um estado ligado.

Agora, o que acontece se  $E$  não satisfizer a Equação (10.18), isto é, se  $E \neq E_0$  não for um autovalor? Em forma gráfica, imagine que  $E$  e, portanto,  $k_1$  sofram uma ligeira variação. Para  $E = E_1 < E_0$ ,  $k_1$  é reduzido e  $\operatorname{sen} k_1 a$  não virou para baixo o suficiente para se ajustar a  $\exp(-k_2 a)$ . As condições de junção, Equação (10.17), requerem que  $A > 0$  e que a função de onda vá a  $+\infty$  exponencialmente. Para  $E = E_2 > E_0$ ,  $k_1$  é maior,  $\operatorname{sen} k_1 a$  alcança o pico mais cedo e desceu mais rapidamente em  $r = a$ . As condições de junção exigem que  $A < 0$ , e a função de onda vai a  $-\infty$  exponencialmente. Somente para  $E = E_0$ , um autovalor, a função de onda terá o requerido comportamento assintótico exponencial negativo (veja a Figura 10.1). ■

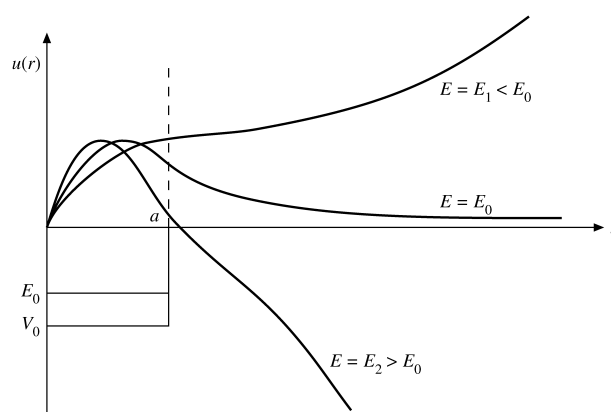


Figura 10.1: Uma autofunção de dêuteron.

### Condições de Contorno

Na definição precedente de autofunção, notou-se que a autofunção  $u_\lambda(x)$  tinha de satisfazer certas condições de fronteira impostas. O termo **condições de contorno** inclui o conceito de **condições iniciais**, como caso especial. Por exemplo, especificar a posição inicial  $x_0$  e a velocidade inicial  $v_0$  em algum problema de dinâmica corresponderia às condições de contorno de Cauchy. A única diferença na presente utilização de condições de contorno nesses problemas unidimensionais é que vamos aplicar as condições sobre **ambas** as extremidades da faixa permitida para a variável.

A forma da equação diferencial ou as condições de contorno determinadas para as soluções habitualmente garantirão que nas extremidades de nosso intervalo (isto é, na contorno, como sugerido pela Equação (10.3)) os seguintes produtos desaparecerão:

$$p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=a} = 0 \quad \text{e} \quad p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=b} = 0. \quad (10.19)$$

Aqui  $u(x)$  e  $v(x)$  são soluções da EDO particular (Equação (10.8)) que está sendo considerada. Uma razão para essa forma particular da Equação (10.19) será sugerida em breve. Se recordarmos a função de onda radial  $u$  do átomo de hidrogênio com  $u(0) = 0$  e  $du/dr \sim e^{-kr} \rightarrow 0$ , quando  $r \rightarrow \infty$ , então ambas as condições de contorno são satisfeitas. De forma semelhante, no exemplo do dêuteron (Exemplo 10.1.2),  $\text{sen } k_1 r \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$  e  $d(e^{-k_2 r})/dr \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , ambas as condições de contorno são obedecidas. Entretanto, podemos trabalhar com um conjunto um pouco menos restritivo de condições de contorno,

$$v^* p u' \Big|_{x=a} = v^* p u' \Big|_{x=b}, \tag{10.20}$$

no qual  $u(x)$  e  $v(x)$  são soluções da equação diferencial correspondente aos mesmos autovalores ou a autovalores diferentes. A Equação (10.20) pode perfeitamente ser satisfeita se estivermos tratando com um sistema físico periódico, tal como uma rede cristalina.

As Equações (10.19) e (10.20) são escritas em termos de  $v^*$ , conjugado complexo. Quando as soluções são reais,  $v = v^*$ , e o asterisco pode ser ignorado. Contudo, em expansões exponenciais de Fourier e em Mecânica Quântica as funções serão complexas e o conjugado complexo será necessário.

### Exemplo 10.1.3 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO $[a, b]$

Para  $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ , uma possível equação de autovalor é

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + n^2 u(x) = 0, \tag{10.21}$$

com autofunções

$$u_n = \cos nx, \quad v_m = \text{sen } mx.$$

A Equação (10.20) se torna

$$-n \text{sen } mx \text{sen } nx \Big|_a^b = 0, \quad \text{ou} \quad m \cos mx \cos nx \Big|_a^b = 0,$$

permutando  $u_n$  e  $v_m$ . Visto que  $\text{sen } mx$  e  $\cos nx$  são periódicas com período  $2\pi$  (para  $n$  e  $m$  inteiros), a Equação (10.20) é claramente satisfeita se  $a = x_0$  e  $b = x_0 + 2\pi$ . Se um problema prescrever um intervalo diferente, as autofunções e autovalores mudarão juntamente com as condições de contorno. As funções sempre devem ser escolhidas de modo que as condições de contorno (Equação (10.20), etc.) sejam satisfeitas. Para esse caso (série de Fourier), as escolhas usuais são  $x_0 = 0$ , levando a  $(0, 2\pi)$  e  $x_0 = -\pi$ , levando a  $(-\pi, \pi)$ . Aqui, e em todos os outros vários capítulos, **o intervalo de ortogonalidade é tal que as condições de contorno (Equação (10.20)) serão satisfeitas**. O intervalo  $[a, b]$  e o fator de peso  $w(x)$  para as equações diferenciais de segunda ordem mais comumente encontradas estão relacionados na Tabela 10.2. ■

**Tabela 10.2**

Equação	$a$	$b$	$w(x)$
Legendre	-1	1	1
Legendre deslocada	0	1	1
Legendre associada	-1	1	1
Chebyshev I	-1	1	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev deslocada I	0	1	$[x(1 - x)]^{-1/2}$
Chebyshev II	-1	1	$(1 - x^2)^{1/2}$
Laguerre	0	$\infty$	$e^{-x}$
Laguerre associada	0	$\infty$	$x^k e^{-x}$
Hermite	$-\infty$	$\infty$	$e^{-x^2}$
Oscilador harmônico simples	0	$2\pi$	1
	$-\pi$	$\pi$	1

1. O intervalo de ortogonalidade  $[a, b]$  é determinado pelas condições de contorno da Seção 10.1.
2. A função ponderação é estabelecida colocando a EDO em forma auto-adjunta.



### Operadores Hermitianos

Agora, vamos provar uma importante propriedade do operador diferencial de segunda ordem auto-adjunto (Equação (10.8)), em conjunto com soluções  $u(x)$  e  $v(x)$  que satisfazem condições de fronteira dadas pela Equação (10.20). Isso é motivado por aplicações em Mecânica Quântica.

Integrando  $v^*$  (conjugado complexo) vezes o operador diferencial de segunda ordem auto-adjunto  $\mathcal{L}$  (operando em  $u$ ) no intervalo  $a \leq x \leq b$ , obtemos

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u \, dx = \int_a^b v^* (pu')' \, dx + \int_a^b v^* qu \, dx \quad (10.22)$$

usando a Equação (10.6). Integrando por partes, temos

$$\int_a^b v^* (pu')' \, dx = v^* pu' \Big|_a^b - \int_a^b v^{*'} pu' \, dx. \quad (10.23)$$

A parte integrada desaparece com a aplicação das condições de contorno (Equação (10.20)). Integrando a integral remanescente por partes uma segunda vez, temos

$$- \int_a^b v^{*'} pu' \, dx = -v^{*'} pu \Big|_a^b + \int_a^b u (pv^{*'})' \, dx. \quad (10.24)$$

Mais uma vez, a parte integrada desaparece na aplicação da Equação (10.20). Uma combinação das Equações (10.22) a (10.24) nos dá

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u \, dx = \int_a^b u (\mathcal{L}v)^* \, dx. \quad (10.25)$$

Essa propriedade, dada pela Equação (10.25), é expressa dizendo que o operador  $\mathcal{L}$  é hermitiano em relação às funções  $u(x)$  e  $v(x)$ , que satisfazem as condições de contorno especificadas pela Equação (10.20). Note que, se essa propriedade hermitiana resultar da condição de ser auto-adjunta em um espaço de Hilbert, então ela inclui que as condições de contorno sejam impostas a todas as funções daquele espaço.

### Operadores Hermitianos em Mecânica Quântica

O desenvolvimento desta seção focalizou os clássicos operadores diferenciais de segunda ordem da Física Matemática. Generalizando nossa teoria do operador hermitiano como exigido pela Mecânica Quântica, temos uma extensão: os operadores não precisam ser nem operadores diferenciais de segunda ordem, nem reais.  $p_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$  será um operador hermitiano. Simplesmente admitimos (como é costumeiro em Mecânica Quântica) que temos funções de onda que satisfazem condições de contorno adequadas: desaparecem com suficiente força no infinito ou têm comportamento periódico (como em uma rede cristalina ou intensidade unitária em problemas de espalhamento). O operador  $\mathcal{L}$  é denominado **hermitiano** se

$$\int \psi_1^* \mathcal{L}\psi_2 \, d\tau = \int (\mathcal{L}\psi_1)^* \psi_2 \, d\tau. \quad (10.26)$$

À parte a simples extensão para quantidades complexas, essa definição é idêntica à Equação (10.25).

O **adjunto**  $A^\dagger$  de um operador  $A$  é definido por

$$\int \psi_1^* A^\dagger \psi_2 \, d\tau \equiv \int (A\psi_1)^* \psi_2 \, d\tau. \quad (10.27)$$

Essa expressão generaliza nossa definição clássica de operadores orientados de derivada de segunda ordem da Equação (10.5). Aqui, o adjunto é definido em termos da integral resultante, com o  $A^\dagger$  como parte do integrando. É claro que, se  $A = A^\dagger$  (**auto-adjunto**) e satisfaz as condições de contorno já mencionadas, então  $A$  é hermitiano.

O **valor esperado** de um operador  $\mathcal{L}$  é definido como

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \int \psi^* \mathcal{L}\psi \, d\tau. \quad (10.28a)$$

Na estrutura da Mecânica Quântica  $\langle \mathcal{L} \rangle$  corresponde ao resultado de uma medição da quantidade física representada por  $\mathcal{L}$  quando o sistema físico está em um estado definido pela função de onda  $\psi$ . Se exigirmos

que  $\mathcal{L}$  seja hermitiano, é fácil mostrar que  $\langle \mathcal{L} \rangle$  é real (como seria de esperar de uma medição em uma teoria física). Tomando o conjugado complexo da Equação (10.28a), obtemos

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \left[ \int \psi^* \mathcal{L} \psi d\tau \right]^* = \int \psi \mathcal{L}^* \psi^* d\tau.$$

Rearranjando os fatores no integrando, temos

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \int (\mathcal{L} \psi)^* \psi d\tau.$$

Então, aplicando nossa definição de operador hermitiano, Equação (10.26), obtemos

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \int \psi^* \mathcal{L} \psi d\tau = \langle \mathcal{L} \rangle, \tag{10.28b}$$

ou  $\langle \mathcal{L} \rangle$  é real. Vale a pena observar que  $\psi$  não é necessariamente uma autofunção de  $\mathcal{L}$ .

### Exercícios

- 10.1.1** Mostre que a EDO de Laguerre, Equação (13.52), pode ser posta em forma auto-adjunta multiplicando por  $e^{-x}$  e que  $w(x) = e^{-x}$  é a função de peso.
- 10.1.2** Mostre que a EDO de Hermite, Equação (13.10), pode ser posta em forma auto-adjunta multiplicando por  $e^{-x^2}$  e que isso dá  $w(x) = e^{-x^2}$  como a função densidade adequada.
- 10.1.3** Mostre que a EDO de Chebyshev (tipo I), Equação (13.100), pode ser posta em forma auto-adjunta multiplicando por  $(1 - x^2)^{-1/2}$  e que isso dá  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  como a função densidade adequada.
- 10.1.4** Mostre o seguinte quando a equação diferencial linear de segunda ordem é expressa em forma auto-adjunta:
  - (a) O wronskiano é igual a uma constante dividida pelo coeficiente inicial  $p$ :

$$W(x) = \frac{C}{p(x)}.$$

- (b) Uma segunda solução é dada por

$$y_2(x) = C y_1(x) \int^x \frac{dt}{p(t)[y_1(t)]^2}.$$

- 10.1.5**  $U_n(x)$ , o polinômio de Chebyshev (tipo II), satisfaz a EDO, Equação (13.101),

$$(1 - x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n + 2)U_n(x) = 0.$$

- (a) Localize os pontos singulares que aparecem no plano finito e mostre se são regulares ou irregulares.
- (b) Ponha essa equação em forma auto-adjunta.
- (c) Identifique o autovalor completo.
- (d) Identifique a função de peso.
- 10.1.6** Para o caso muito especial  $\lambda = 0$  e  $q(x) = 0$  a equação de autovalor adjunta se torna

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0,$$

satisfeita por

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{p(x)}.$$

Use essa expressão para obter uma “segunda” solução para o seguinte:

- (a) Equação de Legendre,



- (b) Equação de Laguerre,
- (c) Equação de Hermite.

Resposta: (a)  $u_2(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  
 (b)  $u_2(x) - u_2(x_0) = \int_{x_0}^x e^t \frac{dt}{t}$ ,  
 (c)  $u_2(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ .

Essas segundas soluções ilustram o comportamento divergente encontrado em uma segunda solução.

*Nota:* Em todos os três casos,  $u_1(x) = 1$ .

**10.1.7** Dado que  $\mathcal{L}u = 0$  e  $g\mathcal{L}u$  é auto-adjunta, mostre que para o operador adjunto  $\bar{\mathcal{L}}$ ,  $\bar{\mathcal{L}}(gu) = 0$ .

**10.1.8** Para um operador diferencial de segunda ordem  $\mathcal{L}$  que é auto-adjunto mostre que

$$\int_a^b [y_2 \mathcal{L}y_1 - y_1 \mathcal{L}y_2] dx = p(y_1' y_2 - y_1 y_2') \Big|_a^b.$$

**10.1.9** Mostre que, se uma função  $\psi$  tiver de satisfazer a equação de Laplace em uma região finita do espaço e satisfazer condições de contorno de Dirichlet sobre toda a superfície fechada de ligação, então  $\psi$  é única.

*Sugestão:* Uma das formas do teorema de Green, Seção 1.11, será útil.

**10.1.10** Considere que as soluções das equações de Legendre, Chebyshev, Hermite e Laguerre são polinômios. Mostre que os intervalos de integração que garantem que as condições de contorno do operador hermitiano serão satisfeitas são

- (a) Legendre  $[-1, 1]$ ,
- (b) Chebyshev  $[-1, 1]$ ,
- (c) Hermite  $(-\infty, \infty)$ ,
- (d) Laguerre  $[0, \infty)$ .

**10.1.11** Dentro da estrutura da Mecânica Quântica (Equações (10.26) e seguintes), mostre que os seguintes operadores são hermitianos:

- (a) momento  $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla \equiv -i \frac{h}{2\pi} \nabla$
- (b) momento angular  $\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \equiv -i \frac{h}{2\pi} \mathbf{r} \times \nabla$ .

*Sugestão:* Em forma cartesiana  $\mathbf{L}$  é uma combinação linear de operadores hermitianos não-comutativos.

**10.1.12** (a)  $A$  é um operador não-hermitiano. No sentido das Equações (10.26) e (10.27), mostre que

$$A + A^\dagger \quad \text{e} \quad i(A - A^\dagger)$$

são operadores hermitianos.

(b) Usando o resultado precedente, mostre que todo operador não-hermitiano pode ser escrito como uma combinação de dois operadores hermitianos.

**10.1.13**  $U$  e  $V$  são dois operadores arbitrários, não necessariamente hermitianos. No sentido da Equação (10.27), mostre que

$$(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger.$$

Note a semelhança com matrizes hermitianas adjuntas.

*Sugestão:* Aplique a definição de operador adjunto, Equação (10.27).

**10.1.14** Prove que o produto de dois operadores hermitianos é hermitiano (Equação (10.26)) se, e somente se, os dois operadores comutarem.

**10.1.15**  $A$  e  $B$  são operadores não-comutativos da Mecânica Quântica:

$$AB - BA = iC.$$

Mostre que  $C$  é hermitiano. Admita que as condições de contornos adequadas são satisfeitas.

**10.1.16** O operador  $\mathcal{L}$  é hermitiano. Mostre que  $\langle \mathcal{L}^2 \rangle \geq 0$ .

**10.1.17** Um valor esperado da Mecânica Quântica é definido por

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(x) A \psi(x) dx,$$

em que  $A$  é um operador linear. Mostre que exigir que  $\langle A \rangle$  seja real significa que  $A$  deve ser hermitiano, em relação a  $\psi(x)$ .

**10.1.18** Pela definição de adjunto, Equação (10.27), mostre que  $A^{\dagger\dagger} = A$  no sentido de que  $\int \psi_1^* A^{\dagger\dagger} \psi_2 d\tau = \int \psi_1^* A \psi_2 d\tau$ . O adjunto do adjunto é o operador original. *Sugestão:* As funções  $\psi_1$  e  $\psi_2$  da Equação (10.27) representam uma classe de funções. Os índices 1 e 2 podem ser permutados ou substituídos por outros índices.

**10.1.19** A equação de onda de Schrödinger para o dêuteron (com um potencial de Woods-Saxon) é

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \frac{V_0}{1 + \exp[(r - r_0)/a]} \psi = E \psi.$$

Aqui,  $E = -2,224$  MeV,  $a$  é um “parâmetro de espessura”,  $0,4 \times 10^{-13}$  cm. Expressando comprimentos em fermis ( $10^{-13}$  cm) e energias em milhões de elétron-volts (MeV), podemos reescrever a equação de onda como

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) + \frac{1}{41,47} \left[ E - \frac{V_0}{1 + \exp((r - r_0)/a)} \right] (r\psi) = 0.$$

Admite-se que  $E$  é conhecido por experimentação. A meta é achar  $V_0$  para um valor especificado de  $r_0$  (digamos,  $r_0 = 2,1$ ). Se fizermos  $y(r) = r\psi(r)$ , então  $y(0) = 0$  e consideramos  $y'(0) = 1$ . Ache  $V_0$ , tal que  $y(20,0) = 0$ . (Isso deveria ser  $y(\infty)$ , mas  $r = 20$  está distante o bastante da faixa das forças nucleares para se aproximar do infinito.)

Resposta: Para  $a = 0,4$  e  $r_0 = 2,1$  fm,  $V_0 = -34,159$  MeV.

**10.1.20** Determine o parâmetro de poço de potencial nuclear  $V_0$  do Exercício 10.1.19 como uma função de  $r_0$  para  $r = 2,00(0,05)2,25$  fermis. Expresse seus resultados como uma lei de potências

$$|V_0| r_0^\nu = k.$$

Determine o expoente  $\nu$  e a constante  $k$ . Essa formulação de lei de potências é útil para interpolação precisa.

**10.1.21** No Exercício 10.1.19 admitimos que 20 fermis era uma boa aproximação de infinito. Verifique isso calculando  $V_0$  para  $r\psi(r) = 0$  em (a)  $r = 15$ , (b)  $r = 20$ , (c)  $r = 25$  e (d)  $r = 30$ . Esboce seus resultados. Considere  $r_0 = 2,10$  e  $a = 0,4$  (fermis).

**10.1.22** Para uma partícula quântica em movimento em um poço de potencial,  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , a equação de onda de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x),$$

ou

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} - z^2\psi(z) = -\frac{2E}{\hbar\omega}\psi(z),$$

em que  $z = (m\omega/\hbar)^{1/2}x$ . Uma vez que o operador é par, esperamos soluções de paridade definida. Para as condições iniciais a seguir, integre desde a origem e determine a constante mínima  $2E/\hbar\omega$  que levará a  $\psi(\infty) = 0$  em cada caso. (Você pode considerar  $z = 6$  uma aproximação do infinito.)

(a) Para uma autofunção par,

$$\psi(0) = 1, \quad \psi'(0) = 0.$$

(b) Para uma autofunção ímpar,

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1.$$

*Nota:* Soluções analíticas aparecem na Seção 13.1.



## 10.2 Operadores Hermitianos

Operadores hermitianos, ou auto-adjuntos, com condições de contorno adequadas, têm três propriedades que são de extrema importância na Física, tanto clássica como quântica.

1. Os autovalores de um operador hermitiano são reais.
2. Um operador hermitiano possui um conjunto ortogonal de autofunções.
3. As autofunções de um operador hermitiano formam um conjunto completo.<sup>6</sup>

### Autovalores Reais

Passamos a provar as duas primeiras dessas três propriedades. Seja

$$\mathcal{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0. \quad (10.29)$$

Admitindo a existência de um segundo autovalor e autofunção,

$$\mathcal{L}u_j + \lambda_j w u_j = 0. \quad (10.30)$$

Então, tomando o conjugado complexo, obtemos

$$\mathcal{L}^* u_j^* + \lambda_j^* w u_j^* = 0. \quad (10.31)$$

Aqui,  $w(x) \geq 0$  é uma função real. Mas permitimos que  $\lambda_k$ , os autovalores, e  $u_k$ , as autofunções, sejam complexos. Multiplicando a Equação (10.29) por  $u_j^*$  e a Equação (10.31) por  $u_i$  e então subtraindo, temos

$$u_j^* \mathcal{L}u_i - u_i \mathcal{L}^* u_j^* = (\lambda_j^* - \lambda_i) w u_i u_j^*. \quad (10.32)$$

Integramos sobre o intervalo  $a \leq x \leq b$ :

$$\int_a^b u_j^* \mathcal{L}u_i dx - \int_a^b u_i \mathcal{L}^* u_j^* dx = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w dx. \quad (10.33)$$

Uma vez que  $\mathcal{L}$  é hermitiano, o lado esquerdo desaparece, pela Equação (10.26), e

$$(\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w dx = 0. \quad (10.34)$$

Se  $i = j$ , a integral não pode desaparecer [ $w(x) > 0$ , à parte pontos isolados], exceto no caso trivial de  $u_i = 0$ . Daí, o coeficiente  $(\lambda_i^* - \lambda_i)$  deve ser zero,

$$\lambda_i^* = \lambda_i, \quad (10.35)$$

o que diz que o autovalor é real. Uma vez que  $\lambda_i$  pode representar qualquer um dos autovalores, isso prova a primeira propriedade. Isso é exatamente análogo à natureza dos autovalores de matrizes reais simétricas (e hermitianas). (Compare com a Seção 3.5.)

A análoga da decomposição espectral de uma matriz simétrica real na Seção 3.5 para um operador hermitiano  $\mathcal{L}$  com um conjunto discreto de autovalores  $\lambda_i$  adquire forma

$$\mathcal{L} = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle \langle u_i|, \quad f(\mathcal{L}) = \sum_i f(\lambda_i) |u_i\rangle \langle u_i|$$

com autovetores  $|u_i\rangle$  e qualquer função  $f$  infinitamente diferenciável.

Autovalores reais de operadores hermitianos têm um significado fundamental em Mecânica Quântica, onde correspondem a quantidades mensuráveis com precisão como energia e momento angular. Sendo a teoria formulada em termos de operadores hermitianos, essa prova de autovalores reais garante que ela preverá números reais para essas quantidades físicas mensuráveis. Na Seção 17.8 veremos que o conjunto de autovalores reais tem um limite inferior (para problemas não-relativistas).

<sup>6</sup>Essa terceira propriedade não é universal. Ela vale para nossos operadores diferenciais lineares de segunda ordem na forma (auto-adjunta) de Sturm-Liouville. A completude é definida e discutida na Seção 10.4. Uma prova de que as autofunções de nossas equações diferenciais lineares de segunda ordem auto-adjuntas formam um conjunto completo pode ser desenvolvida pelo cálculo de variações da Seção 17.8.

### Autofunções Ortogonais

Se agora considerarmos  $i \neq j$  e se  $\lambda_i \neq \lambda_j$  na Equação (10.34), a integral do produto de duas autofunções diferentes deve desaparecer:

$$\int_a^b u_i u_j^* w dx = 0. \tag{10.36}$$

Esta condição, denominada **ortogonalidade**, é o análogo contínuo de um produto escalar de dois vetores se anular<sup>7</sup>. Dizemos que as autofunções  $u_i(x)$  e  $u_j(x)$  são ortogonais em relação à função de peso  $w(x)$  sobre o intervalo  $[a, b]$ . A Equação (10.36) constitui uma prova parcial da segunda propriedade de nossos operadores hermitianos. Mais uma vez deve ser notada a exata analogia com a análise matricial. De fato, podemos estabelecer uma correspondência um-para-um entre essa teoria de equações diferenciais de Sturm-Liouville e o tratamento de matrizes hermitianas. Essa correspondência tem sido historicamente significativa para estabelecer a equivalência matemática de matrizes mecânicas desenvolvidas por Heisenberg e a mecânica de ondulatória desenvolvida por Schrödinger. Hoje, as duas abordagens diversas estão fundidas na teoria da Mecânica Quântica, e a formulação matemática que for mais conveniente para um problema particular é usada para esse problema. Na verdade, as alternativas matemáticas não param por aqui. Equações integrais, Capítulo 16, são uma terceira abordagem equivalente e às vezes mais conveniente ou poderosa.

Essa prova de ortogonalidade não é bem completa. Há um furo, porque podemos ter  $u_i \neq u_j$ , mas ainda assim ter  $\lambda_i = \lambda_j$ . Tal caso é denominado **degenerado**. Ilustrações de degenerescência são dadas no final desta seção. Se  $\lambda_i = \lambda_j$ , a integral na Equação (10.34) não precisa desaparecer. Isso significa que autofunções independentes correspondentes ao mesmo autovalor não são automaticamente ortogonais e que é preciso procurar algum outro método para obter um conjunto ortogonal. Embora as autofunções nesse caso degenerado possam não ser ortogonais, elas sempre podem ser transformadas em ortogonais. Na próxima seção desenvolvemos um método para fazer isso. Veja também a Equação (4.21) para degenerescência devida à simetria.

Nos capítulos subseqüentes veremos que ter um dado conjunto de funções ortogonais é exatamente tão desejável quanto ter um sistema de coordenadas ortogonais. Podemos trabalhar com funções não-ortogonais, mas elas provavelmente mostrarão ser tão confusas quanto um sistema de coordenadas oblíquas.

### Exemplo 10.2.1 SÉRIE DE FOURIER — ORTOGONALIDADE

Continuando o Exemplo 10.1.3, a equação de autovalor, Equação (10.21),

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + n^2 y(x) = 0,$$

pode descrever quanticamente uma partícula dentro de uma caixa ou talvez uma corda de violino em vibração, um oscilador harmônico clássico com autofunções degeneradas —  $\cos nx, \sin nx$  — e autovalores  $n^2$ , sendo  $n$  um inteiro.

Com  $n$  real (aqui considerado inteiro), as integrais de ortogonalidade se tornam

(a)  $\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \sin nx dx = C_n \delta_{nm},$

(b)  $\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos mx \cos nx dx = D_n \delta_{nm},$

(c)  $\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$

Para um intervalo de  $2\pi$ , a análise precedente garante o delta de Kronecker em (a) e (b) mas não o zero em (c) porque (c) pode envolver autofunções degeneradas. Contudo, uma inspeção mostra que (c) sempre desaparece para todos os  $m$  e  $n$  inteiros.

<sup>7</sup>Pela definição da integral de Riemann,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)\Delta x \right),$$

$x_0 = a$ , em que  $x_N = b$  e  $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ . Se interpretarmos  $f(x_i)$  e  $g(x_i)$  como as  $i$ -ésimas componentes de um vetor de  $N$  componentes, então esse somatório (e, portanto, essa integral) corresponde diretamente a um produto escalar de vetores, Equação (1.24). O produto escalar nulo é a condição para **ortogonalidade** dos vetores ou funções.





Nossa teoria de Sturm-Liouville nada diz sobre os valores de  $C_n$  e  $D_n$  porque EDOs homogêneas têm soluções cujo *scaling* é arbitrário. O cálculo propriamente dito resulta em

$$C_n = \begin{cases} \pi, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \quad D_n = \begin{cases} \pi, & n \neq 0, \\ 2\pi, & n = 0. \end{cases}$$

Essas integrais de ortogonalidade formam a base das séries de Fourier desenvolvidas no Capítulo 14.

**Exemplo 10.2.2** EXPANSÃO EM AUTOFUNÇÕES ORTOGONAIS — ONDA QUADRADA

A propriedade de completude (veja a (Equação 1.190) e a Seção 10.4) significa que certas classes de funções (por exemplo, contínuas por seção ou contínuas por partes) podem ser representadas por uma série de autofunções ortogonais. Considere a forma de onda quadrada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{h}{2}, & -\pi < x < 0. \end{cases} \quad (10.37)$$

Essa função pode ser expandida em qualquer dentre uma variedade de autofunções — Legendre, Hermite, Chebyshev, e assim por diante. A escolha da autofunção é feita com base na conveniência ou em uma aplicação. Para ilustrar a técnica de expansão, vamos escolher as autofunções do Exemplo 10.2.1,  $\cos nx$  e  $\sin nx$ . A série de autofunção é escrita, por conveniência (e por convenção), como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Multiplicando  $f(t)$  por  $\cos nt$  ou  $\sin nt$  e integrando, somente o enésimo termo sobrevive, pelas integrais de ortogonalidade do Exemplo 10.2.1, por isso resultando os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Substituição direta de  $\pm h/2$  por  $f(t)$  resulta em

$$a_n = 0,$$

o que é esperado aqui por causa da anti-simetria,  $f(-x) = -f(x)$ , e

$$b_n = \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \frac{2h}{n\pi}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Daí, a expansão (Fourier) de autofunção da onda quadrada é

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad (10.38)$$

Exemplos adicionais, usando outras autofunções, aparecem nos Capítulos 11 e 12. ■

**Degenerescência**

O conceito de degenerescência já foi apresentado antes. Se  $N$  autofunções linearmente independentes correspondem ao mesmo autovalor, diz-se que o autovalor é  $N$  vezes degenerado. Uma ilustração particularmente simples é dada pelos autovalores e autofunções da equação do oscilador harmônico clássico, Exemplo 10.2.1. Para cada autovalor  $n^2$ , há duas soluções possíveis:  $\sin nx$  e  $\cos nx$  (e qualquer combinação linear, sendo  $n$  um inteiro). Dizemos que as autofunções são degeneradas ou que o autovalor é degenerado.

Um exemplo mais complicado é dado pelo sistema físico de um elétron em um átomo (tratamento não-relativista, desprezando o spin). Pela equação de Schrödinger, Equação (13.84), para o hidrogênio, a energia total do elétron é nosso autovalor. Podemos denominá-lo  $E_{nLM}$  usando os números quânticos  $n, L$ , e  $M$  como

índices. Para cada conjunto distinto de números quânticos  $(n, L, M)$  há uma autofunção linearmente independente  $\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi)$ . Para o hidrogênio, a energia  $E_{nLM}$  é independente de  $L$  e  $M$ , refletindo a simetria esférica (e  $SO(4)$ ) do potencial de Coulomb. Com  $0 \leq L \leq n-1$  e  $-L \leq M \leq L$ , o autovalor é  $n^2$  vezes degenerado (incluir o spin do elétron elevaria esse fator para  $2n^2$ ). Em átomos com mais de um elétron, o potencial eletrostático não é mais um simples potencial  $r^{-1}$ . A energia depende de  $L$  tanto quanto de  $n$ , embora **não** de  $M$ ;  $E_{nLM}$  ainda é  $(2L+1)$  vezes degenerescência. Essa degenerescência — devida à invariância rotacional do potencial — pode ser removida aplicando-se um campo magnético externo, quebrando a simetria esférica e dando origem ao efeito de Zeeman. Como regra, as autofunções formam um espaço de Hilbert, isto é, um espaço vetorial completo de funções com uma métrica definida pelo produto interno (veja a Seção 10.4 para mais detalhes e exemplos).

Muitas vezes uma simetria subjacente, tal como invariância rotacional, está causando as degenerescências. Estados que pertencem ao mesmo autovalor de energia então formarão um multipletto ou representação do grupo de simetria. Os poderosos métodos teóricos de grupos são tratados no Capítulo 4 com certo detalhe.

### Exercícios

**10.2.1** As funções  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$  são autofunções do mesmo operador hermitiano, mas para valores autovalores distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Prove que  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$  são linearmente independentes.

**10.2.2** (a) Os vetores  $e_n$  são ortogonais um ao outro:  $e_n \cdot e_m = 0$ , para  $n \neq m$ . Mostre que eles são linearmente independentes.

(b) As funções  $\psi_n(x)$  são ortogonais uma à outra no intervalo  $[a, b]$  e em relação à função de pesos  $w(x)$ . Mostre que as  $\psi_n(x)$  são linearmente independentes.

**10.2.3** Dado que

$$P_1(x) = x \quad \text{e} \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

são soluções da equação diferencial de Legendre correspondentes a diferentes autovalores:

(a) Avalie sua integral de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx.$$

(b) Explique por que essas duas funções não são ortogonais, isto é, por que a prova de ortogonalidade não se aplica.

**10.2.4**  $T_0(x) = 1$  e  $V_1(x) = (1-x^2)^{1/2}$  são soluções da equação diferencial de Chebyshev correspondentes a diferentes autovalores. Explique, em termos das condições de contorno, por que essas duas funções não são ortogonais.

**10.2.5** (a) Mostre que as derivadas de primeira ordem dos polinômios de Legendre satisfazem a equação diferencial auto-adjunta com autovalor  $\lambda = n(n+1) - 2$ .

(b) Essas derivadas de polinômios de Legendre satisfazem uma relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P'_m(x) P'_n(x) (1-x^2) dx = 0, \quad m \neq n.$$

*Nota:* Na Seção 12.5  $(1-x^2)^{1/2} P'_n(x)$  será denominado polinômio associado de Legendre,  $P_n^1(x)$ .

**10.2.6** Um conjunto de funções  $u_n(x)$  satisfaz a equação de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} u_n(x) \right] + \lambda_n w(x) u_n(x) = 0.$$

As funções  $u_m(x)$  e  $u_n(x)$  satisfazem condições de contorno que levam à ortogonalidade. Os autovalores correspondentes  $\lambda_m$  e  $\lambda_n$  são distintos. Prove que, para condições de contorno adequadas,  $u'_m(x)$  e  $u'_n(x)$  são ortogonais com  $p(x)$  como uma função de peso.

**10.2.7** Um operador linear  $A$  tem  $n$  autovalores distintos e  $n$  autofunções correspondentes:  $A\psi_i = \lambda_i\psi_i$ . Mostre que as  $n$  autofunções são linearmente independentes.  $A$  não é necessariamente hermitiano. *Sugestão:* Admita dependência linear — que  $\psi_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\psi_i$ . Use essa relação e a equação de autofunção de operador, primeiro em uma ordem e então na ordem inversa. Mostre que resulta uma contradição.



**10.2.8** (a) Mostre que a substituição de Liouville

$$u(x) = v(\xi) [p(x)w(x)]^{-1/4}, \quad \xi = \int_a^x \left[ \frac{w(t)}{p(t)} \right]^{1/2} dt$$

transforma

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} u \right] + [\lambda w(x) - q(x)] u(x) = 0$$

em

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + [\lambda - Q(\xi)] v(\xi) = 0,$$

em que

$$Q(\xi) = \frac{q(x(\xi))}{w(x(\xi))} + [p(x(\xi))w(x(\xi))]^{-1/4} \frac{d^2}{d\xi^2} (pw)^{1/4}.$$

(b) Se  $v_1(\xi)$  e  $v_2(\xi)$  forem obtidos por  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$ , respectivamente, por uma substituição de Liouville, mostre que  $\int_a^b w(x)u_1u_2 dx$  é transformada em  $\int_0^c v_1(\xi)v_2(\xi) d\xi$  com  $c = \int_a^b \left[ \frac{w}{p} \right]^{1/2} dx$ .

**10.2.9** Os polinômios ultra-esféricos  $C_n^{(\alpha)}(x)$  são soluções da equação diferencial

$$\left\{ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - (2\alpha+1)x \frac{d}{dx} + n(n+2\alpha) \right\} C_n^{(\alpha)}(x) = 0.$$

- (a) Transforme essa equação diferencial para a forma auto-adjunta.
- (b) Mostre que os  $C_n^{(\alpha)}(x)$  são ortogonais para  $n$  diferentes. Especifique o intervalo de integração e o fator de peso.

*Nota:* Admita que suas soluções são polinômios.

**10.2.10** Com  $\mathcal{L}$  não auto-adjunto,

$$\mathcal{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0$$

e

$$\bar{\mathcal{L}}v_j + \lambda_j w v_j = 0.$$

(a) Mostre que

$$\int_a^b v_j \mathcal{L}u_i dx = \int_a^b u_i \bar{\mathcal{L}}v_j dx,$$

contanto que

$$u_i p_0 v_j' \Big|_a^b = v_j p_0 u_i' \Big|_a^b$$

e

$$u_i (p_1 - p_0) v_j \Big|_a^b = 0.$$

(b) Mostre que a integral de ortogonalidade para as autofunções  $u_i$  e  $v_j$  se torna

$$\int_a^b u_i v_j w dx = 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_j).$$

**10.2.11** No Exercício 9.5.8 constata-se que a solução de série da equação de Chebyshev é convergente para todos os autovalores  $n$ . Portanto,  $n$  **não** é quantizado pelo argumento usado para a equação de Legendre (Exercício 9.5.5). Calcule a soma da série de Chebyshev da equação indicial  $k = 0$  para  $n = \nu = 0, 8, 0, 9$ , e  $1, 0$  e para  $x = 0, 0(0, 1)0, 9$ .

*Nota:* A relação de recorrência da série de Chebyshev é dada no Exercício 5.2.16.

**10.2.12** (a) Avalie a  $n = \nu = 0, 9$ , série de Chebyshev da equação indicial  $k = 0$ , para  $x = 0, 98, 0, 99$ , e  $1, 00$ . A série converge muito lentamente em  $x = 1, 00$ . Talvez você queira usar precisão dupla. Limites superiores para o erro de seu cálculo podem ser estabelecidos por comparação com o caso de  $\nu = 1, 0$  que corresponde a  $(1 - x^2)^{1/2}$ .

(b) Essas soluções de série para autovalor  $\nu = 0, 9$  e para  $\nu = 1, 0$  são obviamente **não-ortogonais**, a despeito do fato de satisfazerem a equação de autovalor auto-adjunta com autovalores diferentes. Pelo comportamento das soluções na vizinhança e  $x = 1, 00$ , tente formular uma hipótese para o fato de a prova de ortogonalidade não se aplicar.

**10.2.13** A expansão de Fourier da onda quadrada (assimétrica) é dada pela Equação (10.38). Com  $h = 2$ , avalie essa série para  $x = 0(\pi/18)\pi/2$ , usando os primeiros (a) 10 termos, (b) 100 termos da série. *Nota:* Para 10 termos e  $x = \pi/18$ , ou  $10^\circ$ , sua representação de Fourier tem uma protuberância acentuada. Esse é o fenômeno de Gibbs da Seção 14.5. Para 100, termos essa protuberância se deslocou de aproximadamente  $1^\circ$ .

**10.2.14** A onda quadrada **simétrica**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

tem uma expansão de Fourier

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

Avalie essa série para  $x = 0(\pi/18)\pi/2$  usando os primeiros (a) 10 termos, (b) 100 termos da série.

*Nota:* Assim como no Exercício 10.2.13, o fenômeno de Gibbs aparece na descontinuidade. Isso significa que uma série de Fourier não é adequada para trabalho numérico de precisão na vizinhança de uma descontinuidade.

### 10.3 Ortogonalização de Gram-Schmidt

A ortogonalização de Gram-Schmidt é um método que considera um conjunto não-ortogonal de vetores (veja a Seção 3.1) ou funções linearmente independentes<sup>8</sup> e constrói um conjunto ortogonal de vetores ou funções em um

<sup>8</sup>Tal conjunto de funções pode perfeitamente surgir das soluções de uma EDP na qual o autovalor era independente de uma ou mais das constantes de separação. Como exemplo, temos o problema do átomo de hidrogênio (Seções 10.2 e 13.2). O autovalor (energia) é independente do momento angular orbital do elétron e também de sua projeção sobre o eixo  $z$ -axis,  $m$ . Entretanto, note que a origem do conjunto de funções é irrelevante para o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt.



intervalo arbitrário e com relação a um peso arbitrário ou fator de densidade. Na linguagem da Álgebra Linear, o processo é equivalente a uma transformação matricial que relaciona um conjunto ortogonal de vetores (funções) de base a um conjunto não-ortogonal. Um exemplo específico dessa transformação de matriz aparece no Exercício 12.2.1.

Em seguida, aplicamos o procedimento de Gram-Schmidt a um conjunto de funções. As funções envolvidas podem ser reais ou complexas. Aqui, por conveniência, admitimos que são reais. A generalização para o caso complexo não oferece nenhuma dificuldade.

Antes de atacarmos a ortogonalização, devemos considerar a normalização de funções. Até agora, nenhuma normalização foi especificada. Isso significa que

$$\int_a^b \varphi_i^2 w \, dx = N_i^2,$$

mas nenhuma atenção foi dada ao valor de  $N_i$ . Uma vez que nossa equação básica (Equação (10.8)) é linear e homogênea, podemos multiplicar nossa solução por qualquer constante e ela ainda será uma solução. Agora exijamos que cada solução  $\varphi_i(x)$  seja multiplicada por  $N_i^{-1}$ , de modo que a nova  $\varphi_i$  (normalizada) satisfará

$$\int_a^b \varphi_i^2(x) w(x) \, dx = 1 \tag{10.39}$$

e

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) w(x) \, dx = \delta_{ij}. \tag{10.40}$$

A Equação (10.39) diz que normalizamos para a unidade. Incluindo a propriedade da ortogonalidade, temos a Equação (10.40). Diz-se que funções que satisfazem essa equação são **ortonormais** (ortogonais mais normalização para unidade). É claro que outras normalizações são possíveis e, de fato, por convenção histórica, cada uma das funções especiais da física matemática tratadas nos Capítulos 12 e 13 será normalizada de forma diferente.

Consideramos três conjuntos de funções: um dado conjunto original, linearmente independente  $u_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; um conjunto ortogonalizado  $\psi_n(x)$  a ser construído; e um conjunto final de funções  $\varphi_n(x)$ , que são as  $\psi_n$  normalizadas. As  $u_n$  originais podem ser autofunções degeneradas, mas isso não é necessário. Teremos as seguintes propriedades:

$u_n(x)$	$\psi_n(x)$	$\varphi_n(x)$
<i>Linearmente independente</i>	<i>Linearmente independente</i>	<i>Linearmente independente</i>
<i>Não-ortogonal</i>	<i>Ortogonal</i>	<i>Ortogonal</i>
<i>Não-normalizada</i>	<i>Não-normalizada</i>	<i>Normalizada (ortonormal)</i>

O procedimento de Gram-Schmidt considera a  $n$ ésima função  $\psi$  ( $\psi_n$ ) como  $u_n(x)$  mais uma combinação linear da  $\varphi$  anterior. A presença da nova  $u_n(x)$  garantirá independência linear. O requisito de que  $\psi_n(x)$  seja ortogonal a cada uma das  $\varphi$  anteriores resulta em limitações apenas suficientes para determinar cada um dos coeficientes desconhecidos. Então a  $\psi_n$  totalmente determinada será normalizada para unidade, resultando em  $\varphi_n(x)$ . Então a seqüência de etapas é repetida para  $\psi_{n+1}(x)$ .

Começamos com  $n = 0$ , fazendo

$$\psi_0(x) = u_0(x), \tag{10.41}$$

sem nenhum  $\varphi$  “anterior” para nos incomodar. Então normalizamos

$$\varphi_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{[\int \psi_0^2 w \, dx]^{1/2}}. \tag{10.42}$$

Para  $n = 1$ , seja

$$\psi_1(x) = u_1(x) + a_{1,0} \varphi_0(x). \tag{10.43}$$

Impomos que  $\psi_1(x)$  seja ortogonal a  $\varphi_0(x)$ . (Nesse estágio a normalização de  $\psi_1(x)$  é irrelevante.) Essa ortogonalidade leva a

$$\int \psi_1 \varphi_0 w \, dx = \int u_1 \varphi_0 w \, dx + a_{1,0} \int \varphi_0^2 w \, dx = 0. \tag{10.44}$$

Uma vez que  $\varphi_0$  é normalizada para unidade (Equação (10.42)), temos

$$a_{1,0} = - \int u_1 \varphi_0 w dx, \tag{10.45}$$

fixando o valor de  $a_{1,0}$ . Normalizando, definimos

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{(\int \psi_1^2 w dx)^{1/2}}. \tag{10.46}$$

Por fim, generalizamos, de modo que

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{(\int \psi_i^2(x) w(x) dx)^{1/2}}, \tag{10.47}$$

em que

$$\psi_i(x) = u_i + a_{i,0}\varphi_0 + a_{i,1}\varphi_1 + \dots + a_{i,i-1}\varphi_{i-1}. \tag{10.48}$$

Os coeficientes  $a_{i,j}$  são dados por

$$a_{i,j} = - \int u_i \varphi_j w dx. \tag{10.49}$$

A Equação (10.49) é válida para normalização para unidade. Se for selecionada alguma outra normalização,

$$\int_a^b [\varphi_j(x)]^2 w(x) dx = N_j^2,$$

então a Equação (10.47) é substituída por

$$\varphi_i(x) = N_i \frac{\psi_i(x)}{(\int \psi_i^2 w dx)^{1/2}}. \tag{10.47a}$$

e  $a_{i,j}$  se torna

$$a_{i,j} = - \frac{\int u_i \varphi_j w dx}{N_j^2}. \tag{10.49a}$$

As Equações (10.48) e (10.49) podem ser reescritas em termos de operadores de projeção,  $P_j$ . Se considerarmos que as  $\varphi_n(x)$  formam um espaço vetorial linear, então a integral na Equação (10.49) pode ser interpretada como a projeção de  $u_i$  sobre a  $\varphi_j$  “coordenada” ou a  $j$ -ésima componente de  $u_i$ . Com

$$P_j u_i(x) = \left\{ \int u_i(t) \varphi_j(t) w(t) dt \right\} \varphi_j(x),$$

a Equação (10.48) se torna

$$\psi_i(x) = \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{i-1} P_j \right\} u_i(x). \tag{10.48a}$$

Subtrair as componentes,  $j = 1$  a  $i - 1$ , nos fornece  $\psi_i(x)$  ortogonal a todas as  $\varphi_j(x)$ .

É bom observar que, embora esse procedimento de Gram-Schmidt seja um modo possível de construir um conjunto ortogonal ou ortonormal, as funções  $\varphi_i(x)$  não são únicas. Há um número infinito de possíveis conjuntos ortonormais para um dado intervalo e uma dada função densidade.

Para ilustrar a liberdade envolvida, considere dois vetores (não-paralelos) **A** e **B** no plano  $xy$ . Podemos normalizar **A** para grandeza unitária e então formar **B'** =  $a\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , de modo que **B'** seja perpendicular a **A**. Normalizando **B'** concluímos a ortogonalização de Gram-Schmidt para dois vetores. Mas quaisquer dois vetores unitários perpendiculares, tais como  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , poderiam ter sido escolhidos como nosso conjunto ortonormal. Mais uma vez, com um número infinito de possíveis rotações de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  em torno do eixo  $z$ , temos um número infinito de conjuntos ortonormais possíveis.



### Exemplo 10.3.1 POLINÔMIOS DE LEGENDRE POR ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Vamos formar um conjunto ortonormal a partir do conjunto de funções  $u_n(x) = x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . O intervalo é  $-1 \leq x \leq 1$  e a função densidade é  $w(x) = 1$ .

De acordo com o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt descrito,

$$u_0 = 1, \quad \text{por conseguinte,} \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (10.50)$$

Então,

$$\psi_1(x) = x + a_{1,0} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10.51)$$

e

$$a_{1,0} = - \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{2}} dx = 0 \quad (10.52)$$

por simetria. Normalizamos  $\psi_1$  para obter

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x. \quad (10.53)$$

Então continuamos o procedimento de Gram-Schmidt com

$$\psi_2(x) = x^2 + a_{2,0} \frac{1}{\sqrt{2}} + a_{2,1} \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad (10.54)$$

em que

$$a_{2,0} = - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad (10.55)$$

$$a_{2,1} = - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x^3 dx = 0, \quad (10.56)$$

mais uma vez por simetria. Portanto,

$$\psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad (10.57)$$

e, normalizando para unidade, temos

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 - 1). \quad (10.58)$$

A próxima função,  $\varphi_3(x)$ , se torna

$$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{2} (5x^3 - 3x). \quad (10.59)$$

Referindo-nos ao Capítulo 12, mostramos que

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad (10.60)$$

em que  $P_n(x)$  é o polinômio de Legendre de  $n$ -ésima ordem. Nosso processo de Gram-Schmidt nos apresenta um método possível, porém muito desajeitado, de gerar os polinômios de Legendre. O processo ilustra como uma expansão de série em  $u_n(x) = x^n$ , que não é ortogonal, pode ser convertida em uma série ortogonal. ■

As equações para a ortogonalização de Gram-Schmidt tendem a ser mal condicionadas por causa das subtrações, Equações (10.48) e (10.49). Uma técnica para evitar essa dificuldade utilizando a relação de recorrência de polinômios é discutida por Hamming.<sup>9</sup>

No Exemplo 10.3.1 especificamos um intervalo de ortogonalidade  $[-1, 1]$ , uma função de peso unitária e um conjunto de funções  $x^n$  que serão tomadas uma por vez em ordem crescente. Dadas todas essas especificações, o procedimento de Gram-Schmidt é único (dentro de um fator de normalização e um sinal global, como discutiremos a seguir). Nosso conjunto ortogonal resultante, os polinômios de Legendre,  $P_0$  até  $P_n$ , formam um conjunto completo para a descrição de polinômios de ordem  $\leq n$  no intervalo  $[-1, 1]$ . Esse conceito de completude é retomado com detalhes na Seção 10.4. Expansões de funções em séries de polinômios de Legendre são encontradas na Seção 12.3.

<sup>9</sup>R. W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2<sup>a</sup> ed., Nova York: McGraw-Hill (1973). Veja a Seção 27.2 e referências ali encontradas.

### Polinômios Ortogonais

O Exemplo 10.3.1 foi escolhido com a estrita finalidade de ilustrar o procedimento de Gram-Schmidt. Embora ele tenha a vantagem de apresentar os polinômios de Legendre, as funções iniciais  $u_n = x^n$  não são autofunções degeneradas e não são soluções da equação de Legendre. Elas são simplesmente um conjunto de funções que rearranjamos aqui para criar um conjunto ortonormal para o intervalo dado e para a função de peso dada. O fato de termos obtido os polinômios de Legendre não é bem um passe de mágica, mas uma conseqüência direta da escolha do intervalo e da função de peso. A utilização de  $u_n(x) = x^n$ , porém com outras escolhas de intervalo e de funções de peso, leva a outros conjuntos de polinômios ortogonais, como mostra a Tabela 10.3. Fazemos um estudo detalhado desses polinômios nos Capítulos 12 e 13 como soluções de equações diferenciais particulares.

**Tabela 10.3** Polinômios ortogonais gerados por ortogonalização de Gram-Schmidt de  $u_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Polinômios	Intervalo	Função de peso $w(x)$	Normalização padrão
Legendre	$-1 \leq x \leq 1$	1	$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$
Legendre deslocada	$0 \leq x \leq 1$	1	$\int_0^1 [P_n^*(x)]^2 dx = \frac{1}{2n+1}$
Chebyshev I	$-1 \leq x \leq 1$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{(1-x^2)^{1/2}} dx = \begin{cases} \pi/2, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$
Chebyshev deslocada I	$0 \leq x \leq 1$	$[x(1-x)]^{-1/2}$	$\int_0^1 \frac{[T_n^*(x)]^2}{[x(1-x)]^{1/2}} dx = \begin{cases} \pi/2, & n > 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$
Chebyshev II	$-1 \leq x \leq 1$	$(1-x^2)^{1/2}$	$\int_{-1}^1 [U_n(x)]^2 (1-x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2}$
Laguerre	$0 \leq x < \infty$	$e^{-x}$	$\int_0^\infty [L_n(x)]^2 e^{-x} dx = 1$
Laguerre associada	$0 \leq x < \infty$	$x^k e^{-x}$	$\int_0^\infty [L_n^k(x)]^2 x^k e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!}$
Hermite	$-\infty < x < \infty$	$e^{-x^2}$	$\int_{-\infty}^\infty [H_n(x)]^2 e^{-x^2} dx = 2^n \pi^{1/2} n!$

Um exame desse processo de ortogonalização revelará duas características arbitrárias. Primeiro, como já salientamos antes, não é necessário normalizar as funções para unidade. No exemplo que acabamos de dar, poderíamos ter requisitado

$$\int_{-1}^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \tag{10.61}$$

e o conjunto resultante seriam que os próprios polinômios de Legendre. Em segundo lugar, o sinal de  $\varphi_n$  é sempre indeterminado. No exemplo escolhemos o sinal exigindo que o coeficiente da potência mais alta de  $x$  fosse positivo. Para os polinômios de Laguerre, por outro lado, exigiríamos que o coeficiente da potência mais alta fosse  $(-1)^n/n!$

### Exercícios

**10.3.1** Volte ao Exemplo 10.3.1 e substitua  $\varphi_n(x)$  pelo polinômio convencional de Legendre,  $P_n(x)$ :

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Usando as Equações (10.47a) e (10.49a), construa  $P_0, P_1(x)$ , e  $P_2(x)$ .

Resposta:  $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ .

**10.3.2** Seguindo o procedimento de Gram-Schmidt, construa um conjunto de polinômios  $P_n^*(x)$  ortogonal (fator de ponderação unitário) na faixa  $[0, 1]$  a partir do conjunto  $[1, x]$ . Normalize de modo que  $P_n^*(1) = 1$ .

Resposta:  $P_n^*(x) = 1,$   
 $P_1^*(x) = 2x - 1,$   
 $P_2^*(x) = 6x^2 - 6x + 1,$   
 $P_3^*(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1.$





Esses são os primeiros quatro polinômios **deslocados** de Legendre.

*Nota:* O símbolo “\*” é o padrão para “deslocado”:  $[0, 1]$  em vez de  $[-1, 1]$ . **Não** significa conjugado complexo.

**10.3.3** Aplique o procedimento de Gram-Schmidt para formar os três primeiros polinômios de Laguerre

$$u_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq x < \infty, \quad w(x) = e^{-x}.$$

A normalização convencional é

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x} dx = \delta_{mn}.$$

Resposta:  $L_0 = 1, \quad L_1 = (1 - x), \quad L_2 = \frac{2 - 4x + x^2}{2}.$

**10.3.4** Dados

- (a) um conjunto de funções  $u_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots,$
- (b) um intervalo  $(0, \infty),$
- (c) uma função de peso  $w(x) = xe^{-x},$  use o procedimento de Gram-Schmidt para construir as primeiras **três funções ortonormais** do conjunto  $u_n(x)$  para esse intervalo e essa função peso.

Resposta:  $\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = (x - 2)/\sqrt{2}, \quad \varphi_2(x) = (x^2 - 6x + 6)/2\sqrt{3}.$

**10.3.5** Usando o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt, construa os três mais baixos polinômios de Hermite

$$u_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad -\infty < x < \infty, \quad w(x) = e^{-x^2}.$$

Para esse conjunto de polinômios, a normalização usual é

$$\int_{-\infty}^\infty H_m(x)H_n(x)w(x) dx = \delta_{mn}2^m m! \pi^{1/2}.$$

Resposta:  $H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2.$

**10.3.6** Use o esquema de ortogonalização de Gram-Schmidt para construir os primeiros três polinômios de Chebyshev (tipo I):

$$u_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

considere a normalização

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)w(x) dx = \delta_{mn} \begin{cases} \pi, & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \geq 1. \end{cases}$$

*Sugestão:* As integrais necessárias são dadas no Exercício 8.4.3.

Resposta:  $T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1 \quad (T_3 = 4x^3 - 3x).$

**10.3.7** Use o esquema de ortogonalização de Gram-Schmidt para construir os três primeiros polinômios de Chebyshev (tipo II):

$$u_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad w(x) = (1 - x^2)^{+1/2}.$$

Considere a normalização como

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)w(x) dx = \delta_{mn} \frac{\pi}{2}.$$

*Sugestão:*

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{1/2} x^{2n} dx = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n + 2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$= \frac{\pi}{2}, \quad n = 0.$$

Resposta:  $U_0 = 1, U_1 = 2x, U_2 = 4x^2 - 1.$

- 10.3.8** Como uma modificação do Exercício 10.3.5, aplique o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto  $u_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq x < \infty.$  Considere  $w(x)$  como  $\exp[-x^2].$  Ache os dois primeiros polinômios que não se anulam. Normalize de modo que o coeficiente da potência mais alta de  $x$  seja a unidade. No Exercício 10.3.5 o intervalo  $(-\infty, \infty)$  levou aos polinômios de Hermite. Sem dúvida, esses não são os polinômios de Hermite.

Resposta:  $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x - \pi^{-1/2}.$

- 10.3.9** Forme um conjunto ortogonal no intervalo  $0 \leq x < \infty,$  usando  $u_n(x) = e^{-nx}, n = 1, 2, 3, \dots$  Considere o fator de peso,  $w(x),$  como a unidade. Essas funções são soluções de  $u_n'' - n^2 u_n = 0,$  que já estão claramente na forma (auto-adjunta) de Sturm-Liouville. Por que a teoria de Sturm-Liouville não garante a ortogonalidade dessas funções?

## 10.4 Completude de Autofunções

A terceira propriedade importante de um operador hermitiano é que suas autofunções formam um conjunto completo. Essa completude significa que qualquer função bem-comportada (ao menos contínua por partes)  $F(x)$  pode ser aproximada por uma série

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{10.62}$$

com qualquer grau de precisão desejado.<sup>10</sup> Mais exatamente, o conjunto  $\varphi_n(x)$  é denominado **completo**<sup>11</sup> se o limite do erro médio quadrático desaparecer:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ F(x) - \sum_{n=0}^m a_n \varphi_n(x) \right]^2 w(x) dx = 0. \tag{10.63}$$

Tecnicamente, aqui a integral é a integral de Lebesgue. Não exigimos que o erro desapareça identicamente em  $[a, b],$  mas apenas que a integral do erro ao quadrado vá a zero.

Essa convergência da média, Equação (10.63), deve ser comparada com a convergência uniforme (Seção 5.5, Equação (5.67)). É claro que convergência uniforme implica convergência da média, mas o inverso não é verdadeiro; a convergência da média é menos restritiva. Especificamente, a Equação (10.63) não é perturbada por funções contínuas por partes com apenas um número finito de descontinuidades finitas. Um exemplo relevante é o fenômeno de Gibbs da série descontínua de Fourier discutido na Seção 14.5, que ocorre também para outras séries de autofunções.

A Equação (10.63) é perfeitamente adequada para nossas finalidades e é muito mais conveniente do que a Equação (5.67). De fato, visto que freqüentemente usamos autofunções para descrever funções descontínuas, a convergência da média é tudo o que podemos esperar.

Na Equação (10.62) os coeficientes de expansão  $a_m$  podem ser determinados por

$$a_m = \int_a^b F(x) \varphi_m^*(x) w(x) dx. \tag{10.64}$$

Essa expressão resulta da multiplicação da Equação (10.62) por  $\varphi_m^*(x)w(x)$  e integração. Pela ortogonalidade das autofunções  $\varphi_n(x),$  somente o  $m$ -ésimo termo sobrevive. É aqui que vemos o valor da ortogonalidade. A Equação 10.64 pode ser comparada com o produto escalar ou interno de vetores, Seção 1.3, e  $a_m$  interpretada como a  $m$ -ésima projeção da função  $F(x).$  O coeficiente  $a_m$  costuma ser denominado **coeficiente generalizado de Fourier.**

Para uma função conhecida  $F(x),$  a Equação (10.64) dá  $a_m$  como uma integral **definida** que sempre pode ser avaliada, por computador, se não analiticamente.

Na linguagem da Álgebra Linear, temos um espaço linear, um espaço de função vetorial. As funções ortonormais linearmente independentes  $\varphi_n(x)$  formam a base para esse espaço (de infinitas dimensões). A Equação (10.62) é uma afirmação de que as funções  $\varphi_n(x)$  espaço linear. Com um produto interno definido pela Equação (10.64), nosso espaço linear é um espaço de **Hilbert.**

<sup>10</sup>Se temos um conjunto finito, como é o caso de vetores, o somatório é sobre o número de membros linearmente independentes do conjunto.

<sup>11</sup>Nesse caso há muitos autores que usam o termo **fechado.**



Estabelecendo a função de peso como  $w(x) = 1$  por simplicidade, a completude em forma de operador para um conjunto discreto de autofunções  $|\varphi_i\rangle$  se torna

$$\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = 1.$$

Multiplicando a relação de completude por  $|F\rangle$ , obtemos a expansão em autofunções

$$|F\rangle = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|F\rangle,$$

com o coeficiente de Fourier generalizado  $a_i = \langle\varphi_i|F\rangle$ . De modo equivalente, em representação coordenada,

$$\sum_i \varphi_i^*(y)\varphi_i(x) = \delta(x - y)$$

implica

$$F(x) = \int F(y)\delta(x - y) dy = \sum_i \varphi_i(x) \int \varphi_i^*(y)F(y) dy.$$

Sem prova, afirmamos que o espectro de um operador linear  $A$  que mapeia um espaço de Hilbert  $H$  para si mesmo pode ser dividido em um espectro discreto (ou pontual) com autovetores de comprimento finito, um espectro contínuo, de modo que a equação de autovalor  $Av = \lambda v$  com  $v$  em  $H$  não tem uma inversa limitada única  $(A - \lambda)^{-1}$  em um domínio denso de  $H$  e um espectro residual em que  $(A - \lambda)^{-1}$  não tem limite em um domínio não-denso em  $H$ .

A questão de completude de um conjunto de funções muitas vezes é determinada por comparação com uma série de Laurent, Seção 6.5. Na Seção 14.1 isso é feito para séries de Fourier, estabelecendo assim a completude da série de Fourier. Para todos os polinômios ortogonais mencionados na Seção 10.3 é possível achar uma expansão de polinômio de cada potência de  $z$ ,

$$z^n = \sum_{i=0}^n a_i P_i(z), \tag{10.65}$$

em que  $P_i(z)$  é o  $i$ -ésimo polinômio. Os Exercícios 12.4.6, 13.1.6, 13.2.5 e 13.3.22 são exemplos específicos da Equação (10.65). Usando a Equação (10.65), podemos expressar novamente a expansão de Laurent de  $f(z)$  em termos de polinômios, mostrando que a expansão de polinômio existe (quando existe, é única, Exercício 10.4.1). A limitação desse desenvolvimento de série de Laurent é que ele requer que a função seja analítica. As Equações (10.62) e (10.63) são mais gerais.  $F(x)$  pode ser somente contínua por partes. Numerosos exemplos da representação dessas funções contínuas por partes aparecem no Capítulo 14 (série de Fourier). Uma prova de que nossas autofunções de Sturm-Liouville formam séries completas aparece em Courant e Hilbert.<sup>12</sup> Para exemplos de expansões em autofunção particulares, consulte os seguintes: séries de Fourier, Seção (10.2) e Capítulo 14; expansões de Bessel e de Fourier-Bessel, Seção 11.2; séries de Legendre, Seção 12.3; séries de Laplace, Seção 12.6; séries de Hermite, Seção 13.1; séries de Laguerre, Seção 13.2; e séries de Chebyshev, Seção 13.3. Pode também acontecer de a expansão em autofunções, Equação (10.62), ser a expansão de uma  $F(x)$  desconhecida em uma série de autofunções conhecidas  $\varphi_n(x)$  com coeficientes desconhecidos  $a_n$ . Um exemplo seria a tentativa do químico quântico de descrever uma função de onda molecular (desconhecida) como uma combinação linear de funções de ondas atômicas conhecidas. Os coeficientes desconhecidos  $a_n$  seriam determinados por uma técnica variacional-Rayleigh-Ritz, Seção 17.8.

### Desigualdade de Bessel

Se o conjunto de funções  $\varphi_n(x)$  não formar um conjunto completo, possivelmente porque nós simplesmente não incluímos o exigido número infinito de membros de um conjunto infinito, somos levados à desigualdade de Bessel. Em primeiro lugar, considere o caso finito da análise vetorial. Seja  $\mathbf{A}$  um vetor de  $n$  componentes,

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \cdots + \mathbf{e}_n a_n, \tag{10.66}$$

<sup>12</sup>R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (tradução para o inglês), vol. 1, Nova York: Interscience (1953), nova tiragem, Wiley (1989), Capítulo 6, Seção 3.

no qual  $\mathbf{e}_i$  é um vetor unitário e  $a_i$  é a componente correspondente (projeção) de  $\mathbf{A}$ ; isto é,

$$a_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{10.67}$$

Então,

$$\left( \mathbf{A} - \sum_i \mathbf{e}_i a_i \right)^2 \geq 0. \tag{10.68}$$

Se somarmos sobre todas as  $n$  componentes, o somatório é claramente igual a  $\mathbf{A}$  pela Equação (10.66) e a igualdade é válida. Contudo, se o somatório não incluir todos os  $n$  componentes, resulta a desigualdade. Expandindo a Equação (10.68) e escolhendo os vetores unitários de modo a satisfazer uma relação de ortogonalidade,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \tag{10.69}$$

temos

$$\mathbf{A}^2 \geq \sum_i a_i^2. \tag{10.70}$$

Essa é a desigualdade de Bessel.

Para funções reais, consideramos a integral

$$\int_a^b \left[ f(x) - \sum_i a_i \varphi_i(x) \right]^2 w(x) dx \geq 0. \tag{10.71}$$

Esse é o contínuo análogo à Equação (10.68), deixando que  $n \rightarrow \infty$ , e substituindo o somatório se anuala por uma integração. Mais uma vez, com o fator de peso  $w(x) > 0$ , o integrando é não-negativo. A integral se anula pela Equação (10.62) se tivermos um conjunto completo. Caso contrário, ela é positiva. Expandindo o termo ao quadrado, obtemos

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x) dx - 2 \sum_i a_i \int_a^b f(x) \varphi_i(x) w(x) dx + \sum_i a_i^2 \geq 0. \tag{10.72}$$

Aplicando a Equação (10.64), temos

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x) dx \geq \sum_i a_i^2. \tag{10.73}$$

Daí, a soma dos quadrados dos coeficientes de expansão  $a_i$  é menor ou igual à integral ponderada de  $[f(x)]^2$ , sendo que a igualdade é válida se, e somente se, a expansão for exata, isto é, se o conjunto de funções  $\varphi_n(x)$  for um conjunto completo.

Em capítulos posteriores, quando considerarmos autofunções que formam conjuntos completos (tais como polinômios de Legendre), a Equação (10.73) com o sinal de igual valendo será denominada **relação de Parseval**.

A desigualdade de Bessel tem uma variedade de utilizações, entre elas a prova de convergência da série de Fourier.

### Desigualdade de Schwarz

A desigualdade de Schwarz, freqüentemente utilizada, é semelhante à desigualdade de Bessel. Considere a equação quadrática com  $x$  desconhecido:

$$\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \left( x + \frac{b_i}{a_i} \right)^2 = 0 \tag{10.74}$$

com  $a_i, b_i$  reais. Se  $b_i/a_i =$  constante,  $c$ , isto é, independente do índice  $i$ , então a solução é  $x = -c$ . Se  $b_i/a_i$  não é uma constante em  $i$ , os termos todos não podem desaparecer simultaneamente para  $x$  real. Portanto, a solução deve ser complexa. Expandindo, constatamos que

$$x^2 \sum_i a_i^2 + 2x \sum_i a_i b_i + \sum_i b_i^2 = 0, \tag{10.75}$$



e, uma vez que  $x$  é complexo (ou  $= -b_i/a_i$ ), a fórmula quadrática<sup>13</sup> para  $x$  leva a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right), \quad (10.76)$$

em que sendo que a igualdade vale quando  $b_i/a_i$  é igual a uma constante, independente de  $i$ .

Mais uma vez, em termos de vetores, temos

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \theta \leq a^2 b^2, \quad (10.77)$$

$\theta$  é o ângulo incluído entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

A desigualdade de Schwarz análoga para funções complexas tem a forma

$$\left| \int_a^b f^*(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b f^*(x)f(x) dx \int_a^b g^*(x)g(x) dx, \quad (10.78)$$

sendo que a igualdade vale se, e somente se,  $g(x) = \alpha f(x)$ , sendo  $\alpha$  uma constante. Para provar essa forma de função da desigualdade de Schwarz,<sup>14</sup> considere uma função complexa  $\psi(x) = f(x) + \lambda g(x)$ , sendo  $\lambda$  uma constante complexa, em que  $f(x)$  e  $g(x)$  são duas funções quadradas integráveis quaisquer (para as quais as integrais do lado direito existem). Multiplicando pelo conjugado complexo e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi^* \psi dx &\equiv \int_a^b f^* f dx + \lambda \int_a^b f^* g dx + \lambda^* \int_a^b g^* f dx \\ &+ \lambda \lambda^* \int_a^b g^* g dx \geq 0. \end{aligned} \quad (10.79)$$

O  $\geq 0$  aparece, uma vez que  $\psi^* \psi$  é não-negativo, sendo que o sinal de igual ( $\equiv$ ) vale somente se  $\psi(x)$  for identicamente zero. Observando que  $\lambda$  e  $\lambda^*$  são linearmente independentes, diferenciamos em relação a um deles e igualamos a derivada a zero para minimizar  $\int_a^b \psi^* \psi dx$ :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^*} \int_a^b \psi^* \psi dx = \int_a^b g^* f dx + \lambda \int_a^b g^* g dx = 0.$$

Isso resulta em

$$\lambda = - \frac{\int_a^b g^* f dx}{\int_a^b g^* g dx}. \quad (10.80a)$$

Considerando o conjugado complexo, obtemos

$$\lambda^* = - \frac{\int_a^b f^* g dx}{\int_a^b g^* g dx}. \quad (10.80b)$$

Substituindo esses valores de  $\lambda$  e  $\lambda^*$  de volta na Equação (10.79), obtemos a Equação (10.78), a desigualdade de Schwarz.

Em Mecânica Quântica,  $f(x)$  e  $g(x)$  podem, cada uma, representar um estado ou configuração de um sistema físico, isto é, uma combinação linear de funções de onda. Então, a desigualdade de Schwarz dá um limite superior para o valor absoluto do produto interno  $\int_a^b f^*(x)g(x) dx$ . Em alguns textos a desigualdade de Schwarz é uma etapa fundamental na derivação do princípio da incerteza de Heisenberg.

A notação de função das Equações (10.78) e (10.79) é relativamente incômoda. Em Física Matemática avançada e em especial em Mecânica Quântica é comum usar a notação bra-ket de Dirac. Usando essa notação, nós simplesmente entendemos o intervalo de integração,  $(a, b)$ , e a presença da função de peso  $w(x) \geq 0$ . Nessa notação a desigualdade de Schwarz assume a elegante forma

$$|\langle f|g \rangle|^2 \leq \langle f|f \rangle \langle g|g \rangle. \quad (78a)$$

<sup>13</sup>Com discriminante negativo (ou zero).

<sup>14</sup>Uma derivação alternativa é dada pela desigualdade  $\iint [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^* [f(x)g(y) - f(y)g(x)] dx dy \geq 0$ .

Se  $g(x)$  for uma autofunção normalizada,  $\varphi_i(x)$ , a Equação (10.78) resulta em (aqui  $w(x) = 1$ )

$$a_i^* a_i \leq \int_a^b f^*(x) f(x) dx, \tag{10.81}$$

um resultado que também se origina da Equação (10.73).

Para representações úteis da função delta de Dirac em termos de conjuntos ortogonais de funções e da relação entre fechamento e completude, referimo-nos à relevante subseção da Seção 1.15, incluindo o Exercício 1.15.16 e, para representações em coordenadas *versus* momento em Mecânica Quântica, referimo-nos à Seção 15.6.

### Resumo — Espaços Vetoriais, Completude

Aqui resumimos algumas propriedades de espaços vetoriais: em primeiro lugar, considerando os vetores como os já conhecidos vetores reais do Capítulo 1, e em seguida, como funções ordinárias. O conceito de **completude** foi desenvolvido para espaços vetoriais finitos (Capítulo 1, Equação (1.5)) e é transportado para espaços vetoriais infinitos. Por exemplo, em espaço euclidiano tridimensional todo vetor pode ser escrito em termos de uma combinação linear dos três vetores unitários coordenados (representando uma base) envolvendo as componentes cartesianas do vetor como os coeficientes de expansão. Ou uma função periódica de um espaço vetorial infinito pode ser expandida em termos do conjunto de funções periódicas  $\sin nx, \cos nx, n = 0, 1, 2, \dots$ , que forma uma base desse espaço. Uma vez que qualquer função periódica com propriedades razoáveis (explicadas detalhadamente no Capítulo 14) pode ser expandida em termos dessas funções de seno e co-seno, elas são completas e formam uma base de tal espaço de função linear.

**1v.** Descreveremos nosso espaço vetorial com um conjunto de  $n$  vetores linearmente independentes  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $n = 3$ , então  $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{z}}$ . Os  $n\mathbf{e}_i$  **abrangem** o espaço vetorial linear.

**1f.** Descreveremos nosso espaço vetorial (funcional) com um conjunto de  $n$  funções linearmente independentes,  $\varphi_i(x), i = 0, 1, \dots, n - 1$ . O índice  $i$  começa com 0 para ficar de acordo com a notação clássica de polinômios. Aqui, admitimos que  $\varphi_i(x)$  é um polinômio de grau  $i$ . Os  $n\varphi_i(x)$  abrangem o espaço vetorial (funcional) linear.

**2v.** Os vetores em nosso espaço vetorial satisfazem as seguintes relações (Seção 1.2; as componentes do vetor são números):

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (a) A adição de vetores é comutativa  | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$                               |
| (b) A adição de vetores é associativa | $[\mathbf{u} + \mathbf{v}] + \mathbf{w} = \mathbf{u} + [\mathbf{v} + \mathbf{w}]$ |
| (c) Existe um vetor nulo              | $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$  |
| (d) Multiplicação por um escalar      |   |
| Distributiva                          | $a[\mathbf{u} + \mathbf{v}] = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$                          |
| Distributiva                          | $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + (b)\mathbf{u}$                                 |
| Associativa                           | $a[b\mathbf{u}] = (ab)\mathbf{u}$   |
| (e) Multiplicação                     |   |
| Por escalar unitário                  | $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  |
| Por zero                              | $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$  |
| (f) Vetor negativo                    | $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ .  |

**2f.** As funções em nosso espaço funcional linear satisfazem as propriedades listadas para vetores (substituir “função” por “vetor”):

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= g(x) + f(x) \\ [f(x) + g(x)] + h(x) &= f(x) + [g(x) + h(x)] \\ 0 + f(x) &= f(x) \\ a[f(x) + g(x)] &= af(x) + ag(x) \\ (a + b)f(x) &= af(x) + bf(x) \\ a[bf(x)] &= (ab)f(x) \\ 1 \cdot f(x) &= f(x) \\ 0 \cdot f(x) &= 0 \\ (-1) \cdot f(x) &= -f(x). \end{aligned}$$

**3v.** Em espaço vetorial  $n$  dimensional, um vetor arbitrário  $\mathbf{c}$  é descrito por suas  $n$  componentes  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,



ou

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i.$$

Quando  $n\mathbf{e}_i$  (1) são linearmente independentes e (2) abrangem o espaço vetorial  $n$  dimensional, então os  $\mathbf{e}_i$  formam uma base e constituem um conjunto **completo**.

**3f.** Em espaço funcional  $n$  dimensional um polinômio de grau  $m \leq n - 1$  é descrito por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i(x).$$

Quando as  $n\varphi_i(x)$  (1) são linearmente independentes e (2) abrangem o espaço funcional  $n$  dimensional, então as  $\varphi_i(x)$  formam uma base e constituem um conjunto **completo** (para descrever polinômios de grau  $m \leq n - 1$ ).

**4v.** Um produto interno (escalar, produto interno) de um espaço vetorial é definido por

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \sum_{i=1}^n c_i d_i.$$

Se  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  tiverem componentes complexas em um sistema de coordenadas ortogonais, o produto interno é definido como  $\sum_{i=1}^n c_i^* d_i$ . O produto interno tem as propriedades de

- (a) Lei distributiva da adição  $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{e}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}$
- (b) Multiplicação escalar  $\mathbf{c} \cdot a\mathbf{d} = a\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$
- (c) Conjugação complexa  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})^*$ .

**4f.** Um produto interno de um espaço linear de funções é definido por

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x) dx.$$

A escolha da função de peso  $w(x)$  e do intervalo  $(a, b)$  resulta da equação diferencial satisfeita por  $\varphi_i(x)$  e das condições de fronteira, Seção 10.1. Em terminologia matricial, Seção 3.2,  $|g\rangle$  é um vetor coluna e  $\langle f|$  é um vetor linha, o adjunto de  $|f\rangle$ , onde ambos podem ter infinitamente muitas componentes. Por exemplo, se expandirmos  $g(x) = \sum_i g_i \varphi_i(x)$ , então  $|g\rangle$  tem a  $i$ -ésima componente  $g_i$  em um vetor coluna e  $\langle f|$  tem  $f_i^*$  como sua  $i$ -ésima componente em um vetor linha.

O produto interno tem as propriedades listadas para vetores:

- (a)  $\langle f|g + h\rangle = \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle$
- (b)  $\langle f|ag\rangle = a\langle f|g\rangle$
- (c)  $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^*$ .

**5v. Ortogonalidade:**

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad i \neq j.$$

Se os  $n\mathbf{e}_i$  ainda não forem ortogonais, o processo de Gram-Schmidt pode ser usado para criar um conjunto ortogonal.

**5f. Ortogonalidade:**

$$\langle \varphi_i|\varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i^*(x)\varphi_j(x)w(x) dx = 0, \quad i \neq j.$$

Se as  $n\varphi_i(x)$  ainda não forem ortogonais, o processo de Gram-Schmidt (Seção 10.3) pode ser usado para criar um conjunto ortogonal.

**6v. Definição de norma**

$$|\mathbf{c}| = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2}.$$

Considera-se que os vetores de base  $\mathbf{e}_i$  têm norma (comprimento) unitária  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ . As componentes de  $\mathbf{c}$  são dadas por

$$c_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**6f. Definição de norma:**

$$\|f\| = \langle f|f \rangle^{1/2} = \left[ \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|^2 \right]^{1/2},$$

**Identidade de Parseval.**  $\|f\| > 0$ , a menos que  $f(x)$  seja identicamente zero. Pode-se considerar que as funções de base  $\varphi_i(x)$  têm norma unitária (normalização unitária),

$$\|\varphi_i\| = 1.$$

Os coeficientes de expansão de nosso polinômio  $f(x)$  são dados por

$$c_i = \langle \varphi_i | f \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

**7v. Desigualdade de Bessel:**

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \geq \sum_i c_i^2.$$

Se o sinal de igual for válido para todo  $\mathbf{c}$ , ele indica que as  $\mathbf{e}_i$  abrangem o espaço vetorial, isto é, são completas.

**7f. Desigualdade de Bessel:**

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \geq \sum_i |c_i|^2.$$

Se o sinal de igual for válido para toda  $f$ , permissível, ele indica que as  $\varphi_i(x)$  abrangem o espaço funcional; isto é, elas são completas.

**8v. Desigualdade de Schwarz:**

$$|\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}| \leq |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{d}|.$$

O sinal de igual é válido quando  $\mathbf{c}$  for um múltiplo de  $\mathbf{d}$ . Se o ângulo incluído entre  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  é  $\theta$ , então  $|\cos \theta| \leq 1$ .

**8f. Desigualdade de Schwarz:**

$$|\langle f|g \rangle| \leq \langle f|f \rangle^{1/2} \langle g|g \rangle^{1/2} = \|f\| \cdot \|g\|.$$

O sinal de igual é válido quando  $f(x)$  e  $g(x)$  são linearmente dependentes, isto é, quando  $f(x)$  é uma múltipla de  $g(x)$ .

Agora, deixe  $n \rightarrow \infty$ , formando um espaço vetorial linear de número infinito de dimensões,  $l^2$ .

**9v.** Em um espaço de número infinito de dimensões nosso vetor  $\mathbf{c}$  é

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{e}_i.$$

Exigimos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty.$$

As componentes de  $\mathbf{c}$  são dadas por

$$c_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

exatamente como em um espaço vetorial de número infinito de dimensões.

Então, deixe  $n \rightarrow \infty$ , formando um espaço vetorial (funcional) linear de número infinito de dimensões,  $L^2$ . Então  $L$  representa Lebesgue, o índice 2 para a norma quadrática, isto é, o 2 em  $|f(x)|^2$ . Nossas funções não precisam mais ser polinômios, mas exigimos que  $f(x)$  seja no mínimo contínua por partes (condições de Dirichlet para série de Fourier) e que  $\langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx$  exista. Essa última condição costuma ser enunciada como um requisito de que  $f(x)$  seja integrável de quadrado.

**9f.** Sequência de Cauchy (expansão de Fourier generalizada): expanda  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \varphi_i(x)$  e deixe

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \varphi_i(x).$$





Se

$$\|f(x) - f_n(x)\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| f(x) - \sum_{i=0}^n f_i \varphi_i(x) \right|^2 w(x) dx = 0,$$

então temos convergência da média o que é análogo ao critério seqüência da soma parcial de Cauchy para a convergência de uma série infinita, Seção 5.1.

Se toda seqüência de Cauchy de vetores permissíveis (funções contínuas por partes de quadrado, integrável ao quadrado) convergir para um vetor limite em nosso espaço linear, diz-se que o espaço é completo. Então,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \quad (\text{em quase todo lugar})$$

no sentido da convergência da média. Como observamos antes, essa é uma exigência mais fraca do que convergência ponto por ponto (valor fixo de  $x$ ) ou convergência uniforme.

### Coefficientes de Expansão

Os coeficientes de expansão de uma função  $f$  são definidos como

$$c_i = \langle \varphi_i | f \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, \infty,$$

exatamente como em um espaço vetorial de número finito de dimensões. Por conseguinte,

$$f(x) = \sum_i \langle \varphi_i | f \rangle \varphi_i(x).$$

Um espaço linear (de número finito ou infinito de dimensões) que (1) tenha um produto interno definido ( $\langle f | g \rangle$ ) e (2) seja completo é um **espaço de Hilbert**.

Espaço de Hilbert de número infinito de dimensões fornece uma estrutura natural de trabalho matemático para a moderna Mecânica Quântica. Fora da Mecânica Quântica, o espaço de Hilbert conserva sua força e beleza matemática abstrata e tem muitas utilizações.

### Exercícios

**10.4.1** Uma função  $f(x)$  é expandida em uma série de autofunções ortonormais

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Mostre que a expansão de série é única para um dado conjunto de  $\varphi_n(x)$ . Aqui, as funções  $\varphi_n(x)$  estão sendo consideradas vetores **de base** em um espaço de Hilbert de número infinito de dimensões.

**10.4.2** Uma função  $f(x)$  é representada por um conjunto finito de funções de base  $\varphi_i(x)$ ,

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x).$$

Mostre que as componentes  $c_i$  são únicas, que não existe nenhum conjunto diferente  $c'_i$ .

*Nota:* Suas funções de base são automaticamente linearmente independentes. Elas não são necessariamente ortogonais.

**10.4.3** Uma função  $f(x)$  é aproximada por uma série de potências  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$  no intervalo  $[0, 1]$ . Mostre que minimizar o erro médio quadrático leva a um conjunto de equações lineares

$$A c = b,$$

em que

$$A_{ij} = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

e

$$b_i = \int_0^1 x^i f(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

*Nota:* Os  $A_{ij}$  são os elementos da matriz de Hilbert de ordem  $n$ . O determinante dessa matriz de Hilbert é uma função rapidamente decrescente de  $n$ . Para  $n = 5$ ,  $\det A = 3,7 \times 10^{-12}$  e o conjunto de equações  $Ac = \mathbf{b}$  está se tornando mal condicionado e instável.

**10.4.4** No lugar da expansão de uma função  $F(x)$  dada por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

com

$$a_n = \int_a^b F(x) \varphi_n(x) w(x) dx,$$

considere a aproximação de série **finita**

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^m c_n \varphi_n(x).$$

Mostre que o erro médio quadrático

$$\int_a^b \left[ F(x) - \sum_{n=0}^m c_n \varphi_n(x) \right]^2 w(x) dx$$

é minimizado considerando  $c_n = a_n$ .

*Nota:* Os valores dos coeficientes são independentes do número de termos na série finita. Essa independência é uma consequência da ortogonalidade e não valeria para um ajuste por mínimos quadrados usando potências de  $x$ .

**10.4.5** Pelo Exemplo 10.2.2,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}, & 0 < x < \pi \\ -\frac{h}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n+1)x}{2n+1}.$$

(a) Mostre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2} h^2 = \frac{4h^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2}.$$

Para um limite superior finito, essa expressão seria a desigualdade de Bessel. Para o limite superior  $\infty$ , ela é a identidade de Parseval.

(b) Verifique que

$$\frac{\pi}{2} h^2 = \frac{4h^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2}$$

avaliando a série.

*Sugestão:* A série pode ser expressa como a função zeta de Riemann.

**10.4.6** Diferencie a Equação (10.79),

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle f | f \rangle + \lambda \langle f | g \rangle + \lambda^* \langle g | f \rangle + \lambda \lambda^* \langle g | g \rangle,$$

com relação a  $\lambda^*$  e mostre que você obtém a desigualdade de Schwarz, Equação (10.78).



**10.4.7** Derive a desigualdade de Schwarz pela identidade

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy.$$

**10.4.8** Se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  da desigualdade de Schwarz, Equação (10.78), puderem ser expandidas em uma série de autofunções  $\varphi_i(x)$ , mostre que a Equação (10.78) se reduz à Equação (10.76) (com  $n$  possivelmente infinito).

Observe a descrição de  $f(x)$  como um vetor em um espaço funcional no qual  $\varphi_i(x)$  corresponde ao vetor unitário  $e_1$ .

**10.4.9** O operador  $H$  é hermitiano e definido positivo, isto é, para todo  $f$ :

$$\int_a^b f^* H f dx > 0.$$

Prove a desigualdade generalizada de Schwarz:

$$\left| \int_a^b f^* H g dx \right|^2 \leq \int_a^b f^* H f dx \int_a^b g^* H g dx.$$

**10.4.10** Uma função de onda normalizada  $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ . Os coeficientes de expansão  $a_n$  são conhecidos como amplitudes de probabilidade. Podemos definir uma matriz de densidade  $\rho$  com elementos  $\rho_{ij} = a_i a_j^*$ . Mostre que

$$(\rho^2)_{ij} = \rho_{ij},$$

ou

$$\rho^2 = \rho.$$

Por definição, esse resultado faz de  $\rho$  um operador de projeção.

*Sugestão:* Use

$$\int \psi^* \psi dx = 1.$$

**10.4.11** Mostre que

(a) o operador

$$|\varphi_i(x)\rangle\langle\varphi_i(t)|$$

operando sobre

$$f(t) = \sum_j c_j |\varphi_j(t)\rangle$$

resulta em

$$c_i |\varphi_i(x)\rangle.$$

(b)  $\sum_i |\varphi_i(x)\rangle\langle\varphi_i(x)| = 1.$

Esse operador é um **operador de projeção** que projeta  $f(x)$  sobre a  $i$ -ésima coordenada, escolhendo seletivamente a  $i$ -ésima componente  $c_i |\varphi_i(x)\rangle$  de  $f(x)$ .

*Sugestão:* O operador opera via o produto interno bem definido.

## 10.5 Função de Green — Expansão em Autofunção

Quando expandimos a função de Green nas autofunções da equação homogênea correspondente, resulta uma série um tanto similar à que representa  $\delta(x - t)$ . Na equação não-homogênea de Helmholtz, temos

$$\boxed{\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}).} \tag{10.82}$$

A equação homogênea de Helmholtz é satisfeita por suas autofunções ortonormais  $\varphi_n$ ,

$$\nabla^2 \varphi_n(\mathbf{r}) + k_n^2 \varphi_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (10.83)$$

Como delineado na Seção 9.7, a função de Green  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  satisfaz a equação de fonte pontual

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (10.84)$$

e as condições de contorno impostas às soluções da equação homogênea. Como  $G$  é real, expandimos a função de Green em uma série de autofunções reais da equação homogênea (10.83), isto é,

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2) \varphi_n(\mathbf{r}_1), \quad (10.85)$$

e, substituindo na Equação (10.84), obtemos

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2) k_n^2 \varphi_n(\mathbf{r}_1) + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2) \varphi_n(\mathbf{r}_1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2). \quad (10.86)$$

Aqui  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  foi substituída por sua expansão de autofunção, Equação (1.190). Quando empregamos a ortogonalidade de  $\varphi_n(\mathbf{r}_1)$  para isolar  $a_n$ , essa expressão resulta em

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\mathbf{r}_2) (k^2 - k_m^2) \int \varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_m(\mathbf{r}_1) d^3 r_1 = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\mathbf{r}_2) \int \varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_m(\mathbf{r}_1) d^3 r_1,$$

ou

$$a_n(\mathbf{r}_2) (k^2 - k_n^2) = -\varphi_n(\mathbf{r}_2).$$

Então, substituindo essa expressão na Equação (10.85), a função de Green se torna

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2)}{k_n^2 - k^2}, \quad (10.87)$$

uma expansão bilinear, simétrica em relação a  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , como esperado. Por fim,  $\psi(\mathbf{r}_1)$ , a solução desejada da equação não-homogênea, é dada por

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_2) d\tau_2. \quad (10.88)$$

Se generalizarmos nossa equação diferencial não-homogênea para

$$\mathcal{L}\psi + \lambda\psi = -\rho, \quad (10.89)$$

em que  $\mathcal{L}$  é um operador hermitiano, constatamos que

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2)}{\lambda_n - \lambda}, \quad (10.90)$$

em que  $\lambda_n$  é o  $n$ ésimo autovalor e  $\varphi_n$  é a autofunção ortonormal correspondente da equação diferencial homogênea

$$\mathcal{L}\psi + \lambda\psi = 0. \quad (10.91)$$

A expansão em autofunções da função de Green na Equação 10.90) torna explícita a propriedade de simetria  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  e muitas vezes é útil quando se comparam soluções obtidas por outros meios.

### Funções de Green — Unidimensionais

O desenvolvimento da função de Green para sistemas bi e tridimensionais foi o assunto discutido anteriormente neste capítulo e na Seção 9.7. Aqui, por simplicidade, nos restringimos a casos unidimensionais e adotamos uma abordagem um pouco diferente.



### Propriedades Definidas

Em nossa análise unidimensional consideramos em primeiro lugar a equação não-homogênea

$$\mathcal{L}y(x) + f(x) = 0, \quad (10.92)$$

na qual  $\mathcal{L}$  é o operador diferencial **auto-adjunto**

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x). \quad (10.93)$$

Assim como na Seção 10.1,  $y(x)$  deve satisfazer certas condições de contorno nas extremidades  $a$  e  $b$  de nosso intervalo  $[a, b]$ .

Agora passamos a definir uma função  $G$  um tanto estranha e arbitrária no intervalo  $[a, b]$ . Nesse estágio, o máximo que se pode dizer em defesa de  $G$  é que as propriedades definidoras são legítimas, ou matematicamente aceitáveis. Mais adiante,  $G$  aparecerá como uma ferramenta razoável para obter soluções da EDO não-homogênea, Equação (10.92); esse papel determina suas propriedades.

1. O intervalo  $a \leq x \leq b$  é dividido por um parâmetro  $t$ . Rotulamos  $G(x) = G_1(x)$  para  $a \leq x < t$  e  $G(x) = G_2(x)$  para  $t < x \leq b$ .
2. Cada uma das funções  $G_1(x)$  e  $G_2(x)$  satisfaz a equação homogênea,<sup>15</sup> isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}G_1(x) &= 0, & a \leq x < t, \\ \mathcal{L}G_2(x) &= 0, & t < x \leq b. \end{aligned} \quad (10.94)$$

3. Em  $x = a$ ,  $G_1(x)$  satisfaz as condições de contorno que impomos a  $y(x)$ , uma solução da EDO não-homogênea, Equação (10.92). Em  $x = b$ ,  $G_2(x)$  satisfaz as condições de contorno impostas a  $y(x)$  nessa extremidade do intervalo. Por conveniência as condições de contorno são consideradas homogêneas, isto é, em  $x = a$ ,

$$y(a) = 0 \quad \text{ou} \quad y'(a) = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$$

e, do mesmo modo, em  $x = b$ .

4. Exigimos que  $G(x)$  seja **contínua**,<sup>16</sup>

$$\lim_{x \rightarrow t^-} G_1(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} G_2(x). \quad (10.95)$$

5. Exigimos que  $G'(x)$  seja **descontínua**, especificamente que<sup>15</sup>

$$\frac{d}{dx} G_2(x) \Big|_t - \frac{d}{dx} G_1(x) \Big|_t = -\frac{1}{p(t)}, \quad (10.96)$$

em que  $p(t)$  vem do operador auto-adjunto, Equação (10.93). Note que, sendo a derivada de primeira ordem descontínua, a derivada de segunda ordem não existe.

Com efeito, esses requisitos fazem de  $G$  uma função de duas variáveis,  $G(x, t)$ . Além disso, observamos que  $G(x, t)$  depende da forma do operador diferencial  $\mathcal{L}$ , bem como das condições de contorno que  $y(x)$  deve satisfazer. Note que descrevemos as propriedades de funções de Green, para equações diferenciais de segunda ordem. Observe que para funções de Green, para equações diferenciais de primeira ordem, as discontinuidades surgem na própria  $G$ .

Agora, admitindo que podemos achar uma função  $G(x, t)$  que tenha essas propriedades, nós a denominamos função de Green e passamos a mostrar que a solução da Equação (10.92) é

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt. \quad (10.97)$$

Para fazer isso, em primeiro lugar construímos a função de Green  $G(x, t)$ . Seja  $u(x)$  uma solução da equação homogênea que satisfaz as condições de contorno em  $x = a$ , e seja  $v(x)$  uma solução que satisfaz as condições de contorno em  $x = b$ . Então, podemos considerar<sup>17</sup>

$$G(x, t) = \begin{cases} c_1 u(x), & a \leq x < t, \\ c_2 v(x), & t < x \leq b. \end{cases} \quad (10.98)$$

<sup>15</sup>Homogênea em relação à função desconhecida. A função  $f(x)$  na Equação (10.92) é igualada a zero.

<sup>16</sup>Em termos estritos, esse é o limite quando  $x \rightarrow t$ .

<sup>17</sup>As “constantes”  $c_1$  e  $c_2$  são independentes de  $x$ , mas podem depender (e dependem) da outra variável,  $t$ .

Continuidade em  $x = t$  (Equação (10.95)) requer

$$c_2v(t) - c_1u(t) = 0. \tag{10.99}$$

Por fim, a descontinuidade na derivada de primeira ordem (Equação (10.96)) se torna

$$c_2v'(t) - c_1u'(t) = -\frac{1}{p(t)}. \tag{10.100}$$

Haverá uma solução única para nossos coeficientes desconhecidos  $c_1$  e  $c_2$  se o determinante wronskiano

$$\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = u(t)v'(t) - v(t)u'(t)$$

não desaparecer. Vimos na Seção 9.6 que o não-desaparecimento desse determinante é uma condição necessária para a independência linear. Vamos admitir que  $u(x)$  e  $v(x)$  sejam independentes. (Se  $u(x)$  e  $v(x)$  forem linearmente dependentes, a situação se torna mais complicada e não é considerada aqui. Veja Courant e Hilbert em Leituras Adicionais do Capítulo 9. Para  $u(x)$  e  $v(x)$  independentes, temos o wronskiano (mais uma vez pela Seção 9.6 ou pelo Exercício 10.1.4)

$$u(t)v'(t) - v(t)u'(t) = \frac{A}{p(t)}, \tag{10.101}$$

no qual  $A$  é uma constante. A Equação (10.101) às vezes é denominada *fórmula de Abel*. Já apareceram numerosos exemplos em conexão com as funções de Bessel e Legendre. Agora, pela Equação (10.100), identificamos

$$c_1 = -\frac{v(t)}{A}, \quad c_2 = -\frac{u(t)}{A}. \tag{10.102}$$

A Equação (10.99) é claramente satisfeita. Substituindo na Equação (10.98), temos como resultado nossa função de Green

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{A}u(x)v(t), & a \leq x < t, \\ -\frac{1}{A}u(t)v(x), & t < x \leq b. \end{cases} \tag{10.103}$$

Note que  $G(x, t) = G(t, x)$ . Essa é a propriedade de simetria que foi provada anteriormente na Seção 9.7. Sua interpretação física é dada pelo princípio da reciprocidade (via nossa função propagadora) – uma causa em  $t$  resulta no mesmo efeito em  $x$  que uma causa em  $x$  produz em  $t$ . Em termos de nossa analogia eletrostática, isso é óbvio, sendo que a função propagadora depende só da grandeza da distância entre os dois pontos:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|.$$

### Integral da Função de Green — Equação Diferencial

Construímos  $G(x, t)$ , mas ainda resta a tarefa de mostrar que a integral na Equação (10.97) com nossa nova função de Green é realmente uma solução da equação diferencial original (10.92). Fazemos isso por substituição direta. Com  $G(x, t)$  dada pela Equação (10.103),<sup>18</sup> a Equação (10.97) se torna

$$y(x) = -\frac{1}{A} \int_a^x v(x)u(t)f(t) dt - \frac{1}{A} \int_x^b u(x)v(t)f(t) dt. \tag{10.104}$$

Diferenciando, obtemos

$$y'(x) = -\frac{1}{A} \int_a^x v'(x)u(t)f(t) dt - \frac{1}{A} \int_x^b u'(x)v(t)f(t) dt, \tag{10.105}$$

sendo canceladas as derivadas dos limites. Uma segunda diferenciação resulta em

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{A} \int_a^x v''(x)u(t)f(t) dt - \frac{1}{A} \int_x^b u''(x)v(t)f(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{A} [u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]f(x). \end{aligned} \tag{10.106}$$

<sup>18</sup>Na primeira integral,  $a \leq t \leq x$ . Daí  $G(x, t) = G_2(x, t) = -(1/A)u(t)v(x)$ . De modo semelhante, a segunda integral requer  $G = G_1$ .



Pelas Equações (10.100) e (10.102) essa expressão pode ser reescrita como

$$y''(x) = -\frac{v''(x)}{A} \int_a^x u(t)f(t) dt - \frac{u''(x)}{A} \int_x^b v(t)f(t) dt - \frac{f(x)}{p(x)}. \quad (10.107)$$

Agora, substituindo na Equação (10.93), temos

$$\mathcal{L}y(x) = -\frac{\mathcal{L}v(x)}{A} \int_a^x u(t)f(t) dt - \frac{\mathcal{L}u(x)}{A} \int_x^b v(t)f(t) dt - f(x). \quad (10.108)$$

Uma vez que  $u(x)$  e  $v(x)$  foram escolhidas para satisfazer a equação homogênea, os fatores  $\mathcal{L}$  são zero e os termos integrais desaparecem, e vemos que a Equação (10.92) é satisfeita.

Também devemos verificar que  $y(x)$  satisfaz as condições de contorno requeridas. No ponto  $x = a$ ,

$$y(a) = -\frac{u(a)}{A} \int_a^b v(t)f(t) dt = cu(a), \quad (10.109)$$

$$y'(a) = -\frac{u'(a)}{A} \int_a^b v(t)f(t) dt = cu'(a), \quad (10.110)$$

uma vez que a integral definida é uma constante. Escolhemos  $u(x)$  para satisfazer

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0. \quad (10.111)$$

Multiplicando pela constante  $c$ , verificamos que  $y(x)$  também satisfaz a Equação (10.111). Isso ilustra a utilidade das condições de contorno **homogêneas**, a normalização não importa. Em problemas de Mecânica Quântica a condição de contorno imposta à função de onda costuma ser expressa em termos da razão

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{d}{dx} \ln \psi(x), \quad \text{comparada a} \quad \frac{d}{dx} \ln u(x)|_{x=a} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

Equação (10.111). A vantagem é que a função de onda ainda não precisa ser normalizada.

Resumindo, temos a Equação (10.97),

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)f(t) dt,$$

que satisfaz a equação diferencial (Equação (10.92)),

$$\mathcal{L}y(x) + f(x) = 0,$$

e as condições de contorno, sendo que essas condições de contorno foram embutidas na função de Green,  $G(x, t)$ .

Basicamente, o que fizemos foi usar as soluções da equação homogênea, a Equação (10.94), para construir uma solução da equação não-homogênea. Mais uma vez, a equação de Poisson é uma ilustração. A solução, (Equação (9.148)), representa uma combinação ponderada  $[\rho(\mathbf{r}_2)]$  de soluções da equação homogênea de Laplace correspondente. (Seguimos essas mesmas etapas anteriormente nesta seção.)

Devemos observar que nossa  $y(x)$ , Equação (10.97), é, na verdade, a solução **particular** da equação diferencial, Equação (10.92). Nossas condições de contorno excluem a adição de soluções da equação homogênea. Em um problema físico real, podemos perfeitamente ter ambos os tipos de soluções. Em eletrostática, por exemplo (compare com a Seção 9.7), a solução de função de Green da equação de Poisson dá o potencial criado pela distribuição de carga dada. Além disso, pode haver campos externos superpostos. Esses seriam descritos por soluções da equação homogênea, equação de Laplace.

### Autofunção, Equação de Autovalor

A análise precedente não impôs nenhuma restrição especial sobre nossa  $f(x)$ . Agora, vamos admitir que  $f(x) = \lambda \rho(x)y(x)$ .<sup>19</sup> Então, temos

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t)\rho(t)y(t) dt \quad (10.112)$$

<sup>19</sup>A função  $\rho(x)$  é alguma função ponderação, não uma densidade de carga.

como uma solução de

$$\mathcal{L}y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \tag{10.113}$$

e e suas condições de contorno. A Equação (10.112) é uma equação integral homogênea de Fredholm de segunda espécie e a Equação (10.113) é a equação homogênea de autovalor (com a função de peso  $w(x)$  substituída por  $\rho(x)$ ).

Há uma mudança na interpretação de nossa função de Green. Ela começou como uma função propagadora, uma função de peso que dá a importância da carga  $\rho(\mathbf{r}_2)$  na produção do potencial  $\varphi(\mathbf{r}_1)$ . A carga  $\rho$  era o termo não-homogêneo na equação diferencial não-homogênea Equação (10.92). Agora, a equação diferencial e a equação integral são ambas **homogêneas**.  $G(x, t)$  se tornou um elo que relaciona as duas equações, diferencial e integral.

Para concluir a discussão dessa equivalência equação diferencial-equação integral, agora vamos mostrar que a Equação (10.113) implica a Equação (10.112), isto é, que uma solução de nossa equação diferencial (Equação (10.113)) com suas condições de contorno satisfaz a equação integral Equação (10.112). Multiplicamos a Equação (10.113) por  $G(x, t)$ , a função de Green adequada, e integramos de  $x = a$  até  $x = b$  para obter

$$\int_a^b G(x, t)\mathcal{L}y(x) dx + \lambda \int_a^b G(x, t)\rho(x)y(x) dx = 0. \tag{10.114}$$

A primeira integral é subdividida em duas ( $x < t, x > t$ ), de acordo com a construção de nossa função de Green, resultando em

$$-\int_a^t G_1(x, t)\mathcal{L}y(x) dx - \int_t^b G_2(x, t)\mathcal{L}y(x) dx = \lambda \int_a^b G(x, t)\rho(x)y(x) dx. \tag{10.115}$$

Note que  $t$  é o limite superior para as integrais  $G_1$  e o limite inferior para as integrais  $G_2$ . Vamos reduzir o lado esquerdo da Equação (10.115) a  $y(t)$ . Então, com  $G(x, t) = G(t, x)$ , temos a Equação (10.112) (com  $x$  e  $t$  permutados).

Aplicando o teorema de Green ao lado esquerdo ou, o que é equivalente, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & -\int_a^t G_1(t, x) \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} y(x) \right) + q(x)y(x) \right] dx \\ & = -[G_1(x, t)p(x)y'(x)]_{x=a}^{x=t} + \int_a^t \left( \frac{\partial}{\partial x} G_1(x, t) \right) p(x)y'(x) dx \\ & \quad - \int_a^t G_1(x, t)q(x)y(x) dx, \end{aligned} \tag{10.116}$$

com uma expressão equivalente para a segunda integral. Uma segunda integração por partes resulta em

$$\begin{aligned} -\int_a^t G_1(x, t)\mathcal{L}y(x) dx & = -\int_a^t y(x)\mathcal{L}G_1(x, t) dx \\ & \quad - [G_1(x, t)p(x)y'(x)]_{x=a}^{x=t} \\ & \quad + [G_1'(x, t)p(x)y(x)]_{x=a}^{x=t}. \end{aligned} \tag{10.117}$$

A integral do lado direito desaparece porque  $\mathcal{L}G_1 = 0$ . Combinando os termos integrados com os resultantes da integração de  $G_2$ , temos

$$\begin{aligned} & -p(t) \left[ G_1(t, t)y'(t) - y(t) \frac{\partial}{\partial x} G_1(x, t) \Big|_{x=t} - G_2(t, t)y'(t) + y(t) \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, t) \Big|_{x=t} \right] \\ & \quad + p(a) \left[ y'(a)G_1(a, t) - y(a) \frac{\partial}{\partial x} G_1(x, t) \Big|_{x=a} \right] \\ & \quad - p(b) \left[ G_2(b, t)y'(b) - y(b) \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, t) \Big|_{x=b} \right]. \end{aligned} \tag{10.118}$$

Cada uma das duas últimas expressões desaparece, porque  $G(x, t)$  e  $y(x)$  satisfazem as mesmas condições de contorno. A primeira expressão, com a ajuda das Equações (10.95) e (10.96), se reduz a  $y(t)$ . Substituindo na Equação (10.115), temos a Equação (10.112), concluindo assim a demonstração da equivalência entre a equação integral e a equação diferencial mais condições de contorno.





### Exemplo 10.5.1 OSCILADOR LINEAR

Como um exemplo simples, considere a equação de oscilador linear (para uma corda vibrante):

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{10.119}$$

Impomos as condições  $y(0) = y(1) = 0$ , que correspondem a uma corda presa nas duas extremidades. Agora, para construir nossa função de Green, precisamos de soluções da equação homogênea  $\mathcal{L}y(x) = 0$ , que é  $y''(x) = 0$ . Para satisfazer as condições de contorno é preciso que uma das soluções desapareça em  $x = 0$ , a outra em  $x = 1$ . Essas soluções (não-normalizadas) são

$$u(x) = x, \quad v(x) = 1 - x. \tag{10.120}$$

Constatamos que

$$uv' - vu' = -1 \tag{10.121}$$

ou, pela Equação (10.101), com  $p(x) = 1$ ,  $A = -1$ . Nossa função de Green se torna

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1 - t), & 0 \leq x < t, \\ t(1 - x), & t < x \leq 1. \end{cases} \tag{10.122}$$

Daí, pela Equação (10.112) nossa corda vibrante presa nas extremidades satisfaz

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t)y(t) dt. \tag{10.123}$$

Você pode mostrar que as soluções conhecidas da Equação (10.119),

$$y = \text{sen } n\pi x, \quad \lambda = n^2\pi^2,$$

realmente satisfazem a Equação (10.123). Note que nosso autovalor  $\lambda$  **não** é o comprimento de onda.

### Função de Green e Função Delta de Dirac

Uma outra abordagem da função de Green pode lançar mais luz sobre nossa formulação e em particular sobre sua relação com problemas físicos. Vamos nos referir à equação de Poisson, desta vez, para uma carga pontual:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{\text{pontual}}}{\epsilon_0}. \tag{10.124}$$

A solução de função de Green dessa equação foi desenvolvida na Seção 9.7. Desta vez, vamos considerar uma análoga unidimensional

$$\mathcal{L}y(x) + f(x)_{\text{pontual}} = 0. \tag{10.125}$$

Aqui,  $f(x)_{\text{pontual}}$  se refere a uma “carga” pontual unitária, ou a uma força pontual. Podemos representá-la de várias formas, mas talvez a mais conveniente seja

$$f(x)_{\text{pontual}} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & t - \epsilon < x < t + \epsilon, \\ 0, & \text{em outra região,} \end{cases} \tag{10.126}$$

que é essencialmente a mesma que a Equação (1.172). Então, integrando a Equação (10.125), temos

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathcal{L}y(x) dx = - \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} f(x)_{\text{pontual}} dx = -1 \tag{10.127}$$

pela definição de  $f(x)$ . Vamos examinar  $\mathcal{L}y(x)$  mais de perto. Temos

$$\begin{aligned} & \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{d}{dx} [p(x)y'(x)] dx + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} q(x)y(x) dx \\ &= [p(x)y'(x)]_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} q(x)y(x) dx = -1. \end{aligned} \tag{10.128}$$

No  $\varepsilon \rightarrow 0$  podemos satisfazer essa relação **permitindo** que  $y'(x)$  tenha uma descontinuidade de  $-1/p(x)$  em  $x = t$ , sendo que a própria  $y(x)$  permanece contínua.<sup>20</sup> Contudo, essas são apenas as propriedades usadas para definir nossa função de Green,  $G(x, t)$ . Além disso, notamos que no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$f(x)_{\text{pontual}} = \delta(x - t), \tag{10.129}$$

na qual  $\delta(x - t)$  é nossa função delta de Dirac, definida dessa maneira na Seção 1.15. Por conseguinte, a Equação (10.125) se tornou

$$\mathcal{L}G(x, t) = -\delta(x - t). \tag{10.130}$$

Essa é uma versão unidimensional da Equação (9.159), que exploramos para o desenvolvimento das funções de Green em duas e três dimensões, Seção 9.7. Vamos lembrar que usamos essa relação na Seção 9.7 para determinar nossas funções de Green.

A Equação (10.130) já era de esperar, visto que, na verdade, é uma consequência de nossa equação diferencial, Equação (10.92), e da solução integral da função de Green, Equação (10.97). Se fizermos  $\mathcal{L}_x$  (índice para destacar que ele opera na dependência de  $x$ ) operar ambos os lados da Equação (10.97), então

$$\mathcal{L}_x y(x) = \mathcal{L}_x \int_a^b G(x, t) f(t) dt.$$

Pela Equação (10.92) o lado esquerdo é exatamente  $-f(x)$ . No lado direito,  $\mathcal{L}_x$ , é independente da variável de integração  $t$ , portanto podemos escrever

$$-f(x) = \int_a^b \{ \mathcal{L}_x G(x, t) \} f(t) dt.$$

Pela definição da função delta de Dirac, Equações (1.171b) e (1.183), temos a Equação (10.130).

### Exercícios

**10.5.1** Mostre que

$$G(x, t) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < t, \\ t, & t < x \leq 1, \end{cases}$$

é a função de Green para o operador  $\mathcal{L} = d^2/dx^2$  e as condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

**10.5.2** Ache a função de Green para

$$(a) \mathcal{L}y(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + y(x), \quad \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$(b) \mathcal{L}y(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x), \quad y(x) \text{ finite para } -\infty < x < \infty.$$

**10.5.3** Ache a função de Green para os operadores

$$(a) \mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy(x)}{dx} \right).$$

$$\text{Resposta: } G(x, t) = \begin{cases} -\ln t, & 0 \leq x < t, \\ -\ln x, & t < x \leq 1. \end{cases}$$

$$(b) \mathcal{L}y(x) = \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy(x)}{dx} \right) - \frac{n^2}{x} y(x), \text{ com } y(0) \text{ finito e } y(1) = 0.$$

$$\text{Resposta: } G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[ \left( \frac{x}{t} \right)^n - (xt)^n \right], & 0 \leq x < t, \\ \frac{1}{2n} \left[ \left( \frac{t}{x} \right)^n - (xt)^n \right], & t < x \leq 1. \end{cases}$$

<sup>20</sup>As funções  $p(x)$  e  $q(x)$  que aparecem no operador  $\mathcal{L}$  são funções contínuas. Se  $y(x)$  permanecer contínua,  $\int q(x)y(x) dx$  é certamente contínua. Por conseguinte, essa integral sobre um intervalo  $2\varepsilon$  (Equação (10.128)) desaparece à medida que  $\varepsilon$  desaparece.



A combinação de operador e intervalo especificada no Exercício 10.5.3(a) é patológica, no sentido de que uma das extremidades do intervalo (zero) é um ponto singular do operador. Como consequência, a parte integrada (a integral de superfície do teorema de Green) não desaparece. Os quatro exercícios seguintes exploram essa situação.

**10.5.4** (a) Mostre que a solução particular de

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{d}{dx} y(x) \right] = -1$$

é  $y_P(x) = -x$ .

(b) Mostre que

$$y_P(x) = -x \neq \int_0^1 G(x, t)(-1) dt,$$

em que  $G(x, t)$  é a função de Green do Exercício 10.5.3(a).

**10.5.5** Mostre que o teorema de Green, Equação (1.104) em uma dimensão, com um operador do tipo Sturm-Liouville  $(d/dt)p(t)(d/dt)$  substituindo  $\nabla \cdot \nabla$ , pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[ u(t) \frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dv(t)}{dt} \right) - v(t) \frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{du(t)}{dt} \right) \right] dt \\ &= \left[ u(t)p(t) \frac{dv(t)}{dt} - v(t)p(t) \frac{du(t)}{dt} \right] \Big|_a^b. \end{aligned}$$

**10.5.6** Usando a forma unidimensional do teorema de Green do Exercício 10.5.5, seja

$$\begin{aligned} v(t) = y(t) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dy(t)}{dt} \right) &= -f(t), \\ u(t) = G(x, t) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} \right) &= -\delta(x - t). \end{aligned}$$

Mostre que o teorema de Green resulta em

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)f(t) dt + \left[ G(x, t)p(t) \frac{dy(t)}{dt} - y(t)p(t) \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) \right] \Big|_{t=a}^{t=b}.$$

**10.5.7** Para  $p(t) = t, y(t) = -t$ ,

$$G(x, t) = \begin{cases} -\ln t, & 0 \leq x < t \\ -\ln x, & t < x \leq 1, \end{cases}$$

verifique que a parte integrada não se anula.

**10.5.8** Construa a função de Green para

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (k^2 x^2 - 1)y = 0,$$

sujeita às condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

**10.5.9** Dado que

$$\mathcal{L} = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$$

e

$$G(\pm 1, t) \text{ permanece finita,}$$

mostre que nenhuma função de Green pode ser construída pelas técnicas desta seção ( $u(x)$  e  $v(x)$  são linearmente dependentes).

**10.5.10** Construa a função de Green unidimensional para a equação de Helmholtz

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\psi(x) = g(x).$$

As condições de contorno são as de uma onda que avança na direção positiva de  $x$ , admitindo uma dependência de tempo  $e^{-i\omega t}$ .

$$\text{Resposta: } G(x_1, x_2) = \frac{i}{2k} \exp(ik|x_1 - x_2|).$$

**10.5.11** Construa a função de Green unidimensional para a equação modificada de Helmholtz

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)\psi(x) = f(x).$$

As condições de contorno são que a função de Green deve desaparecer para  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\text{Resposta: } G(x_1, x_2) = \frac{1}{2k} \exp(-k|x_1 - x_2|).$$

**10.5.12** Pela expansão em autofunções da função de Green, mostre que

$$(a) \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi x \text{ sen } n\pi t}{n^2} = \begin{cases} x(1-t), & 0 \leq x < t, \\ t(1-x), & t < x \leq 1. \end{cases}$$

$$(b) \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } (n + \frac{1}{2})\pi x \text{ sen } (n + \frac{1}{2})\pi t}{(n + \frac{1}{2})^2} = \begin{cases} x, & 0 \leq x < t, \\ t, & t < x \leq 1. \end{cases}$$

*Nota:* Na Seção 10.4 a função de Green de  $\mathcal{L} + \lambda$  é expandida em autofunções. Ali, o  $\lambda$  é um parâmetro ajustável e não um autovalor.

**10.5.13** Na equação de Fredholm,

$$f(x) = \lambda^2 \int_a^b G(x, t)\varphi(t) dt,$$

$G(x, t)$  é uma função de Green dada por

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n^2 - \lambda^2}.$$

Mostre que a solução é

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \varphi_n(x) \int_a^b f(t)\varphi_n(t) dt.$$

**10.5.14** Mostre que o operador da transformada integral da função de Green

$$\int_a^b G(x, t)[\ ] dt$$

é igual a  $-\mathcal{L}^{-1}$ , no sentido de que

$$(a) \mathcal{L}_x \int_a^b G(x, t)y(t) dt = -y(x),$$

$$(b) \int_a^b G(x, t)\mathcal{L}_t y(t) dt = -y(x).$$

*Nota:* Considere  $\mathcal{L}y(x) + f(x) = 0$ , Equação (10.92).

**10.5.15** Substitua a Equação (10.87), a expansão em autofunções da função de Green, na Equação (10.88) e então mostre que a Equação (10.88) é, de fato, uma solução da equação não-homogênea de Helmholtz (Equação (10.82)).



- 10.5.16** (a) Começando com uma equação diferencial não-homogênea unidimensional (Equação (10.89)), admita que  $\psi(x)$  e  $\rho(x)$  podem ser representadas por expansões autofunções. Sem qualquer utilização da função delta de Dirac ou de suas representações, mostre que

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_a^b \rho(t) \varphi_n(t) dt}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x).$$

Note que (1) se  $\rho = 0$ , não existe nenhuma solução, a menos que  $\lambda = \lambda_n$  e (2) se  $\lambda = \lambda_n$ , não existe nenhuma solução, a menos que  $\rho$  seja ortogonal a  $\varphi_n$ . Esse mesmo comportamento reaparecerá com equações integrais na Seção 16.4.

- (b) Permutando somatório e integração, mostre que você construiu a função de Green correspondente à Equação (10.90).

- 10.5.17** As autofunções da equação de Schrödinger muitas vezes são complexas. Nesse caso a integral de ortogonalidade, Equação (10.40), é substituída por

$$\int_a^b \varphi_i^*(x) \varphi_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}.$$

Em vez da Equação (1.189), temos

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_n^*(\mathbf{r}_2).$$

Mostre que a função de Green, Equação (10.87), se torna

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1) \varphi_n^*(\mathbf{r}_2)}{k_n^2 - k^2} = G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

### Leituras Adicionais

Byron, F. W., Jr., e R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley (1969).

Dennery, P., e A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*. Nova tiragem. Nova York: Dover (1996).

Hirsch, M., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. San Diego: Academic Press (1974).

Miller, K. S., *Linear Differential Equations in the Real Domain*. Nova York: Norton (1963).

Titchmarsh, E. C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, 2<sup>a</sup> ed., vol. 1. Londres: Oxford University Press (1962), vol. II (1958).

# 11

## Funções de Bessel

### 11.1 Funções de Bessel da Primeira Espécie, $J_\nu(x)$

Funções de Bessel aparecem em uma ampla variedade de problemas físicos. Na Seção 9.3, a separação da equação de Helmholtz, ou de onda, em coordenadas cilíndricas circulares levou à equação de Bessel. Na Seção 11.7 veremos que a equação de Helmholtz em coordenadas polares esféricas também leva a uma forma de equação de Bessel. Funções de Bessel também podem aparecer em forma integral — representações integrais. Isso pode resultar de transformadas integrais (Capítulo 15) ou da elegância matemática de iniciar o estudo de funções de Bessel com funções de Hankel, Seção 11.4.

Funções de Bessel e funções estreitamente relacionadas a ela formam uma rica área da Análise Matemática com muitas representações, muitas propriedades interessantes e úteis e muitas inter-relações. Algumas das mais importantes inter-relações são desenvolvidas na Seção 11.1 e seções subsequentes. Note que as funções de Bessel não estão restritas ao Capítulo 11. As formas assintóticas são desenvolvidas na Seção 7.3, bem como na Seção 11.6. As representações hipergeométricas confluentes aparecem na Seção 13.5.

#### Função Geradora para Ordem Inteira

Embora o interesse primário das funções de Bessel seja como soluções de equações diferenciais, é instrutivo e conveniente desenvolvê-las a partir de uma abordagem completamente diferente,<sup>1</sup> a de função geradora. Essa abordagem também tem a vantagem de focalizar as funções em si, em vez das equações diferenciais que elas satisfazem. Vamos introduzir uma função de duas variáveis,

$$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}. \quad (11.1)$$

Expandindo essa função em uma série de Laurent (Seção 6.5), obtemos

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \quad (11.2)$$

É instrutivo comparar a Equação (11.2) com as equivalentes Equações (11.23) e (11.25).

O coeficiente de  $t^n$ ,  $J_n(x)$ , é definido para ser uma função de Bessel da primeira espécie de ordem inteira  $n$ . Expandindo as exponenciais, temos um produto de série de Maclaurin em  $xt/2$  e  $-x/2t$ , respectivamente,

$$e^{xt/2} \cdot e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \quad (11.3)$$

Aqui, o índice  $r$  do somatório é trocado para  $n$ , sendo  $n = r - s$  e os limites do somatório  $n = -s$ , para  $\infty$ ; a ordem dos somatórios é permutada, o que é justificado por convergência absoluta. A faixa do somatório sobre  $n$  torna  $-\infty$  a  $\infty$ , enquanto o somatório sobre  $s$  se estende de  $\max(-n, 0)$  a  $\infty$ . Para um dado  $s$  obtemos  $t^n$  ( $n \geq 0$ ) por  $r = n + s$ :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \quad (11.4)$$

<sup>1</sup>Funções geradoras já foram usadas no Capítulo 5. Na Seção 5.6 a função geradora  $(1+x)^n$  foi usada para derivar os coeficientes binomiais. Na Seção 5.9 a função geradora  $x(e^x - 1)^{-1}$  foi usada para derivar os números de Bernoulli.



Então, o coeficiente de  $t^n$  é<sup>2</sup>

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!} + \dots \quad (11.5)$$

Essa forma de série exibe comportamento da função de Bessel  $J_n(x)$  para  $x$  pequeno e permite avaliação numérica de  $J_n(x)$ . Os resultados para  $J_0$ ,  $J_1$  e  $J_2$  são mostrados na Figura 11.1. Pela Seção 5.3, o erro resultante da utilização de apenas um número finito de termos dessa série alternante na avaliação numérica é menor do que o primeiro termo omitido. Por exemplo, se quisermos  $J_n(x)$  com precisão de  $\pm 1$ , só o primeiro termo da Equação (11.5) já será suficiente, contanto que a razão entre o segundo termo e o primeiro seja menor do que 1 (em grandeza) ou  $x < 0, 2(n+1)^{1/2}$ . As funções de Bessel oscilam, mas **não** são periódicas — exceto no limite, quando  $x \rightarrow \infty$  (Seção 11.6). A amplitude de  $J_n(x)$  não é constante, mas decresce assintoticamente como  $x^{-1/2}$ . (Veja a Equação (11.137)).

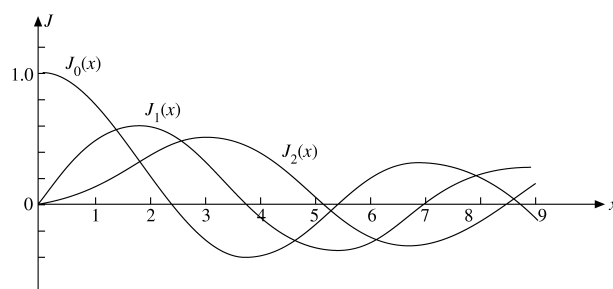


Figura 11.1: Funções de Bessel,  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  e  $J_2(x)$ .

Para  $n < 0$ , a equação (11.5) resulta em

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}. \quad (11.6)$$

Uma vez que  $n$  é um inteiro (aqui),  $(s-n)! \rightarrow \infty$ , para  $s = 0, \dots, (n-1)$ . Por conseguinte, pode-se considerar que a série começa com  $s = n$ . Substituindo  $s$  por  $s+n$ , obtemos

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (11.7)$$

que mostra imediatamente que  $J_n(x)$  e  $J_{-n}(x)$  não são independentes, mas estão relacionadas por

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{integral } n). \quad (11.8)$$

Essas expressões de séries (Equações (11.5) e (11.6)) podem ser usadas por  $n$  substituído por  $\nu$  para **definir**  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  não-inteiro (compare com o Exercício 11.1.7).

### Relações de Recorrência

As relações de recorrência para  $J_n(x)$  e suas derivadas podem ser todas obtidas por operação sobre a série, Equação (11.5), embora isso exija um pouco de clarividência (ou muita tentativa e erro). A verificação das relações de recorrência conhecidas é direta (Exercício 11.1.7). Aqui é conveniente obtê-las pela função geradora,  $g(x, t)$ . Diferenciando ambos os lados da Equação (11.1) em relação a  $t$ , constatamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) &= \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

<sup>2</sup>Pelas etapas que levam a essa série e pelas suas características de convergência, deve ficar claro que ela pode ser usada com  $x$  substituído por  $z$ , sendo  $z$  qualquer ponto no plano complexo finito.

e substituindo a exponencial na Equação (11.2) e igualando os coeficientes de potências iguais de  $t$ ,<sup>3</sup> obtemos

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \quad (11.10)$$

Essa é uma relação de recorrência de três termos. Dados  $J_0$  e  $J_1$ , por exemplo,  $J_2$  (e qualquer outra ordem inteira  $J_n$ ) pode ser calculada.

Diferenciando a Equação (11.1) em relação a  $x$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n. \quad (11.11)$$

Mais uma vez, substituindo na Equação (11.2) e igualando os coeficientes de potências iguais de  $t$ , obtemos o resultado

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (11.12)$$

Como caso especial dessa relação geral de recorrência,

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (11.13)$$

Somando as Equações (11.10) e (11.12) e dividindo por 2, temos

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x). \quad (11.14)$$

Multiplicar por  $x^n$  e rearranjar os termos produz

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \quad (11.15)$$

Subtrair a Equação (11.12) da Equação (11.10) e dividir por 2 resulta em

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x). \quad (11.16)$$

Multiplicando por  $x^{-n}$  e rearranjando termos, obtemos

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (11.17)$$

### Equação Diferencial de Bessel

Suponha que consideremos um conjunto de funções  $Z_\nu(x)$  que satisfaça as relações básicas de recorrência (Equações (11.10) e (11.12)), mas com  $\nu$  necessariamente um inteiro e  $Z_\nu$  não necessariamente dada pela série (Equação (11.5)). A Equação (11.14) pode ser reescrita ( $n \rightarrow \nu$ ) como

$$xZ'_\nu(x) = xZ_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x). \quad (11.18)$$

Diferenciando em relação a  $x$ , temos

$$xZ''_\nu(x) + (\nu + 1)Z'_\nu - xZ'_{\nu-1} - Z_{\nu-1} = 0. \quad (11.19)$$

Multiplicando por  $x$  e então subtraindo a Equação (11.18) multiplicada por  $\nu$ , temos

$$x^2 Z''_\nu + xZ'_\nu - \nu^2 Z_\nu + (\nu - 1)xZ_{\nu-1} - x^2 Z'_{\nu-1} = 0. \quad (11.20)$$

Agora reescrevemos a Equação (11.16) e substituímos  $n$  por  $\nu - 1$ :

$$xZ'_{\nu-1} = (\nu - 1)Z_{\nu-1} - xZ_\nu. \quad (11.21)$$

Usando a Equação (11.21) para eliminar  $Z_{\nu-1}$  e  $Z'_{\nu-1}$  da Equação (11.20), finalmente obtemos

$$\boxed{x^2 Z''_\nu + xZ'_\nu + (x^2 - \nu^2)Z_\nu = 0,} \quad (11.22)$$

<sup>3</sup>Isso depende do fato de a representação de série de potência ser única (Seções 5.7 e 6.5).





que é a EDO de **Bessel**. Por conseguinte, quaisquer funções  $Z_\nu(x)$  que satisfaçam as relações de recorrência (Equações (11.10) e (11.12), (11.14) e (11.16) ou (11.15) e (11.17)) satisfazem a equação de Bessel; isto é, as  $Z_\nu$  desconhecidas são funções de Bessel. Em particular, mostramos que as funções  $J_n(x)$ , definidas por nossa função geradora, satisfazem a EDO de Bessel. Se o argumento for  $k\rho$  em vez de  $x$ , a Equação (11.22) se torna

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Z_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Z_\nu(k\rho) + (k^2\rho^2 - \nu^2) Z_\nu(k\rho) = 0. \quad (11.22a)$$

### Representação Integral

Um modo particularmente útil e poderoso de tratar funções de Bessel emprega representações integrais. Se voltarmos à função geradora (Equação (11.2)) e substituirmos  $t = e^{i\theta}$ , obteremos

$$e^{ix \operatorname{sen} \theta} = J_0(x) + 2[J_2(x) \cos 2\theta + J_4(x) \cos 4\theta + \dots] + 2i[J_1(x) \operatorname{sen} \theta + J_3(x) \operatorname{sen} 3\theta + \dots], \quad (11.23)$$

na qual usamos as relações

$$\begin{aligned} J_1(x)e^{i\theta} + J_{-1}(x)e^{-i\theta} &= J_1(x)(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2iJ_1(x)\operatorname{sen}\theta, \\ J_2(x)e^{2i\theta} + J_{-2}(x)e^{-2i\theta} &= 2J_2(x)\cos 2\theta, \end{aligned} \quad (11.24)$$

e assim por diante.

Em notação de somatório,

$$\begin{aligned} \cos(x \operatorname{sen} \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta), \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \operatorname{sen}[(2n-1)\theta], \end{aligned} \quad (11.25)$$

igualando as partes real e imaginária da Equação (11.23).

Empregando as propriedades de ortogonalidade de co-seno e seno,<sup>4</sup>

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}, \quad (11.26a)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}, \quad (11.26b)$$

nas quais  $n$  e  $m$  são inteiros **positivos** (zero excluído)<sup>5</sup>, obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ par,} \\ 0, & n \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (11.27)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ par,} \\ J_n(x), & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (11.28)$$

Se essas duas equações forem somadas,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos n\theta + \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} n\theta] \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11.29)$$

<sup>4</sup>Elas são autofunções de uma equação auto-adjunta (equação do oscilador linear) e satisfazem condições de contorno adequadas (compare com as Seções 10.2 e 14.1).

<sup>5</sup>As Equações (11.26a) e (11.26b) são válidas para  $m$  ou  $n = 0$ . Se  $m$  e  $n = 0$ , a constante em (11.26a) se torna  $\pi$ ; a constante na Equação (11.26b) se torna 0.

Como caso especial (integre a Equação (11.25) sobre  $(0, \pi)$  para obter)

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (11.30)$$

Observando que  $\cos(x \operatorname{sen} \theta)$  repete a si mesmo em todos os quatro quadrantes, podemos escrever a Equação (11.30) como

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad (11.30a)$$

Por outro lado,  $\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$  inverte o sinal nos terceiro e quarto quadrantes, portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) d\theta = 0. \quad (11.30b)$$

Somando a Equação (11.30a) e  $i$  vezes a Equação (11.30b), obtemos a representação exponencial complexa

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta. \quad (11.30c)$$

Essa representação integral (Equação (11.29)) pode ser obtida de um modo um pouco mais direto empregando integração de contorno (compare com o Exercício 11.1.16).<sup>6</sup> Existem muitas outras representações integrais (compare com o Exercício 11.1.18).

### Exemplo 11.1.1 DIFRAÇÃO DE FRAUNHOFER, ABERTURA CIRCULAR

Na teoria da difração através de uma abertura circular encontramos a integral

$$\Phi \sim \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{ibr \cos \theta} d\theta \quad (11.31)$$

para  $\Phi$ , a amplitude da onda difratada.<sup>7</sup> Aqui,  $\theta$  é um ângulo azimutal no plano da abertura circular de raio  $a$ , e  $\alpha$  é o ângulo definido por um ponto sobre um anteparo abaixo da abertura circular em relação à normal que passa pelo ponto central. O parâmetro  $b$  é dado por

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha, \quad (11.32)$$

sendo  $\lambda$  o comprimento de onda da onda incidente. Os outros símbolos são definidos pela Figura 11.2. Pela Equação (11.30c) obtemos<sup>8</sup>

$$\Phi \sim 2\pi \int_0^a J_0(br) r dr. \quad (11.33)$$

A Equação (11.15) nos permite integrar a Equação (11.33) imediatamente para obter

$$\Phi \sim \frac{2\pi ab}{b^2} J_1(ab) \sim \frac{\lambda a}{\operatorname{sen} \alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha\right). \quad (11.34)$$

Note que, aqui,  $J_1(0) = 0$ . A intensidade da luz no padrão de difração é proporcional a  $\Phi^2$  e

$$\Phi^2 \sim \left\{ \frac{J_1[(2\pi a/\lambda) \operatorname{sen} \alpha]}{\operatorname{sen} \alpha} \right\}^2. \quad (11.35)$$

<sup>6</sup>Para  $n = 0$ , uma simples integração sobre  $\theta$  de 0 a  $2\pi$  converterá a Equação (11.23) na Equação (11.30c).

<sup>7</sup>O expoente  $ibr \cos \theta$  dá a fase da onda sobre um anteparo distante no ângulo  $\alpha$  ( $r, \theta$ ). A forma exponencial imaginária desse integrando significa que a integral é tecnicamente uma transformada de Fourier (Capítulo 15). Em geral, o padrão da difração de Fraunhofer é dado pela transformada de Fourier da abertura.

<sup>8</sup>Também poderíamos nos referir ao Exercício 11.1.16(b).

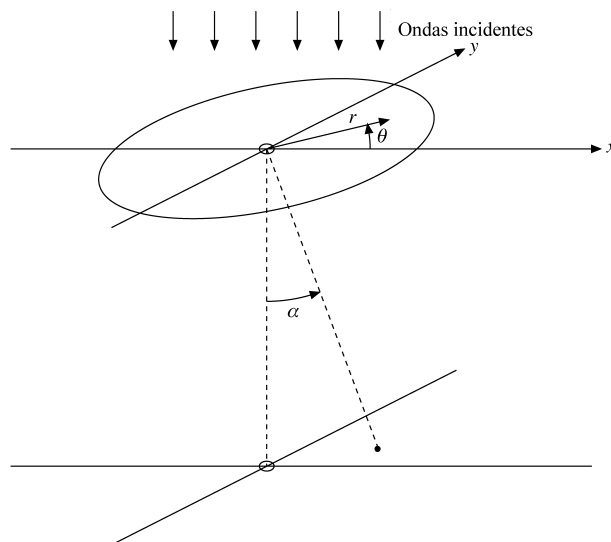


Figura 11.2: Difração de Fraunhofer, abertura circular.

**Tabela 11.1** Zeros das funções de Bessel e suas derivadas de primeira ordem

Número de zeros	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178
	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$		
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012		
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152		
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459		

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Pela Tabela 11.1, que relaciona os zeros das funções de Bessel e suas derivadas de primeira ordem,<sup>9</sup> a Equação (11.35) terá um zero em

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \text{sen } \alpha = 3,8317\dots, \tag{11.36}$$

ou

$$\text{sen } \alpha = \frac{3,8317\lambda}{2\pi a}. \tag{11.37}$$

Para luz verde,  $\lambda = 5,5 \times 10^{-5}$  cm. Daí, se  $a = 0,5$  cm,

$$\alpha \approx \text{sen } \alpha = 6,7 \times 10^{-5} \text{ (radianos)} \approx 14 \text{ segundos de crc}, \tag{11.38}$$

o que mostra que a curvatura ou amplitude do raio de luz é extremamente pequena. Se essa análise fosse conhecida no século XVII, os argumentos contra a teoria de onda da luz teriam caído por terra. Em meados do século XX, esse mesmo padrão de difração apareceu na dispersão de partículas nucleares por núcleos atômicos — uma notável demonstração das propriedades de onda das partículas nucleares. ■

Um outro exemplo da utilização de funções de Bessel e suas raízes é dado pela cavidade ressonante eletromagnética (Exemplo 11.1.2) e pelos exemplo e exercícios da Seção 11.2.

<sup>9</sup>Raízes adicionais das funções de Bessel e suas derivadas de primeira ordem podem ser encontradas em C. L. Beattie, Table of first 700 zeros of Bessel Functions. *Bell Syst. Tech. J.* 37: 689 (1958), e Bell Monogr. 3055. Raízes podem ser acessadas no *software* Mathematica e outros *softwares* simbólicos que estão na Web.

### Exemplo 11.1.2 CAVIDADE RESSONANTE CILÍNDRICA

A propagação de ondas eletromagnéticas em cilindros metálicos ocios é importante em muitos dispositivos práticos. Se as extremidades do cilindro forem superfícies, ele é denominado **cavidade**. Cavidades ressonantes desempenham um papel crucial em muitos aceleradores de partículas.

Considerando o eixo  $z$  ao longo do centro da cavidade cujas extremidades são superfícies em  $z = 0$  e  $z = l$  e usamos coordenadas cilíndricas sugeridas pela geometria. Suas paredes são condutores perfeitos, portanto o campo elétrico tangencial desaparece nelas (como na Figura 11.3):

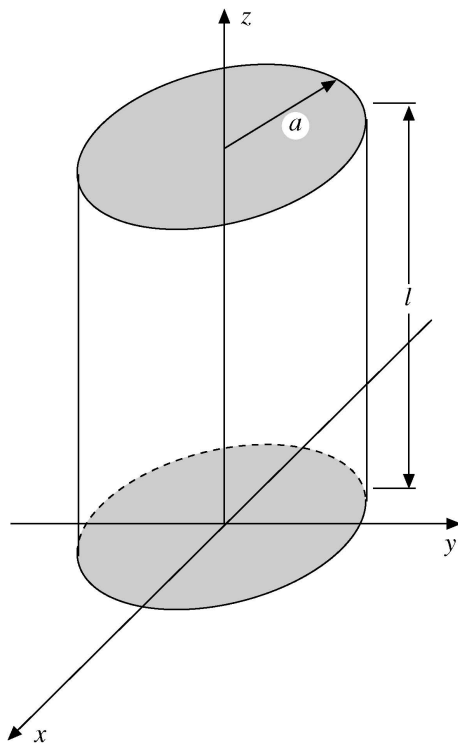


Figura 11.3: Cavidade ressonante cilíndrica.

$$E_z = 0 = E_\varphi, \quad \text{para } \rho = a, \quad E_\rho = 0 = E_\varphi, \quad \text{para } z = 0, l.$$

Dentro da cavidade temos um vácuo, portanto  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ . Ondas magnéticas no interior de uma cavidade ressonante oscilam com dependência harmônica do tempo  $e^{-i\omega t}$ , o que resulta de separar o tempo das variáveis espaciais em equações de Maxwell (Seção 1.9), portanto

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \alpha^2 \mathbf{E}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c}.$$

Com  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (vácuo, nenhuma carga) e a Equação (1.85), obtemos, para a parte espacial do campo elétrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \alpha^2 \mathbf{E} = 0,$$

que é denominada **EDP vetorial de Helmholtz**. A componente  $z$  ( $E_z$ , somente parte espacial) satisfaz a equação escalar de Helmholtz,

$$\nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0. \tag{11.39}$$

As componentes do campo elétrico transversal  $\mathbf{E}_\perp = (E_\rho, E_\varphi)$  obedecem à mesma EDP, mas em condições de contorno diferentes, dadas anteriormente. Uma vez que  $E_z$  é conhecida, as equações de Maxwell determinam  $E_\varphi$  totalmente. Se o leitor quiser detalhes, consulte Jackson, *Electrodynamics*, nas Leituras Adicionais.

Separamos a variável  $z$  de  $\rho$  e  $\varphi$ , porque não há nenhuma derivada mista  $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \rho}$  etc. A solução de produto,  $E_z = v(\rho, \varphi)w(z)$ , é substituída na EDP de Helmholtz por  $E_z$  usando a Equação (2.35) para  $\nabla^2$  em coordenadas



cilíndricas, e então dividimos por  $vw$ , resultando

$$\frac{1}{w(z)} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 \right) v(\rho, \varphi) = 0.$$

Isso implica

$$-\frac{1}{w(z)} \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{v(\rho, \varphi)} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 v \right) = k^2.$$

Aqui,  $k^2$  é uma constante de separação porque os lados direito e esquerdo dependem de variáveis diferentes. Para  $w(z)$  encontramos a EDO do oscilador harmônico com solução de onda estacionária (não-transitória) que procuramos,

$$w(z) = A \sin kz + B \cos kz,$$

com  $A, B$  constantes. Para  $v(\rho, \varphi)$  obtemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 v = 0, \quad \gamma^2 = \alpha^2 - k^2.$$

Nessa EDO podemos separar as variáveis  $\rho$  e  $\varphi$  porque não há nenhum termo misto  $\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi}$ . A forma de produto  $v = u(\rho)\Phi(\varphi)$  em

$$\frac{\rho^2}{u(\rho)} \left( \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \gamma^2 \right) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2,$$

em que a **constante de separação**  $m^2$  **deve ser um inteiro**, porque a solução angular  $\Phi = e^{im\varphi}$  da EDO

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0$$

deve ser periódica no ângulo azimutal.

Isso nos deixa com a EDO radial

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left( \gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) u = 0.$$

Argumentos dimensionais sugerem elevar  $\rho \rightarrow r = \gamma\rho$  e dividir por  $\gamma^2$ , o que resulta em

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( 1 - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0.$$

Essa é a EDO de Bessel para  $\nu = m$ . Usamos a solução regular  $J_m(\gamma\rho)$  porque a segunda solução independente (irregular) é singular na origem, o que é inaceitável aqui. A solução completa é

$$E_z = J_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} (A \sin kz + B \cos kz), \quad (11.40a)$$

em que a constante  $\gamma$  é determinada pela **condição de contorno**  $E_z = 0$  sobre a superfície da cavidade  $\rho = a$ , isto é, que  $\gamma a$  seja uma raiz da função de Bessel  $J_m$  (veja a Tabela 11.1). Isso dá um conjunto discreto de valores  $\gamma = \gamma_{mn}$ , em que  $n$  designa a  $n$ -ésima raiz de  $J_m$  (veja a Tabela 11.1).

Para o modo de oscilação transversal magnético, ou TM, com  $H_z = 0$ , as equações de Maxwell estão implícitas. (Mais uma vez, consulte *Resonant Cavities* em *Electrodynamics* de J. D. Jackson, em Leituras Adicionais.)

$$\mathbf{E}_\perp \sim \nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \nabla_\perp = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

A forma desse resultado sugere  $E_z \sim \cos kz$ , isto é, estabelecer  $A = 0$ , de modo que  $\mathbf{E}_\perp \sim \sin kz = 0$  em  $z = 0, l$  possa ser satisfeita por

$$k = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (11.41)$$

Assim, os campos elétricos **tangenciais**  $E_\rho$  e  $E_\varphi$  desaparecem em  $z = 0$  e  $l$ . Em outras palavras,  $A = 0$  corresponde às  $dE_z/dz = 0$  em  $z = 0$  e  $z = l$  para o modo TM. Então, no total, temos

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{l^2}, \quad (11.42)$$

com

$$\gamma = \gamma_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \quad (11.43)$$

em que  $\alpha_{mn}$  é o enésimo zero de  $J_m$ . Agora, a solução geral

$$E_z = \sum_{m,n,p} J_m(\gamma_{mn}\rho) e^{\pm im\varphi} B_{mnp} \cos \frac{p\pi z}{l}, \quad (11.40b)$$

com constantes  $B_{mnp}$ , resulta do princípio da superposição.

O resultado das duas condições de contorno e da constante de separação  $m^2$  é que a frequência angular de nossa oscilação depende de três parâmetros discretos:

$$\omega_{mnp} = c\sqrt{\frac{\alpha_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, 3, \dots, \\ p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11.44)$$

Essas são as frequências ressonantes permissíveis para nosso modo TM. O modo TE (transversal elétrico) de oscilação é o tópico do Exercício 11.1.26. ■

### Abordagens Alternativas

As funções de Bessel são introduzidas aqui por meio de uma função geradora, Equação (11.2). Há outras abordagens possíveis. Uma listagem das várias possibilidades apresenta:

1. Função geradora (mágica), Equação (11.2).
2. Solução de série de equação diferencial de Bessel, Seção 9.5.
3. Integrais de contorno: alguns autores preferem começar com definições de integral de contorno das funções de Hankel, Seções 7.3 e 11.4, e desenvolver a função de Bessel  $J_\nu(x)$  a partir das funções de Hankel.
4. Solução direta de problemas físicos: o Exemplo 11.1.1, difração de Fraunhofer com uma abertura circular ilustra isso. A propósito, a Equação (11.31) pode ser tratada por expansão de série, se quisermos. Feynman<sup>10</sup> desenvolve funções de Bessel a partir de uma consideração de ressonante de cavidade.

Caso a função geradora pareça muito arbitrária, ela pode ser derivada de uma integral de contorno (Exercício 11.1.16) ou das relações de recorrência da função de Bessel (Exercício 11.1.6). Note que a integral de contorno não é limitada ao inteiro  $\nu$ , o que nos dá um ponto de partida para desenvolver as funções de Bessel.

### Funções de Bessel de Ordem Não-Inteira

Essas diferentes abordagens não são exatamente equivalentes. A abordagem da função geradora é muito conveniente para derivar duas relações de recorrência, equação diferencial de Bessel, representações integrais, teoremas da adição (Exercício 11.1.2) e limites superiores e inferiores (Exercício 11.1.1). Contudo, é provável que você já tenha notado que a função geradora definiu apenas funções de Bessel de ordem inteira,  $J_0, J_1, J_2$ , e assim por diante. Essa é uma limitação da abordagem da função geradora que pode ser evitada usando, em vez dela, a integral de contorno do Exercício 11.1.16, o que leva à abordagem precedente (3). Mas a função de Bessel da primeira espécie,  $J_\nu(x)$ , pode facilmente ser definida para  $\nu$  não-inteiro usando a série (Equação (11.5)) como uma nova definição.

As relações de recorrência podem ser verificadas por substituição na forma de série de  $J_\nu(x)$  (Exercício 11.1.7). A equação de Bessel resulta dessas relações. De fato, se  $\nu$  não for um inteiro, na verdade há uma importante simplificação. Constata-se que  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  são independentes, porque não existe nenhuma relação da forma da Equação (11.8). Por outro lado, para  $\nu = n$ , inteiro, precisamos de uma outra solução. O desenvolvimento dessa segunda solução e uma investigação de suas propriedades são o assunto da Seção 11.3.

<sup>10</sup>R. P. Feynman, R. B. Leighton, e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II. Reading, MA: Addison-Wesley (1964), Chapter 23.



### Exercícios

**11.1.1** Pelo produto das funções geradoras  $g(x, t) \cdot g(x, -t)$ , mostre que

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \dots$$

e, portanto, que  $|J_0(x)| \leq 1$  e  $|J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

*Sugestão:* Use unicidade de séries de potências, Seção 5.7.

**11.1.2** Usando uma função geradora  $g(x, t) = g(u + v, t) = g(u, t) \cdot g(v, t)$ , mostre que

$$(a) \quad J_n(u + v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) \cdot J_{n-s}(v),$$

$$(b) \quad J_0(u + v) = J_0(u)J_0(v) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(u)J_{-s}(v).$$

Esses são teoremas da adição para as funções de Bessel.

**11.1.3** Usando somente a função geradora

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

e não a forma explícita de série de  $J_n(x)$ , mostre que  $J_n(x)$  tem paridade ímpar ou par conforme  $n$  for ímpar ou par, isto é,<sup>11</sup>

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x).$$

**11.1.4** Derive a expansão de Jacobi-Anger

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}.$$

Essa é uma expansão de uma onda plana em uma série de ondas cilíndricas.

**11.1.5** Mostre que

$$(a) \quad \cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x),$$

$$(b) \quad \sin x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x).$$

**11.1.6** Para ajudar a tirar a função geradora do reino da magia, mostre que ela pode ser derivada da relação de recorrência, Equação (11.10).

*Sugestão:*

(a) Admita uma função geradora da forma

$$g(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m.$$

(b) Multiplique a Equação (11.10) por  $t^n$  e some sobre  $n$ .

(c) Reescreva o resultado anterior como

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)g(x, t) = \frac{2t}{x} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}.$$

(d) Integre e ajusta a “constante” de integração (uma função de  $x$ ), de modo que o coeficiente da potência de ordem zero,  $t^0$ , é  $J_0(x)$ , como fornecido pela Equação (11.5).

<sup>11</sup> Isso é visto com facilidade pela forma de série da Equação (11.5).

**11.1.7** Mostre, por diferenciação direta, que

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$$

satisfaz as duas relações de recorrência

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x),$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$$

e a equação diferencial de Bessel

$$x^2 J''_\nu(x) + xJ'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2)J_\nu(x) = 0.$$

**11.1.8** Prove que

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x \cos \theta) \cos \theta \, d\theta, \quad \frac{1 - \cos x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \theta) \, d\theta.$$

*Sugestão:* A integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \theta \, d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}$$

pode ser útil.

**11.1.9** Mostre que

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Essa integral é uma transformada de Fourier de co-seno (compare com a Seção 15.3). A correspondente transformada de Fourier de seno,

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\text{sen } xt}{\sqrt{t^2-1}} dt,$$

é estabelecida na Seção 11.4 (Exercício 11.4.6) usando uma representação integral de função de Hankel.

**11.1.10** Derive

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n J_0(x).$$

*Sugestão:* Tente indução matemática.

**11.1.11** Mostre que, entre quaisquer dois zeros consecutivos de  $J_n(x)$ , há um, e somente um, zero de  $J_{n+1}(x)$ .

*Sugestão:* As Equações (11.15) e (11.17) podem ser úteis.

**11.1.12** Uma análise de padrões de radiação de antena para um sistema com uma abertura circular envolve a equação

$$g(u) = \int_0^1 f(r) J_0(ur) r \, dr.$$

Se  $f(r) = 1 - r^2$ , mostre que

$$g(u) = \frac{2}{u^2} J_2(u).$$

**11.1.13** A seção de choque diferencial em um experimento de espalhamento nuclear é dada por  $d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2$ . Um tratamento aproximado leva a

$$f(\theta) = \frac{-ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp[ik\rho \text{sen } \theta \text{sen } \varphi] \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Aqui,  $\theta$  é um ângulo pelo qual a partícula dispersa é espalhada.  $R$  é o raio nuclear. Mostre que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\pi R^2)^2 \frac{1}{\pi} \left[ \frac{J_1(kR \text{sen } \theta)}{\text{sen } \theta} \right]^2.$$





**11.1.14** Um conjunto de funções  $C_n(x)$  satisfaz as relações de recorrência

$$\begin{aligned} C_{n-1}(x) - C_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} C_n(x), \\ C_{n-1}(x) + C_{n+1}(x) &= 2C'_n(x). \end{aligned}$$

- (a) Que EDO linear de segunda ordem  $C_n(x)$  satisfaz?
- (b) Transforme sua EDO em equação de Bessel por uma troca de variável. Isso sugere que  $C_n(x)$  pode ser expressa em termos de funções de Bessel de argumento transformado.

**11.1.15** Uma partícula (massa  $m$ ) está contida em um cilindro circular reto (*uma pastilha*) de raio  $R$  e altura  $H$ . A partícula é descrita por uma função de onda que satisfaz a equação de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\rho, \varphi, z) = E \psi(\rho, \varphi, z)$$

e a condição que a função de onda vá a zero sobre a superfície do cilindro. Ache a energia mais baixa (ponto zero) permitida.

$$\text{Resposta: } E = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{z_{pq}}{R} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{H} \right)^2 \right],$$

$$E_{\text{mín}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{2.405}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{H} \right)^2 \right],$$

em que  $z_{pq}$  é o  $q$ -ésimo zero de  $J_p$  e o índice  $J_p$  e o índice  $p$  fixado pela dependência azimutal.

**11.1.16** (a) Mostre por diferenciação direta e substituição que

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-\nu-1} dt$$

ou que a equação equivalente,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{x}{2} \right)^\nu \int e^{s-x^2/4s} s^{-\nu-1} ds,$$

satisfaz a equação de Bessel.  $C$  é o contorno mostrado na Figura 11.4. O eixo real negativo é a linha de corte.

*Sugestão:* Mostre que o integrando total (após substituição na equação diferencial de Bessel) pode ser escrito como uma derivada total:

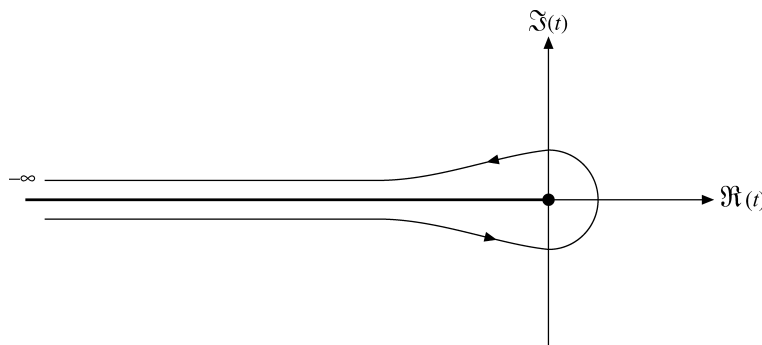


Figura 11.4: Contorno da função de Bessel.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] t^{-\nu} \left[ \nu + \frac{x}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \right] \right\}.$$

(b) Mostre que a primeira integral (sendo  $n$  um inteiro) pode ser transformada em

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \operatorname{sen} \theta - n\theta)} d\theta = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \cos \theta + n\theta)} d\theta.$$

**11.1.17** O contorno  $C$  no Exercício 11.1.16 é deformado para o caminho  $-\infty$  a  $-1$ , círculo unitário  $e^{-i\pi}$  a  $e^{i\pi}$  e, por fim,  $-1$  a  $-\infty$ . Mostre que

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta - \frac{\operatorname{sen} \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu\theta - x \operatorname{senh} \theta} d\theta.$$

Essa é a integral de Bessel.

*Sugestão:* Os valores negativos da variável de integração  $u$  podem ser manipulados usando

$$u = te^{\pm ix}.$$

**11.1.18** (a) Mostre que

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos^{2\nu} \theta d\theta,$$

em que  $\nu > -\frac{1}{2}$ .

*Sugestão:* Eis aqui uma chance de usar expansão de série e integração termo a termo. As fórmulas da Seção 8.4 mostrarão ser úteis.

(b) Transforme a integral da parte (a) em

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) \operatorname{sen}^{2\nu} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm ix \cos \theta} \operatorname{sen}^{2\nu} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm ipx} (1 - p^2)^{\nu-1/2} dp. \end{aligned}$$

Essas são representações integrais alternativas de  $J_\nu(x)$ .

**11.1.19** (a) Por

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int t^{-\nu-1} e^{t-x^2/4t} dt$$

derive a relação de recorrência

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x).$$

(b) Por

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int t^{-\nu-1} e^{(x/2)(t-1/t)} dt$$

derive a relação de recorrência

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)].$$

**11.1.20** Mostre que a relação de recorrência

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

resulta diretamente da diferenciação de

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$



**11.1.21** Avalie

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a, b > 0.$$

Na verdade, os resultados são válidos para  $a \geq 0, -\infty < b < \infty$ . Essa é uma transformada de Laplace de  $J_0$ .

*Sugestão:* Uma representação integral de  $J_0$  ou uma expansão de série será útil.

**11.1.22** Usando formas trigonométricas, verifique que

$$J_0(br) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ibr \sin \theta} d\theta.$$

**11.1.23** (a) Plote a intensidade ( $\Phi^2$  da Equação (11.35)) como uma função de  $(\sin \alpha/\lambda)$  ao longo de um diâmetro do padrão de difração circular. Localize os dois primeiros mínimos.

(b) Que fração da intensidade total da luz cai dentro do máximo central?

*Sugestão:*  $[J_1(x)]^2/x$  pode ser escrita como uma derivada, e a integral de área da intensidade pode ser integrada por inspeção.

**11.1.24** A fração da luz incidente sobre uma abertura circular (incidência normal) que é transmitida é dada por

$$T = 2 \int_0^{2ka} J_2(x) \frac{dx}{x} - \frac{1}{2ka} \int_0^{2ka} J_2(x) dx.$$

Aqui,  $a$  é o raio da abertura e  $k$  é o número de onda,  $2\pi/\lambda$ . Mostre que

$$(a) \quad T = 1 - \frac{1}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2ka), \quad (b) \quad T = 1 - \frac{1}{2ka} \int_0^{2ka} J_0(x) dx.$$

**11.1.25** A amplitude  $U(\rho, \varphi, t)$  de uma membrana circular vibratória de raio  $a$  satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Aqui,  $v$  é a velocidade de fase da onda fixada pelas constantes elásticas e por qualquer atenuação que seja imposta.

(a) Mostre que a solução é

$$U(\rho, \varphi, t) = J_m(k\rho) (a_1 e^{im\varphi} + a_2 e^{-im\varphi}) (b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}).$$

(b) Pela condição de contorno de Dirichlet,  $J_m(ka) = 0$ , ache os valores permissíveis do comprimento de onda  $\lambda(k = 2\pi/\lambda)$ .

*Nota:* Há outras funções de Bessel além de  $J_m$ , mas todas elas divergem em  $\rho = 0$ . Há uma demonstração explícita disso na Seção 11.3. Na verdade, o comportamento divergente está implícito na Equação (11.6).

**11.1.26** O Exemplo 11.1.2 descreve os modos TM de oscilação de cavidade eletromagnética. Os modos transversais elétricos (TE) são diferentes, no sentido de que trabalhamos a partir da componente  $z$  da indução magnética  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 B_z + \alpha^2 B_z = 0$$

com condições de contorno

$$B_z(0) = B_z(l) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

Mostre que as frequências ressonantes TE são dadas por

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\frac{\beta_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2 \pi^2}{l^2}}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

**11.1.27** Esboce um gráfico das três frequências ressonantes angulares TM mais baixas e as três frequências ressonantes angulares TE mais baixas,  $\omega_{mnp}$ , como uma função da razão raio/comprimento ( $a/l$ ) para  $0 \leq a/l \leq 1.5$ .

*Sugestão:* Tente traçar  $\omega^2$  (em unidades de  $c^2/a^2$ ) contra  $(a/l)^2$ . Qual é a causa dessa escolha?

**11.1.28** Um disco condutor delgado de raio  $a$  está carregado com uma carga  $q$ . Mostre que o potencial é descrito por

$$\varphi(r, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(kr) \frac{\text{sen } ka}{k} dk,$$

em que  $J_0$  é a função de Bessel usual e  $r$  e  $z$  são as familiares coordenadas cilíndricas.

*Nota:* Esse problema é difícil. Uma abordagem é por meio de transformadas de Fourier como no Exercício 15.3.11. Para uma discussão do problema físico, consulte Jackson (*Classical Electrodynamics*, em Leituras Adicionais).

**11.1.29** Mostre que

$$\int_0^a x^m J_n(x) dx, \quad m \geq n \geq 0,$$

(a) é integrável em termos da funções de Bessel e potências de  $x$  (tal como  $a^p J_q(a)$ ) para  $m + n$  ímpar;

(b) pode ser reduzida a termos integrados mais  $\int_0^a J_0(x) dx$  para  $m + n$  par.

**11.1.30** Mostre que

$$\int_0^{\alpha_{0n}} \left(1 - \frac{y}{\alpha_{0n}}\right) J_0(y) y dy = \frac{1}{\alpha_{0n}} \int_0^{\alpha_{0n}} J_0(y) dy.$$

Aqui,  $\alpha_{0n}$  é a  $n$ -ésima raiz de  $J_0(y)$ . Essa relação é útil (veja o Exercício 11.2.11): a expressão da direita é mais fácil e mais rápida de avaliar — e muito mais exata. Considerar a diferença entre os dois termos na expressão da esquerda nos leva a um erro relativo grande.

**11.1.31** A amplitude de difração da abertura circular  $\Phi$  da Equação (17.35) é proporcional a  $f(z) = J_1(z)/z$ . A correspondente amplitude de difração da abertura única é proporcional a  $g(z) = \text{sen } z/z$ .

(a) Calcule e trace  $f(z)$  e  $g(z)$  para  $z = 0, 0(0, 2)12, 0$ .

(b) Localize os dois valores mais baixos de  $z$  ( $z > 0$ ) para os quais  $f(z)$  assume um valor extremo. Calcule os valores correspondentes de  $f(z)$ .

(c) Localize os dois valores mais baixos de  $z$  ( $z > 0$ ) para os quais  $g(z)$  assume um valor extremo. Calcule os valores correspondentes de  $g(z)$ .

**11.1.32** Calcule o potencial eletrostático de um disco carregado  $\varphi(r, z)$  a partir da forma integral do Exercício 11.1.28. Calcule o potencial para  $r/a = 0, 0(0, 5)2, 0$  e  $z/a = 0, 25(0, 25)1, 25$ . Porque  $z/a = 0$  é omitido? O Exercício 12.3.17 é uma versão harmônica esférica desse mesmo problema.

## 11.2 Ortogonalidade

Se a equação de Bessel, Equação (11.22a), for dividida por  $\rho$ , vemos que ela se torna auto-adjunta e, portanto, pela teoria de Sturm-Liouville, Seção 10.2, espera-se que as soluções sejam ortogonais — se pudermos providenciar que as condições de contorno adequadas sejam satisfeitas. Para cuidar das condições de contorno para um intervalo finito  $[0, a]$ , introduzimos parâmetros  $a$  e  $\alpha_{\nu m}$  no argumento de  $J_\nu$  para obter  $J_\nu(\alpha_{\nu m} \rho/a)$ . Aqui,  $a$  é o limite superior da coordenada radial cilíndrica  $\rho$ . Pela Equação (11.22a),

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2 \rho}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho} \right) J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) = 0. \quad (11.45)$$

Mudando o parâmetro  $\alpha_{\nu m}$  para  $\alpha_{\nu n}$ , constatamos que  $J_\nu(\alpha_{\nu n} \rho/a)$  satisfaz

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu \left( \alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu \left( \alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) + \left( \frac{\alpha_{\nu n}^2 \rho}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho} \right) J_\nu \left( \alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) = 0. \quad (11.45a)$$



Precedendo como na Seção 10.2, multiplicamos a Equação (11.45) por  $J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$  e a Equação (11.45a) por  $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$  e subtraímos, obtendo

$$\begin{aligned} & J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right] - J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right] \\ &= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2}\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right). \end{aligned} \quad (11.46)$$

Integrando de  $\rho = 0$  a  $\rho = a$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho - \int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho \\ &= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2}\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Integrando por partes, vemos que o lado esquerdo da Equação (11.47) se torna

$$\left|\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right|_0^a - \left|\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right|_0^a. \quad (11.48)$$

Para  $\nu \geq 0$  o fator  $\rho$  garante um zero no limite mais baixo,  $\rho = 0$ . Na verdade, o limite mais baixo sobre o índice  $\nu$  pode ser estendido até  $\nu > -1$ , Exercício 11.2.4.<sup>12</sup> Em  $\rho = a$ , cada expressão se anula se escolhermos que os parâmetros  $\alpha_{\nu n}$  e  $\alpha_{\nu m}$  sejam zeros ou raízes de  $J_\nu$ , isto é,  $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$ . Agora, os índices se tornam significativos:  $\alpha_{\nu m}$  é o  $m$ -ésimo zero de  $J_\nu$ .

Com essa escolha de parâmetros, o lado esquerdo desaparece (as condições de fronteira de Sturm-Liouville são satisfeitas) e, para  $m \neq n$ ,

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho = 0. \quad (11.49)$$

Isso nos dá ortogonalidade no intervalo  $[0, a]$ .

### Normalização

A integral de normalização pode ser desenvolvida voltando à Equação (11.48), fazendo  $\alpha_{\nu n} = \alpha_{\nu m} + \varepsilon$ , e considerando o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (compare com o Exercício 11.2.2). Com a ajuda da relação de recorrência, Equação (11.16), o resultado pode ser escrito como

$$\int_0^a \left[ J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2. \quad (11.50)$$

### Séries de Bessel

Se admitirmos que o conjunto de funções de Bessel  $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$  ( $\nu$  fixado,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ) é completo, então qualquer função bem-comportada, mas, sob qualquer outro aspecto, arbitrária,  $f(\rho)$ , pode ser expandida em uma série de Bessel (Bessel-Fourier ou Fourier-Bessel)

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\nu m} J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad \nu > -1. \quad (11.51)$$

Os coeficientes  $c_{\nu m}$  são determinados usando a Equação (11.50)

$$c_{\nu m} = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho. \quad (11.52)$$

Uma expansão de série similar envolvendo  $J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)$  com  $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a} = 0$  é incluída nos Exercícios 11.2.3 e 11.2.6(b).

<sup>12</sup>O caso  $\nu = -1$  reverte para  $\nu = +1$ , Equação (11.8).

### Exemplo 11.2.1 POTENCIAL ELETROSTÁTICO EM UM CILINDRO *OCO*

Pela Tabela 9.3 da Seção 9.3 (com  $\alpha$  substituído por  $k$ ), nossa solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas circulares é uma combinação linear de

$$\psi_{km}(\rho, \varphi, z) = J_m(k\rho)[a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi][c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}]. \quad (11.53)$$

A combinação linear particular é determinada pelas condições que devem ser satisfeitas. Aqui, nosso cilindro tem um raio  $a$  e uma altura  $l$ . A seção da extremidade superior tem uma distribuição de potencial  $\psi(\rho, \varphi)$ . Em todos os outros lugares sobre a superfície o potencial é zero.<sup>13</sup> O problema é achar o potencial eletrostático

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{k,m} \psi_{km}(\rho, \varphi, z) \quad (11.54)$$

em todos os lugares no interior.

Por conveniência, as coordenadas cilíndricas circulares são posicionadas como mostra a Figura 11.3. Visto que  $\psi(\rho, \varphi, 0) = 0$ , consideramos  $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}$ . A em  $z$  se torna dependência  $\sinh kz$ , que se anula em  $z = 0$ . A exigência de que  $\psi = 0$  sobre as laterais cilíndricas é cumprida exigindo que a constante de separação  $k$  seja

$$k = k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \quad (11.55)$$

onde o primeiro índice,  $m$ , dá o índice da função de Bessel, enquanto o segundo índice identifica o zero particular de  $J_m$ .

O potencial eletrostático se torna

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{a}\right) \\ & \cdot [a_{mn} \sin m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi] \cdot \sinh\left(\alpha_{mn} \frac{z}{a}\right). \end{aligned} \quad (11.56)$$

A Equação (11.56) é uma série dupla: uma série de Bessel em  $\rho$  e uma série de Fourier em  $\varphi$ .

Em  $z = l$ ,  $\psi = \psi(\rho, \varphi)$ , uma função conhecida de  $\rho$  e  $\varphi$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{a}\right) \\ & \cdot [a_{mn} \sin m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi] \cdot \sinh\left(\alpha_{mn} \frac{l}{a}\right). \end{aligned} \quad (11.57)$$

As constantes  $a_{mn}$  e  $b_{mn}$  são avaliadas usando as Equações (11.49) e (11.50) e as equações correspondentes para  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$  (Exemplo 10.2.1 e Equações (14.2), (14.3), (14.15) a (14.17)). Encontramos<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a_{mn} \\ b_{mn} \end{array} \right\} = & 2 \left[ \pi a^2 \sinh\left(\alpha_{mn} \frac{l}{a}\right) J_{m+1}^2(\alpha_{mn}) \right]^{-1} \\ & \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^a \psi(\rho, \varphi) J_m\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{a}\right) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} \rho d\rho d\varphi. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Essas integrais são definidas, isto é, são números. Substituindo de volta na Equação (11.56), a série é especificada e o potencial  $\psi(\rho, \varphi, z)$  é determinado. ■

### Forma do Contínuo

A série de Bessel, Equação (11.51) e o Exercício 11.2.6 se aplicam a expansões no intervalo finito  $[0, a]$ . Se  $a \rightarrow \infty$ , então podemos esperar que as formas de série passem para integrais. As raízes discretas  $\alpha_{\nu m}$  se tornam

<sup>13</sup>Se  $\psi = 0$ , em  $z = 0, l$ , mas  $\psi \neq 0$ , para  $\rho = a$ , as funções modificadas de Bessel, Seção 11.5, são envolvidas.

<sup>14</sup>Se  $m = 0$ , fator 2 é omitido (compare com a Equação (14.16)).



uma variável contínua  $\alpha$ . Uma situação similar é encontrada na série de Fourier, Seção 15.2. O desenvolvimento da integral de Bessel a partir da série de Bessel fica para o Exercício 11.2.8.

Para operações com um contínuo de funções de Bessel,  $J_\nu(\alpha\rho)$ , uma relação fundamental é a equação de **fechamento** da função de Bessel,

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha\rho)J_\nu(\alpha'\rho)\rho d\rho = \frac{1}{\alpha}\delta(\alpha - \alpha'), \quad \nu > -\frac{1}{2}. \quad (11.59)$$

Isso pode ser provado pela utilização de transformadas de Hankel, Seção 15.1. Uma abordagem alternativa, partindo de uma relação similar à Equação (10.82), é dada por Morse e Feshbach, Seção 6.3. Na Seção 11.7 é desenvolvido um segundo tipo de ortogonalidade (variando o índice) para funções de Bessel esféricas.

### Exercícios

**11.2.1** Mostre que

$$(a^2 - b^2) \int_0^P J_\nu(ax)J_\nu(bx)x dx = P[bJ_\nu(aP)J'_\nu(bP) - aJ'_\nu(aP)J_\nu(bP)],$$

com

$$J'_\nu(aP) = \frac{d}{d(ax)}J_\nu(ax)|_{x=P},$$

$$\int_0^P [J_\nu(ax)]^2 x dx = \frac{P^2}{2} \left\{ [J'_\nu(aP)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{a^2 P^2}\right) [J_\nu(aP)]^2 \right\}, \quad \nu > -1.$$

Essas duas integrais costumam ser denominadas **primeira e segunda integrais de Lommel**.

*Sugestão:* Temos o desenvolvimento da ortogonalidade das funções de Bessel como uma analogia.

**11.2.2** Mostre que

$$\int_0^a \left[ J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2, \quad \nu > -1.$$

Aqui,  $\alpha_{\nu m}$  é o  $m$ -ésimo zero de  $J_\nu$ .

*Sugestão:* Com  $\alpha_{\nu n} = \alpha_{\nu m} + \varepsilon$ , expanda  $J_\nu[(\alpha_{\nu m} + \varepsilon)\rho/a]$  em torno de  $\alpha_{\nu m}\rho/a$  por uma expansão de Taylor.

**11.2.3** (a) Se  $\beta_{\nu m}$  é o  $m$ -ésimo zero de  $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)$ , mostre que as funções de Bessel são ortogonais no intervalo  $[0, a]$  com uma integral de ortogonalidade

$$\int_0^a J_\nu\left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\beta_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho = 0, \quad m \neq n, \quad \nu > -1.$$

(b) Derive a integral de normalização correspondente ( $m = n$ ).

$$\text{Resposta: } \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\beta_{\nu m}^2}\right) [J_\nu(\beta_{\nu m})]^2, \quad \nu > -1.$$

**11.2.4** Verifique se a equação de ortogonalidade, Equação (11.49), e a equação de normalização, Equação (11.50), valem para  $\nu > -1$ .

*Sugestão:* Usando expansões de série de potências, examine o comportamento da Equação (11.48) quando  $\rho \rightarrow 0$ .

**11.2.5** Pela Equação (11.49) desenvolva uma prova de que  $J_\nu(z)$ ,  $\nu > -1$  não tem raízes complexas (com parte imaginária não-zero).

*Sugestão:*

(a) Use a forma de série de  $J_\nu(z)$  para excluir raízes imaginárias puras.

(b) Admita que  $\alpha_{\nu m}$  é complexa e considere  $\alpha_{\nu n}$  como  $\alpha_{\nu m}^*$ .

**11.2.6** (a) Na expansão de série

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^\infty c_{\nu m} J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad \nu > -1,$$

com  $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$ , mostre que os coeficientes são dados por

$$c_{\nu m} = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho.$$

(b) Na expansão de série

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{\nu m} J_\nu\left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad \nu > -1,$$

com  $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a} = 0$ , mostre que os coeficientes são dados por

$$d_{\nu m} = \frac{2}{a^2(1 - \nu^2/\beta_{\nu m}^2)[J_\nu(\beta_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho.$$

**11.2.7** Um cilindro circular reto tem um potencial eletrostático de  $\psi(\rho, \varphi)$  em ambas as extremidades. O potencial sobre a superfície cilíndrica curvada é zero. Ache o potencial em todos os pontos interiores.

*Sugestão:* Escolha seu sistema de coordenadas e ajuste sua dependência  $z$  para explorar a simetria de seu potencial.

**11.2.8** Para o caso do contínuo, mostre que as Equações (11.51) e (11.52) são substituídas por

$$f(\rho) = \int_0^\infty a(\alpha) J_\nu(\alpha\rho) d\alpha,$$

$$a(\alpha) = \alpha \int_0^\infty f(\rho) J_\nu(\alpha\rho) \rho d\rho.$$

*Sugestão:* O caso correspondente para senos e co-senos é estudado na Seção 15.2. Essas são transformadas de Hankel. Uma derivação para o caso especial  $\nu = 0$  é o tópico do Exercício 15.1.1.

**11.2.9** Uma função  $f(x)$  é expressa como uma série de Bessel:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(\alpha_{mn} x),$$

sendo  $\alpha_{mn}$  a  $n$ -ésima raiz de  $J_m$ . Prove a relação de Parseval,

$$\int_0^1 [f(x)]^2 x dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2.$$

**11.2.10** Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{mn})^{-2} = \frac{1}{4(m+1)}.$$

*Sugestão:* Expanda  $x^m$  em uma série de Bessel e aplique a relação de Parseval.

**11.2.11** Um cilindro circular reto de comprimento  $l$  tem um potencial

$$\psi\left(z = \pm \frac{l}{2}\right) = 100\left(1 - \frac{\rho}{a}\right),$$

em que  $a$  é o raio. O potencial sobre a superfície curvada (lateral) é zero. Usando a série de Bessel do Exercício 11.2.7, calcule o potencial eletrostático para  $\rho/a = 0, 0(0, 2)1, 0$  e  $z/l = 0, 0(0, 1)0, 5$ . Considere  $a/l = 0, 5$ .

*Sugestão:* Pelo Exercício 11.1.30 você tem

$$\int_0^{\alpha_{0n}} \left(1 - \frac{y}{\alpha_{0n}}\right) J_0(y) y dy.$$





Mostre que isso é igual a

$$\frac{1}{\alpha_{0n}} \int_0^{\alpha_{0n}} J_0(y) dy.$$

A avaliação numérica desta última forma, em vez da primeira, é mais rápida e também mais exata.

*Nota:* Para  $\rho/a = 0,0$  e  $z/l = 0,5$  a convergência é lenta, sendo que 20 termos dão apenas 98,4 em vez de 100.

**Valor de verificação.** Para  $\rho/a = 0,4$  e  $z/l = 0,3$ ,  $\psi = 24,558$ .

### 11.3 Funções de Neumann e Funções de Bessel da Segunda Espécie

Pela teoria das EDO, sabe-se que a equação de Bessel tem duas soluções independentes. De fato, para ordem  $\nu$  não-inteira já encontramos duas soluções e as denominamos  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$ , usando a série infinita (Equação (11.5)). O problema é que, quando  $\nu$  é inteiro, a Equação (11.8) vale e temos só uma solução independente. Uma segunda solução pode ser desenvolvida pelos métodos da Seção 9.6, o que resulta em uma segunda solução bastante boa da equação de Bessel, mas não é a forma padrão.

#### Definição e Forma de Série

Como uma abordagem alternativa, tomamos a combinação linear particular de  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen } \nu\pi}. \tag{11.60}$$

Essa é a função de Neumann (Figura 11.5).<sup>15</sup> Para  $\nu$  não-inteiro,  $N_\nu(x)$ , claramente satisfaz a equação de Bessel, porque é uma combinação linear de soluções conhecidas  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$ . Substituindo a série de potências da Equação (11.6) por  $n \rightarrow \nu$  (dado no Exercício 11.1.7), temos como resultado

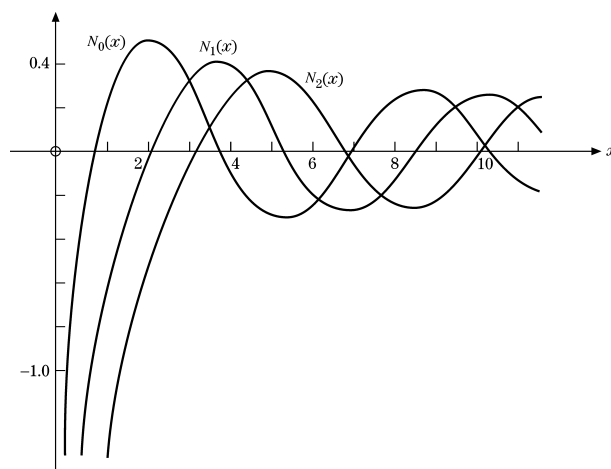


Figura 11.5: Funções de Neumann  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$ , e  $N_2(x)$ .

$$N_\nu(x) = -\frac{(\nu - 1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots, \tag{11.61}$$

para  $\nu > 0$ . Contudo, para  $\nu$  inteiro,  $\nu = n$ , a Equação (11.8) se aplica e a Equação (11.60)<sup>16</sup> torna-se indeterminada. A definição de  $N_\nu(x)$  foi escolhida deliberadamente por essa propriedade de indeterminação. Novamente substituindo a série de potências e avaliando  $N_\nu(x)$  para  $\nu \rightarrow 0$  pela regra de l’Hôpital para formas indeterminadas, obtemos o valor limitador

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2), \tag{11.62}$$

<sup>15</sup>Em AMS-55 (veja nota de rodapé 4 no Capítulo 5 ou Leituras Adicionais do Capítulo 8 para essa referência); na maioria das tabelas matemáticas, ela é rotulada  $Y_\nu(x)$ .

<sup>16</sup>Note que essa forma limitadora se aplica a valores inteiros e não-inteiros do índice  $\nu$ .

para  $n = 0$  e  $x \rightarrow 0$ , usando

$$\nu!(-\nu)! = \frac{\pi\nu}{\text{sen } \pi\nu} \tag{11.63}$$

da Equação (8.32). O primeiro e o terceiro termos na Equação (11.62) vêm da utilização de  $(d/d\nu)(x/2)^\nu = (x/2)^\nu \ln(x/2)$ , enquanto  $\gamma$  vem de  $(d/d\nu)\nu!$  para  $\nu \rightarrow 0$  usando as Equações (8.38) e (8.40). De modo semelhante, para  $n > 0$ , obtemos

$$N_n(x) = -\frac{1}{\pi}(n-1)! \left(\frac{2}{x}\right)^n + \dots + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \dots \tag{11.64}$$

As Equações (11.62) e (11.64) exibem a dependência logarítmica que era de esperar. Isso, é claro, verifica a independência de  $J_n$  e  $N_n$ .

### Outras Formas

Como acontece com todas as outras funções de Bessel,  $N_\nu(x)$  tem representações integrais. Para  $N_0(x)$  temos

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh t) dt = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2 - 1)^{1/2}} dt, \quad x > 0.$$

Essas formas podem ser derivadas como a parte imaginária das representações de Hankel do Exercício 11.4.7. A última forma é uma transformada de Fourier de co-seno.

Para verificar que  $N_\nu(x)$ , nossa função de Neumann (Figura 11.5) ou função de Bessel da segunda espécie realmente satisfaz a equação de Bessel para  $n$  inteiro, podemos continuar como segue. A regra de L'Hôpital aplicada à Equação (11.60) resulta em

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{(d/d\nu)[\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{(d/d\nu)\text{sen } \nu\pi} \Big|_{\nu=n} \\ &= \frac{-\pi \text{sen } n\pi J_n(x) + [\cos n\pi \partial J_\nu / \partial \nu - \partial J_{-\nu} / \partial \nu] \Big|_{\nu=n}}{\pi \cos n\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\nu=n}. \end{aligned} \tag{11.65}$$

Diferenciando a equação de Bessel para  $J_{\pm\nu}(x)$  em relação a  $\nu$ , temos

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} \right) + x \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} \right) + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} = 2\nu J_{\pm\nu}. \tag{11.66}$$

Multiplicando a equação para  $J_{-\nu}$  por  $(-1)^\nu$ , subtraindo da equação para  $J_\nu$  (como sugerido pela Equação (11.65)) e considerando o limite  $\nu \rightarrow n$ , obtemos

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} N_n + x \frac{d}{dx} N_n + (x^2 - n^2) N_n = \frac{2n}{\pi} [J_n - (-1)^n J_{-n}]. \tag{11.67}$$

Para  $\nu = n$ , inteiro, o lado direito desaparece pela Equação (11.8) e  $N_n(x)$  é considerada uma solução da equação de Bessel. Por conseguinte, a solução mais geral para qualquer  $\nu$  pode ser escrita como

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x). \tag{11.68}$$

Pelas Equações (11.62) e (11.64) vemos que  $N_n$  diverge, ao menos de forma logarítmica. Qualquer condição de contorno que exija que a solução seja finita na origem (como em nossa membrana circular vibratória, Seção 11.1, automaticamente exclui  $N_n(x)$ ). Ao contrário, na ausência de tal requisito,  $N_n(x)$  deve ser considerada.

Até certo ponto, a definição da função de Neumann  $N_n(x)$  é arbitrária. As Equações (11.62) e (11.64) contêm termos da forma  $a_n J_n(x)$ . Claramente, qualquer valor finito da constante  $a_n$  ainda nos daria uma segunda solução da equação de Bessel. Por que  $a_n$  teria o valor particular implícito nas Equações (11.62) e (11.64)? A resposta envolve a dependência assintótica desenvolvida na Seção 11.6. Se  $J_n$  corresponder a uma onda co-senoidal, então  $N_n$  corresponde a uma onda senoidal. Essa simples e conveniente relação de fase assintótica é uma consequência da mistura particular de  $J_n$  em  $N_n$ .



### Relações de Recorrência

Substituindo a Equação (11.60) por  $N_\nu(x)$  ( $\nu$  não-inteiro) nas relações de recorrência (Equações (11.10) e (11.12)) por  $J_n(x)$ , vemos imediatamente que  $N_\nu(x)$  satisfaz essas mesmas relações de recorrência. Na verdade, isso constitui uma outra prova de que  $N_\nu$  é uma solução. A que o inverso não é necessariamente verdadeiro. As soluções não precisam satisfazer as mesmas relações de recorrência. Um exemplo desse tipo de confusão aparece na Seção 11.5.

### Fórmulas Wronskianas

Pela Seção 9.6 e Exercício 10.1.4 temos a fórmula wronskiana<sup>17</sup> para soluções da equação de Bessel,

$$u_\nu(x)v'_\nu(x) - u'_\nu(x)v_\nu(x) = \frac{A_\nu}{x}, \quad (11.69)$$

na qual  $A_\nu$  é um parâmetro que depende de considerar as funções particulares de Bessel  $u_\nu(x)$  e  $v_\nu(x)$ .  $A_\nu$  é uma constante no sentido de que é independente de  $x$ . Considere o caso especial

$$u_\nu(x) = J_\nu(x), \quad v_\nu(x) = J_{-\nu}(x), \quad (11.70)$$

$$J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} = \frac{A_\nu}{x}. \quad (11.71)$$

Visto que  $A_\nu$  é uma constante, ela pode ser identificada em qualquer ponto conveniente, tal como  $x = 0$ . Usando os primeiros termos nas expansões de série (Equações (11.5) e (11.6)), obtemos

$$\begin{aligned} J_\nu &\rightarrow \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, & J_{-\nu} &\rightarrow \frac{2^\nu x^{-\nu}}{(-\nu)!} \\ J'_\nu &\rightarrow \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \nu!}, & J'_{-\nu} &\rightarrow -\frac{\nu 2^\nu x^{-\nu-1}}{(-\nu)!}. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Substituindo na Equação (11.69), temos

$$J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x) = \frac{-2\nu}{x\nu!(-\nu)!} = -\frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x}, \quad (11.73)$$

usando a Equação (8.32). Note que  $A_\nu$  se anula para  $\nu$  inteiro, como deve, uma vez que o wronskiano não ser nulo é um teste da independência das duas soluções. Pela Equação (11.73), fica claro que  $J_n$  e  $J_{-n}$  são linearmente dependentes.

Usando nossas relações de recorrência, podemos imediatamente desenvolver um grande número de formas alternativas, entre elas

$$J_\nu J_{-\nu+1} + J_{-\nu} J_{\nu-1} = \frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x}, \quad (11.74)$$

$$J_\nu J_{-\nu-1} + J_{-\nu} J_{\nu+1} = -\frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x}, \quad (11.75)$$

$$J_\nu N'_\nu - J'_\nu N_\nu = \frac{2}{\pi x}, \quad (11.76)$$

$$J_\nu N_{\nu+1} - J_{\nu+1} N_\nu = -\frac{2}{\pi x}. \quad (11.77)$$

Muitas mais serão encontradas nas referências apresentadas no final do capítulo.

Lembre-se de que no Capítulo 9 os wronskianos eram de grande valor sob dois aspectos: (1) para estabelecer a independência linear ou a dependência linear de soluções equações diferenciais e (2) para desenvolver uma forma integral de uma segunda solução. Aqui, as formas específicas das combinações de funções de Bessel wronskianas e derivadas de wronskianos são úteis primordialmente para ilustrar o comportamento geral das várias funções de Bessel. Wronskianos são muito úteis para verificar tabelas de funções de Bessel. Na Seção 10.5 os wronskianos apareciam em conexão com funções de Green.

<sup>17</sup>Esse resultado depende de  $P(x)$ , da Seção 9.5, ser igual a  $p'(x)/p(x)$ , o coeficiente correspondente da forma auto-adjunta da Seção 10.1.

### Exemplo 11.3.1 GUIAS DE ONDA COAXIAIS

Estamos interessados em uma onda eletromagnética confinada entre as superfícies condutoras cilíndricas concêntricas  $\rho = a$  e  $\rho = b$ . Grande parte da matemática é elaborada na Seção 9.3 e no Exemplo 11.1.2. Para ir da onda estacionária desses exemplos para a onda progressiva, que é o caso aqui, fazemos  $A = iB$ ,  $A = a_{mn}$ ,  $B = b_{mn}$  na Equação (11.40a) e obtemos

$$E_z = \sum_{m,n} b_{mn} J_m(\gamma\rho) e^{\pm im\varphi} e^{i(kz-\omega t)}. \quad (11.78)$$

Propriedades adicionais das componentes da onda eletromagnética no guia de onda cilíndrico simples são exploradas nos Exercícios 11.3.8 e 11.3.9. Para o guia de onda coaxial é preciso uma generalização. A origem,  $\rho = 0$ , agora é excluída ( $0 < a \leq \rho \leq b$ ). Daí, a função de Neumann  $N_m(\gamma\rho)$  pode não ser excluída.  $E_z(\rho, \varphi, z, t)$  se torna

$$E_z = \sum_{m,n} [b_{mn} J_m(\gamma\rho) + c_{mn} N_m(\gamma\rho)] e^{\pm im\varphi} e^{i(kz-\omega t)}. \quad (11.79)$$

Com a condição

$$H_z = 0, \quad (11.80)$$

temos as equações básicas para uma onda TM (modo transversal magnético).

O campo elétrico (tangencial) deve desaparecer nas superfícies condutoras (condição de contorno de Dirichlet), ou

$$b_{mn} J_m(\gamma a) + c_{mn} N_m(\gamma a) = 0, \quad (11.81)$$

$$b_{mn} J_m(\gamma b) + c_{mn} N_m(\gamma b) = 0. \quad (11.82)$$

Essas equações transcendentais podem ser resolvidas para  $\gamma(\gamma_{mn})$  e a razão  $c_{mn}/b_{mn}$ . Pelo Exemplo 11.1.2,

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2. \quad (11.83)$$

Uma vez que  $k^2$  deve ser positiva para uma onda real, a frequência mínima que será propagada (nesse modo TM) é

$$\omega = \gamma c, \quad (11.84)$$

com  $\gamma$  fixado pelas condições de contorno, Equações (11.81) e (11.82). Essa é a frequência de corte do guia de onda.

Também há um modo TE (transversal elétrico), com  $E_z = 0$  e  $H_z$  dado pela Equação (11.79). Então, temos condições de contorno de Neumann em vez das Equações (11.81) e (11.82). Por fim, para o guia coaxial (não para o guia cilíndrico simples,  $a = 0$ ), um TEM (modo transversal eletromagnético),  $E_z = H_z = 0$ , é possível. Isso corresponde a uma onda plana, como em espaço livre.

Incluimos os casos mais simples (nenhuma função de Neumann, condições de contorno mais simples) de um guia de onda circular nos Exercícios 11.3.8 e 11.3.9.

Para concluir essa discussão de funções de Neumann, introduzimos a função de Neumann  $N_\nu(x)$  pelas seguintes razões:

1. É uma segunda solução, independente, da equação de Bessel, que completa a solução geral.
2. É requerida para problemas físicos específicos, tais como ondas eletromagnéticas em cabos coaxiais e teoria de espalhamento da Mecânica Quântica.
3. Leva à função de Green para a equação de Bessel (Seções 9.7 e 10.5).
4. Leva diretamente a duas funções de Hankel (Seção 11.4). ■

### Exercícios

**11.3.1** Prove que as funções de Neumann  $N_n$  (sendo  $n$  inteiro) satisfazem as relações de recorrência

$$N_{n-1}(x) + N_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} N_n(x),$$

$$N_{n-1}(x) - N_{n+1}(x) = 2N'_n(x).$$

*Sugestão:* Essas relações podem ser provadas diferenciando as relações de recorrência para  $J_\nu$  ou usando a forma de limite de  $N_\nu$ , mas **não** dividindo tudo por zero.



11.3.2 Mostre que

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x).$$

11.3.3 Mostre que

$$N'_0(x) = -N_1(x).$$

11.3.4 Se  $Y$  e  $Z$  são duas soluções quaisquer da equação de Bessel, mostre que

$$Y_\nu(x)Z'_\nu(x) - Y'_\nu(x)Z_\nu(x) = \frac{A_\nu}{x},$$

na qual  $A_\nu$  pode depender de  $\nu$  mas é independente de  $x$ . Esse é um caso especial do Exercício 10.1.4.

11.3.5 Verifique as fórmulas wronskianas

$$J_\nu(x)J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x)J_{\nu-1}(x) = \frac{2\text{sen } \nu\pi}{\pi x},$$

$$J_\nu(x)N'_\nu(x) - J'_\nu(x)N_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

11.3.6 Como alternativa a deixar que  $x$  se aproxime de zero na avaliação da constante wronskiana, podemos invocar a unicidade de séries de potências (Seção 5.7). Então, o coeficiente de  $x^{-1}$  na expansão de série de  $u_\nu(x)v'_\nu(x) - u'_\nu(x)v_\nu(x)$  é  $A_\nu$ . Mostre por expansão de série que cada um dos coeficientes de  $x^0$  e  $x^1$  de  $J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x)$  é zero.

11.3.7 (a) Por diferenciação e substituição na EDO de Bessel, mostre que

$$\int_0^\infty \cos(x \cosh t) dt$$

é uma solução.

*Sugestão:* Você pode rearranjar a integral final como

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} \{x \text{sen}(x \cos ht) \text{senh } t\} dt.$$

(b) Mostre que

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh t) dt$$

é linearmente independente de  $J_0(x)$ .

11.3.8 Um guia de onda cilíndrico tem raio  $r_0$ . Ache as componentes que não desaparecem dos campos elétrico e magnético para

(a)  $\text{TM}_{01}$ , onda transversal magnética ( $H_z = H_\rho = E_\varphi = 0$ ),

(b)  $\text{TE}_{01}$ , onda transversal elétrica ( $E_z = E_\rho = H_\varphi = 0$ ).

Os índices 01 indicam que a componente longitudinal ( $E_z$  ou  $H_z$ ) envolve  $J_0$  e a condição de contorno é satisfeita pelo **primeiro** zero de  $J_0$  ou  $J'_0$ .

*Sugestão:* Todas as componentes da onda têm o mesmo fator:  $\exp i(kz - \omega t)$ .

11.3.9 Para um dado modo de oscilação, a frequência **mínima** que será passada por um guia de onda cilíndrico circular (raio  $r_0$ ) é

$$\nu_{\text{mín}} = \frac{c}{\lambda_c},$$

na qual  $\lambda_c$  é fixado pela condição de contorno

$$J_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \quad \text{para modo } \text{TM}_{nm},$$

$$J'_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \quad \text{para modo } \text{TE}_{nm}.$$

O índice  $n$  denota a ordem da função de Bessel e  $m$  indica o zero usado. Ache esse comprimento de onda de corte  $\lambda_c$  para os três modos TM e os três modos TE que tenham os mais longos comprimentos de onda de corte. Explique seus resultados em termos do gráfico de  $J_0, J_1$  e  $J_2$  (Figura 11.1).

**11.3.10** Escreva um programa para calcular raízes sucessivas da função de Neumann  $N_n(x)$ , isto é,  $\alpha_{ns}$ , em que  $N_n(\alpha_{ns}) = 0$ . Tabule as cinco primeiras raízes de  $N_0, N_1$  e  $N_2$ . Compare os valores que encontrou para as raízes com os relacionados em AMS-55 (referência completa fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8).

**Valor de verificação**  $\alpha_{12} = 5,42968$ .

**11.3.11** Para o caso  $m = 0, a = 1$  e  $b = 2$ , as condições de contorno do guia de onda coaxial levam a

$$f(x) = \frac{J_0(2x)}{N_0(2x)} - \frac{J_0(x)}{N_0(x)}$$

(Figura 11.6).

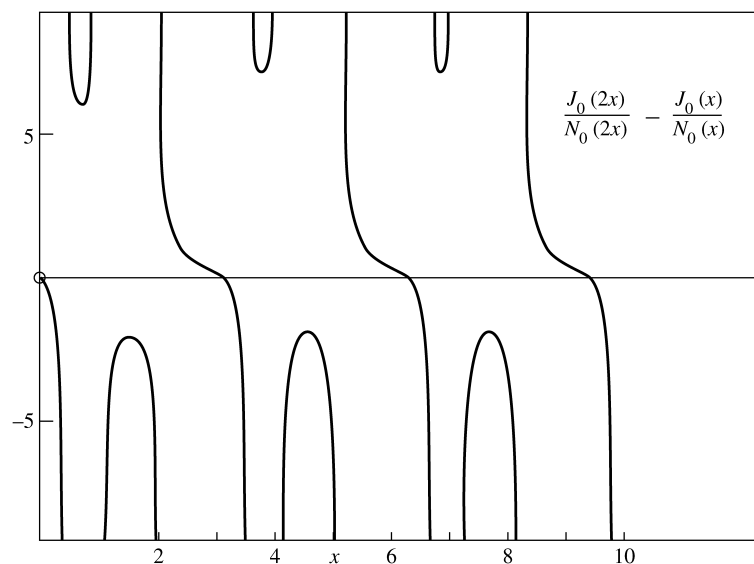


Figura 11.6:  $f(x)$  do Exercício 11.3.11.

- Calcule  $f(x)$  para  $x = 0, 0(0,1)10,0$  e esboce  $f(x)$  versus  $x$  para achar a localização aproximada das raízes.
- Chame uma sub-rotina de busca de raízes para determinar as primeiras três raízes com maior precisão.

Resposta: 3,1230, 6,2734, 9,4182.

*Nota:* É de esperar que as raízes mais altas apareçam em intervalos cujos comprimentos se aproximem de  $n$ . Por quê? AMS-55 (referência fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8) dá uma fórmula aproximada para as raízes. A função  $g(x) = J_0(x)N_0(2x) - J_0(2x)N_0(x)$  é muito mais bem-comportada do que  $f(x)$  discutida anteriormente.

## 11.4 Funções de Hankel

Muitos autores preferem introduzir funções de Hankel por meio de representações integrais e então usá-las para definir a função de Neumann  $N_\nu(z)$ . Um resumo dessa abordagem é apresentado no final desta seção.

### Definições

Como já obtivemos a função de Neumann por técnicas mais elementares (e menos poderosas), podemos usá-la para definir as funções de Hankel  $H_\nu^{(1)}(x)$  e  $H_\nu^{(2)}(x)$ :

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \tag{11.85}$$

e

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \tag{11.86}$$



Isso é exatamente análogo a considerar

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta. \quad (11.87)$$

Para argumentos reais,  $H_\nu^{(1)}$  e  $H_\nu^{(2)}$  são conjugados complexos. Poderemos ver ainda melhor a extensão dessa analogia quando forem consideradas as formas assintóticas (Seção 11.6). Na verdade, é o comportamento assintótico das funções de Hankel que as torna úteis.

Expansões de série de  $H_\nu^{(1)}(x)$  e  $H_\nu^{(2)}(x)$  podem ser obtidas combinando as Equações (11.5) e (11.63). Muitas vezes apenas o primeiro termo é de interesse; ele é dado por:

$$H_0^{(1)}(x) \approx i \frac{2}{\pi} \ln x + 1 + i \frac{2}{\pi} (\gamma - \ln 2) + \dots, \quad (11.88)$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx -i \frac{(\nu - 1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots, \quad \nu > 0, \quad (11.89)$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx -i \frac{2}{\pi} \ln x + 1 - i \frac{2}{\pi} (\gamma - \ln 2) + \dots, \quad (11.90)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx i \frac{(\nu - 1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots, \quad \nu > 0. \quad (11.91)$$

Uma vez que as funções de Hankel são combinações lineares (com coeficientes constantes) de  $J_\nu$  e  $N_\nu$ , elas satisfazem as mesmas relações de recorrência (Equações (11.10) e (11.12))

$$H_{\nu-1}(x) + H_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} H_\nu(x), \quad (11.92)$$

$$H_{\nu-1}(x) - H_{\nu+1}(x) = 2H'_\nu(x), \quad (11.93)$$

para  $H_\nu^{(1)}(x)$  e  $H_\nu^{(2)}(x)$ .

Uma variedade de fórmulas wronskianas pode ser desenvolvida:

$$H_\nu^{(2)} H_{\nu+1}^{(1)} - H_\nu^{(1)} H_{\nu+1}^{(2)} = \frac{4}{i\pi x}, \quad (11.94)$$

$$J_{\nu-1} H_\nu^{(1)} - J_\nu H_{\nu-1}^{(1)} = \frac{2}{i\pi x}, \quad (11.95)$$

$$J_\nu H_{\nu-1}^{(2)} - J_{\nu-1} H_\nu^{(2)} = \frac{2}{i\pi x}. \quad (11.96)$$

### Exemplo 11.4.1 ONDAS PROGRESSIVAS CILÍNDRICAS

Como ilustração da utilização de funções de Hankel, considere um problema de onda bidimensional similar ao da membrana circular vibratória do Exercício 11.1.25. Agora, imagine que as ondas são geradas em  $r = 0$  e se movem para fora até o infinito. Substituímos nossas ondas estacionárias por ondas progressivas. A equação diferencial permanece a mesma, mas as condições de fronteira mudam. Agora impomos que, para  $r$  grande, a onda se comporte como

$$U \sim e^{i(kr - \omega t)} \quad (11.97)$$

para descrever uma onda de saída. Como antes,  $k$  é o número da onda. Com isso admitimos, por simplicidade, que não há nenhuma dependência azimutal, isto é, nenhum momento angular ou  $m = 0$ . Nas Seções 7.3 e 11.6, mostramos que  $H_0^{(1)}(kr)$  tem o comportamento assintótico (para  $r \rightarrow \infty$ )

$$H_0^{(1)}(kr) \sim e^{ikr}. \quad (11.98)$$

Então, essa condição de contorno no infinito determina que nossa solução de onda é

$$U(r, t) = H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}. \quad (11.99)$$

Essa solução diverge quando  $r \rightarrow 0$ , que é o comportamento esperado com uma fonte na origem.

A escolha de um problema com onda bidimensional para ilustrar a função de Hankel  $H_0^{(1)}(z)$  não é acidental. Funções de Bessel podem aparecer em uma variedade de modos, tal como na separação de coordenadas cônicas. Todavia, o mais comum é elas entrarem nas equações radiais decorrentes da separação de variáveis na equação de Helmholtz em coordenadas polares cilíndricas e esféricas. Para essa ilustração consideramos uma forma degenerada de coordenadas cilíndricas. Se tivéssemos usado coordenadas polares esféricas (ondas esféricas), teríamos encontrado índice  $\nu = n + \frac{1}{2}$ , sendo  $n$  inteiro. Esses valores especiais resultam nas funções de Bessel esféricas que serão discutidas na Seção 11.7. ■

### Representações de Integral de Contorno das Funções de Hankel

A representação integral (integral de Schlaefli)

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} \tag{11.100}$$

pode ser estabelecida com facilidade como uma integral de Cauchy para  $\nu = n$ , inteiro (reconhecendo que o numerador é a função geradora (Equação (11.1)) e integrando ao redor da origem). Se  $\nu$  não for inteiro, o integrando não é de valor único e precisamos de uma linha de corte em nosso plano complexo. Escolhendo o eixo real negativo como a linha de corte e usando o contorno mostrado na Figura 11.7, podemos estender a Equação (11.100) para  $\nu$  não-inteiro. Substituindo a Equação (11.100) na EDO de Bessel, podemos representar o integrando combinado por uma diferencial exata que se anula à medida que  $t \rightarrow \infty e^{\pm i\pi}$  (compare com o Exercício 11.1.16).

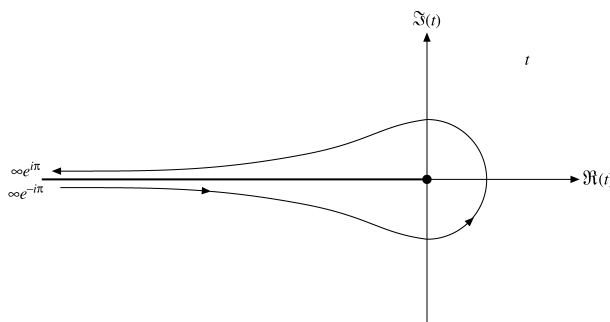


Figura 11.7: Contorno da função de Bessel.

Agora, deformamos o contorno de modo que ele se aproxime da origem ao longo do eixo real positivo, como mostrado na Figura 11.8. Para  $x > 0$ , essa aproximação particular garante que a diferencial exata mencionada desaparecerá à medida que  $t \rightarrow 0$  por causa do fator  $e^{-x/2t} \rightarrow 0$ . Por conseguinte, cada uma das porções separadas ( $\infty e^{-i\pi}$  to 0) e (0 to  $\infty e^{i\pi}$ ) é uma solução da equação de Bessel. Definimos

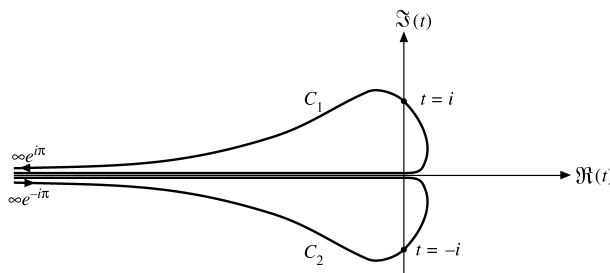


Figura 11.8: Contornos da função de Hankel.

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}, \tag{11.101}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\infty e^{-i\pi}}^0 e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \tag{11.102}$$

Essas expressões são particularmente convenientes porque podem ser manipuladas pelo método das inclinações mais acentuadas (Seção 7.3).  $H_\nu^{(1)}(x)$  tem um ponto de sela em  $t = +i$ , enquanto  $H_\nu^{(2)}(x)$  tem um ponto de sela em  $t = -i$ .

O problema de relacionar as Equações (11.101) e (11.102) à nossa definição anterior da função de Hankel (Equações (11.85) e (11.86)) permanece. Uma vez que as Equações (11.100) a (11.102) combinadas resultam em

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2} [H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)], \tag{11.103}$$





por inspeção, precisamos apenas mostrar que

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i} [H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)]. \quad (11.104)$$

Isso pode ser conseguido pelas seguintes etapas:

1. Com as substituições  $t = e^{i\pi}/s$  por  $H_\nu^{(1)}$  e  $t = e^{-i\pi}/s$  por  $H_\nu^{(2)}$ , obtemos

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_{-\nu}^{(1)}(x), \quad (11.105)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = e^{i\nu\pi} H_{-\nu}^{(2)}(x). \quad (11.106)$$

2. Pelas Equações (11.103) ( $\nu \rightarrow -\nu$ ), (11.105) e (11.106),

$$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2} [e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x) + e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x)]. \quad (11.107)$$

3. Finalmente, substituímos  $J_\nu$  (Equação (11.103)) e  $J_{-\nu}$  (Equação (11.107)) na equação definidora para  $N_\nu$ , Equação (11.60). Isso leva à Equação (11.104) e estabelece as integrais de contorno Equações (11.101) e (11.102) como as funções de Hankel.

Representações integrais já apareceram antes: Equação (8.35) para  $\Gamma(z)$  e várias representações de  $J_\nu(z)$  na Seção 11.1. Com essas representações integrais das funções de Hankel, talvez seja adequado perguntar por que estamos interessados em representações integrais. Há no mínimo quatro razões. A primeira é o simples atrativo estético. A segunda é que as representações integrais ajudam a distinguir entre duas soluções linearmente independentes. Na Figura 11.6, os contornos  $C_1$  e  $C_2$  cruzam pontos de sela **diferentes** (Seção 7.3). Para as funções de Legendre, o contorno para  $P_n(z)$  (Figura 12.11) e o contorno para  $Q_n(z)$  circundam pontos singulares **diferentes**.

A terceira é que as representações integrais facilitam manipulações, análise e o desenvolvimento de relações entre as várias funções especiais. A quarta, e provavelmente a mais importante de todas, é que as representações integrais são de extrema utilidade no desenvolvimento de expansões assintóticas. Uma abordagem do método de inclinações mais acentuadas aparece na Seção 7.3. Uma segunda abordagem, a expansão direta de uma representação integral, é dada na Seção 11.6 para a função modificada de Bessel  $K_\nu(z)$ . Essa mesma técnica pode ser usada para obter expansões assintóticas das funções hipergeométricas confluentes  $M$  e  $U$ , Exercício 13.5.13.

Concluindo, as funções de Hankel são introduzidas aqui pelas seguintes razões:

- Como análogas de  $e^{\pm ix}$  elas são úteis para descrever ondas progressivas.
- Elas oferecem uma definição alternativa (contorno integral) e bastante elegante de funções de Bessel.
- $H_\nu^{(1)}$  é usada para definir a função modificada de Bessel  $K_\nu$  da Seção 11.5.

## Exercícios

### 11.4.1 Verifique as fórmulas wronskianas

- (a)  $J_\nu(x)H_\nu^{(1)'}(x) - J_\nu'(x)H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}$ ,
- (b)  $J_\nu(x)H_\nu^{(2)'}(x) - J_\nu'(x)H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-2i}{\pi x}$ ,
- (c)  $N_\nu(x)H_\nu^{(1)'}(x) - N_\nu'(x)H_\nu^{(1)}(x) = \frac{-2}{\pi x}$ ,
- (d)  $N_\nu(x)H_\nu^{(2)'}(x) - N_\nu'(x)H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-2}{\pi x}$ ,
- (e)  $H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)'}(x) - H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-4i}{\pi x}$ ,
- (f)  $H_\nu^{(2)}(x)H_{\nu+1}^{(1)}(x) - H_\nu^{(1)}(x)H_{\nu+1}^{(2)}(x) = \frac{4}{i\pi x}$ ,
- (g)  $J_{\nu-1}(x)H_\nu^{(1)}(x) - J_\nu(x)H_{\nu-1}^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi x}$ .

### 11.4.2 Mostre que as formas integrais

- (a)  $\frac{1}{i\pi} \int_{0C_1}^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} = H_\nu^{(1)}(x)$ ,
- (b)  $\frac{1}{i\pi} \int_{\infty e^{-i\pi} C_2}^0 e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} = H_\nu^{(2)}(x)$

satisfazem a EDO de Bessel. Os contornos  $C_1$  e  $C_2$  são mostrados na Figura 11.8.

**11.4.3** Usando as integrais e contornos dados no Exercício 11.4.2, mostre que

$$\frac{1}{2i} [H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)] = N_\nu(x).$$

**11.4.4** Mostre que as integrais no Exercício 11.4.2 podem ser transformadas para dar como resultado

$$(a) \quad H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_3} e^{x \operatorname{senh} \gamma - \nu \gamma} d\gamma, \quad (b) \quad H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_4} e^{x \operatorname{senh} \gamma - \nu \gamma} d\gamma$$

(veja a Figura 11.9).

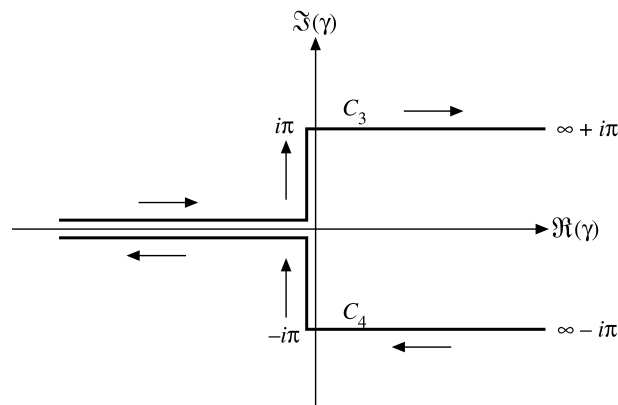


Figura 11.9: Contornos de função de Hankel.

**11.4.5** (a) Transforme  $H_0^{(1)}(x)$ , Equação (11.101), em

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_C e^{ix \cosh s} ds,$$

em que o contorno  $C$  vai de  $-\infty - i\pi/2$  passando pela origem do plano  $s$  até  $\infty + i\pi/2$ .

(b) Justifique reescrevendo  $H_0^{(1)}(x)$  como

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi} \int_0^{\infty + i\pi/2} e^{ix \cosh s} ds.$$

(c) Verifique que essa representação integral realmente satisfaz a equação diferencial de Bessel. ( $i\pi/2$  no limite superior não é essencial. Serve como um fator de convergência. Podemos substituí-lo por  $ia\pi/2$  e considerar o limite.)

**11.4.6** Por

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty e^{ix \cosh s} ds$$

mostre que

$$(a) \quad J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen}(x \cosh s) ds, \quad (b) \quad J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(xt)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

**11.4.7** Por (veja os Exercícios 11.4.4 e 11.4.5)

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty e^{ix \cosh s} ds,$$

mostre que

$$(a) \quad N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh s) ds.$$

$$(b) \quad N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Essas são as representações integrais na Seção 11.3.

Esse último resultado é uma transformada de Fourier de co-seno.



### 11.5 Funções Modificadas de Bessel $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$

A equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

separada em coordenadas cilíndricas circulares, leva à Equação (11.22a), a equação de Bessel. A Equação (11.22a) é satisfeita pelas funções de Bessel e Neumann  $J_\nu(k\rho)$  e  $N_\nu(k\rho)$  e qualquer combinação linear, tal como as funções de Hankel  $H_\nu^{(1)}(k\rho)$  e  $H_\nu^{(2)}(k\rho)$ . Agora, a equação de Helmholtz descreve a parte espacial de fenômenos de onda. Se, em vez disso, tivermos um problema de difusão, então a equação de Helmholtz é substituída por

$$\nabla^2 \psi - k^2 \psi = 0. \tag{11.108}$$

A análoga da Equação (11.22a) é

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Y_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Y_\nu(k\rho) - (k^2 \rho^2 + \nu^2) Y_\nu(k\rho) = 0. \tag{11.109}$$

A equação de Helmholtz pode ser transformada na equação de difusão pela transformação  $k \rightarrow ik$ . De modo semelhante,  $k \rightarrow ik$  muda a Equação (11.22a) para a Equação (11.109) e mostra que

$$Y_\nu(k\rho) = Z_\nu(ik\rho).$$

As soluções da Equação (11.109) são funções de Bessel de argumento imaginário. Para obter uma solução que é regular na origem, consideramos  $Z_\nu$  a função regular de Bessel  $J_\nu$ . É costumeiro (e conveniente) escolher a normalização de modo que

$$Y_\nu(x) = I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix). \tag{11.110}$$

(Aqui, a variável  $k\rho$  está sendo substituída por  $x$  por simplicidade.) A normalização  $i^{-\nu}$  extra cancela os  $i^\nu$  de cada termo e transforma  $I_\nu(x)$  em real. Muitas vezes isso é escrito como

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(xe^{i\pi/2}). \tag{11.111}$$

$I_0$  e  $I_1$  são mostradas na Figura 11.10.

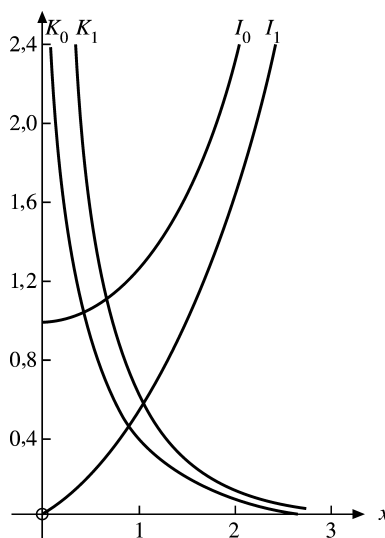


Figura 11.10: Funções modificadas de Bessel.

### Forma de Série

Em termos de série infinita, isso equivale a remover o sinal  $(-1)^s$  na Equação (11.5) e escrever

$$I_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}, \quad I_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu}. \quad (11.112)$$

Para  $\nu$  inteiro essa expressão dá como resultado

$$I_n(x) = I_{-n}(x). \quad (11.113)$$

### Relações de Recorrência

As relações de recorrência satisfeitas por  $I_\nu(x)$  podem ser desenvolvidas pelas expansões de série, mas talvez seja mais fácil trabalhar a partir das relações de recorrência existentes para  $J_\nu(x)$ . Vamos substituir  $x$  por  $-ix$  e reescrever a Equação (11.110) como

$$J_\nu(x) = i^\nu I_\nu(-ix). \quad (11.114)$$

Então, a Equação (11.10) se torna

$$i^{\nu-1} I_{\nu-1}(-ix) + i^{\nu+1} I_{\nu+1}(-ix) = \frac{2\nu}{x} i^\nu I_\nu(-ix).$$

Substituindo  $x$  por  $ix$ , temos a relação de recorrência para  $I_\nu(x)$ ,

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x). \quad (11.115)$$

A Equação (11.12) se transforma em

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \quad (11.116)$$

Essas são as relações de recorrência usadas no Exercício 11.1.14. Vale a pena destacar que, embora duas relações de recorrência, Equações (11.115) e (11.116) ou o Exercício 11.5.7, especifiquem a EDO de segunda ordem, o inverso não é verdadeiro. A EDO não fixa unicamente as relações de recorrência. As Equações (11.115) e (11.116) e o Exercício 11.5.7 dão um exemplo.

Pela Equação (11.113) vê-se que temos apenas uma solução independente quando  $\nu$  é um inteiro exatamente como nas funções de Bessel  $J_\nu$ . A escolha de uma segunda solução independente da Equação (11.108) é, em essência, uma questão de conveniência. A segunda solução dada aqui é selecionada com base em seu comportamento assintótico — como mostraremos na próxima seção. A confusão de escolha e notação para essa solução talvez seja maior do que em qualquer outro lugar dessa área.<sup>18</sup> Muitos autores<sup>19</sup> preferem definir uma segunda solução em termos da função de Hankel  $H_\nu^{(1)}(x)$  por

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)]. \quad (11.117)$$

O fator  $i^{\nu+1}$  torna  $K_\nu(x)$  real quando  $x$  é real. Usando as Equações (11.60) e (11.110), podemos transformar a Equação (11.117) em<sup>20</sup>

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\text{sen } \nu\pi}, \quad (11.118)$$

análoga à Equação (11.60) para  $N_\nu(x)$ . A escolha da Equação (11.117) como definição é um tanto infeliz, no sentido de que a função  $K_\nu(x)$  não satisfaz as mesmas relações de recorrência que  $I_\nu(x)$  (compare com os Exercícios 11.5.7 e 11.5.8). Para evitar esse aborrecimento, outros autores<sup>21</sup> incluíram um fator adicional de

<sup>18</sup>Encontramos uma discussão e comparação de notações em *Math. Tables Aids Comput.* 1: 207-308 (1944).

<sup>19</sup>Watson, Morse ed Feshbach, Jeffreys e Jeffreys (sem o  $\pi/2$ ).

<sup>20</sup>Para índice inteiro  $n$  consideramos o limite  $\nu \rightarrow n$ .

<sup>21</sup>Whittaker e Watson, veja Leituras Adicionais do Capítulo 13.



$\cos \nu\pi$ , o que permite que  $K_\nu$  satisfaça as mesmas relações de recorrência que as  $I_\nu$ , mas tem a desvantagem de fazer  $K_\nu = 0$  para  $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \dots$

A expansão de série de  $K_\nu(x)$  resulta diretamente da forma de série de  $H_\nu^{(1)}(ix)$ . Os termos de ordem mais baixa são (confrontar as Equações (11.61) e (11.62))

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\ln x - \gamma + \ln 2 + \dots, \\ K_\nu(x) &= 2^{\nu-1}(\nu-1)!x^{-\nu} + \dots \end{aligned} \tag{11.119}$$

Como a função modificada de Bessel  $I_\nu$  está relacionada à função de Bessel  $J_\nu$ , tanto quanto  $\sinh$  está relacionada a seno,  $I_\nu$  e a segunda solução  $K_\nu$  às vezes são denominadas funções hiperbólicas de Bessel.  $K_0$  e  $K_1$  são mostradas na Figura 11.10.

$I_0(x)$  e  $K_0(x)$  têm as representações integrais

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x \cos \theta) d\theta, \tag{11.120}$$

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x \sinh t) dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2 + 1)^{1/2}}, \quad x > 0. \tag{11.121}$$

A Equação (11.120) pode ser derivada da Equação (11.30) para  $J_0(x)$  ou pode ser considerada um caso especial do Exercício 11.5.4,  $\nu = 0$ . A representação integral de  $K_0$ , Equação (11.121), é uma transformada de Fourier e pode ser mais bem derivada com transformadas de Fourier, Capítulo 15, ou com funções de Green, Seção 9.7. Uma variedade de outras formas de representações integrais (incluindo  $\nu \neq 0$ ) aparece nos exercícios. Essas representações integrais são úteis no desenvolvimento de formas assintóticas (Seção 11.6) e em conexão com transformadas de Fourier, Capítulo 15.

Para colocar as funções modificadas de Bessel  $I_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$  na perspectiva adequada, nós as introduzimos aqui porque:

- Essas funções são soluções da equação modificada de Bessel, uma equação encontrada com muita frequência.
- Elas são necessárias para problemas físicos específicos, tais como os de difusão.
- $K_\nu(x)$  dá uma função de Green, Seção 9.7.
- $K_\nu(x)$  leva a uma determinação conveniente de comportamento assintótico (Seção 11.6).

## Exercícios

**11.5.1** Mostre que

$$e^{(x/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n,$$

gerando assim funções modificadas de Bessel,  $I_n(x)$ .

**11.5.2** Verifique as seguintes identidades

(a)  $1 = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}(x),$

(b)  $e^x = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x),$

(c)  $e^{-x} = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(x),$

(d)  $\cosh x = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x),$

(e)  $\sinh x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x).$

**11.5.3** (a) Pela função geradora do Exercício 11.5.1, mostre que

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \exp[(x/2)(t + 1/t)] \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

(b) Para  $n = \nu$ , não sendo inteiro, mostre que a representação integral precedente pode ser generalizada para

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp[(x/2)(t + 1/t)] \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

O contorno  $C$  é o mesmo que o contorno para  $J_\nu(x)$ , Figura 11.7.

**11.5.4** Para  $\nu > -\frac{1}{2}$ , mostre que  $I_\nu(z)$  pode ser representada por

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} \text{sen}^{2\nu} \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm zp} (1 - p^2)^{\nu-1/2} \, dp \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cosh(z \cos \theta) \text{sen}^{2\nu} \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

**11.5.5** Uma cavidade cilíndrica tem raio  $a$  e altura  $l$ , Figura 11.3. As extremidades,  $z = 0$  e  $l$  estão em potencial zero. As paredes cilíndricas,  $\rho = a$ , têm um potencial  $V = V(\varphi, z)$ .

(a) Mostre que o potencial eletrostático  $\Phi(\rho, \varphi, z)$  tem a forma funcional

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_m(k_n \rho) \text{sen } k_n z \cdot (a_{mn} \text{sen } m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi),$$

em que  $k_n = n\pi/l$ .

(b) Mostre que os coeficientes  $a_{mn}$  e  $b_{mn}$  são dados por<sup>22</sup>

$$\left. \begin{matrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\pi l I_m(k_n a)} \int_0^{2\pi} \int_0^l V(\varphi, z) \text{sen } k_n z \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{sen } m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix} \right\} dz \, d\varphi.$$

*Sugestão:* Expanda  $V(\varphi, z)$  como uma série dupla e use a ortogonalidade das funções trigonométricas.

**11.5.6** Verifique que  $K_\nu(x)$  é dada por

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\text{sen } \nu\pi}$$

e, a partir dessa expressão, mostre que

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x).$$

**11.5.7** Mostre que  $K_\nu(x)$  satisfaz as relações de recorrência

$$\begin{aligned} K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x), \\ K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) &= -2K'_\nu(x). \end{aligned}$$

**11.5.8** Se  $\mathcal{K}_\nu = e^{\nu\pi i} K_\nu$ , mostre que  $\mathcal{K}_\nu$  satisfaz as mesmas relações de recorrência que  $I_\nu$ .

**11.5.9** Para  $\nu > -\frac{1}{2}$  mostre que  $K_\nu(z)$  pode ser representada por

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \text{senh}^{2\nu} t \, dt, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zp} (p^2 - 1)^{\nu-1/2} \, dp. \end{aligned}$$

<sup>22</sup>Quando  $m = 0$ , no coeficiente é substituído por 1.



**11.5.10** Mostre que  $I_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$  satisfazem a relação wronskiana

$$I_\nu(x)K'_\nu(x) - I'_\nu(x)K_\nu(x) = -\frac{1}{x}.$$

Esse resultado é citado na Seção 9.7 no desenvolvimento de uma função de Green.

**11.5.11** Se  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , prove que

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(xt)K_0(yt) dt.$$

Essa é uma transformada de Fourier de co-seno de  $K_0$ .

**11.5.12** (a) Verifique que

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x \cos \theta) d\theta$$

satisfaz a equação modificada de Bessel,  $\nu = 0$ .

(b) Mostre que essa integral não contém nenhuma mistura de  $K_0(x)$ , a segunda solução irregular.

(c) Verifique o fator de normalização  $1/\pi$ .

**11.5.13** Verifique que as representações integrais

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cos(nt) dt,$$

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt, \quad \Re(z) > 0,$$

satisfazem a equação modificada de Bessel por substituição direta naquela equação. Como você pode mostrar que a primeira forma não contém uma mistura de  $K_n$  e que a segunda forma não contém uma mistura de  $I_\nu$ ? Como você pode verificar a normalização?

**11.5.14** Derive a representação integral

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

*Sugestão:* Comece com a representação integral correspondente de  $J_n(x)$ . A Equação (11.120) é um caso especial dessa representação.

**11.5.15** Mostre que

$$K_0(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} dt$$

satisfaz a equação modificada de Bessel. Como você pode determinar que essa forma é linearmente independente de  $I_0(z)$ ?

**11.5.16** Mostre que

$$e^{ax} = I_0(a)T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^\infty I_n(a)T_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$T_n(x)$  é o polinômio de Chebyshev de enésima ordem, Seção 13.3.

*Sugestão:* Admita uma expansão de série de Chebyshev. Usando a ortogonalidade e normalização das  $T_n(x)$ , resolva para os coeficientes da série de Chebyshev.

**11.5.17** (a) Escreva uma sub-rotina de precisão dupla para calcular  $I_n(x)$  com precisão até a décima segunda casa decimal para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $0 \leq x \leq 1$ . Verifique seus resultados comparando-os com os valores de 10 casas decimais dados em AMS-55, Tabela 9.11, referência fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.

(b) Com referência ao Exercício 11.5.16, calcule os coeficientes nas expansões de Chebyshev de  $\cosh x$  e de  $\sinh x$ .

**11.5.18** A cavidade cilíndrica do Exercício 11.5.5 tem um potencial ao longo das paredes do cilindro:

$$V(z) = \begin{cases} 100 \frac{z}{l}, & 0 \leq \frac{z}{l} \leq \frac{1}{2}, \\ 100(1 - \frac{z}{l}), & \frac{1}{2} \leq \frac{z}{l} \leq 1. \end{cases}$$

Sendo a razão raio/altura  $a/l = 0,5$ , calcule o potencial para  $z/l = 0,1(0,1)0,5$  e  $\rho/a = 0,0(0,2)1,0$ .

**Valor de verificação** Para  $z/l = 0,3$  e  $\rho/a = 0,8$ ,  $V = 26,396$ .

## 11.6 Expansões Assintóticas

Em problemas físicos, muitas vezes é preciso saber como uma dada função de Bessel ou função modificada de Bessel se comporta para valores grandes do argumento, isto é, o comportamento assintótico. Essa é uma ocasião em que os computadores não ajudam muito. Uma possível abordagem é desenvolver uma solução de série de potências da equação diferencial, como na Seção 9.5, mas agora usando potências negativas. Esse é o método de Stokes, Exercício 11.6.5. A limitação é que, partindo de algum valor positivo do argumento (para convergência da série), nós não sabemos que mistura de soluções ou múltipla de uma dada solução temos. O problema é relacionar a série assintótica (útil para grandes valores da variável) com a série de potências ou definição relacionada (útil para valores pequenos da variável). Essa relação pode ser estabelecida introduzindo uma **representação integral** adequada e então usando ou o método de inclinações mais acentuadas, Seção 7.3, ou a expansão direta, como desenvolvida nesta Seção.

### Expansão de uma Representação Integral

Como abordagem direta, considere a representação integral (Exercício 11.5.9)

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx} (x^2 - 1)^{\nu-1/2} dx, \quad \nu > -\frac{1}{2}. \quad (11.122)$$

Por enquanto, vamos admitir que  $z$  seja real, embora a Equação (11.122) possa ser estabelecida para  $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$  ( $\Re(z) > 0$ ). Temos três tarefas:

1. Mostrar que  $K_\nu$ , como dada na Equação (11.122), realmente satisfaz a equação modificada de Bessel (11.109).
2. Mostrar que a solução regular  $I_\nu$  está ausente.
3. Mostrar que a Equação (11.122) tem a normalização adequada.

1. O fato de a Equação (11.122) ser uma solução da equação modificada de Bessel pode ser verificado por substituição direta. Obtemos

$$z^{\nu+1} \int_1^\infty \frac{d}{dx} [e^{-zx} (x^2 - 1)^{\nu+1/2}] dx = 0,$$

que transforma o integrando combinado na derivada de uma função que desaparece em ambas as extremidades. Por conseguinte, a integral é alguma combinação linear de  $I_\nu$  e  $K_\nu$ .

2. A rejeição da possibilidade de que essa solução contém  $I_\nu$  constitui o Exercício 11.6.1.

3. A normalização pode ser verificada mostrando que, no limite  $z \rightarrow 0$ ,  $K_\nu(z)$  está de acordo com a equação (11.119). Substituindo  $x = 1 + t/z$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx} (x^2 - 1)^{\nu-1/2} dx \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-z} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t^2}{z^2} + \frac{2t}{z}\right)^{\nu-1/2} \frac{dt}{z} \end{aligned} \quad (11.123a)$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \frac{e^{-z}}{2^\nu z^\nu} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\nu-1} \left(1 + \frac{2z}{t}\right)^{\nu-1/2} dt, \quad (11.123b)$$

excluindo  $t^2/z^2$  como fator. Essa substituição mudou os limites de integração para uma faixa mais conveniente e isolou a dependência exponencial negativa  $e^{-z}$ . A integral na Equação (11.123b) pode ser avaliada para  $z = 0$  para resultar  $(2\nu - 1)!$ . Então, usando a fórmula de duplicação (Seção 8.4), temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_\nu(z) = \frac{(\nu - 1)! 2^{\nu-1}}{z^\nu}, \quad \nu > 0, \quad (11.124)$$





de acordo com a Equação (11.119) que, desse modo, verifica a normalização.<sup>23</sup>

Agora, para desenvolver uma série assintótica para  $K_\nu(z)$ , podemos reescrever a Equação (11.123a) como

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt \quad (11.125)$$

(excluindo  $2t/z$  como fator).

Expandimos  $(1 + t/2z)^{\nu-1/2}$  pelo teorema binomial para obter

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \sum_{r=0}^\infty \frac{(\nu - \frac{1}{2})!}{r!(\nu - r - \frac{1}{2})!} (2z)^{-r} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu+r-1/2} dt. \quad (11.126)$$

Uma integração termo a termo (válida para série assintótica) apresenta como resultado a desejada expansão assintótica de  $K_\nu(z)$ :

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{(4\nu^2 - 1^2)}{1!8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \dots \right]. \quad (11.127)$$

Embora a integral da Equação (11.122), integrando ao longo do eixo real, fosse convergente só para  $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$ , a Equação (11.127) pode ser estendida para  $-3\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ . Considerada uma série infinita, a Equação (11.127) é, na verdade, divergente.<sup>24</sup> Contudo, essa série é assintótica, no sentido de que, para  $z$  suficientemente grande,  $K_\nu(z)$  pode ser aproximada para qualquer grau fixo de precisão com um número pequeno de termos. (Compare com a Seção 5.10 para uma definição e discussão de série assintótica.) É conveniente reescrever a Equação (11.127) como

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [P_\nu(iz) + iQ_\nu(iz)], \quad (11.128)$$

em que

$$P_\nu(z) \sim 1 - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)(\mu - 49)}{4!(8z)^4} - \dots, \quad (11.129a)$$

$$Q_\nu(z) \sim \frac{\mu - 1}{1!(8z)} - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)}{3!(8z)^3} + \dots, \quad (11.129b)$$

e

$$\mu = 4\nu^2.$$

Devemos observar que, embora  $P_\nu(z)$  da Equação (11.129a) e  $Q_\nu(z)$  da Equação (11.129b) tenham sinais alternantes, a série para  $P_\nu(iz)$  e  $Q_\nu(iz)$  da Equação (11.128) tem todos os sinais positivos. Por fim, para  $z$  grande,  $P_\nu$  domina.

Então, com a forma assintótica de  $K_\nu(z)$ , Equação (11.128), podemos obter expansões para todas as outras funções de Bessel e hiperbólicas de Bessel definindo relações:

1. Por

$$\frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = K_\nu(z) \quad (11.130)$$

temos

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{i\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\} \cdot [P_\nu(z) + iQ_\nu(z)], \quad -\pi < \arg z < 2\pi. \quad (11.131)$$

2. A segunda função de Hankel é apenas o conjugado complexo da primeira (para argumento real),

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{-i\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\} \cdot [P_\nu(z) - iQ_\nu(z)], \quad -2\pi < \arg z < \pi. \quad (11.132)$$

<sup>23</sup>Para  $\nu \rightarrow 0$ , a integral diverge de forma logarítmica, de acordo com a divergência logarítmica de  $K_0(z)$  para  $z \rightarrow 0$  (Seção 11.5).

<sup>24</sup>Nossa expansão binomial é válida somente para  $t < 2z$  e integramos  $t$  até o infinito. O decréscimo exponencial do integrando evita um desastre, mas a série resultante ainda é só assintótica, não convergente. Pela Tabela 9.3,  $z = \infty$  é uma singularidade essencial das equações de Bessel (e modificadas de Bessel). O teorema de Fuchs não garante uma série convergente e não obtemos uma série convergente.

Uma derivação alternativa do comportamento assintótico das funções de Hankel aparece na Seção 7.3 como aplicação do método de inclinações mais acentuadas.

3. Uma vez que  $J_\nu(z)$  é a parte real de  $H_\nu^{(1)}(z)$  para  $z$  real,

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_\nu(z) \cos \left[ z - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] - Q_\nu(z) \operatorname{sen} \left[ z - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad -\pi < \arg z < \pi, \quad (11.133)$$

vale para  $z$  real, isto é,  $\arg z = 0, \pi$ . Uma vez estabelecida a Equação (11.133) para  $z$  real, a relação é válida para  $z$  complexo na faixa de argumento dada.

4. A função de Neumann é a parte imaginária de  $H_\nu^{(1)}(z)$  para  $z$  real ou

$$N_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_\nu(z) \operatorname{sen} \left[ z - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] + Q_\nu(z) \cos \left[ z - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad -\pi < \arg z < \pi. \quad (11.134)$$

De início, essa relação é estabelecida para  $z$  real, mas pode ser estendida para o domínio complexo como mostrado.

5. Por fim, a função hiperbólica ou modificada de Bessel  $I_\nu(z)$  é dada por

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) \quad (11.135)$$

ou

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} [P_\nu(iz) - iQ_\nu(iz)], \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \quad (11.136)$$

Isso conclui nossa determinação das expansões assintóticas. Contudo, talvez valha a pena observar as características primárias. À parte o onipresente  $z^{-1/2}$ ,  $J_\nu$  e  $N_\nu$  se comportam como co-seno e seno, respectivamente. Os zeros são quase uniformemente espaçados em intervalos de  $\pi$ ; o espaçamento se torna exatamente  $\pi$  no limite, quando  $z \rightarrow \infty$ . As funções de Hankel foram definidas para se comportar como as exponenciais imaginárias e as funções modificadas de Bessel  $I_\nu$  e  $K_\nu$  entram nas exponenciais positivas e negativas. Esse comportamento assintótico pode ser suficiente para eliminar imediatamente uma dessas funções como solução para um problema físico. Devemos notar também que as séries assintóticas  $P_\nu(z)$  e  $Q_\nu(z)$ , Equações (11.129a) e (11.129b), terminam em  $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$  e se tornam polinômios (em potências negativas de  $z$ ). Para esses valores especiais de  $\nu$  as aproximações assintóticas se tornam soluções exatas.

É interessante considerar a precisão das formas assintóticas, considerando apenas o primeiro termo, por exemplo (Figura 11.11),

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (11.137)$$

Claramente, a condição para a validade da Equação (11.137) é que o termo de seno seja desprezível, isto é,

$$8x \gg 4n^2 - 1. \quad (11.138)$$

Para  $n$  ou  $\nu > 1$  a região assintótica pode estar muito distante.

Como destacamos na Seção 11.3, as formas assintóticas podem ser usadas para avaliar as várias fórmulas wronskianas (compare com o Exercício 11.6.3).

## Exercícios

- 11.6.1** Ao verificar a normalização da representação integral de  $K_\nu(z)$  (Equação (11.122)), admitimos que  $I_\nu(z)$  não estava presente. Como sabemos que a representação integral não resulta em  $K_\nu(z) + \varepsilon I_\nu(z)$  com  $\varepsilon \neq 0$ ?

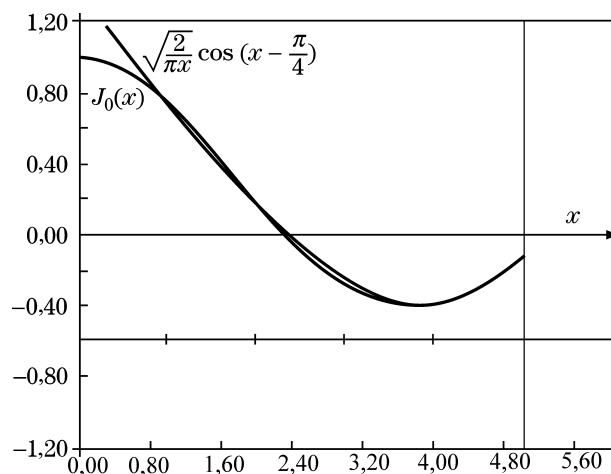


Figura 11.11: Aproximação assintótica de  $J_0(x)$ .

11.6.2 (a) Mostre que

$$y(z) = z^\nu \int e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu-1/2} dt$$

satisfaz a equação modificada de Bessel, contanto que o contorno seja escolhido de modo que

$$e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu+1/2}$$

tenha o mesmo valor nos pontos inicial e final do contorno.

(b) Verifique que os contornos mostrados na Figura 11.12 são adequados para esse problema.

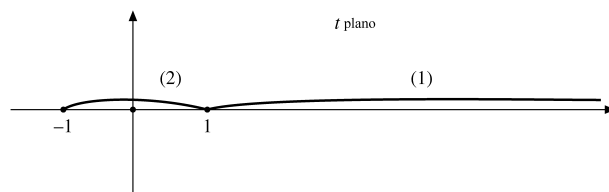


Figura 11.12: Contornos da função modificada de Bessel.

11.6.3 Use as expansões assintóticas para verificar as seguintes fórmulas wronskianas:

- (a)  $J_\nu(x)J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x)J_{\nu+1}(x) = -2\text{sen } \nu\pi/\pi x$ ,
- (b)  $J_\nu(x)N_{\nu+1}(x) - J_{\nu+1}(x)N_\nu(x) = -2/\pi x$ ,
- (c)  $J_\nu(x)H_{\nu-1}^{(2)}(x) - J_{\nu-1}(x)H_\nu^{(2)}(x) = 2/i\pi x$ ,
- (d)  $I_\nu(x)K'_\nu(x) - I'_\nu(x)K_\nu(x) = -1/x$ ,
- (e)  $I_\nu(x)K_{\nu+1}(x) + I_{\nu+1}(x)K_\nu(x) = 1/x$ .

11.6.4 Pela forma assintótica de  $K_\nu(z)$ , Equação (11.127), derive a forma assintótica de  $H_\nu^{(1)}(z)$ , Equação (11.131). Note, em particular, a fase  $(\nu + \frac{1}{2})\pi/2$ .

11.6.5 Método de Stokes.

(a) Substitua a função de Bessel na equação de Bessel por  $x^{-1/2}y(x)$  e mostre que  $y(x)$  satisfaz

$$y''(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)y(x) = 0.$$

(b) Desenvolva uma solução de série de potências com potências negativas de  $x$  começando com a forma admitida

$$y(x) = e^{ix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}.$$

Determine a relação de recorrência dando  $a_{n+1}$  em termos de  $a_n$ . Verifique seu resultado em comparação com a série assintótica, Equação (11.131).

(c) Pelos resultados da Seção 7.4, determine o coeficiente inicial,  $a_0$ .

**11.6.6** Calcule as 15 primeiras somas parciais de  $P_0(x)$  e  $Q_0(x)$ , Equações (11.129a) e (11.129b). Faça  $x$  variar de 4 a 10 em etapas unitárias. Determine o número de termos que devem ser retidos para precisão máxima e a precisão conseguida como uma função de  $x$ . Especificamente, quão pequeno  $x$  pode ser sem elevar o erro acima de  $3 \times 10^{-6}$ ?

Resposta:  $x_{\min} = 6$ .

**11.6.7** (a) Usando as séries assintóticas (somas parciais)  $P_0(x)$  e  $Q_0(x)$  determinadas no Exercício 11.6.6, escreva um subprograma de função FCT(X) para calcular  $J_0(x)$ ,  $x$  real, para  $x \geq x_{\min}$ .

(b) Teste sua função comparando-a com  $J_0(x)$  (tabelas ou sub-rotina de biblioteca de computador) para  $x = x_{\min}(10)x_{\min} + 10$ .

Nota: Uma forma assintótica mais precisa e talvez mais simples para  $J_0(x)$  é dada em AMS-55, Equação (9.4.3), referência fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.

## 11.7 Funções Esféricas de Bessel

Quando a equação de Helmholtz é separada em coordenadas esféricas, a equação radial tem a forma

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0. \tag{11.139}$$

Essa é a Equação (9.65) da Seção 9.3. O parâmetro  $k$  entra pela equação original de Helmholtz, enquanto  $n(n+1)$  é uma constante de separação. Pelo comportamento da função angular polar (equação de Legendre, Seções 9.5 e 12.5), a constante de separação deve ter essa forma, sendo  $n$  um inteiro não-negativo. A Equação (11.139) tem a virtude de ser auto-adjunta mas, claramente, não é a equação de Bessel. Contudo, se substituirmos

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}},$$

a Equação (11.139) se torna

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left[ k^2 r^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \tag{11.140}$$

que é a equação de Bessel.  $Z$  é uma função de Bessel de ordem  $n + \frac{1}{2}$  (sendo  $n$  inteiro). Por causa da importância de coordenadas esféricas, essa combinação, isto é,

$$\frac{Z_{n+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}},$$

ocorre com muita frequência.

### Definições

É conveniente rotular essas funções como funções esféricas de Bessel com as seguintes equações definidoras:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \\ n_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x),^{25} \\ h_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x), \\ h_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x) = j_n(x) - in_n(x). \end{aligned} \tag{11.141}$$

Essas funções esféricas de Bessel (Figuras 11.13 e 11.14) podem ser expressas em forma de série usando a série (Equação (11.5)) para  $J_n$ , substituindo  $n$  por  $n + \frac{1}{2}$ :

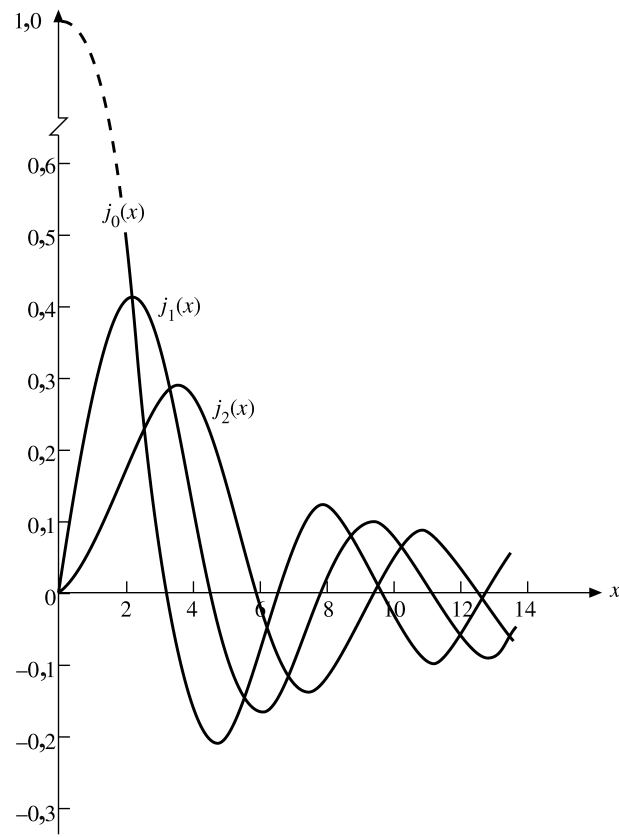


Figura 11.13: Funções esféricas de Bessel.

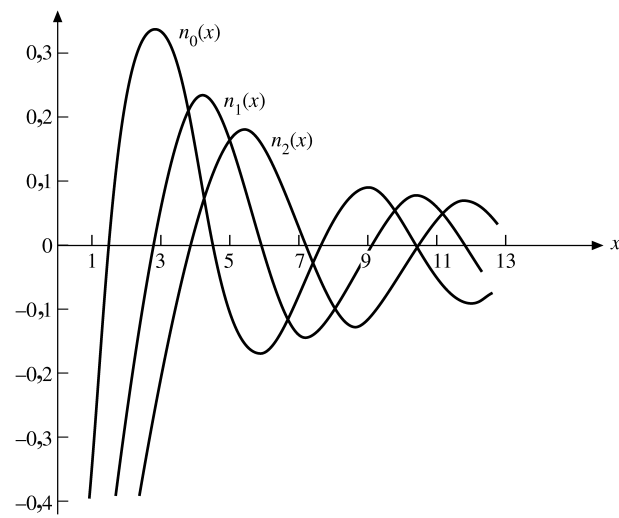


Figura 11.14: Funções esféricas de Neumann.

$$J_{n+1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+n+\frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2}. \quad (11.142)$$

Usando a fórmula de duplicação de Legendre,

$$z!(z+\frac{1}{2})! = 2^{-2z-1}\pi^{1/2}(2z+1)!, \quad (11.143)$$

temos

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s+2n+1} (s+n)!}{\pi^{1/2} (2s+2n+1)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2} \\ &= 2^n x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+n)!}{s! (2s+2n+1)!} x^{2s}. \end{aligned} \quad (11.144)$$

Agora,  $N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-1/2}(x)$  e pela Equação (11.5) constatamos que

$$J_{-n-1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n-\frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n-1/2}. \quad (11.145)$$

Isso resulta em

$$n_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n \pi^{1/2}}{x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n-\frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \quad (11.146)$$

A fórmula de duplicação de Legendre pode ser usada novamente para dar

$$n_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-n)!}{s! (2s-2n)!} x^{2s}. \quad (11.147)$$

Essas formas de série, Equações (11.144) e (11.147), são úteis de três maneiras: (1) valores limitadores à medida que  $x \rightarrow 0$ , (2) representações de forma fechada para  $n = 0$ , e, como uma extensão disso, (3) uma indicação de que as funções esféricas de Bessel guardam uma estreita relação com o seno e o co-seno.

Para o caso especial  $n = 0$  encontramos, a partir da Equação (11.144), que

$$j_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} x^{2s} = \frac{\text{sen } x}{x}, \quad (11.148)$$

enquanto para  $n_0$ , Equação (11.147) resulta em

$$n_0(x) = -\frac{\text{cos } x}{x}. \quad (11.149)$$

Pela definição das funções esféricas de Hankel (Equação (11.141)),

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} (\text{sen } x - i \text{cos } x) = -\frac{i}{x} e^{ix}, \\ h_0^{(2)}(x) &= \frac{1}{x} (\text{sen } x + i \text{cos } x) = \frac{i}{x} e^{-ix}. \end{aligned} \quad (11.150)$$

As Equações (11.148) e (11.149) sugerem expressar todas as funções esféricas de Bessel como combinações de seno e co-seno. As combinações adequadas podem ser desenvolvidas pelas soluções de série de potências, Equações (11.144) e (11.147), mas essa abordagem é desajeitada. Na verdade, as formas trigonométricas já estão disponíveis como a expansão assintótica da Seção 11.6. Pelas Equações (11.131) e (11.129a),

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(1)}(z) \\ &= (-i)^{n+1} \frac{e^{iz}}{z} \{P_{n+1/2}(z) + iQ_{n+1/2}(z)\}. \end{aligned} \quad (11.151)$$

<sup>25</sup>Isso é possível porque  $\cos(n + \frac{1}{2})\pi = 0$ , veja a Equação (11.60).



Agora  $P_{n+1/2}$  e  $Q_{n+1/2}$  são **polinômios**. Isso significa que a Equação (11.151) é matematicamente exata, e não uma simples aproximação assintótica. Obtemos

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(z) &= (-i)^{n+1} \frac{e^{iz}}{z} \sum_{s=0}^n \frac{i^s}{s!(8z)^s} \frac{(2n+2s)!!}{(2n-2s)!!} \\ &= (-i)^{n+1} \frac{e^{iz}}{z} \sum_{s=0}^n \frac{i^s}{s!(2z)^s} \frac{(n+s)!}{(n-s)!}. \end{aligned} \quad (11.152)$$

Muitas vezes um fator  $(-i)^n = (e^{-i\pi/2})^n$  será combinado com o  $e^{iz}$  para dar  $e^{i(z-n\pi/2)}$ . Para  $z$  real,  $j_n(z)$  é a parte real disso,  $n_n(z)$  a parte imaginária e  $h_n^{(2)}(z)$  o conjugado complexo. Especificamente,

$$h_1^{(1)}(x) = e^{ix} \left( -\frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} \right), \quad (11.153a)$$

$$h_2^{(1)}(x) = e^{ix} \left( \frac{i}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3i}{x^3} \right), \quad (11.153b)$$

$$j_1(x) = \frac{\text{sen } x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad (11.154)$$

$$j_2(x) = \left( \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \text{sen } x - \frac{3}{x^2} \cos x,$$

$$n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen } x}{x}, \quad (11.155)$$

$$n_2(x) = -\left( \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3}{x^2} \text{sen } x,$$

e assim por diante.

### Valores Limitadores

Para  $x \ll 1$ ,<sup>26</sup> Equações (11.144) e (11.147) resultam em

$$j_n(x) \approx \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^n = \frac{x^n}{(2n+1)!!}, \quad (11.156)$$

$$\begin{aligned} n_n(x) &\approx \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(-n)!}{(-2n)!} x^{-n-1} \\ &= -\frac{(2n)!}{2^n n!} x^{-n-1} = -(2n-1)!! x^{-n-1}. \end{aligned} \quad (11.157)$$

A transformação de fatoriais nas expressões para  $n_n(x)$  emprega o Exercício 8.1.3. Os valores limitadores das funções esféricas de Hankel surgem como  $\pm i n_n(x)$ .

Os valores assintóticos de  $j_n$ ,  $n_n$ ,  $h_n^{(2)}$  e  $h_n^{(1)}$  podem ser obtidos das formas assintóticas de Bessel, Seção 11.6. Encontramos

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x} \text{sen} \left( x - \frac{n\pi}{2} \right), \quad (11.158)$$

$$n_n(x) \sim -\frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} \right), \quad (11.159)$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} = -i \frac{e^{i(x-n\pi/2)}}{x}, \quad (11.160a)$$

<sup>26</sup>A condição de que o segundo termo na série seja desprezível em comparação com o primeiro na verdade é  $x \ll 2[(2n+2)(2n+3)/(n+1)]^{1/2}$  para  $j_n(x)$ .

$$h_n^{(2)}(x) \sim i^{n+1} \frac{e^{-ix}}{x} = i \frac{e^{-i(x-n\pi/2)}}{x}. \quad (11.160b)$$

A condição para essas formas esféricas de Bessel é que  $x \gg n(n+1)/2$ . Por esses valores assintóticos vemos que  $j_n(x)$  e  $n_n(x)$  são adequados para a descrição de **ondas esféricas estacionárias**;  $h_n^{(1)}(x)$  e  $h_n^{(2)}(x)$  correspondem a **ondas esféricas progressivas**. Se a dependência do tempo para as ondas progressivas for considerada como  $e^{-i\omega t}$ , então  $h_n^{(1)}(x)$  resulta em uma onda esférica progressiva de saída em  $h_n^{(2)}(x)$  uma onda de entrada. A teoria da radiação em eletromagnetismo e a teoria da dispersão em Mecânica Quântica fornecem muitas aplicações.

### Relações de Recorrência

As relações de recorrência para as quais nos voltamos agora nos dão um modo conveniente para desenvolver as funções esféricas de Bessel de ordem mais alta. Essas relações de recorrência podem ser derivadas da série, mas, assim como acontece com as funções modificadas de Bessel, é mais fácil substituir nas relações de recorrência conhecidas, (Equações (11.10) e (11.12)). Isso resulta em

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x), \quad (11.161)$$

$$n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f'_n(x). \quad (11.162)$$

Rearranjando essas relações (ou substituindo nas Equações (11.15) e (11.17)), obtemos

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} f_n(x)] = x^{n+1} f_{n-1}(x), \quad (11.163)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} f_n(x)] = -x^{-n} f_{n+1}(x). \quad (11.164)$$

Aqui,  $f_n$  pode representar  $j_n, n_n, h_n^{(1)}$  ou  $h_n^{(2)}$ .

As formas específicas, Equações (11.154) e (11.155), também podem ser obtidas imediatamente da Equação (11.164).

Por indução matemática podemos estabelecer as fórmulas de Rayleigh

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\sin x}{x} \right), \quad (11.165)$$

$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\cos x}{x} \right), \quad (11.166)$$

$$h_n^{(1)}(x) = -i(-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{e^{ix}}{x} \right), \quad (11.167)$$

$$h_n^{(2)}(x) = i(-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{e^{-ix}}{x} \right).$$

### Ortogonalidade

Podemos considerar a integral de ortogonalidade para as funções ordinárias de Bessel (Equações (11.49) e (11.50)),

$$\int_0^a J_\nu \left( \alpha_{\nu p} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left( \alpha_{\nu q} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu p})]^2 \delta_{pq}, \quad (11.168)$$

e substituir na expressão para  $j_n$  para obter

$$\int_0^a j_n \left( \alpha_{np} \frac{\rho}{a} \right) j_n \left( \alpha_{nq} \frac{\rho}{a} \right) \rho^2 d\rho = \frac{a^3}{2} [j_{n+1}(\alpha_{np})]^2 \delta_{pq}. \quad (11.169)$$

Aqui,  $\alpha_{np}$  e  $\alpha_{nq}$  são raízes de  $j_n$ .

Isso representa ortogonalidade em relação às raízes das funções de Bessel. Uma ilustração desse tipo de ortogonalidade é dada no Exemplo 11.7.1, o problema de um partícula dentro de uma esfera. A Equação (11.169) garante ortogonalidade das funções de onda  $j_n(r)$  para  $n$  fixo. (Se  $n$  variar, o harmônico esférico acompanhante dará ortogonalidade.)





### Exemplo 11.7.1 PARTÍCULA DENTRO DE UMA ESFERA

Uma ilustração da utilização de funções esféricas de Bessel é dada pelo problema de uma partícula dentro de uma esfera de raio  $a$ , descrita pela Mecânica Quântica. A teoria quântica requer que a função de onda  $\psi$ , que descreve nossa partícula, satisfaça

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi, \quad (11.170)$$

e que as condições de contorno (1)  $\psi(r \leq a)$  permaneçam finitas, (2)  $\psi(a) = 0$ . Isso corresponde a um poço de potencial quadrado  $V = 0, r \leq a$  e  $V = \infty, r > a$ . Aqui,  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $m$  é a massa de nossa partícula e  $E$  é sua energia. Vamos determinar o valor **mínimo** da energia para o qual nossa equação de onda tem uma solução aceitável. A Equação (11.170) é a equação de Helmholtz com uma parte radial (compare com a Seção 9.3 para separação de variáveis):

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0, \quad (11.171)$$

com  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . Daí, pela Equação (11.139), com  $n = 0$ ,

$$R = Aj_0(kr) + Bn_0(kr).$$

Escolhemos o índice  $n = 0$ , para o momento angular orbital porque qualquer dependência angular elevaria a energia. A função esférica de Neumann é rejeitada por causa de seu comportamento divergente na origem. Para satisfazer a segunda condição de fronteira (para todos os ângulos), exigimos que

$$ka = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a = \alpha, \quad (11.172)$$

em que  $\alpha$  é uma raiz de  $j_0$ , isto é,  $j_0(\alpha) = 0$ . Isso tem o efeito de limitar as energias permissíveis a um certo conjunto discreto ou, em outras palavras, a aplicação da condição de contorno (2) quantiza a energia  $E$ . O menor de todos os  $\alpha$  é o primeiro zero de  $j_0$ ,

$$\alpha = \pi,$$

e

$$E_{\text{mín}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{8ma^2}, \quad (11.173)$$

o que significa que, para qualquer esfera finita, a energia da partícula terá uma energia positiva mínima ou energia de ponto zero. Essa é uma ilustração do princípio da incerteza de Heisenberg para  $\Delta p$  with  $\Delta r \leq a$ .

Em Física do Estado Sólido, Astrofísica e outras áreas da Física, podemos querer saber quantas soluções diferentes (estados de energia) correspondem a energias menores ou iguais a alguma energia fixa  $E_0$ . Para um volume cúbico (Exercício 9.3.5), o problema é razoavelmente simples. O caso esférico, consideravelmente mais difícil, é destrinchado por R. H. Lambert, *Am. J. Phys.* 36: 417, 1.169 (1968).

A relevante relação de ortogonalidade para  $j_n(kr)$  pode ser derivada da integral dada no Exercício 11.7.23. ■

Uma outra forma, a ortogonalidade em relação aos índices, pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_m(x)j_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, m, n \geq 0. \quad (11.174)$$

Deixamos a prova para o Exercício 11.7.10. Se  $m = n$  (compare com o Exercício 11.7.11), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} [j_n(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2n+1}. \quad (11.175)$$

Grande parte das aplicações físicas de funções ortogonais de Bessel e esféricas de Bessel envolvem ortogonalidade com raízes variáveis e um intervalo  $[0, a]$  e as Equações (11.168) e (11.169) e o Exercício 11.7.23 para autovalores de energia contínua.

As funções esféricas de Bessel entrarão novamente em conexão com ondas esféricas, mas adiamos mais considerações até após a introdução das funções angulares correspondentes, as funções de Legendre.

### Exercícios

11.7.1 Mostre que, se

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x),$$

ela é automaticamente igual a

$$(-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x).$$

11.7.2 Derive as formas trigonométricas polinomiais de  $j_n(z)$  e  $n_n(z)$ .<sup>27</sup>

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \frac{1}{z} \operatorname{sen} \left( z - \frac{n\pi}{2} \right) \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^s (n+2s)!}{(2s)!(2z)^{2s}(n-2s)!} \\ &\quad + \frac{1}{z} \cos \left( z - \frac{n\pi}{2} \right) \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^s (n+2s+1)!}{(2s+1)!(2z)^{2s}(n-2s-1)!}, \\ n_n(z) &= \frac{(-1)^{n+1}}{z} \cos \left( z + \frac{n\pi}{2} \right) \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^s (n+2s)!}{(2s)!(2z)^{2s}(n-2s)!} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{z} \operatorname{sen} \left( z + \frac{n\pi}{2} \right) \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^s (n+2s+1)!}{(2s+1)!(2z)^{2s+1}(n-2s-1)!}. \end{aligned}$$

11.7.3 Use a representação integral de  $J_\nu(x)$ ,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm i x p} (1-p^2)^{\nu-1/2} dp,$$

para mostrar que as funções esféricas de Bessel  $j_n(x)$  podem ser expressas em termos de funções trigonométricas, isto é, por exemplo,

$$j_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

11.7.4 (a) Derive as relações de recorrência

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} f_n(x), \\ n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) &= (2n+1) f'_n(x) \end{aligned}$$

satisfeitas pelas funções esféricas de Bessel  $j_n(x)$ ,  $n_n(x)$ ,  $h_n^{(1)}(x)$  e  $h_n^{(2)}(x)$ .

(b) Por essas duas relações de recorrência, mostre que a função esférica de Bessel  $f_n(x)$  satisfaz a equação diferencial

$$x^2 f''_n(x) + 2x f'_n(x) + [x^2 - n(n+1)] f_n(x) = 0.$$

11.7.5 Prove por indução matemática que

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right),$$

para  $n$  inteiro arbitrário não-negativo.

11.7.6 Pela discussão da ortogonalidade das funções esféricas de Bessel, mostre que uma relação wronskiana para  $j_n(x)$  e  $n_n(x)$  é

$$j_n(x) n'_n(x) - j'_n(x) n_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$

<sup>27</sup>O limite superior sobre o somatório  $[n/2]$  significa o maior inteiro que não excede  $n/2$ .



11.7.7 Verifique

$$h_n^{(1)}(x)h_n^{(2)'}(x) - h_n^{(1)'}(x)h_n^{(2)}(x) = -\frac{2i}{x^2}.$$

11.7.8 Verifique a representação integral de Poisson da função esférica de Bessel,

$$j_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1}n!} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \text{sen}^{2n+1} \theta \, d\theta.$$

11.7.9 Mostre que

$$\int_0^\infty J_\mu(x)J_\nu(x) \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen}[(\mu - \nu)\pi/2]}{\mu^2 - \nu^2}, \quad \mu + \nu > -1.$$

11.7.10 Derive a Equação (11.174):

$$\int_{-\infty}^\infty j_m(x)j_n(x) \, dx = 0, \quad \begin{matrix} m \neq n \\ m, n \geq 0. \end{matrix}$$

11.7.11 Derive a Equação (11.175):

$$\int_{-\infty}^\infty [j_n(x)]^2 \, dx = \frac{\pi}{2n+1}.$$

11.7.12 Estabeleça a integral de ortogonalidade para  $j_L(kr)$  dentro de uma esfera de raio  $R$  com a condição de contorno

$$j_L(kR) = 0.$$

O resultado é usado na classificação de radiação eletromagnética conforme seu momento angular.

11.7.13 As integrais de Fresnel (Figura 11.15 e Exercício 5.10.2) que ocorrem na teoria da difração são dadas por

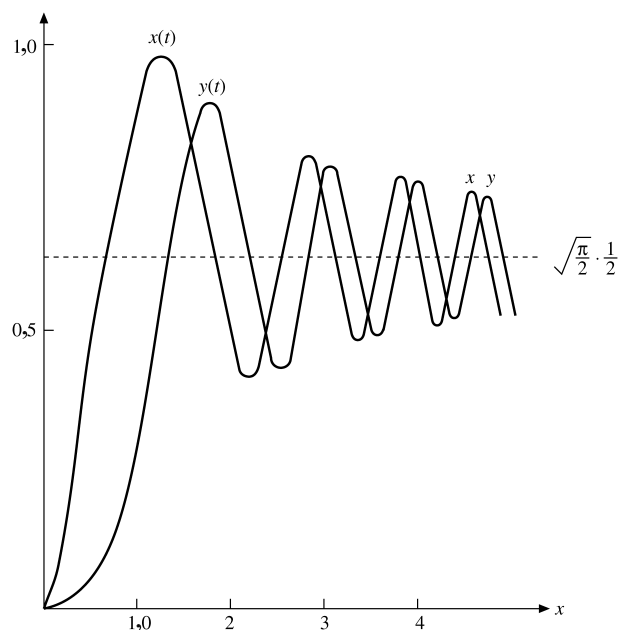


Figura 11.15: Integrais de Fresnel.

$$x(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} t\right) = \int_0^t \cos(v^2) \, dv, \quad y(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} S\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} t\right) = \int_0^t \text{sen}(v^2) \, dv.$$

Mostre que essas integrais podem ser expandidas em séries de funções esféricas de Bessel

$$x(s) = \frac{1}{2} \int_0^s j_{-1}(u)u^{1/2} du = s^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n}(s),$$

$$y(s) = \frac{1}{2} \int_0^s j_0(u)u^{1/2} du = s^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n+1}(s).$$

*Sugestão:* Para estabelecer a igualdade entre a integral e o somatório, talvez fosse melhor você trabalhar com suas derivadas. As esféricas de Bessel análogas das Equações (11.12) e (11.14) podem ajudar.

**11.7.14** Uma esfera oca de raio  $a$  (ressonador de Helmholtz) contém ondas sonoras estacionárias. Ache a frequência mínima de oscilação em termos do raio  $a$  e da velocidade do som  $v$ . As ondas sonoras satisfazem a equação de onda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

e a condição de contorno

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r = a.$$

Essa é uma condição de contorno de Neumann. O Exemplo 11.7.1 tem a mesma EDP, mas com uma condição de contorno de Dirichlet.

Resposta:  $\nu_{\text{mín}} = 0,3313v/a$ ,  $\lambda_{\text{máx}} = 3,018a$ .

**11.7.15** Definindo as funções esféricas modificadas de Bessel (Figura 11.16) por

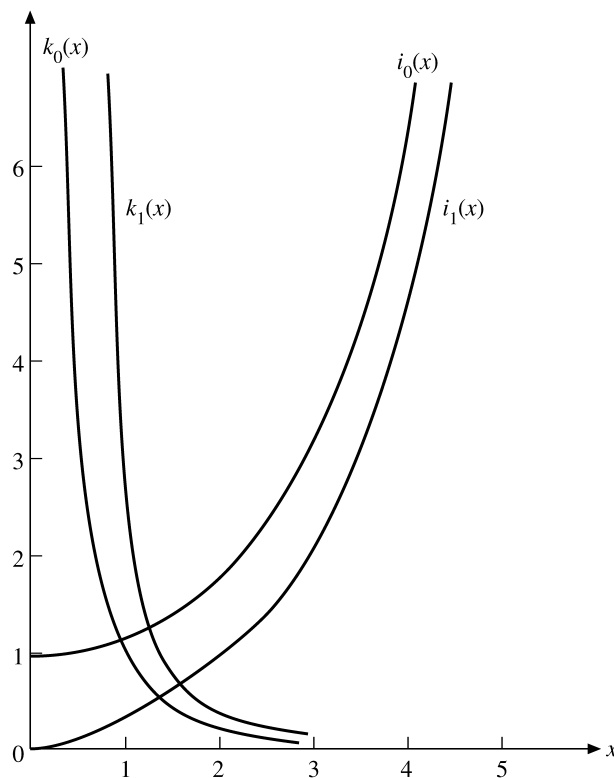


Figura 11.16: Funções esféricas modificadas de Bessel.

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x), \quad k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{n+1/2}(x),$$



mostre que

$$i_0(x) = \frac{\sinh x}{x}, \quad k_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Note que os fatores numéricos nas definições  $i_n$  e  $k_n$  não são idênticos.

- 11.7.16** (a) Mostre que a paridade de  $i_n(x)$  é  $(-1)^n$ .  
 (b) Mostre que  $k_n(x)$  não tem nenhuma paridade definida.

**11.7.17** Mostre que as funções esféricas modificadas de Bessel satisfazem as seguintes relações:

(a)  $i_n(x) = i^{-n} j_n(ix)$ ,  
 $k_n(x) = -i^n h_n^{(1)}(ix)$ ,

(b)  $i_{n+1}(x) = x^n \frac{d}{dx} (x^{-n} i_n)$ ,  
 $k_{n+1}(x) = -x^n \frac{d}{dx} (x^{-n} k_n)$ ,

(c)  $i_n(x) = x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sinh x}{x}$ ,  
 $k_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{e^{-x}}{x}$ .

**11.7.18** Mostre que as relações de recorrência para  $i_n(x)$  e  $k_n(x)$  são

(a)  $i_{n-1}(x) - i_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} i_n(x)$ ,  
 $ni_{n-1}(x) + (n+1)i_{n+1}(x) = (2n+1)i'_n(x)$ ,

(b)  $k_{n-1}(x) - k_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x} k_n(x)$ ,  
 $nk_{n-1}(x) + (n+1)k_{n+1}(x) = -(2n+1)k'_n(x)$ .

**11.7.19** Derive os valores limitadores para as funções esféricas modificadas de Bessel

(a)  $i_n(x) \approx \frac{x^n}{(2n+1)!!}$ ,  $k_n(x) \approx \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$ ,  $x \ll 1$ .

(b)  $i_n(x) \sim \frac{e^x}{2x}$ ,  $k_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$ ,  $x \gg \frac{1}{2}n(n+1)$ .

**11.7.20** Mostre que o wronskiano das funções esféricas modificadas de Bessel é dado por

$$i_n(x)k'_n(x) - i'_n(x)k_n(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

**11.7.21** Uma partícula quântica de massa  $M$  está presa em um poço “quadrado” de raio  $a$ . A equação de potencial de Schrödinger é

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r < a \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

A energia da partícula,  $E$ , é negativa (um autovalor).

- (a) Mostre que a parte radial da função de onda é dada por  $j_l(k_1 r)$  para  $0 \leq r < a$  e  $k_l(k_2 r)$  para  $r > a$ . (Exigimos que  $\psi(0)$  seja finita e  $\psi(\infty) \rightarrow 0$ .) Aqui,  $k_1^2 = 2M(E + V_0)/\hbar^2$ ,  $k_2^2 = -2ME/\hbar^2$  e  $l$  é o momento angular ( $n$  na Equação (11.139)).  
 (b) A condição de contorno em  $r = a$  que a função de onda  $\psi(r)$  e sua derivada de primeira ordem sejam contínuas. Mostre que isso significa

$$\left. \frac{(d/dr)j_l(k_1 r)}{j_l(k_1 r)} \right|_{r=a} = \left. \frac{(d/dr)k_l(k_2 r)}{k_l(k_2 r)} \right|_{r=a}.$$

Essa equação determina os autovalores da energia.

Nota: Essa é uma generalização do Exemplo 10.1.2.

**11.7.22** A função de onda radial da Mecânica Quântica para uma onda espalhada é dada por

$$\psi_k = \frac{\text{sen}(kr + \delta_0)}{kr},$$

em que  $k$  é o número de onda,  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , e  $\delta_0$  é o deslocamento da fase do espalhamento. Mostre que a integral de normalização é

$$\int_0^\infty \psi_k(r)\psi_{k'}(r)r^2 dr = \frac{\pi}{2k}\delta(k - k').$$

*Sugestão:* Você pode usar uma representação de seno da função delta de Dirac. Veja o Exercício 15.3.8.

**11.7.23** Derive a relação de fechamento da função esférica de Bessel.

$$\frac{2a^2}{\pi} \int_0^\infty j_n(ar)j_n(br)r^2 dr = \delta(a - b).$$

*Nota:* Uma interessante derivação envolvendo transformadas de Fourier, a expansão de onda plana de Rayleigh e harmônicos esféricos é dada por P. Uginčius, *Am. J. Phys.* 40: 1690 (1972).

**11.7.24** (a) Escreva uma sub-rotina para gerar as funções esféricas de Bessel,  $j_n(x)$ , isto é, para gerar o valor numérico de  $j_n(x)$  dados  $x$  e  $n$ .

*Nota:* Uma possibilidade é usar as formas explícitas conhecidas de  $j_0$  e  $j_1$  e desenvolver o índice mais alto,  $j_n$ , por aplicação repetida da relação de recorrência.

(b) Verifique sua sub-rotina por um cálculo independente, tal como a Equação (11.154). Se possível, compare o tempo de máquina necessário para essa verificação com o tempo requerido por sua sub-rotina.

**11.7.25** A função de onda de uma partícula dentro de uma esfera (Exemplo 11.7.1) com momento angular  $l$  é  $\psi(r, \theta, \varphi) = A j_l((\sqrt{2ME})r/\hbar) Y_l^m(\theta, \varphi)$ . O  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  é um harmônico esférico, descrito na Seção 12.6. Pela condição de contorno  $\psi(a, \theta, \varphi) = 0$  ou  $j_l((\sqrt{2ME})a/\hbar) = 0$ , calcule os 10 estados de energia mais baixos. Despreze a degenerescência  $m$  ( $2l + 1$  valores de  $m$  para cada escolha de  $l$ ). Verifique seus resultados comparando-os com AMS-55, Tabela 10.6, referência fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.

*Sugestão:* Você pode usar sua sub-rotina de esférica de Bessel e uma sub-rotina de busca de raízes.

<b>Valor de verificação</b>	$j_l(\alpha_{ls}) = 0,$
	$\alpha_{01} = 3, 1416$
	$\alpha_{11} = 4, 4934$
	$\alpha_{21} = 5, 7635$
	$\alpha_{02} = 6, 2832.$

**11.7.26** Modifique o Exemplo 11.7.1 de modo que o potencial seja um  $V_0$  fora de ( $r > a$ ).

(a) Para  $E < V_0$ , mostre que

$$\psi_{\text{fora}}(r, \theta, \varphi) \sim k_l \left( \frac{r}{\hbar} \sqrt{2M(V_0 - E)} \right).$$

(b) As novas condições de contorno a satisfazer em  $r = a$  são

$$\begin{aligned} \psi_{\text{dentro}}(a, \theta, \varphi) &= \psi_{\text{fora}}(a, \theta, \varphi), \\ \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{dentro}}(a, \theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{fora}}(a, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{\psi_{\text{dentro}}} \frac{\partial \psi_{\text{dentro}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{\psi_{\text{fora}}} \frac{\partial \psi_{\text{fora}}}{\partial r} \Big|_{r=a}.$$

Para  $l = 0$  mostre que a condição de fronteira em  $r = a$  leva a

$$f(E) = k \left\{ \cotg ka - \frac{1}{ka} \right\} + k' \left\{ 1 + \frac{1}{k'a} \right\} = 0,$$

em que  $k = \sqrt{2ME}/\hbar$  e  $k' = \sqrt{2M(V_0 - E)}/\hbar$ .



- (c) Com  $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/Me^2$  (raio de Bohr) e  $V_0 = 4Me^4/2\hbar^2$ , calcule os possíveis estados ligados ( $0 < E < V_0$ ).

*Sugestão:* Chame uma sub-rotina de busca de raízes após saber a localização aproximada das raízes de

$$f(E) = 0 \quad (0 \leq E \leq V_0).$$

- (d) Mostre que, quando  $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/Me^2$ , o valor mínimo de  $V_0$  para o qual existe um estado ligado é  $V_0 = 2,4674Me^4/2\hbar^2$ .

**11.7.27** Em algumas reações de *desnudamento* nuclear, a seção de choque diferencial é proporcional a  $j_l(x)^2$ , em que  $l$  é o momento angular. A localização do máximo sobre a curva de dados experimentais permite uma determinação de  $l$ , se a localização do (primeiro) máximo de  $j_l(x)$  for conhecida. Calcule a localização do primeiro máximo de  $j_1(x)$ ,  $j_2(x)$  e  $j_3(x)$ .

*Nota:* Para melhor precisão, procure o primeiro zero de  $j'_l(x)$ . Por que isso é mais preciso do que a localização direta do máximo?

### Leituras Adicionais

Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3<sup>a</sup> ed., Nova York: J. Wiley (1999).

McBride, E. B., *Obtaining Generating Functions*. Nova York: Springer-Verlag (1971). Uma introdução aos métodos para obter funções geradoras.

Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2<sup>a</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1952). Este é o texto definitivo sobre funções de Bessel e suas propriedades. Embora sua leitura seja difícil, o livro é valioso como a referência definitiva.

Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 1<sup>a</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1922). Ver também as referências listadas no final do Capítulo 13.

## 12

# Funções de Legendre

### 12.1 Função Geratriz

Polinômios de Legendre aparecem em muitas situações físicas e matemáticas diferentes. (1) Podem se originar como soluções da EDO de Legendre que já encontramos em separação de variáveis (Seção 9.3) para a equação de Laplace, a equação de Helmholtz e EDOs similares em coordenadas polares esféricas. (2) Entram como uma consequência de uma fórmula de Rodrigues (Seção 12.4). (3) Surgem como uma consequência do requisito de um conjunto de funções completo, ortogonal, no intervalo  $[-1, 1]$  (ortogonalização de Gram-Schmidt, Seção 10.3). (4) Na Mecânica Quântica eles (na realidade, os harmônicos esféricos, Seções 12.6 e 12.7) representam autofunções de momento angular. (5) São gerados por uma função geradora. Aqui, introduzimos polinômios de Legendre por meio de uma função geradora.

#### Base Física — Eletrostática

Assim como em funções de Bessel, é conveniente introduzir os polinômios de Legendre por meio de uma função geradora que, aqui, aparece em um contexto físico. Considere uma carga elétrica  $q$  colocada sobre o eixo  $z$  em  $z = a$ . Como mostra a Figura 12.1, o potencial eletrostático da carga  $q$  é

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1} \quad (\text{unidades SI}). \quad (12.1)$$

Queremos expressar o potencial eletrostático em termos de coordenadas polares esféricas  $r$  e  $\theta$  (a coordenada  $\varphi$  está ausente por causa da simetria em torno do eixo  $z$ ). Usando a lei dos co-senos na Figura 12.1, obtemos

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{-1/2}. \quad (12.2)$$

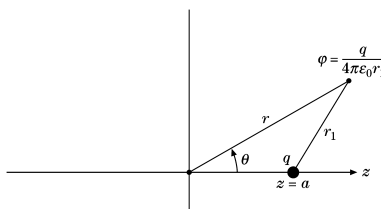


Figura 12.1: Potencial eletrostático. Carga  $q$  afastada da origem.

#### Polinômios de Legendre

Considere o caso de  $r > a$  ou, mais precisamente,  $r^2 > |a^2 - 2ar \cos \theta|$ . O radical na Equação (12.2) pode ser expandido em uma série binomial e então rearranjado em potências de  $(a/r)$ . O polinômio de Legendre  $P_n(\cos \theta)$  (veja a Figura 12.2) é definido como o coeficiente da  $n$ -ésima potência em

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n. \quad (12.3)$$



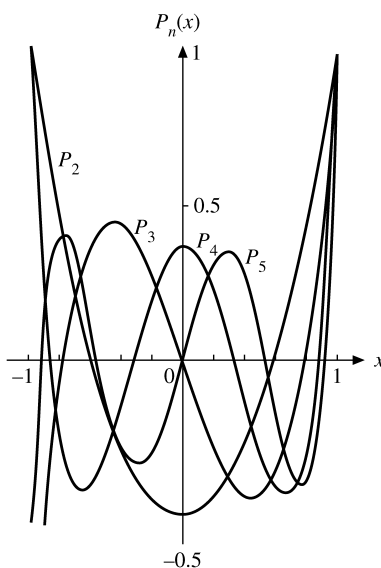


Figura 12.2: Polinômios de Legendre  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_4(x)$  e  $P_5(x)$ .

Descartando o fator  $q/4\pi\epsilon_0 r$  e usando  $x$  e  $t$  em vez de  $\cos\theta$  e  $a/r$ , respectivamente, temos

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1. \tag{12.4}$$

A Equação (12.4) é a nossa fórmula de função geradora. Na próxima seção mostramos que  $|P_n(\cos\theta)| \leq 1$ , o que significa que a expansão de série (Equação (12.4)) é convergente para  $|t| < 1$ .<sup>1</sup> De fato, a série é convergente para  $|t| = 1$ , exceto para  $|x| = 1$ .

Em aplicações físicas a Equação (12.4) muitas vezes aparece na forma vetorial (veja a Seção 9.7)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\theta), \tag{12.4a}$$

em que

$$\left. \begin{aligned} r_> &= |\mathbf{r}_1| \\ r_< &= |\mathbf{r}_2| \end{aligned} \right\}, \quad \text{para } |\mathbf{r}_1| > |\mathbf{r}_2|, \tag{12.4b}$$

e

$$\left. \begin{aligned} r_> &= |\mathbf{r}_2| \\ r_< &= |\mathbf{r}_1| \end{aligned} \right\}, \quad \text{para } |\mathbf{r}_2| > |\mathbf{r}_1|. \tag{12.4c}$$

Usando o teorema binomial (Seção 5.6) e o Exercício 8.1.15, expandimos a função geradora como (compare com a Equação (12.33))

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (2xt - t^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (2xt - t^2)^n. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Para os primeiros polinômios de Legendre, digamos,  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , precisamos dos coeficientes de  $t^0$ ,  $t^1$  e  $t^2$ . Essas potências de  $t$  aparecem somente nos termos  $n = 0, 1$  e  $2$ , e, por conseguinte, podemos limitar nossa atenção aos

<sup>1</sup>Note que a série na Equação (12.3) é convergente para  $r > a$ , ainda que a expansão binomial envolvida seja válida somente para  $r > (a^2 + 2ar)^{1/2}$  e  $\cos\theta = -1$  ou  $r > a(1 + \sqrt{2})$ .

três primeiros termos da série infinita:

$$\begin{aligned} & \frac{0!}{2^0(0!)^2} (2xt - t^2)^0 + \frac{2!}{2^2(1!)^2} (2xt - t^2)^1 + \frac{4!}{2^4(2!)^2} (2xt - t^2)^2 \\ & = 1t^0 + xt^1 + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned}$$

Então, pela Equação (12.4) (e unicidade da série de potências),

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Mais adiante nesta seção, repetiremos esse desenvolvimento limitado em uma estrutura vetorial.

Empregando um tratamento geral, constatamos que a expansão binomial do fator  $(2xt - t^2)^n$  resulta na série dupla

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n)!}{2^{2n}n!k!(n-k)!} \cdot (2x)^{n-k} t^{n+k}. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Pela Equação (5.64) da Seção 5.4 (rearranjando a ordem do somatório), a Equação (12.6) se torna

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{2^{2n-2k}k!(n-k)!(n-2k)!} \cdot (2x)^{n-2k} t^n, \tag{12.7}$$

com o  $t^n$  independente do índice  $k$ .<sup>2</sup> Agora, igualando nossas duas séries de potências (Equações (12.4) e (12.7)) termo a termo, temos<sup>3</sup>

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}. \tag{12.8}$$

Por conseguinte, para  $n$  par,  $P_n$  tem somente potências pares de  $x$  e paridade par (veja a Equação (12.37)) e potências ímpares e paridade ímpar para  $n$  ímpar.

### Multipolos Elétricos Lineares

Voltando à carga elétrica sobre o eixo  $z$ , demonstramos a utilidade e poder da função geradora acrescentando uma carga  $-q$  em  $z = -a$ , como mostra a Figura 12.3. O potencial se torna

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \tag{12.9}$$

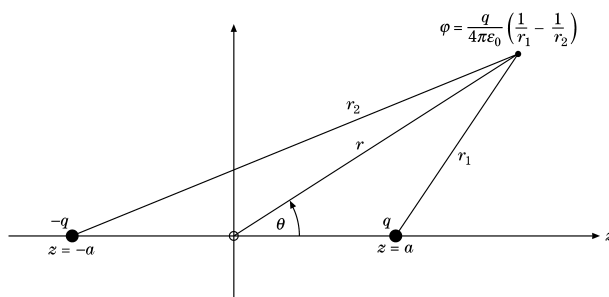


Figura 12.3: Dipolo elétrico.

<sup>2</sup> $[n/2] = n/2$ , para  $n$  par,  $(n - 1)/2$ , para  $n$  ímpar.

<sup>3</sup>A Equação (12.8) começa com  $x^n$ . Trocando o índice, podemos transformá-la em uma série que começa com  $x^0$  para  $n$  par e  $x^1$  para  $n$  ímpar. Essas séries ascendentes são dadas como funções hipergeométricas nas Equações (13.138) e (13.139), Seção 13.4.



e, usando a lei dos co-senos, temos

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left[ 1 - 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^{-1/2} - \left[ 1 + 2\left(\frac{a}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad (r > a).$$

Claramente, o segundo radical é como o primeiro, exceto que  $a$  foi substituído por  $-a$ . Então, usando a Equação (12.4), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) (-1)^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \right] \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ P_1(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (12.10)$$

O primeiro termo (e termo dominante para  $r \gg a$ ) é

$$\varphi = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P_1(\cos \theta)}{r^2}, \quad (12.11)$$

que é o potencial do **dipolo elétrico**, e  $2aq$  é o momento do dipolo (Figura 12.3). Essa análise pode ser estendida colocando cargas adicionais sobre o eixo  $z$  e de modo que o termo  $P_1$ , assim como o termo  $P_0$  (monopolo), seja cancelado. Por exemplo, cargas de  $q$  e  $z = a$  e  $z = -a$ ,  $-2q$  em  $z = 0$  dão origem a um potencial cuja expansão de série começa com  $P_2(\cos \theta)$ . Isso é um quadrupolo elétrico linear. Pode-se posicionar dois quadrupolos de modo que o termo do quadrupolo seja cancelado, mas  $P_3$ , o termo do octopolo, sobrevive.

### Expansão Vetorial

Consideramos o potencial eletrostático produzido por uma carga distribuída  $\rho(\mathbf{r}_2)$ :

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3 r_2. \quad (12.12a)$$

Essa expressão já apareceu nas Seções 1.16 e 9.7. Considerando o denominador do integrando, usando primeiro a lei dos co-senos e em seguida uma expansão binomial, temos como resultado (veja a Figura 1.42)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= (r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + r_2^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_1} \left[ 1 + \left( -\frac{2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^2} + \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad \text{for } r_1 > r_2 \\ &= \frac{1}{r_1} \left[ 1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^2} - \frac{1}{2} \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2}{r_1^4} + \mathcal{O}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (12.12b)$$

(Para  $r_1 = 1, r_2 = t$  e  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = xt$ , a Equação (12.12b) se reduz à função geradora, Equação (12.4).)

O primeiro termo dentro dos colchetes, 1, dá um potencial

$$\varphi_0(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} \int \rho(\mathbf{r}_2) d^3 r_2. \quad (12.12c)$$

A integral é exatamente a carga total. Essa parte do potencial total é um **monopolo**.

O segundo termo resulta em

$$\varphi_1(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 \cdot}{r_1^3} \int \mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2) d^3 r_2, \quad (12.12d)$$

em que a integral é o momento do dipolo cuja densidade de carga  $\rho(\mathbf{r}_2)$  é ponderada por um braço de momento  $\mathbf{r}_2$ . Temos um potencial de dipolo elétrico. Para estados atômicos ou nucleares de paridade definida,  $\rho(\mathbf{r}_2)$  é uma função par e a integral do dipolo é identicamente zero.

Os últimos dois termos, ambos de ordem  $(r_2/r_1)^2$ , podem ser manipulados usando coordenadas cartesianas:

$$(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = \sum_{i=1}^3 x_{1i}x_{2i} \sum_{j=1}^3 x_{1j}x_{2j}.$$

Rearranjando variáveis para pegar as componentes  $x_1$  fora da integral, temos como resultado

$$\varphi_2(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r_1^5} \sum_{i,j=1}^3 x_{1i}x_{1j} \int [3x_{2i}x_{2j} - \delta_{ij}r_2^2] \rho(\mathbf{r}_2) d^3r_2. \quad (12.12e)$$

Esse é o termo do **quadrupolo** elétrico. Notamos que os colchetes no integrando forma um tensor simétrico de traço nulo.

Também se pode desenvolver uma expansão multipolar eletrostática geral usando a Equação (12.12a) para o potencial  $\varphi(r_1)$  e substituindo  $1/(4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  pela função de Green, Equação (9.187). Isso resulta no potencial  $\varphi(\mathbf{r}_1)$  como uma série (dupla) dos harmônicos esféricos  $Y_l^m(\theta_1, \varphi_1)$  e  $Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)$ .

Antes de deixarmos os campos multipolares, talvez seja interessante destacar três pontos:

- Primeiro, um multipolo elétrico (ou magnético) é isolado e bem definido somente se todos os multipolos de ordem mais baixa desaparecerem. Por exemplo, o potencial de uma carga  $q$  em  $z = a$  foi expandido em uma série de polinômios de Legendre. Embora nessa expansão nos refiramos ao termo  $P_1(\cos \theta)$  como um termo de dipolo, devemos lembrar que esse termo existe somente por causa das coordenadas que escolhemos. Também temos um monopolo,  $P_0(\cos \theta)$ .
- Segundo, em sistemas físicos não encontramos multipolos puros. Como exemplo, o potencial do dipolo finito ( $q$  em  $z = a$ ,  $-q$  em  $z = -a$ ) continha um termo  $P_3(\cos \theta)$ . Esses termos de ordem mais alta podem ser eliminados encolhendo o multipolo até um multipolo pontual, nesse caso mantendo o produto  $qa$  constante ( $a \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ ) para manter o mesmo momento de dipolo.
- Terceiro, a teoria de multipolo não está restrita a fenômenos elétricos. Configurações planetárias são descritas em termos de multipolos de massa, Seções 12.3 e 12.6. A radiação gravitacional depende do comportamento de quadrupolos de massa em relação ao tempo. (O campo de radiação gravitacional é um campo **tensorial**. A radiação quântica, grávitons, carrega duas unidades de momento angular.)

Também poderíamos observar que uma expansão de multipolo é, na verdade, uma decomposição nas representações irredutíveis do grupo de rotação (Seção 4.2).

### Extensão para Polinômios Ultra-Esféricos

A função geradora usada aqui,  $g(t, x)$ , é, na realidade, um caso especial de uma função geradora mais geral,

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)t^n. \quad (12.13)$$

Os coeficientes  $C_n^{(\alpha)}(x)$  são os polinômios ultra-esféricos (proporcionais aos polinômios de Gegenbauer). Para  $\alpha = 1/2$ , essa equação se reduz à Equação (12.4); isto é,  $C_n^{(1/2)}(x) = P_n(x)$ . Os casos  $a = 0$  e  $\alpha = 1$  são considerados no Capítulo 13 em conexão com os polinômios de Chebyshev.

### Exercícios

- 12.1.1** Desenvolva o potencial eletrostático para o arranjo de cargas a seguir, que representa um quadrupolo elétrico linear (Figura 12.4).
- 12.1.2** Calcule o potencial eletrostático do arranjo de cargas mostrado na Figura 12.5. Aqui temos um exemplo de dois dipolos iguais mas em direções opostas. As contribuições do dipolo se cancelam. Os termos do octopolo não se cancelam.
- 12.1.3** Mostre que o potencial eletrostático produzido por uma carga  $q$  em  $z = a$  para  $r < a$  é

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

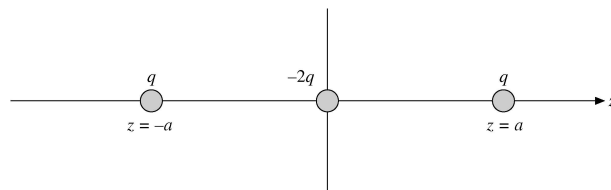


Figura 12.4: Quadrupolo elétrico linear.

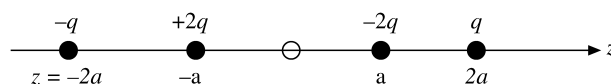


Figura 12.5: Octopolo elétrico linear.

- 12.1.4** Usando  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , determine as componentes do campo elétrico correspondente ao potencial de dipolo elétrico (puro)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2aqP_1(\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0r^2}.$$

Aqui, admitimos que  $r \gg a$ .

Resposta:  $E_r = +\frac{4aq \cos\theta}{4\pi\epsilon_0r^3}$ ,  $E_\theta = +\frac{2aq\sin\theta}{4\pi\epsilon_0r^3}$ ,  $E_\varphi = 0$ .

- 12.1.5** Um dipolo elétrico pontual de intensidade  $p^{(1)}$  é colocado em  $z = a$ ; um segundo dipolo elétrico pontual de intensidade igual, porém contrária, está na origem. Mantendo o produto  $p^{(1)}a$  constante, deixe  $a \rightarrow 0$ . Mostre que isso resulta em um quadrupolo elétrico pontual.

*Sugestão:* O Exercício 12.2.5 (quando provado) será útil.

- 12.1.6** Uma carga pontual  $q$  está no interior de uma esfera condutora oca de raio  $r_0$ . A carga  $q$  é deslocada a uma distância  $a$  do centro da esfera. Se a esfera condutora for aterrada, mostre que o potencial no interior produzido por  $q$  e a carga induzida distribuída é a mesma que a produzida por  $q$  e sua carga imagem  $q'$ . A carga imagem está à distância  $a' = r_0^2/a$  do centro, colinear com  $q$  e a origem (Figura 12.6).

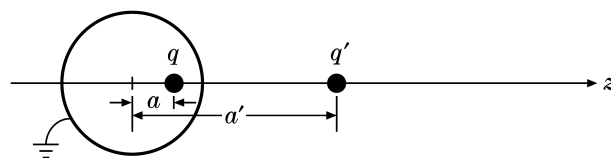


Figura 12.6: Esquema para o cálculo do potencial elétrico de uma esfera oca condutora aterrada utilizando-se o método das imagens.

*Sugestão:* Calcule o potencial eletrostático para  $a < r_0 < a'$ . Mostre que o potencial se anula para  $r = r_0$  se considerarmos  $q' = -qr_0/a$ .

- 12.1.7** Prove que

$$P_n(\cos\theta) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right).$$

*Sugestão:* Compare a expansão de polinômios de Legendre da função geradora ( $a \rightarrow \Delta z$ , Figura 12.1) com uma expansão de série de Taylor de  $1/r$ , em que a dependência de  $z$  de  $r$  muda de  $z$  para  $z - \Delta z$  (Figura 12.7).

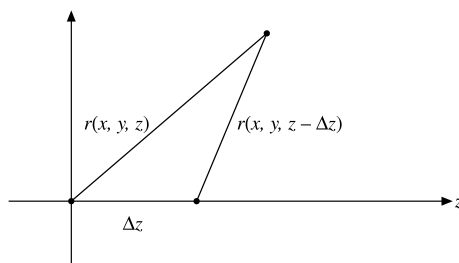


Figura 12.7:

- 12.1.8 Por diferenciação e substituição direta da forma de série, Equação (12.8), mostre que  $P_n(x)$  satisfaz a EDO de Legendre. Note que não há nenhuma restrição sobre  $x$ . Podemos ter qualquer  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$  e, na verdade, qualquer  $z$  em todo o plano complexo finito.
- 12.1.9 Os polinômios de Chebyshev (tipo II) são gerados (Equação (13.93), Seção 13.3)

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

Usando as técnicas da Seção 5.4 para séries transformadoras, desenvolva uma representação de série de  $U_n(x)$ .

Resposta: 
$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

## 12.2 Relações de Recorrência e Propriedades Especiais

### Relações de Recorrência

A função geradora de polinômios de Legendre oferece um modo conveniente para derivar relações de recorrência<sup>4</sup> e algumas propriedades especiais. Se nossa função geradora (Equação (12.4)) for diferenciada com relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}. \tag{12.14}$$

Substituindo a Equação (12.4) nessa expressão e rearranjando termos, temos

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0. \tag{12.15}$$

O lado esquerdo é uma série de potências em  $t$ . Uma vez que essa série de potências se anula para todos os valores de  $t$ , o coeficiente de cada potência de  $t$  é igual a zero, isto é, nossa série de potências é única (Seção 5.7). Esses coeficientes são encontrados separando os somatórios individuais e usando índices de somatório distintos:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{s=0}^{\infty} sP_s(x)t^{s+1} \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n = 0. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Agora, fazendo  $m = n + 1, s = n - 1$ , encontramos

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{12.17}$$

Essa é outra relação de recorrência de três termos similar (mas não idêntica) à relação de recorrência para funções de Bessel. Com essa relação de recorrência podemos construir com facilidade os polinômios de Legendre de ordem

<sup>4</sup>Também podemos aplicar diretamente a forma de série explícita da Equação (12.8).



mais alta. Se considerarmos  $n = 1$  e inserirmos os valores fáceis de achar de  $P_0(x)$  e  $P_1(x)$  (Exercício 12.1.7 ou Equação (12.8)), obtemos

$$3xP_1(x) = 2P_2(x) + P_0(x), \quad (12.18)$$

ou

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \quad (12.19)$$

Esse processo pode ser continuado indefinidamente, e alguns dos primeiros polinômios de Legendre estão relacionados na Tabela 12.1.

**Tabela 12.1** Polinômios de Legendre

---

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$

---

Por mais que essa técnica a princípio possa parecer incômoda, na verdade ela é mais eficiente para um computador digital do que a avaliação direta da série (Equação (12.8)). Para maior estabilidade (a fim de evitar acúmulo e aumento indevidos do erro de arredondamento), a Equação (12.17) é reescrita como

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{1}{n+1}[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]. \quad (12.17a)$$

Começamos com  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , e calculamos os valores **numéricos** de todos os  $P_n(x)$  para um dado valor de  $x$  até o valor desejado  $P_N(x)$ . Os valores de  $P_n(x)$ ,  $0 \leq n < N$ , estão disponíveis como um benefício adicional.

### Equações Diferenciais

Podemos obter mais informações sobre os polinômios de Legendre se agora diferenciarmos a Equação (12.4) em relação a  $x$ . Isso resulta em

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n, \quad (12.20)$$

ou

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0. \quad (12.21)$$

Como antes, o coeficiente de cada potência de  $t$  é igualado a zero e obtemos

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 2xP'_n(x) + P_n(x). \quad (12.22)$$

Podemos encontrar uma relação mais útil diferenciando a Equação (12.17) com relação a  $x$  e multiplicando por 2. A isso adicionamos  $(2n + 1)$  vezes a Equação (12.22), cancelando o termo  $P'_n$ . O resultado é

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x). \quad (12.23)$$

Numerosas equações adicionais<sup>5</sup> podem ser desenvolvidas pelas Equações (12.22) e (12.23), incluindo

$$P'_{n+1}(x) = (n + 1)P_n(x) + xP'_n(x), \tag{12.24}$$

$$P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x), \tag{12.25}$$

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - n x P_n(x), \tag{12.26}$$

$$(1 - x^2)P'_n(x) = (n + 1)xP_n(x) - (n + 1)P_{n+1}(x). \tag{12.27}$$

Diferenciando a Equação (12.26) e usando a Equação (12.25) para eliminar  $P'_{n-1}(x)$ , constatamos que  $P_n(x)$  satisfaz a EDO linear de segunda ordem

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0. \tag{12.28}$$

As equações anteriores, Equações (12.22) a (12.27), são todas EDOs de primeira ordem, porém com polinômios com dois índices diferentes. O preço para ter todos os índices iguais é uma equação diferencial de segunda ordem. A Equação (12.28) é uma EDO de **Legendre**. Agora vemos que os polinômios  $P_n(x)$  gerados pela série de potências para  $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$  satisfazem a equação de Legendre, o que, é claro, é a razão por que eles são denominados polinômios de Legendre.

Na Equação (12.28) a diferenciação é em relação a  $x$  ( $x = \cos \theta$ ). Frequentemente, encontramos a equação de Legendre expressa em termos de diferenciação com relação a  $\theta$ :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + n(n + 1)P_n(\cos \theta) = 0. \tag{12.29}$$

### Valores Especiais

Nossa função geradora nos dá ainda mais informações sobre os polinômios de Legendre. Se fizermos  $x = 1$ , a Equação (12.4) se torna

$$\frac{1}{(1 - 2t + t^2)^{1/2}} = \frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \tag{12.30}$$

usando uma expansão binomial ou a série geométrica, Exemplo 5.1.1. Mas a Equação (12.4), para  $x = 1$ , define

$$\frac{1}{(1 - 2t + t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n.$$

Comparando as duas expansões de série (unicidade da série de potências, Seção 5.7), temos

$$P_n(1) = 1. \tag{12.31}$$

Se fizermos  $x = -1$  na Equação (12.4) e usarmos

$$\frac{1}{(1 + 2t + t^2)^{1/2}} = \frac{1}{1 + t},$$

isso mostra que

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{12.32}$$

Para obter esses resultados, constatamos que a função geradora é mais conveniente do que a forma de série explícita, Equação (12.8).

<sup>5</sup>Usando o número da equação entre parênteses para denotar o lado esquerdo da equação, podemos escrever as derivadas como

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{d}{dx}(12.17) + (2n + 1) \cdot (12.22) &\Rightarrow (12.23), \\ \frac{1}{2} \{ (12.22) + (12.23) \} &\Rightarrow (12.24), \\ \frac{1}{2} \{ (12.22) - (12.23) \} &\Rightarrow (12.25), \\ (12.24)_{n \rightarrow n-1} + x \cdot (12.25) &\Rightarrow (12.26), \\ \frac{d}{dx}(12.26) + n \cdot (12.25) &\Rightarrow (12.28). \end{aligned}$$





Se considerarmos  $x = 0$  na Equação (12.4), usando a expansão binomial

$$(1 + t^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} + \dots, \quad (12.33)$$

temos<sup>6</sup>

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \quad (12.34)$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.35)$$

Esses resultados também são obtidos da Equação (12.8) por inspeção.

### Paridade

Alguns desses resultados são casos especiais da propriedade de paridade dos polinômios de Legendre. Referimo-nos mais uma vez às Equações (12.4) e (12.8). Se substituirmos  $x$  por  $-x$  e  $t$  por  $-t$ , a função geradora não muda. Daí,

$$\begin{aligned} g(t, x) &= g(-t, -x) = [1 - 2(-t)(-x) + (-t)^2]^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Comparando essas duas séries, temos

$$\boxed{P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)}, \quad (12.37)$$

isto é, as funções polinomiais são ímpares ou pares (com relação a  $x = 0, \theta = \pi/2$ ), conforme o índice  $n$  seja ímpar ou par. Essa é a propriedade de paridade<sup>7</sup> ou reflexão, que desempenha um papel tão importante na Mecânica Quântica. Para forças centrais, o índice  $n$  é uma medida do momento angular orbital, ligando assim a paridade e o momento angular orbital.

Essa propriedade de paridade é confirmada pela solução de série e pelos valores especiais tabulados na Tabela 12.1. Também poderíamos observar que a Equação (12.37) pode ser prevista por inspeção da equação (12.17), a relação de recorrência. Especificamente, se  $P_{n-1}(x)$  e  $xP_n(x)$  forem pares, então  $P_{n+1}(x)$  deve ser par.

### Limites Superiores e Inferiores para $P_n(\cos \theta)$

Por fim, além desses resultados, nossa função geradora nos habilita a estabelecer um limite superior para  $|P_n(\cos \theta)|$ . Temos

$$\begin{aligned} (1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2} &= (1 - te^{i\theta})^{-1/2} (1 - te^{-i\theta})^{-1/2} \\ &= (1 + \frac{1}{2}te^{i\theta} + \frac{3}{8}t^2e^{2i\theta} + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + \frac{1}{2}te^{-i\theta} + \frac{3}{8}t^2e^{-2i\theta} + \dots), \end{aligned} \quad (12.38)$$

com todos os coeficientes **positivos**. Nosso polinômio de Legendre,  $P_n(\cos \theta)$ , ainda o coeficiente de  $t^n$ , agora pode ser reescrito como uma soma de termos da forma

$$\frac{1}{2}a_m(e^{im\theta} + e^{-im\theta}) = a_m \cos m\theta, \quad (12.39a)$$

com todos os  $a_m$  **positivos** e  $m$  e  $n$  pares ou ímpares, de modo que

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0 \text{ or } 1}^n a_m \cos m\theta. \quad (12.39b)$$

<sup>6</sup>A notação de fatorial duplo é definida na Seção 8.1:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n), \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1), \quad (-1)!! = 1.$$

<sup>7</sup>Em coordenadas polares esféricas, a inversão do ponto  $(r, \theta, \varphi)$  passando pela origem é conseguida pela transformação  $[r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \text{ e } \varphi \rightarrow \varphi \pm \pi]$ . Então,  $\cos \theta \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ , o que corresponde a  $x \rightarrow -x$  (compare com o Exercício 2.5.8).

Essa série, Equação (12.39b), é claramente um máximo quando  $\theta = 0$  e  $\cos m\theta = 1$ . Mas, para  $x = \cos \theta = 1$ , a Equação (12.31) mostra que  $P_n(1) = 1$ . Portanto,

$$|P_n(\cos \theta)| \leq P_n(1) = 1. \tag{12.39c}$$

Um benefício adicional da Equação (12.39b) é que ela mostra que nosso polinômio de Legendre é uma combinação linear de  $\cos m\theta$ . Isso significa que os polinômios de Legendre formam um conjunto completo para quaisquer funções que possam ser expandidas para uma série de Fourier de co-seno (Seção 14.1) no intervalo  $[0, \pi]$ .

- Nesta seção, várias propriedades úteis dos polinômios de Legendre foram derivadas da função geradora, Equação (12.4).
- A representação explícita de série, Equação (12.8), oferece uma abordagem alternativa e, às vezes, superior.

## Exercícios

### 12.2.1 Dada a série

$$\alpha_0 + \alpha_2 \cos^2 \theta + \alpha_4 \cos^4 \theta + \alpha_6 \cos^6 \theta = a_0 P_0 + a_2 P_2 + a_4 P_4 + a_6 P_6,$$

expresse os coeficientes  $\alpha_i$  como um vetor coluna  $\alpha$  e os coeficientes  $a_i$  como um vetor coluna  $\mathbf{a}$  e determine as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , tais que

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}\mathbf{a} = \alpha.$$

Verifique seu cálculo mostrando que  $\mathbf{AB} = \mathbf{1}$  (matriz unitária). Repita para o caso ímpar.

$$\alpha_1 \cos \theta + \alpha_3 \cos^3 \theta + \alpha_5 \cos^5 \theta + \alpha_7 \cos^7 \theta = a_1 P_1 + a_3 P_3 + a_5 P_5 + a_7 P_7.$$

*Nota:*  $P_n(\cos \theta)$  e  $\cos^n \theta$  são tabulados em termos um do outro em AMS-55 (a referência completa é fornecida nas Leituras Adicionais do Capítulo 8).

### 12.2.2 Por diferenciação da função geradora $g(t, x)$ com relação a $t$ , multiplicando por $2t$ , e então adicionando $g(t, x)$ , mostre que

$$\frac{1 - t^2}{(1 - 2tx + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(x) t^n.$$

Esse resultado é útil no cálculo da carga induzida em uma esfera de metal aterrada por uma carga pontual  $q$ .

### 12.2.3 (a) Derive a Equação (12.27),

$$(1 - x^2) P_n'(x) = (n + 1)x P_n(x) - (n + 1) P_{n+1}(x).$$

(b) Escreva a relação entre a Equação (12.27) e as equações precedentes em forma simbólica análoga às formas simbólicas para as Equações (12.23) a (12.26).

### 12.2.4 Um octopolo elétrico pontual pode ser construído colocando um quadrupolo elétrico pontual (intensidade do pólo $p^{(2)}$ na direção $z$ ), em $z = a$ , e um quadrupolo elétrico pontual, igual mas oposto em $z = 0$ , e então deixando que $a \rightarrow 0$ , sujeito a $p^{(2)}a = \text{constante}$ . Ache o potencial eletrostático correspondente a um octopolo elétrico pontual. Pela construção do octopolo elétrico pontual, mostre que o potencial correspondente pode ser obtido por diferenciação do potencial de quadrupolo pontual.

### 12.2.5 Operando em coordenadas polares esféricas, mostre que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right] = -(n + 1) \frac{P_{n+1}(\cos \theta)}{r^{n+2}}.$$

Essa é a etapa fundamental do argumento matemático que afirma que a derivada de um multipolo leva ao seguinte multipolo mais alto.

*Sugestão:* Compare com o Exercício 2.5.12.



12.2.6 Por

$$P_L(\cos \theta) = \frac{1}{L!} \frac{\partial^L}{\partial t^L} (1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2} \Big|_{t=0}$$

mostre que

$$P_L(1) = 1, \quad P_L(-1) = (-1)^L.$$

12.2.7 Prove que

$$P'_n(1) = \frac{d}{dx} P_n(x) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

12.2.8 Mostre que  $P_n(\cos \theta) = (-1)^n P_n(-\cos \theta)$  utilizando a relação de recorrência que relaciona  $P_n, P_{n+1}$  e  $P_{n-1}$  e admitindo que você conhece  $P_0$  e  $P_1$ .

12.2.9 Pela Equação (12.38) escreva o coeficiente de  $t^2$  em termos de  $\cos n\theta$ ,  $n \leq 2$ . Esse coeficiente é  $P_2(\cos \theta)$ .

12.2.10 Escreva um programa para gerar os coeficientes  $a_s$  na forma polinomial do polinômio de Legendre

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^n a_s x^s.$$

12.2.11 (a) Calcule  $P_{10}(x)$  na faixa  $[0, 1]$  e esboce seus resultados.  
 (b) Calcule valores precisos (no mínimo até a quinta casa decimal) das cinco raízes positivas de  $P_{10}(x)$ . Compare seus valores com os relacionados em AMS-55, Tabela 25.4. (A referência completa é fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.)

12.2.12 (a) Calcule a **maior** raiz de  $P_n(x)$ , para  $n = 2(1)50$ .  
 (b) Desenvolva uma aproximação para a maior raiz a partir da representação hipergeométrica de  $P_n(x)$  (Seção 13.4) e compare os valores que obteve na parte (a) com sua aproximação hipergeométrica. Compare também com os valores relacionados em AMS-55, Tabela 25.4. (A referência completa é fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.)

12.2.13 (a) Pelo Exercício 12.2.1 e AMS-55, Tabela 22.9, desenvolva a matriz  $\mathbf{B}$   $6 \times 6$  que transformará uma série de polinômios de Legendre de ordem par até  $P_{10}(x)$  em uma série de potências  $\sum_{n=0}^5 \alpha_{2n} x^{2n}$ .  
 (b) Calcule  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{B}^{-1}$ . Verifique os elementos de  $\mathbf{A}$  em comparação com os valores relacionados em AMS-55, Tabela 22.9. (A referência completa é fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.)  
 (c) Utilizando multiplicação de matrizes, transforme algumas séries de potências pares  $\sum_{n=0}^5 \alpha_{2n} x^{2n}$  em uma série de Legendre.

12.2.14 Escreva uma sub-rotina para transformar uma série finita de potências  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$  em uma série de Legendre  $\sum_{n=0}^N b_n P_n(x)$ . Use a relação de recorrência, Equação (12.17), e siga a técnica delineada na Seção 13.3 para a série de Chebyshev.

## 12.3 Ortogonalidade

A EDO de Legendre (12.28) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_n(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0, \tag{12.40}$$

mostrando claramente que ela é auto-adjunta. Então, na dependência de satisfazer certas condições de contorno, sabemos que as soluções  $P_n(x)$  serão ortogonais. Comparando a Equação (12.40) com as Equações (10.6) e (10.8), vemos que a função peso  $w(x) = 1$ ,  $\mathcal{L} = (d/dx)(1-x^2)(d/dx)$ ,  $p(x) = 1-x^2$ , e que o autovalor  $\lambda = n(n+1)$ . Os limites de integração para  $x$  são  $\pm 1$ , em que  $p(\pm 1) = 0$ . Então, para  $m \neq n$ , a Equação (10.34) se torna

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0, \tag{12.41}$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta)P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, \tag{12.42}$$

mostrando que  $P_n(x)$  e  $P_m(x)$  são ortogonais para o intervalo  $[-1, 1]$ . Essa ortogonalidade também pode ser demonstrada usando a definição de Rodrigues de  $P_n(x)$  (compare com a Seção 12.4, Exercício 12.4.2).

Precisaremos avaliar a integral (Equação (12.41)) quando  $n = m$ . Por certo, já não é mais zero. Pela nossa função geradora,

$$(1 - 2tx + t^2)^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right]^2. \quad (12.43)$$

Integrando de  $x = -1$  a  $x = +1$ , temos

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx; \quad (12.44)$$

os termos cruzados da série desaparecem por meio da Equação (12.42). Usando  $y = 1 - 2tx + t^2$ ,  $dy = -2t dx$ , obtemos

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right). \quad (12.45)$$

Expandindo essa expressão em uma série de potências (Exercício 5.4.1), temos

$$\frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}. \quad (12.46)$$

Comparando coeficientes da série de potências das Equações (12.44), e (12.46), devemos ter

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (12.47)$$

Combinando a Equação (12.42) com a Equação (12.47), temos a condição de ortonormalidade

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}. \quad (12.48)$$

Voltaremos a esse resultado na Seção (12.6), quando construirmos os harmônicos esféricos ortonormais.

### Expansão de Funções, Série de Legendre

Além da ortogonalidade, a teoria de Sturm-Liouville implica que os polinômios de Legendre formam um conjunto completo. Então, vamos admitir que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = f(x) \quad (12.49)$$

convirja na média (Seção 10.4) no intervalo  $[-1, 1]$ . Isso exige que  $f(x)$  e  $f'(x)$  sejam ao menos seccionalmente contínuas nesse intervalo. Os coeficientes  $a_n$  são encontrados multiplicando a série por  $P_m(x)$  e integrando termo a termo. Usando a propriedade de ortogonalidade expressa nas Equações (12.42) e (12.48), obtemos

$$\frac{2}{2m+1} a_m = \int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx. \quad (12.50)$$

Substituímos a variável de integração  $x$  por  $t$  e o índice  $m$  por  $n$ . Então, substituindo na Equação (12.49), temos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left( \int_{-1}^1 f(t)P_n(t) dt \right) P_n(x). \quad (12.51)$$

<sup>8</sup>Na Seção 10.4 essas integrais eram interpretadas como produtos internos em um espaço vetorial (funcional) linear. Notações alternativas são

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^* P_m(x) dx \equiv \langle P_n | P_m \rangle \equiv (P_n, P_m).$$

A forma  $\langle \rangle$ , popularizada por Dirac, é comum na literatura física. A forma  $()$  é mais comum na literatura matemática.



Essa expansão em uma série de polinômios de Legendre costuma ser denominada série de Legendre.<sup>9</sup> Suas propriedades são bem similares às da mais familiar série de Fourier (Capítulo 14). Em particular, podemos usar a propriedade da ortogonalidade (Equação (12.48)) para mostrar que a série é única.

Em um nível mais abstrato (e mais poderoso), a Equação (12.51) dá a representação de  $f(x)$  no espaço vetorial de polinômios de Legendre (um espaço de Hilbert, Seção 10.4).

Do ponto de vista de transformadas integrais (Capítulo 15), a Equação (12.50) pode ser considerada uma transformada finita de Legendre de  $f(x)$ . Então, a equação (12.51) é a transformada inversa. Ela também pode ser interpretada em termos dos **operadores de projeção** da teoria quântica. Podemos considerar  $\mathcal{P}_m$  em

$$[\mathcal{P}_m f](x) \equiv P_m(x) \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 P_m(t) [f(t)] dt$$

um operador (integral), pronto para operar sobre  $f(t)$ . (A  $f(t)$  entraria nos colchetes como um fator no integrando.) Então, pela Equação (12.50),

$$[\mathcal{P}_m f](x) = a_m P_m(x).^{10}$$

O operador  $\mathcal{P}_m$  projeta a  $m$ -ésima componente da função  $f$ .

A Equação (12.3), que leva diretamente à definição de função geradora de polinômios de Legendre, é uma expansão de Legendre de  $1/r_1$ . Essa expansão de Legendre de  $1/r_1$  ou  $1/r_{12}$  aparece em diversos exercícios da Seção 12.8. Indo além de um campo de Coulomb, muitas vezes a  $1/r_{12}$  é substituída por um potencial  $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ , e a solução do problema é novamente efetivada por uma expansão de Legendre.

A série de Legendre, Equação (12.49), foi tratada como uma função **conhecida**  $f(x)$  que escolhemos arbitrariamente para expandir em uma série de polinômios de Legendre. Às vezes, a origem e a natureza das séries de Legendre são diferentes. Nos exemplos a seguir consideramos funções **desconhecidas** que sabemos que podem ser representadas por uma série de Legendre por causa da equação diferencial que as funções desconhecidas satisfazem. Como antes, o problema é determinar os coeficientes desconhecidos na expansão de série. Contudo, aqui, os coeficientes não são encontrados pela Equação (12.50). Mais exatamente, são determinados pela exigência de que a série de Legendre satisfaça uma solução em um contorno. Esses são problemas de valor de contorno.

### Exemplo 12.3.1 CAMPO GRAVITACIONAL DA TERRA

Um exemplo de uma série de Legendre é dado pela descrição do potencial gravitacional da Terra  $U$  (para pontos externos), desprezando efeitos azimutais. Sendo

$$R = \text{raio equatorial} = 6378,1 \pm 0,1 \text{ km}$$

$$\frac{GM}{R} = 62,494 \pm 0,001 \text{ km}^2/\text{s}^2,$$

escrevemos

$$U(r, \theta) = \frac{GM}{R} \left[ \frac{R}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right], \quad (12.52)$$

uma série de Legendre. Movimentos de satélites artificiais mostraram que

$$a_2 = (1.082.635 \pm 11) \times 10^{-9},$$

$$a_3 = (-2.531 \pm 7) \times 10^{-9},$$

$$a_4 = (-1.600 \pm 12) \times 10^{-9}.$$

Essa é a famosa deformação da Terra em forma de pêra. Outros coeficientes foram calculados até  $n = 20$ . Note que  $P_1$  é omitido porque a origem a partir da qual  $r$  é medido é o centro de massa da Terra ( $P_1$  representaria um deslocamento).

Dados de satélites mais recentes permitem uma determinação da dependência longitudinal do campo gravitacional da Terra. Tal dependência pode ser descrita por uma série de Laplace (Seção 12.6). ■

<sup>9</sup>Note que a Equação (12.50) considera  $a_m$  uma integral **definida**, isto é, um número para uma dada  $f(x)$ .

<sup>10</sup>As variáveis dependentes são arbitrárias. Aqui  $x$  veio de  $x$  em  $\mathcal{P}_m$ .

### Exemplo 12.3.2 ESFERA EM UM CAMPO UNIFORME

Uma outra ilustração da utilização de polinômios de Legendre é dada pelo problema de uma esfera condutora neutra (raio  $r_0$ ) colocada em um campo elétrico (previamente) uniforme (Figura 12.8). O problema é achar o novo potencial eletrostático perturbado. Se denominarmos o potencial eletrostático<sup>11</sup>  $V$ , ele satisfaz

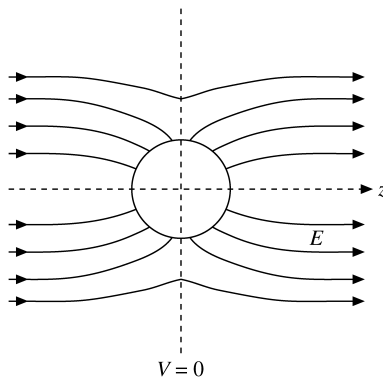


Figura 12.8: Esfera condutora em um campo uniforme.

$$\nabla^2 V = 0, \tag{12.53}$$

a equação de Laplace. Seleccionamos coordenadas polares esféricas por causa do formato esférico do condutor. (Isso simplificará a aplicação da condição de contorno na superfície do condutor.) Separando variáveis e consultando a Tabela 9.2, podemos escrever o potencial desconhecido  $V(r, \theta)$  na região fora da esfera como uma combinação linear de soluções:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \tag{12.54}$$

Não aparece nenhuma dependência de  $\varphi$  por causa da simetria axial de nosso problema. (O centro da esfera condutora é considerado a origem e o eixo  $z$  é orientado paralelamente ao campo uniforme original.)

Poderíamos observar que  $n$  é um inteiro, porque somente para  $n$  inteiro é que a dependência de  $\theta$  é bem-comportada em  $\cos \theta = \pm 1$ . Para  $n$  não-inteiro as soluções da equação de Legendre divergem nas extremidades do intervalo  $[-1, 1]$ , os pólos  $\theta = 0, \pi$  da esfera (compare com o Exemplo 5.2.4 e Exercícios 5.2.15 e 9.5.5). É por essa mesma razão que a segunda solução da equação de Legendre,  $Q_n$ , também é excluída.

Agora recorremos às nossas condições de contorno (Dirichlet) para determinar os  $a_n$  e  $b_n$  desconhecidos de nossa solução de série, Equação (12.54). Se o campo eletrostático original não-perturbado é  $E_0$ , impomos, como condição de contorno,

$$V(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta). \tag{12.55}$$

Uma vez que nossa série de Legendre é única, podemos igualar os coeficientes de  $P_n(\cos \theta)$  na Equação (12.54) ( $r \rightarrow \infty$ ) e na Equação (12.55), para obter

$$a_n = 0, \quad n > 1 \quad \text{e} \quad n = 0, \quad a_1 = -E_0. \tag{12.56}$$

Se  $a_n \neq 0$ , para  $n > 1$ , esses termos dominariam em  $r$  grande e a condição de contorno (Equação (12.55)) não poderia ser satisfeita.

Como uma segunda condição de contorno, podemos escolher que a esfera condutora e o plano  $\theta = \pi/2$  estejam em potencial zero, o que significa que a Equação (12.54) agora se torna

$$V(r = r_0) = \frac{b_0}{r_0} + \left( \frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0 \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r_0^{n+1}} = 0. \tag{12.57}$$

<sup>11</sup>Devemos salientar que isso não é uma apresentação de uma expansão de série de Legendre de um  $V(\cos \theta)$  conhecido. Aqui, estamos de volta aos problemas de **condição de contorno** de EDPs.



Para que isso possa valer para todos os valores de  $\theta$ , cada coeficiente de  $P_n(\cos \theta)$  deve desaparecer.<sup>12</sup> Daí,

$$b_0 = 0,^{13} \quad b_n = 0, \quad n \geq 2, \quad (12.58)$$

enquanto

$$b_1 = E_0 r_0^3. \quad (12.59)$$

O potencial eletrostático (fora da esfera) então é

$$V = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{E_0 r_0^3}{r^2} P_1(\cos \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta) \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right). \quad (12.60)$$

Na Seção 1.16 mostramos que uma solução da equação de Laplace que satisfizesse as condições de contorno em todo o contorno era única. O potencial eletrostático  $V$ , como dado pela Equação (12.60), é uma solução da equação de Laplace. Ela satisfaz nossas condições de fronteira e, portanto, é a solução da equação de Laplace para esse problema.

Podemos mostrar ainda (Exercício 12.3.13) que há uma densidade de carga superficial induzida

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (12.61)$$

sobre a superfície da esfera e um momento de dipolo elétrico induzido (Exercício 12.3.13)

$$P = 4\pi r_0^3 \varepsilon_0 E_0. \quad (12.62)$$

### Exemplo 12.3.3 POTENCIAL ELETROSTÁTICO DE UM ANEL DE CARGA

Como mais um exemplo, consideramos o potencial eletrostático produzido por um anel condutivo que transporta uma carga elétrica total  $q$  (Figura 12.9). Pela eletrostática (e Seção 1.14), o potencial  $\psi$  satisfaz a equação de Laplace. Separando variáveis em coordenadas polares esféricas (compare com a Tabela 9.2), obtemos

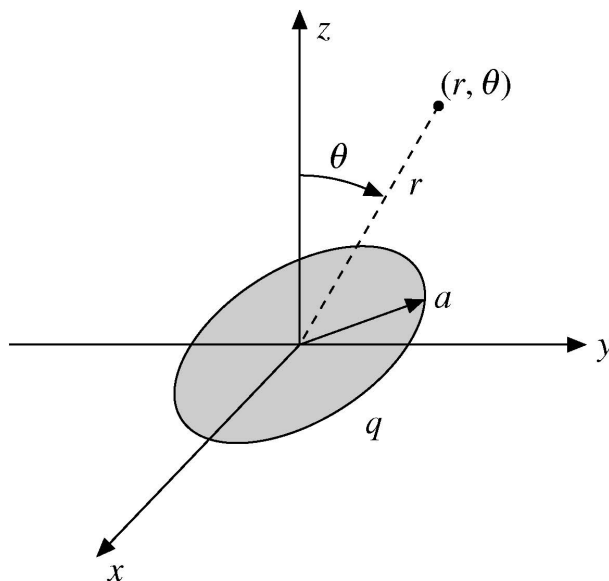


Figura 12.9: Anel condutor carregado.

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad r > a. \quad (12.63a)$$

<sup>12</sup>Novamente, isso equivale a dizer que uma expansão de série em polinômios de Legendre (ou qualquer conjunto completo ortogonal) é única.

<sup>13</sup>O coeficiente de  $P_0$  é  $b_0/r_0$ . Estabelecemos  $b_0 = 0$  porque não há nenhuma carga líquida na esfera. Se houver uma carga líquida  $q$ , então  $b_0 \neq 0$ .

Aqui,  $a$  é o raio do anel que admitimos estar no plano  $\theta = \pi/2$ . Não há nenhuma dependência de  $\varphi$  (azimutal) por causa da simetria cilíndrica do sistema. Os termos com expoente positivo na dependência radial foram rejeitados porque o potencial deve ter um comportamento assintótico,

$$\psi \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \quad r \gg a. \quad (12.63b)$$

O problema é determinar os coeficientes  $c_n$  na Equação (12.63a). Isso pode ser feito avaliando  $\psi(r, \theta)$  em  $\theta = 0, r = z$ , e comparando com um cálculo independente do potencial pela lei de Coulomb. Na realidade, estamos usando uma condição de contorno ao longo do eixo  $z$ . Pela lei de C (com todas as cargas equidistantes),

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}}, \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ r = z, \end{cases} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} \left(\frac{a}{z}\right)^{2s}, \quad z > a. \end{aligned} \quad (12.63c)$$

A última etapa usa o resultado do Exercício 8.1.15. Agora, a Equação (12.63a) avaliada em  $\theta = 0, r = z$  (com  $P_n(1) = 1$ ), resulta em

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{a^n}{z^{n+1}}, \quad r = z. \quad (12.63d)$$

Comparando as Equações (12.63c) e (12.63d), obtemos  $c_n = 0$  para  $n$  ímpar. Estabelecendo  $n = 2s$ , temos

$$c_{2s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}, \quad (12.63e)$$

e nosso potencial eletrostático  $\psi(r, \theta)$  é dado por

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2s} P_{2s}(\cos \theta), \quad r > a. \quad (12.63f)$$

O análogo magnético desse problema aparece no Exemplo 12.5.3. ■

### Exercícios

- 12.3.1** Você construiu um conjunto de funções ortogonais pelo processo de Gram-Schmidt (Seção 10.3), considerando  $u_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$ , em ordem crescente com  $w(x) = 1$  e um intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . Prove que a  $n$ ésima dessas funções construídas é proporcional a  $P_n(x)$ .  
*Sugestão:* Use indução matemática.
- 12.3.2** Expanda a função delta de Dirac em uma série de polinômios de Legendre usando o intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ .
- 12.3.3** Verifique as expansões de função delta de Dirac

$$\begin{aligned} \delta(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \\ \delta(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2} P_n(x). \end{aligned}$$

Essas expressões aparecem em uma resolução da expansão da onda plana de Rayleigh (Exercício 12.4.7) em ondas esféricas incidente e emergente.

*Nota:* Admita que **toda** função delta de Dirac é coberta quando integrada no intervalo  $[-1, 1]$ .

- 12.3.4** Nêutrons (massa 1) são espalhados por um núcleo de massa  $A$  ( $A > 1$ ). No sistema de centro de massa, o espalhamento é isotrópico. Então, no sistema de laboratório, a média do co-seno do ângulo de deflexão do nêutron é

$$\langle \cos \psi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{A \cos \theta + 1}{(A^2 + 2A \cos \theta + 1)^{1/2}} \sin \theta \, d\theta.$$

Mostre, por expansão do denominador, que  $\langle \cos \psi \rangle = 2/3A$ .





**12.3.5** Uma determinada função  $f(x)$  definida no intervalo  $[-1, 1]$  é expandida em uma série de Legendre nesse mesmo intervalo. Mostre que a expansão é única.

**12.3.6** Uma função  $f(x)$  é expandida em uma série de Legendre  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ . Mostre que

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n^2}{2n+1}.$$

Essa é a forma de Legendre da série de Fourier identidade de Parseval, Exercício 14.4.2. Ela também ilustra a desigualdade de Bessel, Equação (10.72), tornando-se uma igualdade para um conjunto completo.

**12.3.7** Derive a relação de recorrência

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

pela função geradora de polinômios de Legendre.

**12.3.8** Avalie  $\int_0^1 P_n(x) dx$ .

$$\text{Resposta: } n = 2s; \quad 1 \text{ para } s = 0, 0 \text{ para } s > 0, \\ n = 2s + 1; \quad P_{2s}(0)/(2s+2) = (-1)^s(2s-1)!!/1(2s+2)!!$$

*Sugestão:* Use uma relação de recorrência para substituir  $P_n(x)$  por derivadas e então integre por inspeção. Alternativamente, você pode integrar a função geradora.

**12.3.9** (a) Para

$$f(x) = \begin{cases} +1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0, \end{cases}$$

mostre que

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \right]^2.$$

(b) Testando a série, prove que ela é convergente.

**12.3.10** Prove que

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2)P'_n P'_m dx = 0, \quad \text{a menos que } m = n \pm 1, \\ = \frac{2n(n^2-1)}{4n^2-1} \delta_{m,n-1}, \quad \text{se } m < n. \\ = \frac{2n(n+2)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \delta_{m,n+1}, \quad \text{se } m > n.$$

**12.3.11** A amplitude de uma onda espalhada é dada por

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp[i\delta_l] \text{sen } \delta_l P_l(\cos \theta).$$

Aqui,  $\theta$  é o ângulo de espalhamento,  $l$  é o autovalor do momento angular,  $\hbar k$  é o momentum incidente e  $\delta_l$  é a mudança de fase produzida pelo potencial central que está fazendo o espalhamento. A seção de choque total é  $\sigma_{\text{tot}} = \int |f(\theta)|^2 d\Omega$ . Mostre que

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l.$$

**12.3.12** A taxa de contagem de coincidências,  $W(\theta)$ , em um experimento de correlação angular gama-gama tem a forma

$$W(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} P_{2n}(\cos \theta).$$

Mostre que os dados na faixa  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  podem, em princípio, definir a função  $W(\theta)$  (e permitir uma determinação dos coeficientes  $a_{2n}$ ). Isso significa que, embora os dados no intervalo  $0 \leq \theta < \pi/2$  possam ser úteis como verificação, não são essenciais.

**12.3.13** Uma esfera condutora de raio  $r_0$  é colocada em um campo elétrico inicialmente uniforme,  $\mathbf{E}_0$ . Mostre o seguinte:

(a) A densidade de carga superficial induzida é

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

(b) O momento de dipolo elétrico induzido é

$$P = 4\pi r_0^3 \varepsilon_0 E_0.$$

O momento de dipolo elétrico induzido pode ser calculado pela carga superficial [parte (a)] ou observando que o campo elétrico final  $\mathbf{E}$  é o resultado da sobreposição de um campo de dipolo ao campo uniforme original.

**12.3.14** Uma carga  $q$  é deslocada uma distância  $a$  ao longo do eixo  $z$  a partir do centro de uma cavidade esférica de raio  $R$ .

(a) Mostre que o campo elétrico médio sobre o volume  $a \leq r \leq R$  é zero.

(b) Mostre que o campo elétrico médio calculado sobre o volume  $0 \leq r \leq a$  é

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}E_z = -\hat{\mathbf{z}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \quad (\text{unidades SI}) = -\hat{\mathbf{z}}\frac{nqa}{3\varepsilon_0},$$

em que  $n$  é o número de tais cargas deslocadas por unidade de volume. Esse é um cálculo básico na polarização de um dielétrico.

*Sugestão:*  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ .

**12.3.15** Determine o potencial eletrostático (expansão de Legendre) de um anel circular de carga elétrica para  $r < a$ .

**12.3.16** Calcule o campo elétrico produzido pelo anel condutor carregado do Exemplo 12.3.3 para

(a)  $r > a$ , (b)  $r < a$ .

**12.3.17** Como uma extensão do Exemplo 12.3.3, ache o potencial  $\psi(r, \theta)$  produzido por um disco condutor carregado, Figura 12.10, para  $r > a$ , o raio do disco. A densidade de carga  $\sigma$  (sobre cada lado do disco) é

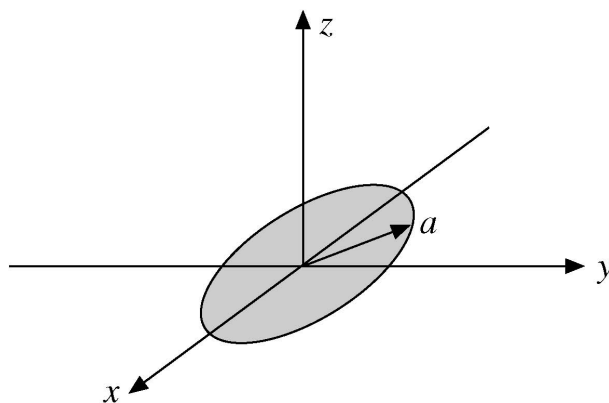


Figura 12.10: Disco condutor carregado.

$$\sigma(\rho) = \frac{q}{4\pi a(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

*Sugestão:* A integral definida que você obtém pode ser válida como uma função beta, Seção 8.4. Para mais detalhes, veja a Seção 5.03 de Smythe em Leituras Adicionais.

$$\text{Resposta: } \psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta).$$

**12.3.18** Pelo resultado do Exercício 12.3.17, calcule o potencial do disco. Uma vez que você está violando a condição  $r > a$ , justifique seu cálculo.

*Sugestão:* Você pode encontrar a série apresentada no Exercício 5.2.9.



- 12.3.19** O hemisfério definido por  $r = a, 0 \leq \theta < \pi/2$ , tem um potencial eletrostático  $+V_0$ . O hemisfério  $r = a, \pi/2 < \theta \leq \pi$  tem um potencial eletrostático  $-V_0$ . Mostre que o potencial nos pontos internos é

$$\begin{aligned} V &= V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n}(0) P_{2n+1}(\cos \theta) \\ &= V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

*Sugestão:* Você precisa do Exercício 12.3.8.

- 12.3.20** Uma esfera condutora de raio  $a$  é dividida em dois hemisférios separados eletricamente por uma fina barreira isolante em seu equador. O hemisfério superior é mantido em um potencial  $V_0$ , o hemisfério inferior, em  $-V_0$ .

(a) Mostre que o potencial eletrostático **externo** aos dois hemisférios é

$$V(r, \theta) = V_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2s+2} P_{2s+1}(\cos \theta).$$

(b) Calcule a densidade de carga elétrica  $\sigma$  na superfície externa. Note que sua série diverge em  $\cos \theta = \pm 1$ , como você esperava da capacitância infinita desse sistema (espessura zero para a barreira isolante).

$$\begin{aligned} \text{RESP. } \sigma &= \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} \\ &= \varepsilon_0 V_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} P_{2s+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

- 12.3.21** Na notação da Seção 10.4,  $\varphi_s(x) = \sqrt{(2s+1)/2} P_s(x)$ , um polinômio de Legendre é renormalizado para unidade. Explique como  $|\varphi_s\rangle\langle\varphi_s|$  age como um operador de projeção. Em particular, mostre que, se  $|f\rangle = \sum_n a'_n |\varphi_n\rangle$ , então

$$|\varphi_s\rangle\langle\varphi_s|f\rangle = a'_s |\varphi_s\rangle.$$

- 12.3.22** Expanda  $x^8$  como uma série de Legendre. Determine os coeficientes de Legendre pela Equação (12.50),

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 x^8 P_m(x) dx.$$

Verifique seus valores comparando-os com AMS-55, Tabela 22.9. (A referência completa é fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8.) Isso ilustra a expansão de uma função simples  $f(x)$ . Na verdade, se  $f(x)$  for expressa como uma série de potências, a técnica do Exercício 12.2.14 é mais rápida e também mais precisa.

*Sugestão:* Pode-se usar quadratura gaussiana para avaliar a integral.

- 12.3.23** Calcule e tabule o potencial eletrostático criado por um anel de carga, Exemplo 12.3.3, para  $r/a = 1, 5(0, 5)5, 0$  e  $\theta = 0^\circ(15^\circ)90^\circ$ . Vá até o termo  $P_{22}(\cos \theta)$ .

*Nota:* A convergência de sua série será lenta para  $r/a = 1, 5$ . O truncamento da série em  $P_{22}$  limita você a uma precisão de cerca de quatro algarismos significativos.

**Valor de verificação.** Para  $r/a = 2, 5$  e  $\theta = 60^\circ, \psi = 0, 40272(q/4\pi\varepsilon_0 r)$ .

- 12.3.24** Calcule e tabule o potencial eletrostático criado por um disco carregado, Exercício 12.3.17, para  $r/a = 1, 5(0, 5)5, 0$  e  $\theta = 0^\circ(15^\circ)90^\circ$ . Vá até o termo  $P_{22}(\cos \theta)$ .

**Valor de verificação.** Para  $r/a = 2, 0$  e  $\theta = 15^\circ, \psi = 0, 46638(q/4\pi\varepsilon_0 r)$ .

- 12.3.25** Calcule os primeiros cinco coeficientes (que não desaparecem) na expansão de série de Legendre de  $f(x) = 1 - |x|$  usando a Equação (12.51) integração numérica. Na verdade, esses coeficientes podem ser obtidos em forma fechada. Compare seus coeficientes com os obtidos pelo Exercício 13.3.28.

Resposta:  $a_0 = 0, 5000, a_2 = -0, 6250, a_4 = 0, 1875, a_6 = -0, 1016, a_8 = 0, 0664$ .

**12.3.26** Calcule e tabule o potencial eletrostático externo criado pelos dois hemisférios carregados do Exercício 12.3.20, para  $r/a = 1, 5(0, 5)5, 0$  e  $\theta = 0^\circ(15^\circ)90^\circ$ . Vá até o termo  $P_{23}(\cos \theta)$ .

**Valor de verificação.** Para  $r/a = 2, 0$  e  $\theta = 45^\circ, V = 0, 27066V_0$ .

**12.3.27** (a) Dados  $f(x) = 2, 0, |x| < 0, 5; f(x) = 0, 0, 5 < |x| < 1, 0$ , expanda  $f(x)$  em uma série de Legendre e calcule os coeficientes  $a_n$  até  $a_{80}$  (analiticamente).

(b) Avalie  $\sum_{n=0}^{80} a_n P_n(x)$ , para  $x = 0, 400(0, 005)0, 600$ . Esboce seus resultados.

*Nota:* Isso ilustra o fenômeno de Gibbs da Seção 14.5 e o perigo de tentar calcular com uma expansão de série na vizinhança de uma descontinuidade.

## 12.4 Definições Alternativas de Polinômios de Legendre

### Fórmula de Rodrigues

A forma de série dos polinômios de Legendre (Equação (12.8)) da Seção (12.1) pode ser transformada como segue. Pela Equação (12.8),

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-2r)!(n-r)!} x^{n-2r}. \quad (12.64)$$

Para  $n$  inteiro,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{1}{2^n r!(n-r)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n-2r} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} x^{2n-2r}. \end{aligned} \quad (12.64a)$$

Observe a extensão do limite superior. Solicitamos ao leitor que mostre no Exercício 12.4.1 que os termos adicionais  $[n/2] + 1$  a  $n$  no somatório nada contribuem. Contudo, o efeito desses termos extras é permitir a substituição do novo somatório por  $(x^2 - 1)^n$  (mais uma vez, o teorema binomial) para obter

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n. \quad (12.65)$$

Essa é a fórmula de Rodrigues. Ela é útil para provar muitas das propriedades dos polinômios de Legendre, tal como ortogonalidade. Uma aplicação relacionada é vista no Exercício 12.4.3. A definição de Rodrigues é estendida na Seção (12.5) para definir as funções associadas de Legendre. Na Seção (12.7) ela é usada para identificar as autofunções do momento angular orbital.

### Integral de Schlaefli

A fórmula de Rodrigues nos dá um meio de desenvolver uma representação integral de  $P_n(z)$ . Usando a fórmula integral de Cauchy (Seção 6.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (12.66)$$

com

$$f(z) = (z^2 - 1)^n, \quad (12.67)$$

temos

$$(z^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{t-z} dt. \quad (12.68)$$

Diferenciando  $n$  vezes em relação a  $z$  e multiplicando por  $1/2^n n!$ , temos

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n = \frac{2^{-n}}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad (12.69)$$

sendo que o contorno inclui o ponto  $t = z$ .

Essa é a integral de Schlaefli. Margenau e Murphy<sup>14</sup> usam essa expressão para derivar as relações de recorrência que obtemos da função geradora.

Pode-se mostrar imediatamente que a integral de Schlaefli satisfaz a equação de Legendre por diferenciação e substituição direta (Figura 12.11). Obtemos

<sup>14</sup>H. Margenau e G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 2<sup>a</sup> ed., Princeton, NJ: Van Nostrand (1956), Seção 3.5.

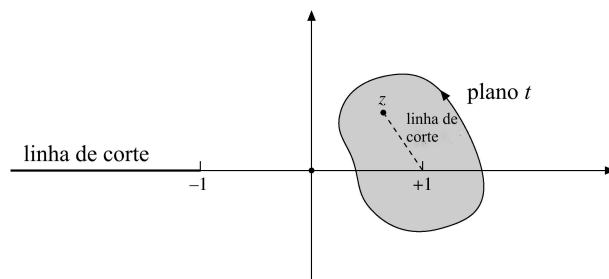


Figura 12.11: Contorno da integral de Schlaefli.

$$(1 - z^2) \frac{d^2 P_n}{dz^2} - 2z \frac{dP_n}{dz} + n(n + 1)P_n = \frac{n + 1}{2^n 2\pi i} \oint \frac{d}{dt} \left[ \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+2}} \right] dt. \quad (12.70)$$

Para  $n$  inteiro, nossa função  $(t^2 - 1)^{n+1}/(t - z)^{n+2}$  é de valor único e a integral ao redor do caminho fechado se anula. A integral de Schlaefli também pode ser usada para definir  $P_\nu(z)$  para  $\nu$  não-inteiro integrando ao redor dos pontos  $t = z, t = 1$ , mas sem cruzar a linha de corte  $-1$  a  $-\infty$ . Também poderíamos perfeitamente circundar os pontos  $t = z$  e  $t = -1$ , mas isso não levaria a nada de novo. Um contorno ao redor de  $t = +1$  e  $t = -1$  levaria a uma segunda solução,  $Q_\nu(z)$ , Seção (12.10).

### Exercícios

**12.4.1** Mostre que **cada** termo do somatório

$$\sum_{r=[n/2]+1}^n \left( \frac{d}{dx} \right)^r \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} x^{2n-2r}$$

se anula ( $r$  e  $n$  inteiros).

**12.4.2** Usando a fórmula de Rodrigues, mostre que os  $P_n(x)$  são ortogonais e que

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

*Sugestão:* Use a fórmula de Rodrigues e integre por partes.

**12.4.3** Mostre que  $\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0$  quando  $m < n$ .

*Sugestão:* Use a fórmula de Rodrigues ou expanda  $x^m$  em polinômios de Legendre.

**12.4.4** Mostre que

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} n! n!}{(2n + 1)!}.$$

*Nota:* A intenção é que você use a fórmula de Rodrigues e integre por partes, mas veja também se consegue obter o resultado pela Equação (12.8) por inspeção.

**12.4.5** Mostre que

$$\int_{-1}^1 x^{2r} P_{2n}(x) dx = \frac{2^{2n+1} (2r)! (r + n)!}{(2r + 2n + 1)! (r - n)!}, \quad r \geq n.$$

**12.4.6** Como generalização dos Exercícios 12.4.4 e 12.4.5, mostre que as expansões de Legendre de  $x^s$  são

$$(a) \quad x^{2r} = \sum_{n=0}^r \frac{2^{2n} (4n + 1) (2r)! (r + n)!}{(2r + 2n + 1)! (r - n)!} P_{2n}(x), \quad s = 2r,$$

$$(b) \quad x^{2r+1} = \sum_{n=0}^r \frac{2^{2n+1} (4n + 3) (2r + 1)! (r + n + 1)!}{(2r + 2n + 3)! (r - n)!} P_{2n+1}(x), \quad s = 2r + 1.$$

**12.4.7** Uma onda plana pode ser expandida em uma série de ondas esféricas pela equação de Rayleigh,

$$e^{ikr \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) P_n(\cos \gamma).$$

Mostre que  $a_n = i^n (2n + 1)$ .

*Sugestão:*

1. Use a ortogonalidade dos  $P_n$  para resolver para  $a_n j_n(kr)$ .
2. Diferencie  $n$  vezes com relação a  $(kr)$  e estabeleça  $r = 0$  para eliminar a dependência de  $r$ .
3. Avalie a integral remanescente pelo Exercício 12.4.4.

*Nota:* Esse problema também pode ser tratado observando que ambos os lados da equação satisfazem a equação de Helmholtz. A igualdade pode ser estabelecida mostrando que as soluções têm o mesmo comportamento na origem e também se comportam da mesma maneira em grandes distâncias. Um tipo de solução “por inspeção” é desenvolvido na Seção 9.7 usando funções de Green.

**12.4.8** Verifique a equação de Rayleigh do Exercício 12.4.7 começando pelas seguintes etapas:

(a) Diferencie com relação a  $(kr)$  para estabelecer

$$\sum_n a_n j'_n(kr) P_n(\cos \gamma) = i \sum_n a_n j_n(kr) \cos \gamma P'_n(\cos \gamma).$$

(b) Use uma relação de recorrência para substituir  $\cos \gamma P'_n(\cos \gamma)$  por uma combinação linear de  $P_{n-1}$  e  $P_{n+1}$ .

(c) Use uma relação de recorrência para substituir  $j'_n$  por uma combinação linear de  $j_{n-1}$  e  $j_{n+1}$ .

**12.4.9** Pelo Exercício 12.4.7, mostre que

$$j_n(kr) = \frac{1}{2i^n} \int_{-1}^1 e^{ikr\mu} P_n(\mu) d\mu.$$

Isso significa que (à parte um fator constante) a função esférica de Bessel  $j_n(kr)$  é a transformada de Fourier da polinomial de Legendre  $P_n(\mu)$ .

**12.4.10** As funções polinomiais de Legendre e as funções esféricas de Bessel são relacionadas por

$$j_n(z) = \frac{1}{2} (-i)^n \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Verifique essa relação transformando o lado direito em

$$\frac{z^n}{2^{n+1} n!} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2n+1} \theta d\theta$$

e usando o Exercício 11.7.8.

**12.4.11** Por avaliação direta da integral de Schlaefli, mostre que  $P_n(1) = 1$ .

**12.4.12** Explique por que o contorno da integral de Schlaefli, Equação (12.69), é escolhido para incluir os pontos  $t = z$  e  $t = 1$  quando  $n \rightarrow \nu$ , não sendo inteiro.

**12.4.13** Em trabalho numérico (por exemplo, a quadratura de Gauss-Legendre), é útil estabelecer que  $P_n(x)$  tem  $n$  zeros reais no interior de  $[-1, 1]$ . Mostre que é isso mesmo.

*Sugestão:* O teorema de Rolle mostra que a derivada de primeira ordem de  $(x^2 - 1)^{2n}$  tem um zero no interior de  $[-1, 1]$ . Estenda esse argumento para as derivadas de segunda, terceira e, por fim, de enésima ordem.

## 12.5 Funções Associadas de Legendre

Quando a equação de Helmholtz é separada em coordenadas polares esféricas (Seção 9.3), uma das EDOs separadas é a equação associada de Legendre

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0. \quad (12.71)$$



Com  $x = \cos \theta$ , essa expressão se torna

$$\boxed{(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n^m(x) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0.} \quad (12.72)$$

Se a constante de separação azimutal  $m^2 = 0$ , temos a equação de Legendre, Equação (12.28). As soluções regulares  $P_n^m(x)$  (com  $m$  não necessariamente zero, mas inteiro) são

$$v \equiv P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (12.73a)$$

com  $m \geq 0$  inteiro.

Um modo de desenvolver a solução da equação associada de Legendre é começar com a equação de Legendre normal e convertê-la na equação associada de Legendre usando diferenciação múltipla. Essas diferenciações múltiplas são sugeridas pela Equação (12.73a), a geração de polinômios associados de Legendre, e harmônicos esféricos da Seção (12.6) de um modo mais geral, na Seção 4.3, usando operadores de elevação ou redução da Equação (4.69) repetidas vezes. Para sua forma derivada, veja o Exercício 12.6.8. Consideremos a equação de Legendre

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0, \quad (12.74)$$

e, com a ajuda da fórmula de Leibniz,<sup>15</sup> diferenciamos  $m$  vezes. O resultado é

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0, \quad (12.75)$$

em que

$$u \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (12.76)$$

A Equação (12.74) não é auto-adjunta. Para colocá-la na forma auto-adjunta e converter a função de peso a 1, substituímos  $u(x)$  por

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (12.73b)$$

Resolvendo para  $u$  e diferenciando, obtemos

$$u' = \left( v' + \frac{mxv}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{-m/2}, \quad (12.77)$$

$$u'' = \left[ v'' + \frac{2mxv'}{1-x^2} + \frac{mv}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v}{(1-x^2)^2} \right] \cdot (1-x^2)^{-m/2}. \quad (12.78)$$

Substituindo na Equação (12.74), constatamos que a nova função  $v$  satisfaz a EDO auto-adjunta

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] v = 0, \quad (12.79)$$

que é a equação associada de Legendre; ela se reduz à equação de Legendre quando  $m$  é igualado a zero. Expressa em coordenadas polares esféricas, a equação associada de Legendre é

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] v = 0. \quad (12.80)$$

<sup>15</sup>A fórmula de Leibniz para a derivada de enésima ordem de um produto é

$$\frac{d^n}{dx^n} [A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x), \quad \binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!},$$

um coeficiente binomial.

### Polinômios Associados de Legendre

As soluções regulares, rotuladas agora como  $P_n^m(x)$ , são

$$v \equiv P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (12.73c)$$

Essas são as funções associadas de Legendre.<sup>16</sup> Visto que a potência mais alta de  $x$  em  $P_n(x)$  é  $x^n$ , devemos ter  $m \leq n$  (ou a diferenciação  $m$  vezes conduzirá nossa função a zero). Em Mecânica Quântica, a interpretação física de exigir que  $m \leq n$  é que o valor esperado do quadrado da componente  $z$  do momento angular é menor ou igual ao valor esperado do quadrado do vetor de momento angular  $\mathbf{L}$ ,

$$\langle L_z^2 \rangle \leq \langle L^2 \rangle \equiv \int \psi_{lm}^* \mathbf{L}^2 \psi_{lm} d^3r.$$

Pela forma da Equação (12.73c) poderíamos esperar que  $m$  seja não-negativo. Contudo, se  $P_n(x)$  for expresso pela fórmula de Rodrigues, essa limitação imposta a  $m$  é relaxada e podemos ter  $-n \leq m \leq n$ , sendo permitidos valores negativos, bem como valores positivos de  $m$ . Esses limites são consistentes com os obtidos por meio de operadores de elevação e redução no Capítulo 4. Em particular,  $|m| > n$  é excluído. Isso também resulta da Equação (12.73c). Usando a fórmula de diferenciação de Leibniz mais uma vez, podemos mostrar (Exercício 12.5.1) que  $P_n^m(x)$  e  $P_n^{-m}(x)$  são relacionados por

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (12.81)$$

Pela nossa definição das funções associadas de Legendre  $P_n^m(x)$ ,

$$P_n^0(x) = P_n(x). \quad (12.82)$$

Uma função geradora para as funções associadas de Legendre é obtida, via a Equação (12.71), pela função geradora dos polinômios ordinários de Legendre:

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x) t^s. \quad (12.83)$$

Se descartarmos o fator  $(1-x^2)^{m/2} = \sin^m \theta$  dessa fórmula e definirmos os **polinômios**  $\mathcal{P}_{s+m}^m(x) = P_{s+m}^m(x)(1-x^2)^{-m/2}$ , então obtemos uma forma prática da função geradora,

$$g_m(x, t) \equiv \frac{(2m)!}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{s+m}^m(x) t^s. \quad (12.84)$$

Podemos derivar, por diferenciação, uma relação de recursão para polinômios associados de Legendre que é análoga às Equações (12.14) e (12.17), como segue:

$$(1-2tx+t^2) \frac{\partial g_m}{\partial t} = (2m+1)(x-t)g_m(x, t).$$

Substituindo as expansões definidoras para polinômios associados de Legendre, obtemos

$$(1-2tx+t^2) \sum_s s \mathcal{P}_{s+m}^m(x) t^{s-1} = (2m+1) \sum_s [x \mathcal{P}_{s+m}^m t^s - \mathcal{P}_{s+m}^m t^{s+1}].$$

Comparando coeficientes de potências de  $t$  nessa série de potências, obtemos a relação de recorrência

$$(s+1) \mathcal{P}_{s+m+1}^m - (2m+1+2s)x \mathcal{P}_{s+m}^m + (s+2m) \mathcal{P}_{s+m-1}^m = 0. \quad (12.85)$$

Para  $m=0$  e  $s=n$ , essa relação é a Equação (12.17).

Antes de podermos usar essa relação, precisamos iniciá-la, isto é, relacionar os polinômios associados de Legendre com polinômios ordinários de Legendre. Podemos usar  $\mathcal{P}_m^m = (2m-1)!!$  da Equação (12.73c). Além

<sup>16</sup>Ocasionalmente (como em AMS-55; a referência completa é dada em Leituras Adicionais do Capítulo 8) encontramos definições das funções associadas de Legendre com um fator adicional de  $(-1)^m$ . Esse  $(-1)^m$  parece uma complicação desnecessária nesse ponto. Ele será incluído na definição dos harmônicos esféricos  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  na Seção 12.6. Nossa definição está de acordo com *Electrodynamics* de Jackson (essa referência é fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 11). Note também que o índice superior,  $m$  não é um expoente.





disso, uma vez que  $|m| \leq n$ , podemos estabelecer  $P_n^{n+1} = 0$  e usar isso para obter valores de partida para vários processos recursivos. Observamos que

$$(1 - 2xt + t^2)g_1(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_s P_s(x)t^s, \quad (12.86)$$

portanto, ao inserirmos a Equação (12.84), obtemos a recursão

$$\mathcal{P}_{s+1}^1 - 2x\mathcal{P}_s^1 + \mathcal{P}_{s-1}^1 = P_s(x). \quad (12.87)$$

De modo mais geral, temos também a identidade

$$(1 - 2xt + t^2)g_{m+1}(x, t) = (2m + 1)g_m(x, t), \quad (12.88)$$

da qual extraímos a recursão

$$\mathcal{P}_{s+m+1}^{m+1} - 2x\mathcal{P}_{s+m}^{m+1} + \mathcal{P}_{s+m-1}^{m+1} = (2m + 1)\mathcal{P}_{s+m}^m(x), \quad (12.89)$$

que relaciona os polinômios associados de Legendre de superíndice  $m + 1$  com os de índice  $m$ . Para  $m = 0$ , recuperamos a recursão inicial, Equação (12.87).

**Tabela 12.2** Funções associadas de Legendre

---

$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} = \text{sen } \theta$
$P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2} = 3 \cos \theta \text{sen } \theta$
$P_2^2(x) = 3(1 - x^2) = 3 \text{sen}^2 \theta$
$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \text{sen } \theta$
$P_3^2(x) = 15x(1 - x^2) = 15 \cos \theta \text{sen}^2 \theta$
$P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2} = 15 \text{sen}^3 \theta$
$P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3 - 3x)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \text{sen } \theta$
$P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) = \frac{15}{2}(7 \cos^2 \theta - 1) \text{sen}^2 \theta$
$P_4^3(x) = 105x(1 - x^2)^{3/2} = 105 \cos \theta \text{sen}^3 \theta$
$P_4^4(x) = 105(1 - x^2)^2 = 105 \text{sen}^4 \theta$

---

### Exemplo 12.5.1 OS POLINÔMIOS ASSOCIADOS DE LEGENDRE DE ORDEM MAIS BAIXA

Agora estamos prontos para derivar as entradas da Tabela 12.2. Para  $m = 1$  e  $s = 0$ , a Equação (12.87) dá  $\mathcal{P}_1^1 = 1$ , porque  $\mathcal{P}_0^1 = 0 = \mathcal{P}_{-1}^1$  não ocorre na definição, Equação (12.84), dos polinômios associados de Legendre. Multiplicando por  $(1 - x^2)^{1/2} = \text{sen } \theta$ , obtemos a primeira linha da Tabela 12.2. Para  $s = 1$ , encontramos, pela Equação (12.87),

$$\mathcal{P}_2^1(x) = P_1 + 2x\mathcal{P}_1^1 = x + 2x = 3x,$$

da qual resulta a segunda linha da Tabela 12.2,  $3 \cos \theta \text{sen } \theta$ , por multiplicação por  $\text{sen } \theta$ . Para  $s = 2$  obtemos

$$\mathcal{P}_3^1(x) = P_2 + 2x\mathcal{P}_2^1 - \mathcal{P}_1^1 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + 6x^2 - 1 = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2},$$

de acordo com a linha 4 da Tabela 12.2. Para obter a linha 3, usamos a Equação (12.88). Para  $m = 1$ ,  $s = 0$ , ela dá  $\mathcal{P}_2^2(x) = 3\mathcal{P}_1^1(x) = 3$ , e multiplicar por  $1 - x^2 = \text{sen}^2 \theta$  reproduz a linha 3 da Tabela 12.2. Para as linhas 5, 8, 9, a Equação (12.84) pode ser usada, o que deixamos como exercício. Generalizando, usamos a Equação (12.89) em vez da Equação (12.87) para obter um valor de partida de  $\mathcal{P}_m^m$ . Então, a Equação (12.85) se reduz a uma fórmula de dois termos para  $\mathcal{P}_m^m$ , dando  $(2m - 1)!!$ . Note que, se  $m = 0$ , isto é,  $(-1)!! = 1$ . ■

### Exemplo 12.5.2 VALORES ESPECIAIS

Para  $x = 1$ , usamos

$$(1 - 2t + t^2)^{-m-1/2} = (1 - t)^{-2m-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-2m-1}{s} t^s$$

na Equação (12.84) e achamos

$$\mathcal{P}_{s+m}^m(1) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \binom{-2m-1}{s}, \tag{12.90}$$

em que

$$\binom{-m}{s} = 1$$

para  $s = 0$  e

$$\binom{-m}{s} = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(1-s-m)}{s!}$$

para  $s \geq 1$ . Para  $m = 1, s = 0$ , temos  $\mathcal{P}_1^1(1) = \binom{-3}{0} = 1$ ; para  $s = 1, \mathcal{P}_2^1(1) = -\binom{-3}{1} = 3$ ; para  $s = 2, \mathcal{P}_3^1(1) = \binom{-3}{2} = \frac{(-3)(-4)}{2} = 6 = \frac{3}{2}(5-1)$ , todos de acordo com a Tabela 12.12. Para  $x = 0$ , também podemos usar a expansão binomial, o que deixamos como exercício. ■

### Relações de Recorrência

Como esperado e já visto, as funções associadas de Legendre satisfazem relações de recorrência. Por causa da existência de dois índices em vez de apenas um, temos uma ampla variedade de relações de recorrência:

$$P_n^{m+1} - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m + [n(n+1) - m(m-1)] P_n^{m-1} = 0, \tag{12.91}$$

$$(2n+1)x P_n^m = (n+m) P_{n-1}^m + (n-m+1) P_{n+1}^m, \tag{12.92}$$

$$\begin{aligned} (2n+1)(1-x^2)^{1/2} P_n^m &= P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1} \\ &= (n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1} \\ &\quad - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}, \end{aligned} \tag{12.93}$$

$$(1-x^2)^{1/2} P_n^{m'} = \frac{1}{2} P_n^{m+1} - \frac{1}{2} (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}. \tag{12.94}$$

Essas relações, e muitas outras similares, podem ser verificadas pela utilização da função geradora (Equação (12.4)), por substituição da solução de série da equação associada de Legendre (12.79) ou por redução das relações de recorrência do polinômio de Legendre, usando a Equação (12.73c). Como exemplo do último método, considere a Equação (12.93). Ela é similar à Equação (12.23):

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \tag{12.95}$$

Vamos diferenciar essa relação de recorrência de polinômios de Legendre  $m$  vezes para obter

$$\begin{aligned} (2n+1) \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) &= \frac{d^m}{dx^m} P'_{n+1}(x) - \frac{d^m}{dx^m} P'_{n-1}(x) \\ &= \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{n+1}(x) - \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{12.96}$$

Agora, multiplicando por  $(1-x^2)^{(m+1)/2}$  e usando a definição de  $P_n(x)$ , obtemos a primeira parte da Equação (12.93).



### Paridade

A relação de paridade satisfeita pelas funções associadas de Legendre pode ser determinada por exame da Equação definidora (12.73c). Quando  $x \rightarrow -x$ , já sabemos que  $P_n(x)$  contribui com um  $(-1)^n$ . A diferenciação  $m$  vezes resulta em um fator  $(-1)^m$ . Por conseguinte, temos

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x). \quad (12.97)$$

Um rápido exame da Tabela 12.2 verifica isso para  $1 \leq m \leq n \leq 4$ .

Além do mais, pela definição na Equação (12.73c),

$$P_n^m(\pm 1) = 0, \quad \text{for } m \neq 0. \quad (12.98)$$

### Ortogonalidade

A ortogonalidade dos  $P_n^m(x)$  resulta da EDO, exatamente como para os  $P_n(x)$  (Seção (12.3)), se  $m$  for o mesmo para ambas as funções. Contudo, é instrutivo demonstrar a ortogonalidade por outro método, um método que também dará a constante de normalização.

Usando a definição na Equação (12.73c) e a fórmula de Rodrigues (Equação (12.65)) para  $P_n(x)$ , achamos

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{(-1)^m}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^1 X^m \left( \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} X^q dx. \quad (12.99)$$

A função  $X$  é dada por  $X \equiv (x^2 - 1)$ . Se  $p \neq q$ , vamos admitir que  $p < q$ . Note que o índice superior  $m$  é o mesmo para ambas as funções. Essa é uma condição essencial. A técnica é integrar repetidas vezes por partes; todas as partes integradas desaparecerão, contanto que haja um fator  $X = x^2 - 1$ . Vamos integrar  $q + m$  vezes para obter

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{(-1)^m (-1)^{q+m}}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^1 X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left( X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) dx. \quad (12.100)$$

O integrando do lado direito agora é expandido pela fórmula de Leibniz para resultar em

$$\begin{aligned} & X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left( X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) \\ &= X^q \sum_{i=0}^{q+m} \frac{(q+m)!}{i!(q+m-i)!} \left( \frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} X^m \right) \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p. \end{aligned} \quad (12.101)$$

Uma vez que o termo  $X^m$  não contém nenhuma potência de  $x$  maior do que  $x^{2m}$ , devemos ter

$$q + m - i \leq 2m \quad (12.102)$$

ou a derivada se anulará. De modo semelhante,

$$p + m + i \leq 2p. \quad (12.103)$$

Adicionar ambas as desigualdades resulta em

$$q \leq p, \quad (12.104)$$

o que contradiz nossa suposição de que  $p < q$ . Por conseguinte, não há nenhuma solução para  $i$  e a integral se anula. Obviamente, obteremos o mesmo resultado se  $p > q$ .

Para o caso remanescente,  $p = q$ , temos o termo único correspondente a  $i = q - m$ . Inserindo a Equação (12.101) na Equação (12.100), temos

$$\int_{-1}^1 [P_q^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{q+2m} (q+m)!}{2^{2q} q! (2m)! (q-m)!} \int_{-1}^1 X^q \left( \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \right) \left( \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q \right) dx. \quad (12.105)$$

Visto que

$$X^m = (x^2 - 1)^m = x^{2m} - mx^{2m-2} + \dots, \quad (12.106)$$

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m = (2m)!, \quad (12.107)$$

a Equação (12.105) se reduz a

$$\int_{-1}^1 [P_q^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{q+2m}(2q)!(q+m)!}{2^{2q}q!q!(q-m)!} \int_{-1}^1 X^q dx. \quad (12.108)$$

A integral da direita é exatamente

$$(-1)^q \int_0^\pi \text{sen}^{2q+1}\theta d\theta = \frac{(-1)^q 2^{2q+1}q!q!}{(2q+1)!} \quad (12.109)$$

(compare com o Exercício 8.4.9). Combinando as Equações (12.108) e (12.109), temos a **integral de ortogonalidade**,

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x)P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \cdot \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}, \quad (12.110)$$

ou, em coordenadas polares esféricas,

$$\int_0^\pi P_p^m(\cos\theta)P_q^m(\cos\theta)\text{sen}\theta d\theta = \frac{2}{2q+1} \cdot \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}. \quad (12.111)$$

A ortogonalidade dos polinômios de Legendre é um caso especial desse resultado, obtido igualando  $m$  a zero, isto é, para  $m = 0$ , a Equação (12.110) se reduz às Equações (12.47) e (12.48). Em ambas as Equações (12.110) e (12.111), nossa teoria de Sturm-Liouville do Capítulo 10 poderia fornecer o delta de Kronecker. Para a constante de normalização é preciso um cálculo especial, tal como a análise que fizemos aqui.

A ortogonalidade das funções associadas de Legendre no mesmo intervalo e com o mesmo fator de ponderação dos polinômios de Legendre não contradiz a unicidade da construção de Gram-Schmidt dos polinômios de Legendre, Exemplo 10.3.1. A Tabela 12.1 sugere (e a Seção (12.4) comprova) que  $\int_{-1}^1 P_p^m(x)P_q^m(x) dx$  pode ser escrita como

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x)P_q^m(x)(1-x^2)^m dx,$$

em que definimos antes

$$\mathcal{P}_p^m(x)(1-x^2)^{m/2} = P_p^m(x).$$

As funções  $P_p^m(x)$  podem ser construídas pelo procedimento de Gram-Schmidt com a função de peso  $w(x) = (1-x^2)^m$ .

É possível desenvolver uma relação de ortogonalidade para funções associadas de Legendre que tenham o mesmo índice inferior, mas índice superior diferente. Encontramos

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x)P_n^k(x)(1-x^2)^{-1} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{m,k}. \quad (12.112)$$

Observe que foi introduzido um novo fator de peso  $(1-x^2)^{-1}$ . Essa relação é uma curiosidade matemática. Em problemas físicos com soluções de simetria esférica das Equações (12.80) e (9.64), aparece em conjunção com as da Equação (9.61), e a ortogonalidade da dependência azimutal faz com que os dois índices superiores fiquem iguais e sempre leva à Equação (12.111).

### Exemplo 12.5.3 CAMPO DE INDUÇÃO MAGNÉTICA DE UM CIRCUITO DE CORRENTE

Como as outras EDOs da Física Matemática, é provável que a equação associada de Legendre apareça quando menos se espera. Como ilustração, considere o campo de indução magnética  $\mathbf{B}$  e o potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$  criado por um único circuito de corrente circular no plano equatorial (Figura 12.12).

Pela teoria eletromagnética sabemos que a contribuição do elemento de corrente  $I d\lambda$  ao potencial vetorial magnético é

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\lambda}{4\pi \mathbf{r}}. \quad (12.113)$$

(Isso resulta do Exercício 1.14.4 e Seção 9.7.) A Equação (12.113), mais a simetria de nosso sistema, mostra que  $\mathbf{A}$  tem somente uma componente  $\hat{\varphi}$  e que a componente é independente de  $\varphi$ ,<sup>17</sup>

$$\mathbf{A} = \hat{\varphi} A_\varphi(r, \theta). \quad (12.114)$$

<sup>17</sup>Faça pares de elementos de corrente correspondentes  $I d\lambda(\varphi_1)$  e  $I d\lambda(\varphi_2)$ , onde  $\varphi - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi$ .

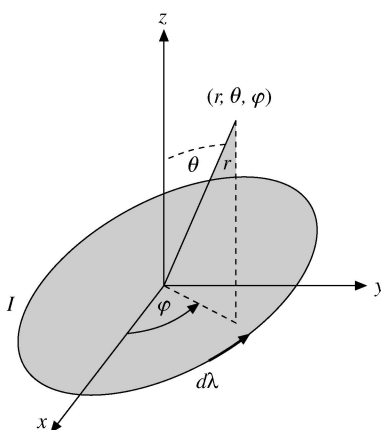


Figura 12.12: Circuito fechado de corrente circular.

Pelas equações de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (\text{unidades SI}). \quad (12.115)$$

Uma vez que

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (12.116)$$

temos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (12.117)$$

em que  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente. Em nosso problema  $\mathbf{J}$  é zero em todos os lugares, exceto no circuito fechado de corrente. Por conseguinte, longe do circuito,

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\varphi} A_\varphi(r, \theta) = 0, \quad (12.118)$$

usando a Equação (12.114).

Pela expressão para a espiral em coordenadas polares esféricas (Seção 2.5), obtemos (Exemplo 2.5.2)

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \times \hat{\varphi} A_\varphi(r, \theta)] &= \hat{\varphi} \left[ -\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cot \theta A_\varphi) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (12.119)$$

Fazendo  $A_\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  e separando variáveis, temos

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2 \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0, \quad (12.120)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1)\Theta - \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (12.121)$$

A segunda equação é a equação associada de Legendre (12.80) com  $m = 1$ , e podemos escrever imediatamente

$$\Theta(\theta) = P_n^1(\cos \theta). \quad (12.122)$$

A constante de separação  $n(n+1)$ , sendo  $n$  um inteiro não-negativo, foi escolhida para manter essa solução bem-comportada.

Por tentativa, fazendo  $R(r) = r^\alpha$ , constatamos que  $\alpha = n$  ou  $-\alpha = n+1$ . A primeira possibilidade é descartada, porque nossa solução deve se anular à medida que  $r \rightarrow \infty$ . Por conseguinte,

$$A_{\varphi n} = \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n^1(\cos \theta) = c_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^1(\cos \theta) \quad (12.123)$$

e

$$A_\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^1(\cos \theta) \quad (r > a). \quad (12.124)$$

Aqui,  $a$  é o raio do circuito de corrente.

Uma vez que  $A_\varphi$  deve ser invariante à reflexão no plano equatorial, pela simetria de nosso problema

$$A_\varphi(r, \cos \theta) = A_\varphi(r, -\cos \theta), \quad (12.125)$$

a propriedade de paridade de  $P_n^m(\cos \theta)$  (Equação (12.97)) mostra que  $c_n = 0$ , para  $n$  par.

Para concluir a avaliação das constantes, podemos usar a Equação (12.124) para calcular  $B_z$  ao longo do eixo  $z$  ( $B_z = B_r(r, \theta = 0)$ ) e comparar com a expressão obtida da lei de Biot-Savart. Essa é a mesma técnica usada no Exemplo 12.3.3. Temos (compare com a Equação (2.47))

$$B_r = \nabla \times \mathbf{A}|_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \right] = \frac{\cotg \theta}{r} A_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}. \quad (12.126)$$

Usando

$$\frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} = -\frac{1}{2} P_n^2 + \frac{n(n+1)}{2} P_n^0 \quad (12.127)$$

(Equação (12.94)) e então a Equação (12.91) com  $m = 1$ ,

$$P_n^2(\cos \theta) - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0, \quad (12.128)$$

obtemos

$$B_r(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1) \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta), \quad r > a, \quad (12.129)$$

(para todo  $\theta$ ). Em particular, para  $\theta = 0$ ,

$$B_r(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1) \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}. \quad (12.130)$$

Também podemos obter

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} P_n^1(\cos \theta), \quad r > a, \quad (12.131)$$

A lei de Biot-Savart afirma que

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\lambda} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{unidades SI}). \quad (12.132)$$

Agora integramos sobre o perímetro de nosso circuito fechado (raio  $a$ ). A geometria é mostrada na Figura 12.13. O campo de indução magnética resultante é  $\hat{\mathbf{z}} B_z$ , ao longo do eixo  $z$ , com

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} a^2 (a^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{z^3} \left( 1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-3/2}. \quad (12.133)$$

Expandindo pelo teorema binomial, obtemos

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{z^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{a}{z} \right)^2 + \frac{15}{8} \left( \frac{a}{z} \right)^4 - \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{z^3} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!} \left( \frac{a}{z} \right)^{2s}, \quad z > a. \end{aligned} \quad (12.134)$$

Igualando as Equações (12.130) e (12.134) termo por termo (com  $r = z$ ),<sup>18</sup> encontramos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mu_0 I}{4}, & c_3 &= -\frac{\mu_0 I}{16}, & c_2 &= c_4 = \dots = 0. \\ c_n &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{\mu_0 I}{2n(n+1)} \cdot \frac{(n/2)!}{[(n-1)/2]!(\frac{1}{2})!}, & n &\text{ ímpar.} \end{aligned} \quad (12.135)$$

<sup>18</sup>A série descendente de potências também é única.

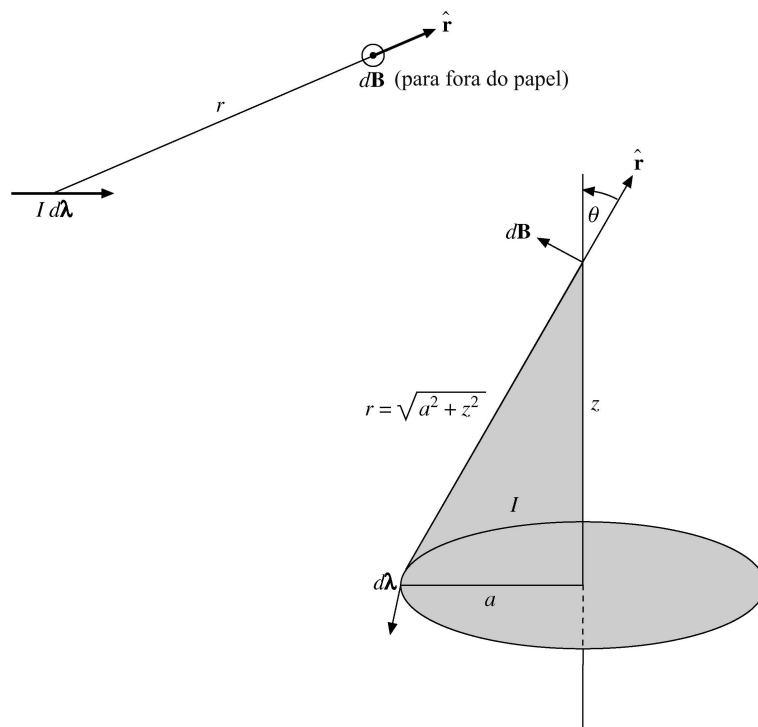


Figura 12.13: Lei de Biot-Savart aplicada a um circuito circular.

De modo equivalente, podemos escrever

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{\mu_0 I}{2^{2n+2}} \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = (-1)^n \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \quad (12.136)$$

e

$$A_\varphi(r, \theta) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (12.137)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{a^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} (2n+1)(2n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}(\cos \theta), \quad (12.138)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{a^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} (2n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos \theta). \quad (12.139)$$

Esses campos podem ser descritos em forma fechada pela utilização de integrais elípticas. O Exercício 5.8.4 é uma ilustração dessa abordagem. Uma terceira possibilidade é integração direta da Equação (12.113) por expansão do denominador da integral para  $A_\varphi$  no Exercício 5.8.4 como uma função geradora de polinômios de Legendre. A corrente é especificada por funções delta de Dirac. Esses métodos têm a vantagem de dar as constantes  $c_n$  diretamente.

Uma comparação entre campos magnéticos de dipolo de circuito de corrente e campos de dipolo elétrico finitos pode ser interessante. Para o dipolo magnético de circuito de corrente, a análise precedente resulta em

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3} \left[ P_1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3 + \dots \right], \quad (12.140)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a^2}{4 r^3} \left[ P_1^1 - \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3^1 + \dots \right]. \quad (12.141)$$

Pelo potencial de dipolo elétrico finito da Seção (12.1), temos

$$E_r(r, \theta) = \frac{qa}{\pi\epsilon_0 r^3} \left[ P_1 + 2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_3 + \dots \right], \quad (12.142)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left[ P_1^1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_3^1 + \dots \right]. \quad (12.143)$$

Os dois campos concordam na forma até em que está em questão o termo líder ( $r^{-3}P_1$ ), e isso é a base para chamar ambos de campos de dipolo.

Como no caso de multipolos elétricos, às vezes é conveniente discutir multipolos magnéticos **pontuais** (veja a Figura 12.14). Para o caso do dipolo, Equações (12.140) e (12.141), o dipolo pontual é formado considerando o limite  $a \rightarrow 0, I \rightarrow \infty$ , mantendo  $Ia^2$  constante. Sendo  $\mathbf{n}$  um vetor unitário normal ao circuito de corrente (sentido positivo pela regra da mão direita, Seção 1.10), o momento magnético  $\mathbf{m}$  é dado por  $\mathbf{m} = \mathbf{n}I\pi a^2$ . ■

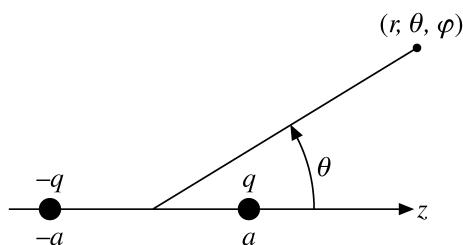


Figura 12.14: Dipolo elétrico.

### Exercícios

12.5.1 Prove que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x),$$

em que  $P_n^m(x)$  é definido por

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n.$$

Sugestão: Uma abordagem é aplicar a fórmula de Leibniz a  $(x+1)^n(x-1)^n$ .

12.5.2 Mostre que

$$P_{2n}^1(0) = 0, \\ P_{2n+1}^1(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!},$$

por cada um desses três métodos:

- (a) utilização de relações de recorrência,
- (b) expansão da função geradora,
- (c) Fórmula de Rodrigues.

12.5.3 Avalie  $P_n^m(0)$ .

$$\text{Resposta: } P_n^m(0) = \begin{cases} (-1)^{(n-m)/2} \frac{(n+m)!}{2^n ((n-m)/2)! ((n+m)/2)!}, & n+m \text{ par,} \\ 0, & n+m \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Além disso,  $P_n^m(0) = (-1)^{(n-m)/2} \frac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!}$ ,  $n+m$  par.

12.5.4 Mostre que

$$P_n^n(\cos \theta) = (2n-1)!! \sin^n \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$





**12.5.5** Derive a relação de recorrência associada de Legendre

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m(x) + [n(n+1) - m(m-1)] P_n^{m-1}(x) = 0.$$

**12.5.6** Desenvolva uma relação de recorrência que dará  $P_n^1(x)$  como

$$P_n^1(x) = f_1(x, n)P_n(x) + f_2(x, n)P_{n-1}(x).$$

Siga ou (a) ou (b).

(a) Derive a relação de recorrência da forma precedente. Dê  $f_1(x, n)$  e  $f_2(x, n)$  explicitamente.

(b) Ache a relação de recorrência adequada na literatura.

(1) Dê a fonte.

(2) Verifique a relação de recorrência.

$$\text{Resposta: } P_n^1(x) = -\frac{nx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n + \frac{n}{(1-x^2)^{1/2}} P_{n-1}.$$

**12.5.7** Mostre que

$$\text{sen } \theta \frac{d}{d \cos \theta} P_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta).$$

**12.5.8** Mostre que

$$(a) \int_0^\pi \left( \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + \frac{m^2 P_n^m P_{n'}^m}{\text{sen}^2 \theta} \right) \text{sen } \theta d\theta = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'},$$

$$(b) \int_0^\pi \left( \frac{P_n^1}{\text{sen } \theta} \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} + \frac{P_{n'}^1}{\text{sen } \theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} \right) \text{sen } \theta d\theta = 0.$$

Essas integrais ocorrem na teoria do espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas.

**12.5.9** Como repetição do Exercício 12.3.10, mostre, usando funções associadas de Legendre, que

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2) P_n'(x) P_m'(x) dx = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \delta_{m, n-1} + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+3} \cdot \frac{(n+2)!}{n!} \delta_{m, n+1}.$$

**12.5.10** Avalie

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 \theta P_n^1(\cos \theta) d\theta.$$

**12.5.11** O polinômio associado de Legendre  $P_n^m(x)$  satisfaz a EDO auto-adjunta

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n^m(x)}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0.$$

Pelas equações diferenciais para  $P_n^m(x)$  e  $P_n^k(x)$ , mostre que

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^k(x) \frac{dx}{1-x^2} = 0,$$

para  $k \neq m$ .

**12.5.12** Determine o potencial vetorial de um quadrupolo magnético diferenciando o potencial do dipolo magnético.

$$\text{Resposta: } \mathbf{A}_{MQ} = \frac{\mu_0}{2} (Ia^2) (dz) \hat{\phi} \frac{P_2^1(\cos \theta)}{r^3} + \text{termos de ordem mais alta.}$$

$$\mathbf{B}_{MQ} = \mu_0 (Ia^2) (dz) \left[ \hat{\mathbf{r}} \frac{3P_2(\cos \theta)}{r^4} + \hat{\theta} \frac{P_2^1(\cos \theta)}{r^4} \right].$$

Isso corresponde a colocar um circuito fechado de corrente de raio  $a$  em  $z \rightarrow dz$  e um circuito fechado de corrente diretamente oposto em  $z \rightarrow -dz$  e fazendo  $a \rightarrow 0$  sujeito a  $(dz)a$  (força do dipolo) ser igual à constante.

Uma outra abordagem desse problema seria integrar  $d\mathbf{A}$  (Equação (12.113)), expandir o denominador em uma série de polinômios de Legendre, e usar o teorema da adição de polinômios de Legendre (Seção 12.8).

**12.5.13** Um único circuito fechado de fio elétrico de raio  $a$  transporta uma corrente constante  $I$ .

- (a) Ache a indução magnética  $\mathbf{B}$  para  $r < a$ ,  $\theta = \pi/2$ .  
 (b) Calcule a integral do fluxo magnético ( $\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ ) sobre a área do circuito fechado de corrente, isto é,

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} B_z \left( r, \theta = \frac{\pi}{2} \right) d\varphi r dr.$$

Resposta:  $\infty$ .

A Terra está dentro de uma corrente anelar desse tipo, na qual  $I$  se aproxima de milhões de ampères que surgem da deriva de partículas carregadas no cinturão de van Allen.

**12.5.14** (a) Mostre que no limite do dipolo pontual o campo de indução magnética do circuito fechado de corrente se torna

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} P_1(\cos \theta),$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} P_1^1(\cos \theta)$$

com  $m = I\pi a^2$ .

- (b) Compare esses resultados com a indução magnética do dipolo magnético pontual do Exercício 1.8.17. Considere  $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{z}}m$ .

**12.5.15** Uma casca esférica uniformemente carregada está girando com velocidade angular constante.

- (a) Calcule a indução magnética  $\mathbf{B}$  ao longo do eixo de rotação fora da esfera.  
 (b) Usando a série de potencial vetorial da Seção (12.5), ache  $\mathbf{A}$  e então  $\mathbf{B}$  para todo o espaço fora da esfera.

**12.5.16** No modelo da gota de líquido do núcleo, o núcleo é sujeito a pequenas deformações. Considere uma esfera de raio  $r_0$  que é deformada de modo que sua nova superfície seja dada por

$$r = r_0 [1 + \alpha_2 P_2(\cos \theta)].$$

Ache a área da esfera deformada para termos de ordem  $\alpha_2^2$ .

*Sugestão:*

$$dA = \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} r \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Resposta:  $A = 4\pi r_0^2 [1 + \frac{4}{5}\alpha_2^2 + \mathcal{O}(\alpha_2^3)]$ .

*Nota:* O elemento de área  $dA$  resulta de observar que o elemento de linha  $ds$  para  $\varphi$  fixo é dado por

$$ds = (r^2 d\theta^2 + dr^2)^{1/2} = \left( r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right)^{1/2} d\theta.$$

**12.5.17** Uma partícula nuclear está em um poço de potencial quadrado esférico  $V(r, \theta, \varphi) = 0$  para  $0 \leq r < a$  e  $\infty$  para  $r > a$ . A partícula é descrita por uma função de onda  $\psi(r, \theta, \varphi)$  que satisfaz a equação de onda

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + V_0 \psi = E\psi, \quad r < a,$$

e a condição de contorno

$$\psi(r = a) = 0.$$

Mostre que, para a energia  $E$  ser um mínimo, é preciso que não haja nenhuma dependência angular na função de onda; isto é,  $\psi = \psi(r)$ .

*Sugestão:* O problema está centrado na condição de contorno imposta à função radial.

**12.5.18** (a) Escreva uma sub-rotina para calcular o valor numérico da função associada de Legendre  $P_N^1(x)$  para valores dados de  $N$  e  $x$ .

*Sugestão:* Com as formas conhecidas de  $P_1^1$  e  $P_2^1$ , você pode usar a relação de recorrência, Equação (12.92) para gerar  $P_N^1$ ,  $N > 2$ .



(b) Verifique sua sub-rotina calculando  $P_N^1(x)$  para  $x = 0, 0(0,5) 1, 0$  e  $N = 1(1)10$ . Compare esses valores numéricos com os valores conhecidos de  $P_N^1(0)$  e  $P_N^1(1)$  e com os valores tabulados de  $P_N^1(0,5)$ .

**12.5.19** Calcule o potencial vetorial magnético de um circuito fechado de corrente, Exemplo 12.5.1. Tabule seus resultados para  $r/a = 1, 5(0,5)5, 0$  e  $\theta = 0^\circ(15^\circ)90^\circ$ . Inclua termos na expansão de série, Equação (12.137), até que os valores absolutos dos termos fiquem abaixo do termo líder por um fator de  $10^5$  ou mais.

*Nota:* Essa expansão associada de Legendre pode ser verificada por comparação com a solução de integral elíptica, Exercício 5.8.4.

**Valor de verificação.** Para  $r/a = 4, 0$  e  $\theta = 20^\circ$ ,  
 $A_\varphi/\mu_0 I = 4,9398 \times 10^{-3}$ .

## 12.6 Harmônicos Esféricos

Na separação de variáveis da (1) equação de Laplace, (2) equação de Helmholtz ou dependência do espaço da equação de onda eletromagnética e (3) equação de onda de Schrödinger para campos de força centrais,

$$\nabla^2 \psi + k^2 f(r) \psi = 0, \tag{12.144}$$

a dependência angular, que vem inteiramente do operador laplaciano, é<sup>19</sup>

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0. \tag{12.145}$$

### Dependência Azimutal — Ortogonalidade

A equação azimutal separada é

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2, \tag{12.146}$$

com soluções

$$\Phi(\varphi) = e^{-im\varphi}, e^{im\varphi}, \tag{12.147}$$

com  $m$  inteiro, o que satisfaz a condição ortogonal

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi} e^{im_2\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m_1 m_2}. \tag{12.148}$$

Note que o produto tomado é  $\Phi_{m_1}^*(\varphi)\Phi_{m_2}(\varphi)$  e que  $*$  é usado para indicar a função complexa conjugada. Essa troca não é exigida, mas é conveniente para cálculos de Mecânica Quântica. Poderíamos ter usado

$$\Phi = \sin m\varphi, \cos m\varphi \tag{12.149}$$

e as condições de ortogonalidade que formam a base para a série de Fourier (Capítulo 14). Para aplicações como as que descrevem o campo gravitacional ou magnético da Terra,  $\sin m\varphi$  e  $\cos m\varphi$  seriam a opção preferida (veja o Exemplo 12.6.1).

Em problemas eletrostáticos e em muitos outros problemas físicos, exigimos que  $m$  seja um inteiro de modo que  $\Phi(\varphi)$  seja uma função de valor único do ângulo de azimute. Em Mecânica Quântica a questão é muito mais complicada: compare com a nota de rodapé na Seção 9.3.

Por meio da Equação (12.148),

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \tag{12.150}$$

é ortonormal (ortogonal e normalizado) com relação à integração sobre o ângulo de azimute  $\varphi$ .

<sup>19</sup>Para uma constante de separação da forma  $n(n+1)$  sendo  $n$  inteiro, a solução de série da equação de Legendre se torna um polinômio. Quanto ao mais, ambas as soluções de série divergem (Exercício 9.5.5).

### Dependência do Ângulo Polar

Subdividindo a dependência azimutal, a dependência do ângulo polar ( $\theta$ ) leva à equação associada de Legendre (12.80), que é satisfeita pelas funções associadas de Legendre; isto é,  $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$ . Para incluir valores negativos de  $m$ , usamos a fórmula de Rodrigues, Equação (12.65), na definição de  $P_n^m(\cos \theta)$ . Isso leva a

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^n, \quad -n \leq m \leq n. \quad (12.151)$$

$P_n^m(\cos \theta)$  e  $P_n^{-m}(\cos \theta)$  estão relacionados como indicado no Exercício 12.5.1. Uma vantagem dessa abordagem sobre simplesmente definir  $P_n^m(\cos \theta)$  para  $0 \leq m \leq n$  e impor que  $P_n^{-m} = P_n^m$  é que as relações de recorrência válidas para  $0 \leq m \leq n$  continuam válidas para  $-n \leq m < 0$ .

Normalizando a função associada de Legendre pela Equação (12.110), obtemos as funções ortonormais

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta), \quad -n \leq m \leq n, \quad (12.152)$$

que são ortonormais com relação ao ângulo polar  $\theta$ .

### Harmônicos esféricos

A função  $\Phi_m(\varphi)$  (Equação (12.150)) é ortonormal com relação ao ângulo azimutal  $\varphi$ . Consideramos o produto de  $\Phi_m(\varphi)$  e a função ortonormal em ângulo polar da Equação (12.152) e definimos

$$Y_n^m(\theta, \varphi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (12.153)$$

para obter funções de dois ângulos (e dois índices) que são ortonormais sobre a superfície esférica. Esses  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  são harmônicos esféricos dos quais alguns dos primeiros estão plotados na Figura 12.15. A integral de ortogonalidade completa se torna

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\theta, \varphi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (12.154)$$

O  $(-1)^m$  extra incluído na equação definidora de  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  merece alguns comentários. Ele é claramente legítimo, uma vez que a Equação (12.144) é linear e homogênea. Ele não é necessário, mas, quando passamos para certos cálculos de Mecânica Quântica, em particular a teoria quântica do momento angular (Seção (12.7), é muito conveniente. O fator  $(-1)^m$  é um fator de fase, muitas vezes denominado fase de Condon–Shortley, nome que se deve aos autores de um texto clássico sobre espectroscopia atômica. O efeito desse  $(-1)^m$  (Equação (12.153)) e do  $(-1)^m$  da Equação (12.73c) para  $P_n^{-m}(\cos \theta)$  é introduzir uma alternância de sinal entre os harmônicos esféricos positivos  $m$  mostrados na Tabela 12.3.

As funções  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  ganharam o nome **harmônicos esféricos** primeiro porque são definidas sobre a superfície de uma esfera com ângulo polar  $\theta$  e azimute  $\varphi$ . O **harmônico** foi incluído porque as soluções da equação de Laplace eram denominadas funções harmônicas e  $Y_n^m(\cos \theta, \varphi)$  é a parte angular de tal solução.

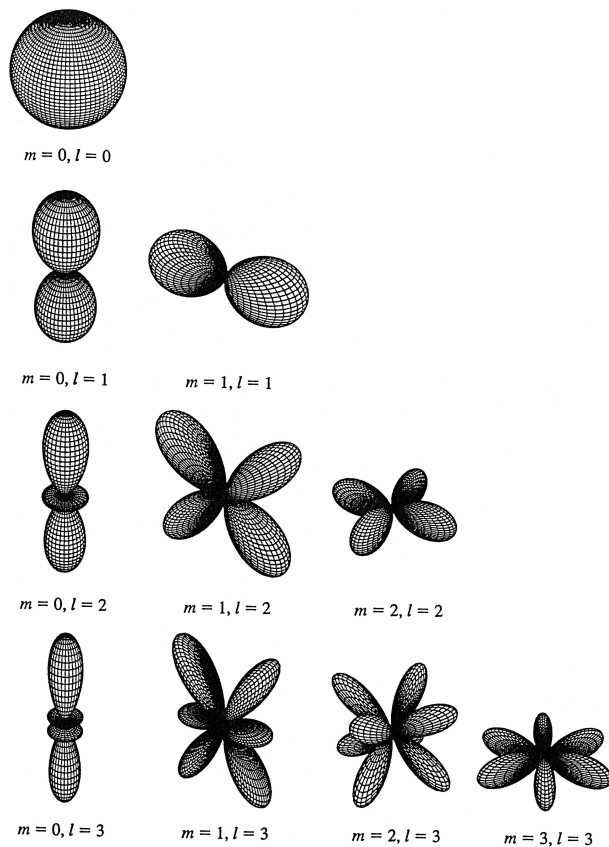


Figura 12.15:  $[\Re Y_l^m(\theta, \varphi)]^2$  para  $0 \leq l \leq 3, m = 0, \dots, 3$ .

**Tabela 12.3** Harmônicos esféricos (Fase de Condon-Shortley)

$$\begin{aligned}
 Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 Y_1^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\varphi} \\
 Y_1^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\
 Y_1^{-1}(\theta, \varphi) &= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\varphi} \\
 Y_2^2(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{2i\varphi} \\
 Y_2^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\
 Y_2^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \\
 Y_2^{-1}(\theta, \varphi) &= +\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{-i\varphi} \\
 Y_2^{-2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{-2i\varphi}
 \end{aligned}$$

Na estrutura da Mecânica Quântica a Equação (12.145) se torna uma equação de momento angular orbital e a

solução  $Y_L^M(\theta, \varphi)$  ( $n$  substituído por  $L$ ,  $m$  substituído por  $M$ ) é uma autofunção de momento angular, sendo  $L$  o número quântico de momento angular e  $M$  a projeção de  $L$  sobre o eixo  $z$ . Essas relações são desenvolvidas com mais detalhes nas Seções 4.3 e 12.7.

### Séries de Laplace, Teorema da Expansão

Parte da importância dos harmônicos esféricos está na propriedade de completude, uma consequência da forma de Sturm-Liouville da equação de Laplace. Nesse caso, essa propriedade significa que qualquer função  $f(\theta, \varphi)$  (com propriedades de continuidade suficientes) avaliada sobre a superfície da esfera pode ser expandida em uma série dupla uniformemente convergente de harmônicos esféricos<sup>20</sup> (série de Laplace):

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{12.155}$$

Se  $f(\theta, \varphi)$  for conhecida, os coeficientes podem ser encontrados imediatamente pela utilização da integral de ortogonalidade.

**Tabela 12.4.** Coeficientes de campo de gravidade, Equação (12.156)

Coeficiente <sup>a</sup>	Terra	Lua	Marte
$C_{20}$	$1,083 \times 10^{-3}$	$(0,200 \pm 0,002) \times 10^{-3}$	$(1,96 \pm 0,01) \times 10^{-3}$
$C_{22}$	$0,16 \times 10^{-5}$	$(2,4 \pm 0,5) \times 10^{-5}$	$(-5 \pm 1) \times 10^{-5}$
$S_{22}$	$-0,09 \times 10^{-5}$	$(0,5 \pm 0,6) \times 10^{-5}$	$(3 \pm 1) \times 10^{-5}$

<sup>a</sup> $C_{20}$  representa uma protuberância equatorial, enquanto  $C_{22}$  e  $S_{22}$  representam uma dependência azimutal do campo gravitacional.

### Exemplo 12.6.1 SÉRIE DE LAPLACE SÉRIE — CAMPOS DE GRAVIDADE

Os campos de gravidade da Terra, da Lua e de Marte foram descritos por uma série de Laplace com autofunções reais:

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{R} \left[ \frac{R}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \{ C_{nm} Y_{mn}^e(\theta, \varphi) + S_{nm} Y_{mn}^o(\theta, \varphi) \} \right]. \tag{12.156}$$

Aqui,  $M$  é a massa do corpo e  $R$  é o raio equatorial. As funções reais  $Y_{mn}^e$  e  $Y_{mn}^o$  são definidas por

$$Y_{mn}^e(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad Y_{mn}^o(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi.$$

Para aplicações como essa, as formas trigonométricas reais são preferidas à forma exponencial imaginária de  $Y_L^M(\theta, \varphi)$ . Medições por satélite levaram aos valores numéricos mostrados na Tabela 12.4. ■

### Exercícios

**12.6.1** Mostre que a paridade de  $Y_L^M(\theta, \varphi)$  é  $(-1)^L$ . Observe o desaparecimento de qualquer dependência de  $M$ .

*Sugestão:* Para a operação de paridade em coordenadas polares esféricas, veja o Exercício 2.5.8 e a nota de rodapé 7 na Seção 12.2.

**12.6.2** Prove que

$$Y_L^M(0, \varphi) = \left( \frac{2L+1}{4\pi} \right)^{1/2} \delta_{M,0}.$$

**12.6.3** Na teoria da excitação de núcleos de Coulomb encontramos  $Y_L^M(\pi/2, 0)$ . Mostre que

$$Y_L^M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left( \frac{2L+1}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{[(L-M)!(L+M)!]^{1/2}}{(L-M)!!(L+M)!!} (-1)^{(L+M)/2} \quad \text{para } L+M \text{ par,}$$

$$= 0 \quad \text{para } L+M \text{ ímpar.}$$

Aqui

$$(2n)!! = 2n(2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2,$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

<sup>20</sup>Para uma prova desse teorema fundamental, veja E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Nova York: Chelsea (1955), Capítulo VII. Se  $f(\theta, \varphi)$  for descontínua, ainda podemos ter convergência na média, Seção 10.4.



- 12.6.4** (a) Expresse os elementos do tensor de momento de quadrupolo  $x_i x_j$  como uma combinação linear dos harmônicos esféricos  $Y_2^m$  (e  $Y_0^0$ ).  
*Nota:* O tensor  $x_i x_j$  é redutível. O  $Y_0^0$  indica a presença de uma componente escalar.  
 (b) O tensor de momento de quadrupolo costuma ser definido como

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) d\tau,$$

sendo  $\rho(\mathbf{r})$  a densidade de carga. Expresse as componentes de  $(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$  em termos de  $r^2 Y_2^M$ .

- (c) Qual é a significância do termo  $-r^2 \delta_{ij}$ ?  
*Sugestão:* Compare com as Seções 2.9 e 4.4.  
**12.6.5** As funções azimutais ortogonais dão uma representação útil da função delta de Dirac. Mostre que

$$\delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

- 12.6.6** Derive a relação de fechamento de harmônico esférico

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) &= \frac{1}{\sin \theta_1} \delta(\theta_1 - \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &= \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

- 12.6.7** Os operadores de momento angular da Mecânica Quântica  $L_x \pm iL_y$  são dados por

$$\begin{aligned} L_x + iL_y &= e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_x - iL_y &= -e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Mostre que

(a)  $(L_x + iL_y) Y_L^M(\theta, \varphi) = \sqrt{(L - M)(L + M + 1)} Y_L^{M+1}(\theta, \varphi),$

(b)  $(L_x - iL_y) Y_L^M(\theta, \varphi) = \sqrt{(L + M)(L - M + 1)} Y_L^{M-1}(\theta, \varphi).$

- 12.6.8** Com  $L_{\pm}$  dado por

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \pm e^{\pm i\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right],$$

mostre que

(a)  $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} (L_-)^{l-m} Y_l^l,$

(b)  $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}} (L_+)^{l+m} Y_l^{-l}.$

- 12.6.9** Em algumas circunstâncias é desejável substituir a exponencial imaginária de nosso harmônico esférico por seno ou co-seno. Morse e Feshbach (veja Referências Gerais no final do livro) definem

$$\begin{aligned} Y_{mn}^e &= P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \\ Y_{mn}^o &= P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [Y_{mn}^e \text{ ou } Y_{mn}^o(\theta, \varphi)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{4\pi}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad n = 1, 2, \dots \\ &= 4\pi \quad \text{para } n = 0 \text{ (} Y_{00}^o \text{ é indefinida.)} \end{aligned}$$

Esses harmônicos esféricos costumam ser denominados de acordo com os padrões de suas regiões positiva e negativa sobre a superfície de uma esfera — harmônicos zonais para  $m = 0$ , harmônicos setoriais para  $m = n$ , e harmônicos tesserais para  $0 < m < n$ . Para  $Y_{mn}^e$ ,  $n = 4$ ,  $m = 0, 2, 4$ , indicam em um diagrama de um hemisfério (um diagrama para cada harmônico esférico) as regiões nas quais o harmônico esférico é positivo.

**12.6.10** Uma função  $f(r, \theta, \varphi)$  pode ser expressa como uma série de Laplace

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm} r^l Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Usando  $\langle \rangle_{\text{esfera}}$  para representar a média (com centro na origem), mostre que

$$\langle f(r, \theta, \varphi) \rangle_{\text{esfera}} = f(0, 0, 0).$$

## 12.7 Operadores de Momento Angular Orbital

Agora voltamos aos operadores de momento angular orbital específicos  $L_x, L_y$  e  $L_z$  da Mecânica Quântica introduzidos na Seção 4.3. A Equação (4.68) se torna

$$L_z \psi_{LM}(\theta, \varphi) = M \psi_{LM}(\theta, \varphi),$$

e queremos mostrar que

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = Y_L^M(\theta, \varphi)$$

são as autofunções  $|LM\rangle$  de  $L^2$  e  $L_z$ , da Seção 4.3 em coordenadas polares esféricas, os harmônicos esféricos. A forma explícita de  $L_z = -i\partial/\partial\varphi$  do Exercício 2.5.13 indica que  $\psi_{LM}$  tem uma dependência de  $\varphi$  de  $\exp(iM\varphi)$  — sendo  $M$  um inteiro para manter  $\psi_{LM}$  como função de valor único. Além disso, se  $M$  for inteiro, então  $L$  também é inteiro.

Para determinar a dependência de  $\theta$  de  $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$ , passamos por duas etapas: (1) a determinação de  $\psi_{LL}(\theta, \varphi)$  e (2) o desenvolvimento de  $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$  em termos de  $\psi_{LL}$ , sendo a fase fixada por  $\psi_{L0}$ . Seja

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi}. \tag{12.157}$$

Por  $L_+ \psi_{LL} = 0$ , sendo  $L$  o maior  $M$ , usando a forma de  $L_+$  dada nos Exercícios 2.5.14 e 12.6.7, temos

$$e^{i(L+1)\varphi} \left[ \frac{d}{d\theta} - L \cotg \theta \right] \Theta_{LL}(\theta) = 0, \tag{12.158}$$

e assim

$$\psi_{LL}(\theta, \varphi) = c_L \text{sen}^L \theta e^{iL\varphi}. \tag{12.159}$$

Normalizando, obtemos

$$c_L^* c_L \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^{2L+1} \theta d\theta d\varphi = 1. \tag{12.160}$$

A integral  $\theta$  pode ser avaliada como uma função beta (Exercício 8.4.9) e

$$|c_L| = \sqrt{\frac{(2L+1)!!}{4\pi(2L)!!}} = \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}. \tag{12.161}$$

Isso conclui nossa primeira etapa.

Para obter a  $\psi_{LM}$ ,  $M \neq \pm L$ , voltamos aos operadores de levantamento e de abaixamento. Pelas Equações (4.83) e (4.84) e como mostrado no Exercício 12.7.2 ( $J_+$  substituído por  $L_+$  e  $J_-$  substituído por  $L_-$ ),

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}} (L_-)^{L-M} \psi_{LL}(\theta, \varphi), \tag{12.162}$$

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (L_+)^{L+M} \psi_{L,-L}(\theta, \varphi).$$





Mais uma vez, observe que as fases relativas são estabelecidas pelos operadores de levantamento e de abaixamento.  $L_+$  e  $L_-$  operando sobre  $\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi}$  podem ser escritos como

$$\begin{aligned} L_+ \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= e^{i(M+1)\varphi} \left[ \frac{d}{d\theta} - M \cotg \theta \right] \Theta_{LM}(\theta) \\ &= e^{i(M+1)\varphi} \text{sen}^{1+M}\theta \frac{d}{d(\cos \theta)} \text{sen}^{-M}\theta \Theta_{LM}(\theta), \\ L_- \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= -e^{i(M-1)\varphi} \left[ \frac{d}{d\theta} + M \cotg \theta \right] \Theta_{LM}(\theta) \\ &= e^{i(M-1)\varphi} \text{sen}^{1-M}\theta \frac{d}{d(\cos \theta)} \text{sen}^M\theta \Theta_{LM}(\theta). \end{aligned} \tag{12.163}$$

Repetir essas operações  $n$  vezes resulta em

$$\begin{aligned} (L_+)^n \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= (-1)^n e^{i(M+n)\varphi} \text{sen}^{n+M}\theta \frac{d^n \text{sen}^{-M}\theta \Theta_{LM}(\theta)}{d(\cos \theta)^n}, \\ (L_-)^n \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= e^{i(M-n)\varphi} \text{sen}^{n-M}\theta \frac{d^n \text{sen}^M\theta \Theta_{LM}(\theta)}{d(\cos \theta)^n}. \end{aligned} \tag{12.164}$$

Pela Equação (12.162),

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = c_L \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}} e^{iM\varphi} \text{sen}^{-M}\theta \frac{d^{L-M}}{d(\cos \theta)^{L-M}} \text{sen}^{2L}\theta, \tag{12.165}$$

e para  $M = -L$ :

$$\begin{aligned} \psi_{L,-L}(\theta, \varphi) &= \frac{c_L}{(2L)!} e^{-iL\varphi} \text{sen}^L\theta \frac{d^{2L}}{d(\cos \theta)^{2L}} \text{sen}^{2L}\theta \\ &= (-1)^L c_L \text{sen}^L\theta e^{-iL\varphi}. \end{aligned} \tag{12.166}$$

Note a fase característica  $(-1)^L$  de  $\psi_{L,-L}$  relativa a  $\psi_{L,L}$ . Esse  $(-1)^L$  entra por

$$\text{sen}^{2L}\theta = (1-x^2)^L = (-1)^L (x^2-1)^L. \tag{12.167}$$

Combinando as Equações (12.162), (12.163) e (12.166), obtemos

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = (-1)^L c_L \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (-1)^{L+M} e^{iM\varphi} \text{sen}^M\theta \frac{d^{L+M} \text{sen}^{2L}\theta}{d(\cos \theta)^{L+M}}. \tag{12.168}$$

As Equações (12.165) e (12.168) estão de acordo se

$$\psi_{L0}(\theta, \varphi) = c_L \frac{1}{\sqrt{(2L)!}} \frac{d^L}{(d \cos \theta)^L} \text{sen}^{2L}\theta. \tag{12.169}$$

Usando a fórmula de Rodrigues, Equação (12.65), temos

$$\begin{aligned} \psi_{L0}(\theta, \varphi) &= (-1)^L c_L \frac{2^L L!}{\sqrt{(2L)!}} P_L(\cos \theta) \\ &= (-1)^L \frac{c_L}{|c_L|} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L(\cos \theta). \end{aligned} \tag{12.170}$$

A última desigualdade resulta da Equação (12.161). Agora impomos que  $\psi_{L0}(0, 0)$  seja real e positiva. Portanto,

$$c_L = (-1)^L |c_L| = (-1)^L \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}. \tag{12.171}$$

Com  $(-1)^L c_L / |c_L| = 1$ ,  $\psi_{L0}(\theta, \varphi)$  na Equação (12.170) pode ser identificada com o harmônico esférico  $Y_L^0(\theta, \varphi)$  da Seção (12.6).

Quando substituimos o valor de  $(-1)^L c_L$  na Equação (12.168),

$$\begin{aligned} \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (-1)^{L+M} \\ &\quad \cdot e^{iM\varphi} \text{sen}^M \theta \frac{d^{L+M}}{d(\cos \theta)^{L+M}} \text{sen}^{2L} \theta \\ &= \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L-M)!}{(L+M)!}} e^{iM\varphi} (-1)^M \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2^L L!} (1-x^2)^{M/2} \frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}} (x^2-1)^L \right\}, \quad x = \cos \theta, \quad M \geq 0. \end{aligned} \tag{12.172}$$

A expressão dentro da chave é identificada como a função associada de Legendre (Equação (12.151)), e temos

$$\begin{aligned} \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= Y_L^M(\theta, \varphi) \\ &= (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \cdot \frac{(L-M)!}{(L+M)!} \cdot P_L^M(\cos \theta) e^{iM\varphi}, \quad M \geq 0, \end{aligned} \tag{12.173}$$

em total concordância com a Seção 12.6. Então, pela Equação (12.73c),  $Y_L^M$  para índice superior negativo é dado por

$$Y_L^{-M}(\theta, \varphi) = (-1)^M [Y_L^M(\theta, \varphi)]^*. \tag{12.174}$$

- Nossas autofunções de momento angular  $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$  são identificadas com os harmônicos esféricos. O fator de fase  $(-1)^M$  é associado com os valores positivos de  $M$  e é considerado uma consequência dos operadores progressivos.
- O desenvolvimento de harmônicos esféricos que fizemos aqui pode ser considerado uma porção da álgebra de Lie — relacionada à teoria de grupo, Seção 4.3.

### Exercícios

**12.7.1** Usando as formas conhecidas de  $L_+$  e  $L_-$  (Exercícios 2.5.14 e 12.6.7), mostre que

$$\int [Y_L^M]^* L_- (L_+ Y_L^M) d\Omega = \int (L_+ Y_L^M)^* (L_+ Y_L^M) d\Omega.$$

**12.7.2** Derive as relações

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}} (L_-)^{L-M} \psi_{LL}(\theta, \varphi), \\ \text{(b)} \quad \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (L_+)^{L+M} \psi_{L,-L}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

*Sugestão:* As Equações (4.83) e (4.84) podem ser úteis.

**12.7.3** Derive as equações de operadores múltiplos

$$\begin{aligned} (L_+)^n \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi} &= (-1)^n e^{i(M+n)\varphi} \text{sen}^{n+M} \theta \frac{d^n \text{sen}^{-M} \theta \Theta_{LM}(\theta)}{d(\cos \theta)^n}, \\ (L_-)^n \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi} &= e^{i(M-n)\varphi} \text{sen}^{n-M} \theta \frac{d^n \text{sen}^M \theta \Theta_{LM}(\theta)}{d(\cos \theta)^n}. \end{aligned}$$

*Sugestão:* Tente indução matemática

**12.7.4** Usando  $(L_-)^n$ , mostre que

$$Y_L^{-M}(\theta, \varphi) = (-1)^M Y_L^{*M}(\theta, \varphi).$$



**12.7.5** Verifique por cálculo explícito que

$$(a) L_+ Y_1^0(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\varphi} = \sqrt{2} Y_1^1(\theta, \varphi),$$

$$(b) L_- Y_1^0(\theta, \varphi) = +\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\varphi} = \sqrt{2} Y_1^{-1}(\theta, \varphi).$$

Os sinais (fase de Condon-Shortley) são uma consequência dos operadores de levantamento e de abaixamento  $L_+$  e  $L_-$ .

## 12.8 O Teorema da Adição para Harmônicos Esféricos

### Identidade Trigonométrica

Na discussão a seguir,  $(\theta_1, \varphi_1)$  e  $(\theta_2, \varphi_2)$  denotam duas direções diferentes em nosso sistema de coordenadas esféricas  $(x_1, y_1, z_1)$ , separadas por um ângulo  $\gamma$  (Figura 12.16). Os ângulos polares  $\theta_1, \theta_2$  são medidos a partir do eixo  $z_1$ . Esses ângulos satisfazem a identidade trigonométrica

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (12.175)$$

que talvez seja provada com mais facilidade por métodos vetoriais (compare com Capítulo 1).

Então, o teorema da adição afirma que

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n (-1)^m Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) Y_n^{-m}(\theta_2, \varphi_2), \quad (12.176)$$

ou, o que é equivalente,

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) [Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)]^*.^{21} \quad (12.177)$$

Em termos das funções associadas de Legendre, o teorema da adição é

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta_1) P_n(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_1) P_n^m(\cos \theta_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12.178)$$

A Equação (12.175) é um caso especial da Equação (12.178),  $n = 1$ .

### Derivação do Teorema da Adição

Agora derivamos a Equação (12.177). Sejam  $(\gamma, \xi)$  os ângulos que especificam a direção  $(\theta_1, \varphi_1)$  em um sistema de coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$  cujo eixo está alinhado com  $(\theta_2, \varphi_2)$ . (Na verdade, escolher 0 para o ângulo de azimute  $\xi$  na Figura 12.16 é irrelevante.) Em primeiro lugar, expandimos  $Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)$  em harmônicos esféricos nas variáveis angulares  $(\gamma, \xi)$ :

$$Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{\sigma=-n}^n a_{n\sigma}^m Y_n^\sigma(\gamma, \xi). \quad (12.179)$$

Não escrevemos nenhum somatório sobre  $n$  na Equação (12.179) porque o momento angular  $n$  de  $Y_n^m$  é conservado (veja a Seção 4.3); por ser um harmônico esférico,  $Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)$  é uma autofunção de  $L^2$  com autovalor  $n(n+1)$ .

Para nossa prova, precisamos apenas do coeficiente  $a_{n0}^m$ , que obtemos multiplicando a Equação (12.179) por  $[Y_n^0(\gamma, \xi)]^*$  e integrando sobre a esfera:

$$a_{n0}^m = \int Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) [Y_n^0(\gamma, \xi)]^* d\Omega_{\gamma, \xi}. \quad (12.180)$$

<sup>21</sup>O asterisco para conjugação complexa pode entrar em qualquer dos harmônicos esféricos.

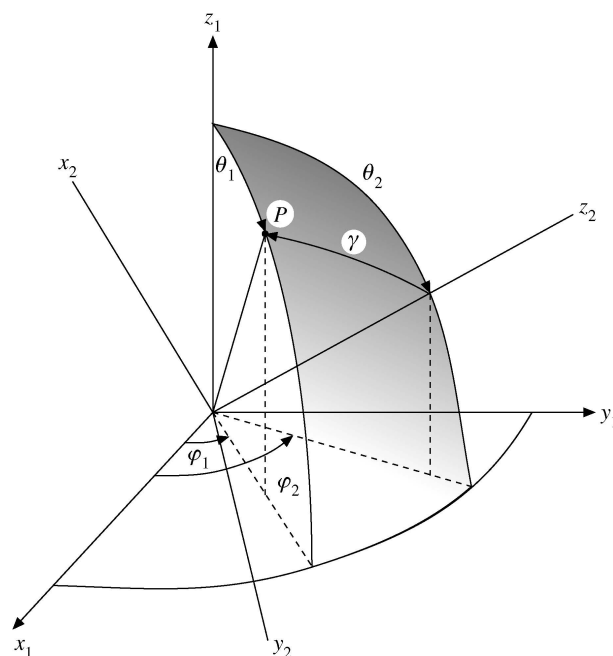


Figura 12.16: Duas direções separadas por um ângulo  $\gamma$ .

De modo semelhante, expandimos  $P_n(\cos \gamma)$  em termos de harmônicos esféricos  $Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)$ :

$$P_n(\cos \gamma) = \left( \frac{4\pi}{2n+1} \right)^{1/2} Y_n^0(\gamma, \xi) = \sum_{m=-n}^n b_{nm} Y_n^m(\theta_1, \varphi_1), \quad (12.181)$$

em que os  $b_{nm}$  dependerão, é claro, de  $\theta_2, \varphi_2$ , isto é, da orientação do eixo  $z_2$ . Multiplicando por  $[Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)]^*$  e integrando com relação a  $\theta_1$  e  $\varphi_1$  sobre a esfera, temos

$$b_{nm} = \int P_n(\cos \gamma) Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1) d\Omega_{\theta_1, \varphi_1}. \quad (12.182)$$

Em termos de harmônicos esféricos, a Equação (12.182) se torna

$$\left( \frac{4\pi}{2n+1} \right)^{1/2} \int Y_n^0(\gamma, \psi) [Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)]^* d\Omega = b_{nm}. \quad (12.183)$$

Note que os índices inferiores foram descartados do elemento de ângulo sólido  $d\Omega$ . Visto que a faixa de integração cobre todos os ângulos sólidos, a escolha do eixo polar é irrelevante. Então, comparando as Equações (12.180) e (12.183), vemos que

$$b_{nm}^* = a_{n0}^m \left( \frac{4\pi}{2n+1} \right)^{1/2}. \quad (12.184)$$

Agora, avaliamos  $Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)$  usando a expansão da Equação (12.179) e observando que os valores de  $(\gamma, \xi)$  correspondentes a  $(\theta_1, \varphi_1) = (\theta_2, \varphi_2)$  são  $(0, 0)$ . O resultado é

$$Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) = a_{n0}^m Y_n^0(0, 0) = a_{n0}^m \left( \frac{2n+1}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad (12.185)$$

sendo que todos os termos com  $\sigma$  não-zero desaparecem. Substituindo isso de volta na Equação (12.184), obtemos

$$b_{nm} = \frac{4\pi}{2n+1} [Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)]^*. \quad (12.186)$$

Por fim, substituindo essa expressão para  $b_{nm}$  no somatório, a Equação (12.181) resulta na Equação (12.177), o que prova nosso teorema da adição.



Quem está familiarizado com teoria de grupo achará uma prova muito mais elegante da Equação (12.177), usando a rotação de grupo.<sup>22</sup> Esse é o Exercício 4.4.5.

Uma aplicação do teorema da adição é na construção de uma função de Green para a equação tridimensional de Laplace em coordenadas polares esféricas. Se a fonte estiver sobre o eixo polar no ponto ( $r = a, \theta = 0, \varphi = 0$ ), então, pela Equação (12.4a),

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}a|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) \frac{a^n}{r^{n+1}}, & r > a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) \frac{r^n}{a^{n+1}}, & r < a. \end{aligned} \quad (12.187)$$

Rotacionando nosso sistema de coordenadas para colocar a fonte em  $(a, \theta_2, \varphi_2)$  e o ponto de observação em  $(r, \theta_1, \varphi_1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} G(r, \theta_1, \varphi_1, a, \theta_2, \varphi_2) &= \frac{1}{R} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} [Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)]^* Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) \frac{a^n}{r^{n+1}}, & r > a, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} [Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)]^* Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) \frac{r^n}{a^{n+1}}, & r < a. \end{aligned} \quad (12.188)$$

Na Seção 9.7 esse argumento é invertido para dar outra derivação do teorema da adição de polinômios de Legendre.

### Exercícios

**12.8.1** Quando provamos o teorema da adição, admitimos que  $Y_n^k(\theta_1, \varphi_1)$  podia ser expandido em uma série de  $Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)$ , nos quais  $m$  variava de  $-n$  a  $+n$  mas  $n$  era mantido fixo. Que argumentos você pode desenvolver para justificar o somatório apenas sobre o índice superior,  $m$ , e **não** sobre o índice inferior,  $n$ ?

*Sugestões:* Uma possibilidade é examinar a homogeneidade dos  $Y_n^m$ , isto é,  $Y_n^m$  podem ser expressos inteiramente em termos da forma  $\cos^{n-p} \theta \sin^p \theta$ , ou  $x^{n-p-s} y^p z^s / r^n$ . Uma outra possibilidade é examinar o comportamento da equação de Legendre sob rotação do sistema de coordenadas.

**12.8.2** Um elétron atômico com momento angular  $L$  e número quântico magnético  $M$  tem uma função de onda

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) Y_L^M(\theta, \varphi).$$

Mostre que a soma das densidades dos elétrons em uma dada camada completa é esféricamente simétrica; isto é,  $\sum_{M=-L}^L \psi^*(r, \theta, \varphi) \psi(r, \theta, \varphi)$  é independente de  $\theta$  e  $\varphi$ .

**12.8.3** O potencial de um elétron no ponto  $\mathbf{r}_e$  no campo de  $Z$  prótons nos pontos  $\mathbf{r}_p$  é

$$\Phi = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=1}^Z \frac{1}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|}.$$

Mostre que essa expressão pode ser escrita como

$$\Phi = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} \sum_{p=1}^Z \sum_{L,M} \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^L \frac{4\pi}{2L+1} [Y_L^M(\theta_p, \varphi_p)]^* Y_L^M(\theta_e, \varphi_e),$$

em que  $r_e > r_p$ . Como  $\Phi$  seria escrita para  $r_e < r_p$ ?

**12.8.4** Dois prótons são **uniformemente** distribuídos dentro do mesmo volume esférico. Se as coordenadas de um elemento de carga são  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  e as coordenadas do outro são  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  e  $r_{12}$  é a distância entre eles, então o elemento de energia de repulsão será dado por

$$d\psi = \rho^2 \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r_{12}} = \rho^2 \frac{r_1^2 dr_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 r_2^2 dr_2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2}{r_{12}}.$$

<sup>22</sup>Compare M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Nova York: Wiley (1957).

Aqui,

$$\rho = \frac{\text{carga}}{\text{volume}} = \frac{3e}{4\pi R^3}, \quad \text{densidade de carga,}$$

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \gamma.$$

Calcule a energia eletrostática total (de repulsão) dos dois prótons. Esse cálculo é usado para justificar a diferença de massa em núcleos “espelho”, tais como  $O^{15}$  e  $N^{15}$ .

Resposta:  $\frac{6}{5} \frac{e^2}{R}$ .

Isso é o **dobro** do requerido para criar uma esfera uniformemente carregada porque temos duas nuvens de carga separadas interagindo, mas nenhuma das cargas interagindo consigo mesma (**não** considerando permutação de pares).

**12.8.5** Cada um dos dois elétrons  $1S$  do hélio pode ser descrito por uma função de onda hidrogenóida

$$\psi(\mathbf{r}) = \left( \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-Zr/a_0}$$

na ausência do outro elétron. Aqui,  $Z$ , o número atômico, é 2. O símbolo  $a_0$  é o raio de Bohr,  $\hbar^2/me^2$ . Ache a energia potencial mútua dos dois elétrons, dada por

$$\int \psi^*(\mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} \psi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2.$$

Resposta:  $\frac{5e^2 Z}{8a_0}$ .

*Nota:*  $d^3r_1 = r_1^2 dr_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 \equiv d\tau_1$ ,  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ .

**12.8.6** A probabilidade de encontrar um elétron de hidrogênio  $1S$  em um elemento de volume  $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$  é

$$\frac{1}{\pi a_0^3} \exp[-2r/a_0] r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Ache o potencial eletrostático correspondente. Calcule o potencial por

$$V(\mathbf{r}_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d^3r_2,$$

sendo que  $r_1$  **não** está sobre o eixo  $z$ . Expanda  $r_{12}$ . Aplique o teorema da adição de polinômios de Legendre e mostre que a dependência angular de  $V(\mathbf{r}_1)$  se anula.

Resposta:  $V(\mathbf{r}_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2r_1} \gamma \left( 3, \frac{2r_1}{a_0} \right) + \frac{1}{a_0} \Gamma \left( 2, \frac{2r_1}{a_0} \right) \right\}$ .

**12.8.7** Um elétron de um átomo hidrogênio em uma órbita  $2P$  tem uma distribuição de carga

$$\rho = \frac{q}{64\pi a_0^5} r^2 e^{-r/a_0} \sin^2 \theta,$$

onde  $a_0$  é o raio de Bohr,  $\hbar^2/me^2$ . Ache o potencial eletrostático correspondente a essa distribuição de carga.

**12.8.8** A densidade de corrente elétrica produzida por um elétron  $2P$  em um átomo de hidrogênio é

$$\mathbf{J} = \hat{\varphi} \frac{q\hbar}{32ma_0^5} e^{-r/a_0} r \sin \theta.$$

Usando

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3r_2,$$

ache o potencial vetorial magnético produzido por esse elétron de um átomo de hidrogênio.

*Sugestão:* Resolva em componentes cartesianas. Use o teorema da adição para eliminar  $\gamma$ , o ângulo incluído entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ .



- 12.8.9** (a) Como série de Laplace e como exemplo da Equação (1.190) (agora com funções complexas), mostre que

$$\delta(\Omega_1 - \Omega_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\theta_2, \varphi_2) Y_n^m(\theta_1, \varphi_1).$$

- (b) Mostre também que essa **mesma** função delta de Dirac pode ser escrita como

$$\delta(\Omega_1 - \Omega_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \gamma).$$

Agora, se você puder justificar os somatórios sobre  $n$  **termo a termo**, terá uma derivação alternativa do teorema da adição de harmônico esférico.

## 12.9 Integrais de Produtos de Três Harmônicos Esféricos

Freqüentemente encontramos em Mecânica Quântica integrais da forma geral

$$\begin{aligned} \langle Y_{L_1}^{M_1} | Y_{L_2}^{M_2} | Y_{L_3}^{M_3} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_{L_1}^{M_1}]^* Y_{L_2}^{M_2} Y_{L_3}^{M_3} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{(2L_2+1)(2L_3+1)}{4\pi(2L_1+1)}} C(L_2 L_3 L_1 | 000) C(L_2 L_3 L_1 | M_2 M_3 M_1), \end{aligned} \quad (12.189)$$

nas quais todos os harmônicos esféricos dependem de  $\theta, \varphi$ . O primeiro fator no integrando pode vir da função de onda de um estado final e o terceiro fator de um estado inicial, enquanto o fator do meio pode representar um operador que está sendo avaliado ou cujo “elemento de matriz” está sendo determinado.

Usando métodos teóricos de grupo, como na teoria quântica de momento angular, podemos dar uma expressão geral para as formas listadas. A análise envolve os coeficientes de adição vetorial ou de Clebsch-Gordan da Seção 4.4, que são tabulados. Surgem três restrições gerais.

1. A integral se anula, a menos que a condição de triângulo dos  $L$  (momento angular) seja zero,  $|L_1 - L_3| \leq L_2 \leq L_1 + L_3$ .
2. A integral se anula, a menos que  $M_2 + M_3 = M_1$ . Aqui, temos o fundamento teórico do modelo vetorial da espectroscopia atômica.
3. Por fim, a integral se anula, a menos que o produto  $[Y_{L_1}^{M_1}]^* Y_{L_2}^{M_2} Y_{L_3}^{M_3}$  seja par, isto é, a menos que  $L_1 + L_2 + L_3$  seja um inteiro par. Essa é uma lei de conservação de paridade.

A chave para a determinação da integral na Equação (12.189) é a expansão do produto de dois harmônicos esféricos que dependem dos mesmos ângulos (ao contrário do teorema da adição), os quais estão acoplados por coeficientes de Clebsch-Gordan ao momento angular  $L, M$ , que, por suas propriedades de transformação rotacional, deve ser proporcional a  $Y_L^M(\theta, \varphi)$ , isto é,

$$\sum_{M_1, M_2} C(L_2 L_3 L_1 | M_2 M_3 M_1) Y_{L_2}^{M_2}(\theta, \varphi) Y_{L_3}^{M_3}(\theta, \varphi) \sim Y_{L_1}^{M_1}(\theta, \varphi).$$

Para detalhes, referimo-nos a Edmonds.<sup>23</sup>

Vamos esboçar algumas das etapas dessa abordagem geral e poderosa usando a Seção 4.4.

O teorema de Wigner-Eckart aplicado ao elemento de matriz na Equação (12.189) resulta em

$$\begin{aligned} \langle Y_{L_1}^{M_1} | Y_{L_2}^{M_2} | Y_{L_3}^{M_3} \rangle &= (-1)^{L_2 - L_3 + L_1} C(L_2 L_3 L_1 | M_2 M_3 M_1) \\ &\quad \cdot \frac{\langle Y_{L_1} || Y_{L_2} || Y_{L_3} \rangle}{\sqrt{(2L_1+1)}}, \end{aligned} \quad (12.190)$$

em que as barras duplas denotam o elemento de matriz reduzido, que não depende mais dos  $M_i$ . As regras de seleção (1) e (2) mencionadas antes resultam diretamente do coeficiente de Clebsch-Gordan na Equação (12.190).

<sup>23</sup>E. U. Condon e G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (1951); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Nova York: Wiley (1957); A. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton, NJ: Princeton University Press (1957); E. P. Wigner, *Group Theory and Its Applications to Quantum Mechanics* (traduzido por J. J. Griffin), Nova York: Academic Press (1959).

Em seguida usamos a Equação (12.190), para  $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ , em conjunção com a Equação (12.153), para  $m = 0$ , o que resulta em

$$\begin{aligned} \langle Y_{L_1}^0 | Y_{L_2}^0 | Y_{L_3}^0 \rangle &= \frac{(-1)^{L_2-L_3+L_1}}{\sqrt{2L_1+1}} C(L_2 L_3 L_1 | 000) \cdot \langle Y_{L_1} \| Y_{L_2} \| Y_{L_3} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{(2L_1+1)(2L_2+1)(2L_3+1)}{4\pi}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 P_{L_1}(x) P_{L_2}(x) P_{L_3}(x) dx, \end{aligned} \quad (12.191)$$

em que  $x = \cos \theta$ . Por métodos elementares, pode-se mostrar que

$$\int_{-1}^1 P_{L_1}(x) P_{L_2}(x) P_{L_3}(x) dx = \frac{2}{2L_1+1} C(L_2 L_3 L_1 | 000)^2. \quad (12.192)$$

Substituindo a Equação (12.192) em (12.191), obtemos

$$\langle Y_{L_1} \| Y_{L_2} \| Y_{L_3} \rangle = (-1)^{L_2-L_3+L_1} C(L_2 L_3 L_1 | 000) \sqrt{\frac{(2L_2+1)(2L_3+1)}{4\pi}}. \quad (12.193)$$

A regra de seleção de paridade (3) já mencionada resulta da Equação (12.193) em conjunção com a relação de fase

$$C(L_2 L_3 L_1 | -M_2, -M_3, -M_1) = (-1)^{L_2+L_3-L_1} C(L_2 L_3 L_1 | M_2 M_3 M_1). \quad (12.194)$$

Note que os coeficientes de adição vetorial são desenvolvidos em termos da convenção de fase de Condon-Shortley,<sup>23</sup> na qual o  $(-1)^m$  da Equação (12.153) é associado com o  $m$  positivo. .

É possível avaliar muitas das integrais comumente encontradas dessa forma com as técnicas já desenvolvidas. A integração sobre o azimute pode ser efetuada por inspeção:

$$\int_0^{2\pi} e^{-iM_1\varphi} e^{iM_2\varphi} e^{iM_3\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{M_2+M_3-M_1,0}. \quad (12.195)$$

Em termos físicos, isso corresponde à conservação da componente  $z$  do momento angular.

### Aplicação de Relações de Recorrência

Um breve exame da Tabela 12.3 mostrará que a dependência de  $\theta$  de  $Y_{L_2}^{M_2}$ , isto é,  $P_{L_2}^{M_2}(\theta)$ , pode ser expressa em termos de  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ . Contudo, um fator de  $\cos \theta$  ou  $\sin \theta$  pode ser combinado com o fator  $Y_{L_3}^{M_3}$  usando as relações de recorrência dos polinômios associados de Legendre. Por exemplo, pelas Equações (12.92) e (12.93) obtemos

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_L^M &= + \left[ \frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^M \\ &\quad + \left[ \frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^M \end{aligned} \quad (12.196)$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \sin \theta Y_L^M &= - \left[ \frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^{M+1} \\ &\quad + \left[ \frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^{M+1} \end{aligned} \quad (12.197)$$

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} \sin \theta Y_L^M &= + \left[ \frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} Y_{L+1}^{M-1} \\ &\quad - \left[ \frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} Y_{L-1}^{M-1}. \end{aligned} \quad (12.198)$$

Usando essas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \int Y_{L_1}^{M_1*} \cos \theta Y_L^M d\Omega &= \left[ \frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)} \right]^{1/2} \delta_{M_1,M} \delta_{L_1,L+1} \\ &\quad + \left[ \frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)} \right]^{1/2} \delta_{M_1,M} \delta_{L_1,L-1}. \end{aligned} \quad (12.199)$$





A ocorrência do delta de Kronecker  $(L_1, L \pm 1)$  é um aspecto da conservação do momento angular. Em termos físicos, essa integral surge em uma consideração de radiação eletromagnética atômica ordinária (dipolo elétrico). Ela leva à familiar regra de seleção, que diz que transições para um nível atômico com número quântico de momento angular orbital  $L_1$  só podem se originar de níveis atômicos com números quânticos  $L_1 - 1$  ou  $L_1 + 1$ . A aplicação de expressões como

$$\text{momento de quadrupolo} \sim \int Y_L^{M*}(\theta, \varphi) P_2(\cos \theta) Y_L^M(\theta, \varphi) d\Omega$$

é mais complicada porém perfeitamente direta.

### Exercícios

#### 12.9.1 Verifique

- (a)  $\int Y_L^M(\theta, \varphi) Y_0^0(\theta, \varphi) Y_L^{M*}(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ,
- (b)  $\int Y_L^M Y_1^0 Y_{L+1}^{M*} d\Omega = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L+M+1)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+3)}}$ ,
- (c)  $\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L+1}^{M+1*} d\Omega = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}}$ ,
- (d)  $\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L-1}^{M+1*} d\Omega = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}}$ .

Essas integrais foram usadas em uma investigação da correlação angular de elétrons de conversão interna.

#### 12.9.2 Mostre que

- (a)  $\int_{-1}^1 x P_L(x) P_N(x) dx = \begin{cases} \frac{2(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}, & N = L+1, \\ \frac{2L}{(2L-1)(2L+1)}, & N = L-1, \end{cases}$
- (b)  $\int_{-1}^1 x^2 P_L(x) P_N(x) dx = \begin{cases} \frac{2(L+1)(L+2)}{(2L+1)(2L+3)(2L+5)}, & N = L+2, \\ \frac{2(2L^2+2L-1)}{(2L-1)(2L+1)(2L+3)}, & N = L, \\ \frac{2L(L-1)}{(2L-3)(2L-1)(2L+1)}, & N = L-2. \end{cases}$

#### 12.9.3 Visto que $xP_n(x)$ é um polinômio (grau $n+1$ ), ele pode ser representado pela série de Legendre

$$xP_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s P_s(x).$$

- (a) Mostre que  $a_s = 0$ , para  $s < n-1$  e  $s > n+1$ .
- (b) Calcule  $a_{n-1}$ ,  $a_n$  e  $a_{n+1}$  e mostre que você reproduziu a relação de recorrência, Equação (12.17).

*Nota:* Esse argumento pode ser colocado em uma forma geral para demonstrar a existência de uma relação de recorrência de três termos para qualquer um de nossos conjuntos completos de polinômios ortogonais:

$$x\varphi_n = a_{n+1}\varphi_{n+1} + a_n\varphi_n + a_{n-1}\varphi_{n-1}.$$

#### 12.9.4 Mostre que a Equação (12.199) é um caso especial da Equação (12.190) e derive o elemento de matriz reduzida $\langle Y_{L_1} \| Y_1 \| Y_L \rangle$ .

Resposta:  $\langle Y_{L_1} \| Y_1 \| Y_L \rangle = (-1)^{L_1+1-L} C(1LL_1|000) \frac{\sqrt{3(2L+1)}}{4\pi}$ .

## 12.10 Funções de Legendre da Segunda Espécie

Em todas as análises que fizemos até aqui, tratamos com uma solução da equação de Legendre, a solução  $P_n(\cos \theta)$ , que é regular (finita) nos dois pontos singulares da equação diferencial,  $\cos \theta = \pm 1$ . Pela teoria geral das equações diferenciais, sabemos que existe uma segunda solução. Desenvolvemos essa segunda solução,  $Q_n$ , com  $n$  inteiro não-negativo (porque, em aplicações,  $Q_n$  ocorrerá em conjunção com  $P_n$ ), por uma solução de série da equação de Legendre. Mais adiante obteremos uma forma fechada.

### Soluções de Série de Equação de Legendre

Para resolver

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (12.200)$$

procederemos como no Capítulo 9, fazendo<sup>24</sup>

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda}, \quad (12.201)$$

com

$$y' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda) a_{\lambda} x^{k+\lambda-1}, \quad (12.202)$$

$$y'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) a_{\lambda} x^{k+\lambda-2}. \quad (12.203)$$

Substituindo na equação diferencial, original, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) a_{\lambda} x^{k+\lambda-2} \\ & + \sum_{\lambda=0}^{\infty} [n(n+1) - 2(k+\lambda) - (k+\lambda)(k+\lambda-1)] a_{\lambda} x^{k+\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (12.204)$$

A equação indicial é

$$k(k-1) = 0, \quad (12.205)$$

com soluções  $k = 0, 1$ . Tentamos primeiro  $k = 0$  com  $a_0 = 1, a_1 = 0$ . Então, nossa série é descrita pela relação de recorrência

$$(\lambda+2)(\lambda+1)a_{\lambda+2} + [n(n+1) - 2\lambda - \lambda(\lambda-1)]a_{\lambda} = 0, \quad (12.206)$$

que se torna

$$a_{\lambda+2} = -\frac{(n+\lambda+1)(n-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} a_{\lambda}. \quad (12.207)$$

Rotulando essa série pela Equação (12.201) como  $y(x) = p_n(x)$ , temos

$$p_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \quad (12.208)$$

A segunda solução da equação indicial,  $k = 1$ , com  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , leva à relação de recorrência

$$a_{\lambda+2} = -\frac{(n+\lambda+2)(n-\lambda-1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)} a_{\lambda}. \quad (12.209)$$

Rotulando essa série pela Equação (12.201) como  $y(x) = q_n(x)$ , obtemos

$$q_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \quad (12.210)$$

<sup>24</sup>Note que  $x$  pode ser substituído pela variável complexa  $z$ .



Então, nossa solução geral da Equação (12.200) é

$$y_n(x) = A_n p_n(x) + B_n q_n(x), \quad (12.211)$$

**contanto que haja convergência.** Pelo teste de Gauss, Seção 5.2 (veja o Exemplo 5.2.4), não temos convergência em  $x = \pm 1$ . Para sair dessa dificuldade, igualamos a constante de separação  $n$  a um inteiro (Exercício 9.5.5) e convertemos a série infinita em um polinômio.

Para  $n$  inteiro positivo par (ou zero), a série  $p_n$  termina e, com uma escolha adequada de um fator de normalização (selecionado para obter concordância com a definição de  $P_n(x)$ , na Seção 12.1,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n [(n/2)!]^2} p_n(x) = (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s} (s!)^2} p_{2s}(x) \\ &= (-1)^s \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} p_{2s}(x), \quad \text{para } n = 2s. \end{aligned} \quad (12.212)$$

Se  $n$  for inteiro positivo ímpar, a série  $q_n$  termina após um número finito de termos, e escrevemos

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{n!}{2^{n-1} \{[(n-1)/2]!\}^2} q_n(x) \\ &= (-1)^s \frac{(2s+1)!}{2^{2s} (s!)^2} q_{2s+1}(x) = (-1)^s \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!} q_{2s+1}(x), \quad \text{para } n = 2s + 1. \end{aligned} \quad (12.213)$$

Note que essas expressões são válidas para todos os valores reais de  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$  e para valores complexos no plano complexo finito. As constantes que multiplicam  $p_n$  e  $q_n$  são escolhidas para fazer com que os  $P_n$  estejam de acordo com os polinômios de Legendre dados pela função geradora.

As Equações (12.208) e (12.210) ainda podem ser usadas com  $n = \nu$ , não sendo inteiro, mas agora a série não é mais truncada e a faixa de convergência se torna  $-1 < x < 1$ . As extremidades,  $x = \pm 1$ , não são incluídas.

Às vezes é conveniente inverter a ordem dos termos na série, o que pode ser feito colocando

$$\begin{aligned} s &= \frac{n}{2} - \lambda && \text{na primeira forma de } P_n(x), \quad n \text{ par,} \\ s &= \frac{n-1}{2} - \lambda && \text{na segunda forma de } P_n(x), \quad n \text{ ímpar,} \end{aligned}$$

de modo que as Equações (12.212) e (12.213) se tornam

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!} x^{n-2s}, \quad (12.214)$$

em que o limite superior  $s = n/2$  (para  $n$  par) ou  $(n-1)/2$  (para  $n$  ímpar). Isso reproduz a Equação (12.8) da Seção 12.1, que é obtida diretamente da função geradora. Essa concordância com a Equação (12.8) é a razão para a escolha particular de normalização nas Equações (12.212) e (12.213).

### Funções $Q_n(x)$ da Segunda Espécie

É bom observar que usamos somente  $p_n$  para  $n$  par e  $q_n$  para  $n$  ímpar (porque eles terminam para essa escolha de  $n$ ). Agora podemos definir uma segunda solução da equação de Legendre (Figura 12.17) por

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (-1)^{n/2} \frac{[n/2]!^2 2^n}{n!} q_n(x) \\ &= (-1)^s \frac{(2s)!!}{(2s-1)!!} q_{2s}(x), \quad \text{para } n \text{ par, } n = 2s, \end{aligned} \quad (12.215)$$

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (-1)^{(n+1)/2} \frac{\{[(n-1)/2]!\}^2 2^{n-1}}{n!} p_n(x) \\ &= (-1)^{s+1} \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} p_{2s+1}(x), \quad \text{para } n \text{ ímpar, } n = 2s + 1. \end{aligned} \quad (12.216)$$

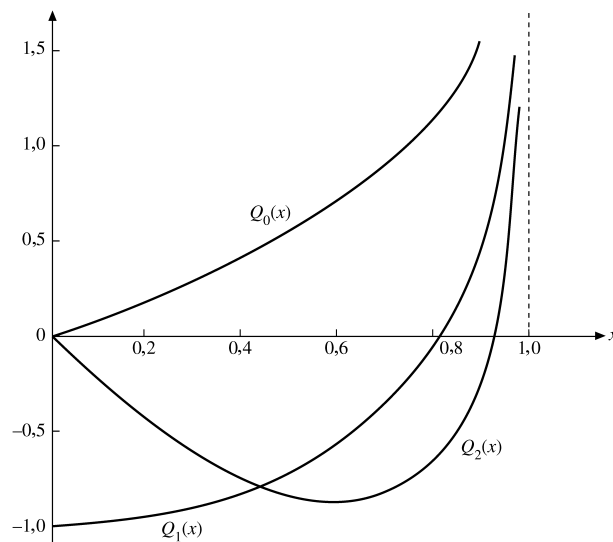


Figura 12.17: Segunda função de Legendre,  $Q_n(x)$ ,  $0 \leq x < 1$ .

Essa escolha de fatores de normalização força  $Q_n$  a satisfazer as mesmas relações de recorrência que  $P_n$ . Isso pode ser verificado substituindo as Equações (12.215) e (12.216) nas Equações (12.17) e (12.26). Inspeção das relações de recorrência (série) (Equações (12.207) e (12.209)), isto é, pelo teste da razão de Cauchy, mostra que  $Q_n(x)$  convergirá para  $-1 < x < 1$ . Se  $|x| \geq 1$ , essas formas de série de nossa segunda solução **divergem**. Pode-se desenvolver uma solução em uma série de potências negativas de  $x$  para a região  $|x| > 1$  (Figura 12.18), mas passamos para uma solução de forma fechada que pode ser usada em todo o plano complexo (exceto para os pontos singulares  $x = \pm 1$  e tomando cuidado nas linhas de corte).

### Soluções de Forma Fechada

Muitas vezes é desejável uma forma fechada da segunda solução,  $Q_n(z)$ . Ela pode ser obtida pelo método discutido na Seção 9.6. Escrevemos

$$Q_n(z) = P_n(z) \left\{ A_n + B_n \int^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2} \right\}, \tag{12.217}$$

na qual a constante  $A_n$  substitui a avaliação da integral no limite inferior arbitrário. Ambas as constantes,  $A_n$  e  $B_n$ , podem ser determinadas para casos especiais.

Para  $n = 0$ , a Equação (12.217) resulta em

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= P_0(z) \left\{ A_0 + B_0 \int^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_0(x)]^2} \right\} = A_0 + B_0 \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \\ &= A_0 + B_0 \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{z^{2s+1}}{2s+1} + \dots \right), \end{aligned} \tag{12.218}$$

sendo que a última expressão resulta de uma expansão de Maclaurin do logaritmo. Comparando essa expressão com a solução de série (Equação (12.210)), obtemos

$$Q_0(z) = q_0(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{z^{2s+1}}{2s+1} + \dots, \tag{12.219}$$

sendo  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = 1$ . Resultados semelhantes são conseguidos para  $n = 1$ . Obtemos

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= z \left[ A_1 + B_1 \int^z \frac{dx}{(1-x^2)x^2} \right] \\ &= A_1 z + B_1 z \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{z} \right). \end{aligned} \tag{12.220}$$

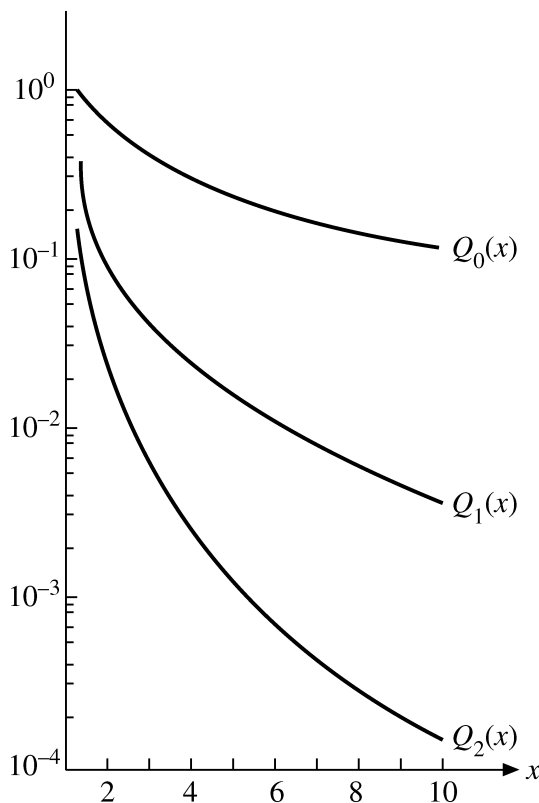


Figura 12.18: Segunda função de Legendre,  $Q_n(x)$ ,  $x > 1$ .

Expandindo em uma série de potências e comparando com  $Q_1(z) = -p_1(z)$ , temos  $A_1 = 0, B_1 = 1$ . Portanto, podemos escrever

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{1+z}{1-z} - 1, \quad |z| < 1. \quad (12.221)$$

Talvez o melhor modo de determinar a  $Q_n(z)$  de ordem mais alta seja usar a relação de recorrência (Equação (12.17)), que pode ser verificada para ambos,  $x^2 < 1$  e  $x^2 > 1$ , por substituição em formas de série. Essa técnica de relação de recorrência resulta em

$$Q_2(z) = \frac{1}{2} P_2(z) \ln \frac{1+z}{1-z} - \frac{3}{2} P_1(z). \quad (12.222)$$

Aplicação repetida da fórmula de recorrência leva a

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{1+z}{1-z} - \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(z) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(z) - \dots \quad (12.223)$$

Pela forma  $\ln[(1+z)/(1-z)]$ , veremos que, para  $z$  real, essas expressões são válidas na faixa  $-1 < x < 1$ . Se quisermos ter formas fechadas válidas fora dessa faixa, basta substituir

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{por} \quad \ln \frac{z+1}{z-1}.$$

Ao usarmos a última forma, válida para  $z$  grande, consideramos o intervalo de linha  $-1 \leq x \leq 1$  uma linha de corte. Valores de  $Q_n(x)$  sobre a linha de corte costumam ser designados pela relação

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} [Q_n(x+i0) + Q_n(x-i0)], \quad (12.224)$$

a média aritmética das aproximações pelo lado imaginário positivo e pelo lado imaginário negativo. Note que para

$z \rightarrow x > 1, z - 1 \rightarrow (1 - x)e^{\pm i\pi}$ . O resultado é que, para **todo**  $z$ , exceto sobre o eixo real,  $-1 \leq x \leq 1$ , temos

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \tag{12.225}$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1} - 1, \tag{12.226}$$

e assim por diante.

Para conveniente referência, são dados alguns valores especiais de  $Q_n(z)$ .

1.  $Q_n(1) = \infty$ , pelo termo logarítmico (Equação (12.223)).
2.  $Q_n(\infty) = 0$ . Esse valor é mais bem obtido por uma representação de  $Q_n(x)$  como uma série de potências negativas de  $x$ , Exercício 12.10.4.
3.  $Q_n(-z) = (-1)^{n+1} Q_n(z)$ . Resulta da forma de série. Também pode ser derivado usando  $Q_0(z), Q_1(z)$  e a relação de recorrência (Equação (12.17)).
4.  $Q_n(0) = 0$ , para  $n$  par, por (3).
5.  $Q_n(0) = (-1)^{(n+1)/2} \frac{\{[(n-1)/2]!\}^2}{n!} 2^{n-1}$   
 $= (-1)^{s+1} \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}$ , para  $n$  ímpar,  $n = 2s + 1$ .

Esse último resultado vem da forma de série (Equação (12.216)) com  $p_n(0) = 1$ .

### Exercícios

**12.10.1** Derive a relação de paridade para  $Q_n(x)$ .

**12.10.2** Pelas Equações (12.212) e (12.213), mostre que

$$(a) P_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(2n+2s-1)!}{(2s)!(n+s-1)!(n-s)!} x^{2s}.$$

$$(b) P_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(2n+2s+1)!}{(2s+1)!(n+s)!(n-s)!} x^{2s+1}.$$

Verifique a normalização mostrando que um termo de cada série está de acordo com o termo correspondente da Equação (12.8).

**12.10.3** Mostre que

$$(a) Q_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(n+s)!(n-s)!}{(2s+1)!(2n-2s)!} x^{2s+1}$$

$$+ 2^{2n} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{(n+s)!(2s-2n)!}{(2s+1)!(s-n)!} x^{2s+1}, \quad |x| < 1.$$

$$(b) Q_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^{2n} \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{(n+s)!(n-s)!}{(2s)!(2n-2s+1)!} x^{2s}$$

$$+ 2^{2n+1} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{(n+s)!(2s-2n-2)!}{(2s)!(s-n-1)!} x^{2s}, \quad |x| < 1.$$

**12.10.4** (a) Começando com a forma admitida

$$Q_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{-\lambda} x^{k-\lambda},$$

mostre que

$$Q_n(x) = b_0 x^{-n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!(n+2s)!(2n+1)!}{s!(n!)^2(2n+2s+1)!} x^{-2s}.$$

(b) A escolha é padrão de  $b_0$

$$b_0 = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$



Mostre que essa escolha de  $b_0$  leva essa forma de série de potências negativas de  $Q_n(x)$  à concordância com as soluções de forma fechada.

- 12.10.5** Comprove que as funções de Legendre da segunda espécie,  $Q_n(x)$ , satisfazem as mesmas relações de recorrência que  $P_n(x)$ , para  $|x| < 1$  e também para  $|x| > 1$ :

$$\begin{aligned} (2n+1)xQ_n(x) &= (n+1)Q_{n+1}(x) + nQ_{n-1}(x), \\ (2n+1)Q_n(x) &= Q'_{n+1}(x) - Q'_{n-1}(x). \end{aligned}$$

- 12.10.6** (a) Usando as relações de recorrência, prove (independente da relação wronskiana) que

$$n[P_n(x)Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)Q_n(x)] = P_1(x)Q_0(x) - P_0(x)Q_1(x).$$

- (b) Mostre, por substituição direta, que o lado direito dessa equação é igual a 1.

- 12.10.7** (a) Escreva uma sub-rotina para gerar  $Q_n(x)$  e  $Q_0$  até  $Q_{n-1}$  com base na relação de recorrência para essas funções de Legendre da segunda espécie. Considere  $x$  entre  $(-1, 1)$ , excluindo as extremidades.

*Sugestão:* Considere que  $Q_0(x)$  e  $Q_1(x)$  são conhecidos.

- (b) Teste a precisão de sua sub-rotina calculando  $Q_{10}(x)$  e comparando com os valores tabulados em AMS-55 (a referência completa é fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 8).

## 12.11 Harmônicos Esféricos Vetoriais

Neste capítulo, grande parte de nossa atenção foi dirigida à resolução das equações de campos escalares, como o potencial eletrostático. Fizemos isso primordialmente porque os campos escalares são mais fáceis de manipular do que os campos vetoriais. Contudo, agora que os problemas de campo escalar já estão sob firme controle, vamos dar maior atenção a problemas de campos vetoriais.

As equações de Maxwell para o vácuo, onde a corrente externa e as densidades de carga se anulam, levam à equação de onda (ou vetorial de Helmholtz) para o potencial vetorial  $\mathbf{A}$ . Em uma expansão parcial de onda de  $\mathbf{A}$  em coordenadas polares esféricas, queremos usar autofunções angulares que são vetores. Com essa finalidade, escrevemos os vetores unitários de coordenadas  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  em notação esférica (veja a Seção 4.4),

$$\hat{e}_{+1} = -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{e}_0 = \hat{z}, \quad \hat{e}_{-1} = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}}, \quad (12.227)$$

de modo que  $\hat{e}_m$  forma um tensor esférico de grau 1. Se acoplarmos os harmônicos esféricos com os  $\hat{e}_m$  ao momento angular total  $\mathbf{J}$  usando os coeficientes de Clebsch-Gordan relevantes, chegamos aos harmônicos esféricos vetoriais:

$$\mathbf{Y}_{JLM_J}(\theta, \varphi) = \sum_{m, M} C(L1J|MmM_J)Y_L^M(\theta, \varphi)\hat{e}_m. \quad (12.228)$$

É óbvio que eles obedecem às relações de ortogonalidade

$$\int \mathbf{Y}_{JLM_J}^*(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{J'L'M'_J}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{JJ'}\delta_{LL'}\delta_{M_JM'_J}. \quad (12.229)$$

Dado  $J$ , as regras de seleção do acoplamento de momento angular nos dizem que  $L$  só pode assumir os valores  $J+1$ ,  $J$  e  $J-1$ . Se consultarmos os coeficientes de Clebsch-Gordan e invertermos a Equação (12.228), obteremos

$$\hat{\mathbf{r}}Y_L^M(\theta, \varphi) = -\left[\frac{L+1}{2L+1}\right]^{1/2} \mathbf{Y}_{LL+1M} + \left[\frac{L}{2L+1}\right]^{1/2} \mathbf{Y}_{LL-1M}, \quad (12.230)$$

que exhibe o caráter vetorial de  $\mathbf{Y}$  e o conteúdo do momento angular orbital,  $L+1$  e  $L-1$ , de  $\hat{\mathbf{r}}Y_L^M$ .

Sob as operações de paridade (inversão de coordenadas), os harmônicos esféricos vetoriais se transformam em

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{LL+1M}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L+1} \mathbf{Y}_{LL+1M}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{Y}_{LL-1M}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L+1} \mathbf{Y}_{LL-1M}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{Y}_{LLM}(\theta', \varphi') &= (-1)^L \mathbf{Y}_{LLM}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (12.231)$$

em que

$$\theta' = \pi - \theta \quad \varphi' = \pi + \varphi. \quad (12.232)$$

Os harmônicos esféricos vetoriais são úteis em um desenvolvimento posterior dos operadores de gradiente (Equação (2.46)), de divergência (Equação (2.47)) e do rotacional (Equação (2.49)) em coordenadas polares esféricas:

$$\begin{aligned} \nabla [F(r)Y_L^M(\theta, \varphi)] &= -\left[\frac{L+1}{2L+1}\right]^{1/2} \left[\frac{d}{dr} - \frac{L}{r}\right] F \mathbf{Y}_{LL+1M} \\ &\quad + \left[\frac{L}{2L+1}\right]^{1/2} \left[\frac{d}{dr} + \frac{L+1}{r}\right] F \mathbf{Y}_{LL-1M}, \end{aligned} \quad (12.233)$$

$$\nabla \cdot [F(r)\mathbf{Y}_{LL+1M}(\theta, \varphi)] = -\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} + \frac{L+2}{r}F\right] Y_L^M(\theta, \varphi), \quad (12.234)$$

$$\nabla \cdot [F(r)\mathbf{Y}_{LL-1M}(\theta, \varphi)] = \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} - \frac{L-1}{r}F\right] Y_L^M(\theta, \varphi), \quad (12.235)$$

$$\nabla \cdot [F(r)\mathbf{Y}_{LLM}(\theta, \varphi)] = 0, \quad (12.236)$$

$$\nabla \times [F(r)\mathbf{Y}_{LL+1M}] = i \left[\frac{L}{2L+1}\right]^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} + \frac{L+2}{r}F\right] \mathbf{Y}_{LLM}, \quad (12.237)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times [F(r)\mathbf{Y}_{LLM}] &= i \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} - \frac{L}{r}F\right] \mathbf{Y}_{LL+1M} \\ &\quad + i \left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} + \frac{L+1}{r}F\right] \mathbf{Y}_{LL-1M}, \end{aligned} \quad (12.238)$$

$$\nabla \times [F(r)\mathbf{Y}_{LL-1M}] = i \left[\frac{L+1}{2L+1}\right]^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} - \frac{L-1}{r}F\right] \mathbf{Y}_{LLM}. \quad (12.239)$$

Se substituirmos a Equação (12.230) na componente radial  $\hat{r}\partial/\partial r$  do operador de gradiente, por exemplo, obteremos ambos os termos  $dF/dr$  na Equação (12.233). Para uma derivação completa das Equações (12.233) a (12.239), referimos-nos à literatura.<sup>25</sup> Essas relações desempenham um importante papel na expansão de onda parcial da eletrodinâmica clássica e também da quântica.

As definições dos harmônicos esféricos vetoriais dadas aqui são ditadas pela conveniência, primordialmente em cálculos de Mecânica Quântica, nos quais o momento angular é um parâmetro significativo. Mais exemplos da utilidade e potência dos harmônicos esféricos vetoriais serão encontrados em Blatt e Weisskopf,<sup>25</sup> em Morse e Feshbach (veja Referências Gerais no final do livro) e em Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3<sup>a</sup> ed., Nova York: J. Wiley & Sons (1998), que usa harmônicos esféricos vetoriais em uma descrição de radiação de multipolo e problemas eletromagnéticos relacionados.

- Harmônicos esféricos vetoriais são desenvolvidos acoplando  $L$  unidades de momento angular orbital e 1 unidade de momento angular de spin. Uma extensão, acoplando  $L$  unidades de momento angular orbital e 2 unidades de momento angular de spin para formar harmônicos esféricos **tensoriais** é apresentada por Mathews.<sup>26</sup>
- A principal aplicação de harmônicos esféricos tensoriais é na investigação de radiação gravitacional.

## Exercícios

**12.11.1** Construa os harmônicos esféricos vetoriais  $l = 0, m = 0$  e  $l = 1, m = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } \mathbf{Y}_{010} &= -\hat{r}(4\pi)^{-1/2} \\ \mathbf{Y}_{000} &= 0 \\ \mathbf{Y}_{120} &= -\hat{r}(2\pi)^{-1/2} \cos \theta - \hat{\theta}(8\pi)^{-1/2} \sin \theta \\ \mathbf{Y}_{110} &= \hat{\varphi}i(3/8\pi)^{1/2} \sin \theta \\ \mathbf{Y}_{100} &= \hat{r}(4\pi)^{-1/2} \cos \theta - \hat{\theta}(4\pi)^{-1/2} \sin \theta. \end{aligned}$$

<sup>25</sup>E. H. Hill, Theory of vector spherical harmonics, *Am. J. Phys.* 22: 211 (1954); também J. M. Blatt e V. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Nova York: Wiley (1952). Note que Hill designa fases de acordo com a convenção de fase de Condon-Shortley (Seção 4.4). Na notação de Hill,  $\mathbf{X}_{LM} = \mathbf{Y}_{LLM}$ ,  $\mathbf{V}_{LM} = \mathbf{Y}_{LL+1M}$ ,  $\mathbf{W}_{LM} = \mathbf{Y}_{LL-1M}$ .

<sup>26</sup>J. Mathews, Gravitational multipole radiation, em *In Memoriam* (H. P. Robertson, ed.), Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics (1963).





**12.11.2** Verifique que a paridade de  $\mathbf{Y}_{LL+1M}$  é  $(-1)^{L+1}$ , a de  $\mathbf{Y}_{LLM}$  é  $(-1)^L$  e a de  $\mathbf{Y}_{LL-1M}$  é  $(-1)^{L+1}$ . O que aconteceu com a dependência de  $M$  da paridade?  
*Sugestão:*  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\varphi}$  têm paridade ímpar;  $\hat{\theta}$  tem paridade par (compare com o Exercício 2.5.8).

**12.11.3** Verifique a ortonormalidade dos harmônicos esféricos vetoriais  $\mathbf{Y}_{JLMJ}$ .

**12.11.4** O livro *Classical Electrodynamics*, 3<sup>a</sup> ed. de Jackson (veja referência fornecida em Leituras Adicionais do Capítulo 11) e define  $\mathbf{Y}_{LLM}$  pela equação

$$\mathbf{Y}_{LLM}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \mathbf{L} Y_L^M(\theta, \varphi),$$

na qual o operador de momento angular  $\mathbf{L}$  é dado por

$$\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla).$$

Mostre que essa definição está de acordo com a Equação (12.228).

**12.11.5** Mostre que

$$\sum_{M=-L}^L \mathbf{Y}_{LLM}^*(\theta, \varphi) \cdot \mathbf{Y}_{LLM}(\theta, \varphi) = \frac{2L+1}{4\pi}.$$

*Sugestão:* Uma maneira é usar o Exercício 12.11.4 com  $\mathbf{L}$  expandido em coordenadas cartesianas usando os operadores de elevação e redução da Seção 4.3.

**12.11.6** Mostre que

$$\int \mathbf{Y}_{LLM} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Y}_{LLM}) d\Omega = 0.$$

O integrando representa um termo de interferência em radiação eletromagnética que contribui para distribuições angulares mas não para intensidade total.

### Leituras Adicionais

Hobson, E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Nova York: Chelsea (1955). Essa é uma referência muito completa e o texto clássico sobre polinômios de Legendre e todas as funções relacionadas.

Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, 3<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (1989).

Veja também as referências listadas nas Seções 4.4 e 12.9 e no final do Capítulo 13.

# 13

## Mais Funções Especiais

Neste capítulo estudaremos quatro conjunto de polinômios ortogonais, Hermite, Laguerre e Chebyshev<sup>1</sup> Embora esses quatro conjuntos sejam de menor importância para a Física Matemática do que as funções de primeiro e segundo tipos. Bessel e Legendre dos Capítulos 11 e 12, eles são usados e, portanto, merecem atenção. Por exemplo, polinômios de Hermite ocorrem em soluções do oscilador harmônico simples da Mecânica Quântica e polinômios de Laguerre em funções de onda do átomo de hidrogênio. Como as técnicas matemáticas gerais são as mesmas dos dois capítulos anteriores, o desenvolvimento dessas funções é apenas esboçado. Deixamos para o leitor as provas detalhadas, nas linhas dos Capítulos 11 e 12. Expressamos esses polinômios e outras funções em termos de funções hipergeométricas e hipergeométricas confluentes. Para concluir o capítulo, apresentamos uma introdução às funções de Mathieu, que surgem como EDOs e EDPs com condições de fronteira elípticas.

### 13.1 Funções de Hermite

#### Funções Geradoras — Polinômios de Hermite

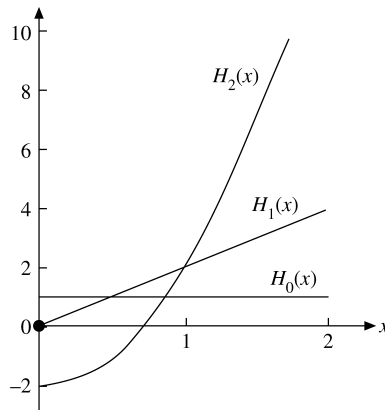


Figura 13.1: Polinômios de Hermite.

Os polinômios de Hermite (Figura 13.1),  $H_n(x)$ , podem ser definidos pela função geradora<sup>2</sup>

$$g(x, t) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (13.1)$$

#### Relações de Recorrência

Note a ausência de um índice superior, que distingue polinômios de Hermite das funções de Hankel não relacionadas. Pela função geradora constatamos que os polinômios de Hermite satisfazem as relações de

<sup>1</sup>Esta é a ortografia escolhida em AMS-55 (a referência completa é fornecida na nota de rodapé 4 no Capítulo 5). Contudo, encontram-se várias outras ortografias, como Tschebyscheff.

<sup>2</sup>Uma derivação dessa função geradora de Hermite é esboçada no Exercício 13.1.1.



recorrência

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{13.2}$$

e

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{13.3}$$

A Equação (13.2) é obtida diferenciando a função geradora em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= (-2t + 2x)e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!} \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)] = 0.$$

Como cada coeficiente dessa série de potências se anula, a Equação (13.2) é estabelecida. De modo semelhante, a diferenciação em relação a  $x$  leva a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2te^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!},$$

que resulta na Equação (13.3) após a troca do índice de somatório  $n$  na última soma  $n + 1 \rightarrow n$ .

A expansão de Maclaurin da função geradora

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2tx - t^2)^n}{n!} = 1 + (2tx - t^2) + \dots \tag{13.4}$$

resulta em  $H_0(x) = 1$  e  $H_1(x) = 2x$  e, então, a equação de recursão, Equação (13.2), permite a construção de qualquer  $H_n(x)$  desejada ( $n$  inteiro). Para referência conveniente, alguns dos primeiros polinômios de Hermite são listados na Tabela 13.1.).

**Tabela 13.1** Polinômios de Hermite

$H_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

Valores especiais dos polinômios de Hermite resultam da função geradora para  $x = 0$ :

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{t^n}{n!},$$

isto é,

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \tag{13.5}$$

Também obtemos da função geradora a importante relação de paridade

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x) \tag{13.6}$$

observando que a Equação (13.1) resulta em

$$g(-x, -t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(-x) \frac{(-t)^n}{n!} = g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

### Representações Alternativas

A representação de Rodrigues de  $H_n(x)$  é

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{13.7}$$

A seguir, vamos demonstrar isso usando indução matemática.

#### Exemplo 13.1.1 REPRESENTAÇÃO DE RODRIGUES

Reescrevemos a função geradora como  $g(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2}$  e observamos que

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-x)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} e^{-(t-x)^2}.$$

Isso resulta em

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=0} = (2x - 2t)g \Big|_{t=0} = 2x = H_1(x) = -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2},$$

que é o caso inicial  $n = 1$ . Admitindo o caso  $n$  da Equação (13.7) como válido, agora usamos a identidade de operador  $\frac{d}{dx} e^{x^2} = 2xe^{x^2} + e^{x^2} \frac{d}{dx}$  em

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} &= (-1)^{n+1} \left[ \frac{d}{dx} e^{x^2} - 2xe^{x^2} \right] \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ &= -\frac{d}{dx} H_n(x) + 2xH_n(x) = H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

para estabelecer o caso  $n + 1$  com a última igualdade resultando das Equações (13.2) e (13.3).

Mais diretamente, diferenciar a função geradora  $n$  vezes em relação a  $t$  e em seguida igualar  $t$  a zero resulta em

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} (e^{-t^2+2tx}) \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left. \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2} \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad \blacksquare$$

Uma segunda representação pode ser obtida usando cálculo de resíduos (Seção 7.1). Se multiplicarmos a Equação (13.1) por  $t^{-m-1}$  e integrarmos ao redor da origem no plano complexo  $t$ , somente o termo com  $H_m(x)$  sobreviverá:

$$H_m(x) = \frac{m!}{2\pi i} \oint t^{-m-1} e^{-t^2+2tx} dt. \tag{13.8}$$

Além disso, pela expansão de Maclaurin, Equação (13.4), podemos derivar nosso polinômio de Hermite  $H_n(x)$  na forma de uma série: usando a expansão binomial de  $(2x - t)^\nu$  e o índice  $N = s + \nu$ ,

$$\begin{aligned} e^{-t^2+2tx} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} (2x - t)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} (2x)^{\nu-s} (-t)^s \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^N}{N!} \sum_{s=0}^{[N/2]} (2x)^{N-2s} (-1)^s \frac{N!}{(N-s)!} \binom{N-s}{s}, \end{aligned}$$

em que  $[N/2]$  é o maior inteiro menor ou igual a  $N/2$ . Escrevendo o coeficiente binomial em termos de fatoriais e usando a Equação (13.1), obtemos

$$H_N(x) = \sum_{s=0}^{[N/2]} (2x)^{N-2s} (-1)^s \frac{N!}{s!(N-2s)!}.$$

Mais explicitamente, substituindo  $N \rightarrow n$ , temos

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (2x)^n - \frac{2n!}{(n-2)!2!} (2x)^{n-2} + \frac{4n!}{(n-4)!4!} (2x)^{n-4} 1 \cdot 3 \dots \\ &= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-2)^s (2x)^{n-2s} \binom{n}{2s} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2s-1) \\ &= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{(n-2s)!s!}. \end{aligned} \tag{13.9}$$



Esta série termina para  $n$  inteiro e resulta em nosso polinômio de Hermite.

### Ortogonalidade

Se substituirmos a equação de recursão, Equação (13.3), na Equação (13.2) podemos eliminar o índice  $n - 1$ , obtendo

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x),$$

que já foi usada no Exemplo 13.1.1. Se diferenciarmos essa relação de recursão e substituirmos o índice  $n + 1$ , encontramos

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x),$$

que pode ser rearranjada para a EDO de segunda ordem para polinômios de Hermite. Assim, as relações de recorrência (Equações (13.2) e (13.3)) levam à EDO de segunda ordem

$$\boxed{H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0}, \quad (13.10)$$

que, claramente, **não** é auto-adjunta.

Para colocar a EDO em forma auto-adjunta, conforme a Seção 10.1, multiplicamos por  $\exp(-x^2)$ , Exercício 10.1.2. Isso leva à integral de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0, \quad m \neq n, \quad (13.11)$$

com a função de peso  $\exp(-x^2)$ , uma consequência de colocar a EDO em forma auto-adjunta. O intervalo  $(-\infty, \infty)$  é escolhido para obter as condições de contorno do operador hermitiano, Seção 10.1. Às vezes é conveniente absorver a função de peso nos polinômios de Hermite. Podemos definir

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x), \quad (13.12)$$

com  $\varphi_n(x)$  não mais um polinômio.

Substituição na Equação (13.10) resulta na equação diferencial para  $\varphi_n(x)$ ,

$$\varphi''_n(x) + (2n + 1 - x^2)\varphi_n(x) = 0. \quad (13.13)$$

Essa é a equação diferencial para um oscilador harmônico simples da Mecânica Quântica, que talvez seja a mais importante aplicação física dos polinômios de Hermite. A Equação (13.13) é auto-adjunta e as soluções  $\varphi_n(x)$  são ortogonais para o intervalo  $(-\infty < x < \infty)$  com uma função de peso unitária.

O problema da normalização dessas funções permanece. Prosseguindo como na Seção 12.3, multiplicamos a Equação (13.1) por ela mesma e então por  $e^{-x^2}$ . Isso resulta em

$$e^{-x^2}e^{-s^2+2sx}e^{-t^2+2tx} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\frac{s^m t^n}{m!n!}.$$

Quando integramos essa relação sobre  $x$  de  $-\infty$  to  $+\infty$ , os termos cruzados da soma dupla são descartados por causa da propriedade da ortogonalidade:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{n!n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-s^2+2sx-t^2+2tx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s-t)^2} e^{2st} dx \\ &= \pi^{1/2} e^{2st} = \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (st)^n}{n!}, \end{aligned} \quad (13.14)$$

usando as Equações (8.6) e (8.8). Igualando coeficientes de potências iguais de  $st$ , obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n \pi^{1/2} n!. \quad (13.15)$$

<sup>3</sup>Os termos cruzados ( $m \neq n$ ) podem ser conservados, se desejarmos. Então, quando os coeficientes de  $s^\alpha t^\beta$  forem igualados, a ortogonalidade será aparente.

### Oscilador Harmônico Simples da Mecânica Quântica

O seguinte desenvolvimento do polinômios de Hermite por meio de funções de onda de oscilador harmônico simples  $\phi_n(x)$  é análogo à utilização dos operadores de levantamento e abaixamento para operadores de momento angular apresentada na Seção 4.3. Isso significa que derivamos os autovalores  $n + 1/2$  sem pressupor o desenvolvimento que levou à Equação (13.13). O aspecto fundamental da equação de autovalor, Equação (13.13),  $(\frac{d^2}{dx^2} - x^2)\varphi_n(x) = -(2n + 1)\varphi_n(x)$ , é que a hamiltoniana

$$-2\mathcal{H} \equiv \frac{d^2}{dx^2} - x^2 = \left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right) + \left[x, \frac{d}{dx}\right] \quad (13.16)$$

quase se fatora. Fazendo uso ingênuo de  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , o comutador básico da Mecânica Quântica,  $[p_x, x] = \hbar/i$  (com momentum  $p_x = (\hbar/i)d/dx$ ), entra como uma correção na Equação (13.16). (Como  $p_x$  é hermitiano,  $d/dx$  é anti-hermitiana,  $(d/dx)^\dagger = -d/dx$ .) Esse comutador pode ser avaliado como segue. Imagine que o operador diferencial  $d/dx$  aja sobre uma função de onda  $\varphi(x)$  para a direita, como na Equação (13.13), portanto,

$$\frac{d}{dx}(x\varphi) = x\frac{d}{dx}\varphi + \varphi, \quad (13.17)$$

pela regra do produto. Descartando a função de onda  $\varphi$  da Equação (13.17), reescrevemos a Equação (13.17) como

$$\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \equiv \left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1, \quad (13.18)$$

uma constante, e então verificamos a Equação (13.16) diretamente expandindo o produto de operadores. A forma de produto da Equação (13.16), até o comutador constante, sugere a introdução de operadores não-hermitianos

$$\hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right), \quad \hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \quad (13.19)$$

com  $(\hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger$ , que são adjuntos um do outro. Eles obedecem às relações de comutação

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0 = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger], \quad (13.20)$$

que são características desses operadores e diretas para derivar da Equação (13.18) e

$$\left[\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right] = 0 = [x, x] \quad \text{e} \quad \left[x, \frac{d}{dx}\right] = -\left[\frac{d}{dx}, x\right].$$

Voltando à Equação (13.16) e usando a Equação (13.19), reescrevemos a hamiltoniana como

$$\mathcal{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (13.21)$$

e introduzimos o **operador de número** hermitiano  $N = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , de modo que  $\mathcal{H} = N + 1/2$ . Seja  $|n\rangle$  uma autofunção de  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H}|n\rangle = \lambda_n |n\rangle,$$

cujo autovalor  $\lambda_n$  é desconhecido neste ponto. Agora provamos a propriedade fundamental:  $N$  tem autovalores inteiros não-negativos

$$N|n\rangle = \left(\lambda_n - \frac{1}{2}\right)|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.22)$$

isto é,  $\lambda_n = n + 1/2$ . Uma vez que  $\hat{a}|n\rangle$  é conjugado complexo para  $\langle n|\hat{a}^\dagger$ , a integral de normalização  $\langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \geq 0$  e é finita. Por

$$(\hat{a}|n\rangle)^\dagger \hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = \left(\lambda_n - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad (13.23)$$



vemos que  $N$  tem autovalores não-negativos.

Agora mostramos que, se  $\hat{a}|n\rangle$  for não-zero, ela é uma autofunção com autovalor  $\lambda_{n-1} = \lambda_n - 1$ . Após normalizar  $\hat{a}|n\rangle$ , esse estado é designado  $|n-1\rangle$ , o que é provado pelas relações de comutação

$$\boxed{[N, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [N, \hat{a}] = -\hat{a},} \quad (13.24)$$

que resultam da Equação (13.20). Essas relações de comutação caracterizam  $N$  como o operador de número. Para ver isso, determinamos o autovalor de  $N$  para os estados  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  e  $\hat{a}|n\rangle$ . Usando  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = N + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = N + 1$ , constatamos que

$$\begin{aligned} N(\hat{a}^\dagger|n\rangle) &= \hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a}^\dagger)|n\rangle = \hat{a}^\dagger([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + N)|n\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger(N + 1)|n\rangle = \left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle, \\ N(\hat{a}|n\rangle) &= (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(N - 1)|n\rangle = (n - 1)\hat{a}|n\rangle. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Em outras palavras,  $N$  agindo sobre  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  mostra que  $\hat{a}^\dagger$  elevou de uma unidade o autovalor  $n$  correspondente a  $|n\rangle$ , daí seu nome de **operador de elevação** ou **criação**. Aplicando  $\hat{a}^\dagger$  repetidas vezes, podemos alcançar todos os estados mais elevados. Não há limite superior para a seqüência de autovalores. De modo semelhante,  $\hat{a}$  reduz o autovalor  $n$  de uma unidade; daí, ele é um **operador de redução** (ou de **aniquilação**). Por conseguinte,

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle \sim |n + 1\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle \sim |n - 1\rangle. \quad (13.26)$$

Aplicando  $\hat{a}$  repetidas vezes, podemos alcançar o estado mais baixo, ou fundamental,  $|0\rangle$  com autovalor  $\lambda_0$ . Não podemos continuar mais para baixo porque  $\lambda_0 \geq 1/2$ . Portanto,  $\hat{a}|0\rangle \equiv 0$ , sugerindo que construímos  $\psi_0 = |0\rangle$  a partir da EDO de **primeira ordem** (fatorada)

$$\sqrt{2}\hat{a}\psi_0 = \left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_0 = 0. \quad (13.27)$$

Integrando

$$\frac{\psi_0'}{\psi_0} = -x, \quad (13.28)$$

obtemos

$$\ln \psi_0 = -\frac{1}{2}x^2 + \ln c_0, \quad (13.29)$$

em que  $c_0$  é uma constante de integração. A solução,

$$\psi_0(x) = c_0 e^{-x^2/2}, \quad (13.30)$$

é uma gaussiana que pode ser normalizada, com  $c_0 = \pi^{-1/4}$  usando a integral de erro, Equações (8.6) e (8.8). Substituindo  $\psi_0$  na Equação (13.13), encontramos

$$\mathcal{H}|0\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle, \quad (13.31)$$

portanto, seu autovalor de energia é  $\lambda_0 = 1/2$  e seu autovalor de número é  $n = 0$ , confirmando a notação  $|0\rangle$ . Aplicando  $\hat{a}^\dagger$  repetidas vezes a  $\psi_0 = |0\rangle$ , confirma-se que todos os outros autovalores são  $\lambda_n = n + 1/2$ , o que prova a Equação (13.13). As normalizações necessárias para a Equação (13.26) resultam das Equações (13.25) e (13.23) e

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|n\rangle = n + 1, \quad (13.32)$$

mostrando

$$\boxed{\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \hat{a}^\dagger|n\rangle, \quad \sqrt{n}|n-1\rangle = \hat{a}|n\rangle.} \quad (13.33)$$

Assim, as funções de onda de estado excitado,  $\psi_1, \psi_2$ , e assim por diante, são geradas pelo operador de elevação

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_0(x) = \frac{x\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}, \quad (13.34)$$

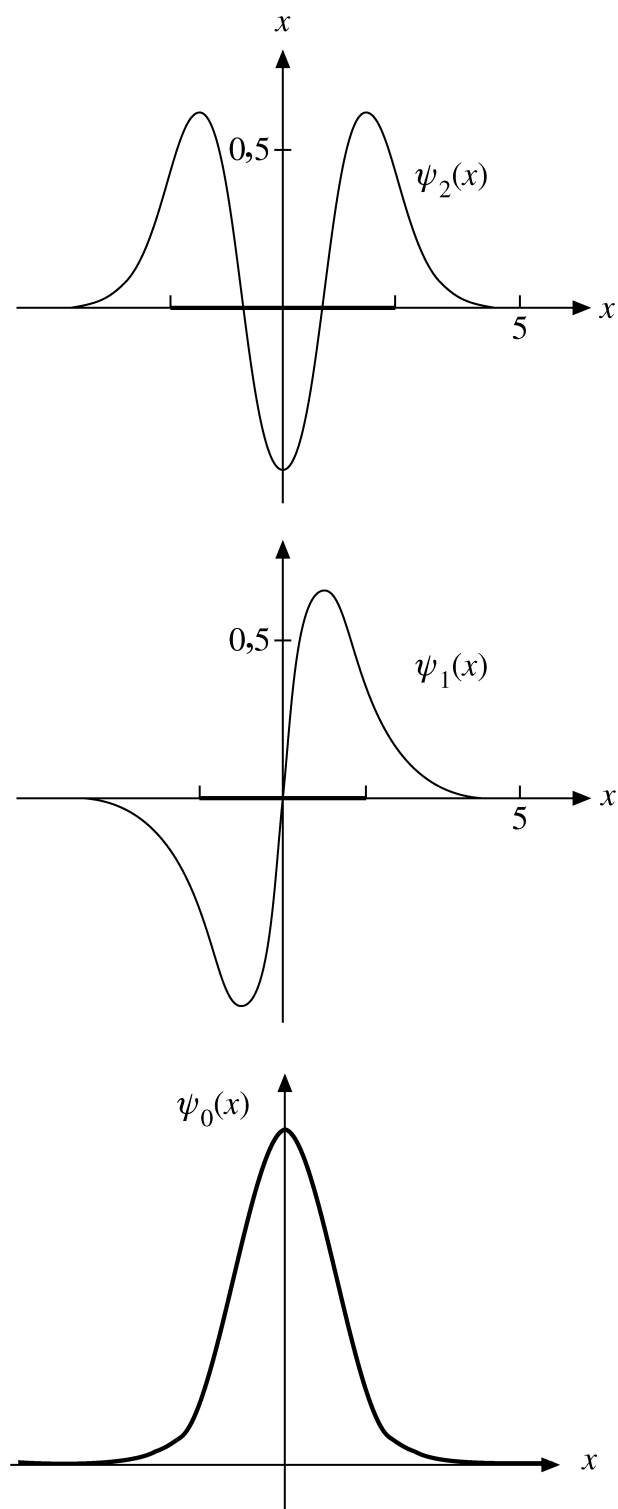


Figura 13.2: Funções de onda do oscilador da Mecânica Quântica: a barra mais escura sobre o eixo  $x$  indica a faixa permitida do oscilador clássico com a mesma energia total.





resultando em [e levando à Equação (13.38), mais adiante].

$$\psi_n(x) = N_n H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad N_n \equiv \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2}, \quad (13.35)$$

em que  $H_n$  são os polinômios de Hermite (Figura 13.2).

Como acabamos de mostrar, os polinômios de Hermite são usados na análise dos osciladores harmônicos simples da Mecânica Quântica. Para uma energia potencial  $V = \frac{1}{2} K z^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 z^2$  (força  $\mathbf{F} = -\nabla V = -Kz\hat{\mathbf{z}}$ ), a equação de onda de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(z) + \frac{1}{2} K z^2 \Psi(z) = E \Psi(z). \quad (13.36)$$

Nossa partícula oscilatória tem massa  $m$  e energia total  $E$ . Usando as abreviações

$$x = \alpha z \quad \text{com} \quad \alpha^4 = \frac{mK}{\hbar^2} = \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2}, \quad (13.37)$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar} \left( \frac{m}{K} \right)^{1/2} = \frac{2E}{\hbar \omega},$$

nas quais  $\omega$  é a frequência angular do oscilador clássico correspondente, a Equação (13.36) se torna (com  $\Psi(z) = \Psi(x/\alpha) = \psi(x)$ )

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + (\lambda - x^2) \psi(x) = 0. \quad (13.38)$$

Essa é a Equação (13.13) com  $\lambda = 2n + 1$ . Daí (Figura 13.2),

$$\boxed{\psi_n(x) = 2^{-n/2} \pi^{-1/4} (n!)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)}, \quad (\text{normalizada}). \quad (13.39)$$

Alternativamente, o requisito de  $n$  ser um inteiro é ditado pelas condições de contorno do sistema da Mecânica Quântica,

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \Psi(z) = 0.$$

Especificamente, se  $n \rightarrow \nu$ , não-inteiro, uma solução de série de potências da Equação (13.13) (Exercício 9.5.6) mostra que  $H_\nu(x)$  se comportará como  $x^\nu e^{x^2}$  para  $x$  grandes. Por conseguinte, as funções  $\psi_\nu(x)$  e  $\Psi_\nu(z)$  explodirão no infinito e será impossível normalizar a função de onda  $\Psi(z)$ . Com esse requisito, a energia  $E$  se torna

$$\boxed{E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega}. \quad (13.40)$$

Como  $n$  se estende sobre valores inteiros ( $n \geq 0$ ), vemos que a energia é quantizada e que há uma energia mínima ou de ponto zero.

$$E_{\text{mín}} = \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (13.41)$$

Essa energia de ponto zero é um aspecto do princípio da incerteza, um fenômeno genuinamente quântico.

Em problemas de Mecânica Quântica, em particular em espectroscopia molecular, são necessárias inúmeras integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx.$$

Exemplos para  $r = 1$  e  $r = 2$  (com  $n = m$ ) estão incluídos nos exercícios ao final desta seção. Há um grande número de outros exemplos em Wilson, Decius e Cross.<sup>4</sup>

Na dinâmica e espectroscopia de moléculas na aproximação de Born-Oppenheimer, o movimento de uma molécula é separado em movimento eletrônico, vibracional e rotacional. Cada átomo em vibração contribui para um elemento de matriz com dois polinômios de Hermite, um para seu estado inicial e outro para seu estado final. Assim, são necessárias integrais de produtos de polinômios de Hermite.

<sup>4</sup>E. B. Wilson, Jr., J. C. Decius, e P. C. Cross, *Molecular Vibrations*, Nova York: McGraw-Hill (1955), nova tiragem, Dover (1980).

**Exemplo 13.1.2** FÓRMULA TRIPLA DE HERMITE

Queremos calcular a seguinte integral envolvendo  $m = 3$  polinômios de Hermite:

$$I_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{N_1}(x)H_{N_2}(x)H_{N_3}(x) dx, \tag{13.42}$$

em que  $N_i \geq 0$  são inteiros. A fórmula (devida a E. C. Titchmarsh, *J. Lond. Math. Soc.* 23: 15 (1948), veja Gradshteyn e Ryzhik, nas Leituras Adicionais) generaliza o caso  $m = 2$  necessário para a ortogonalidade e a normalização de polinômios de Hermite. Para derivá-la, começamos com o produto de três funções geradoras de polinômios de Hermite, multiplicamos por  $e^{-x^2}$  e integramos sobre  $x$ , de modo a gerar  $I_3$ :

$$\begin{aligned} Z_3 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \prod_{j=1}^3 e^{2xt_j - t_j^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sum_{j=1}^3 t_j - x)^2 + 2(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)} dx \\ &= \sqrt{\pi} e^{2(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)}. \end{aligned} \tag{13.43}$$

A última igualdade resulta da substituição  $y = x - \sum_j t_j$  e da utilização da integral de erro  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ , Equações (8.6) e (8.8). Expandindo as funções geradoras em termos de polinômios de Hermite, obtemos

$$\begin{aligned} Z_3 &= \sum_{N_1, N_2, N_3=0}^{\infty} \frac{t_1^{N_1} t_2^{N_2} t_3^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{N_1}(x)H_{N_2}(x)H_{N_3}(x) dx \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{2^N}{N!} (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)^N \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{2^N}{N!} \sum_{0 \leq n_i \leq N, \sum_i n_i = N} \frac{N!}{n_1! n_2! n_3!} (t_1 t_2)^{n_1} (t_1 t_3)^{n_2} (t_2 t_3)^{n_3}, \end{aligned}$$

usando a expansão polinomial

$$\left( \sum_{j=1}^m a_j \right)^N = \sum_{0 \leq n_i \leq m} \frac{N!}{n_1! \dots n_m!} a_1^{n_1} \dots a_m^{n_m}.$$

As potências dos  $t_j t_k$  precedentes se tornam

$$(t_1 t_2)^{n_1} (t_1 t_3)^{n_2} (t_2 t_3)^{n_3} = t_1^{N_1} t_2^{N_2} t_3^{N_3};$$

$$N_1 = n_1 + n_2, \quad N_2 = n_1 + n_3, \quad N_3 = n_2 + n_3.$$

Isto é, de

$$2N = 2(n_1 + n_2 + n_3) = N_1 + N_2 + N_3$$

resulta

$$2N = 2n_1 + 2N_3 = 2n_2 + 2N_2 = 2n_3 + 2N_1,$$

portanto, obtemos

$$n_1 = N - N_3, \quad n_2 = N - N_2, \quad n_3 = N - N_1.$$

Os  $n_i$  são todos fixos (o que torna esse caso especial e fácil) porque os  $N_i$  são fixos e  $2N = \sum_{i=1}^3 N_i$ , com  $N \geq 0$  um inteiro por paridade. Daí, comparando as potências precedentes do tipo  $t_1 t_2 t_3$ ,

$$I_3 = \frac{\sqrt{\pi} 2^N N_1! N_2! N_3!}{(N - N_1)! (N - N_2)! (N - N_3)!}, \tag{13.44}$$

que é a fórmula desejada. Se **ordenarmos**  $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq 0$ , então resulta  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$  equivalente a  $N - N_3 \geq N - N_2 \geq N - N_1 \geq 0$ , que ocorre nos denominadores dos fatoriais de  $I_3$ . ■



**Exemplo 13.1.3** EXPANSÃO DIRETA DE PRODUTOS DE POLINÔMIOS DE HERMITE.

Por uma abordagem alternativa, agora partimos novamente da identidade de função geradora

$$\begin{aligned} \sum_{N_1, N_2=0}^{\infty} H_{N_1}(x) H_{N_2}(x) \frac{t_1^{N_1} t_2^{N_2}}{N_1! N_2!} &= e^{2x(t_1+t_2)-t_1^2-t_2^2} = e^{2x(t_1+t_2)-(t_1+t_2)^2} \cdot e^{2t_1 t_2} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} H_N(x) \frac{(t_1+t_2)^N}{N!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2t_1 t_2)^\nu}{\nu!}. \end{aligned}$$

Usando a expansão binomial e então comparando potências iguais de  $t_1 t_2$ , extraímos uma identidade devida a E. Feldheim (*J. Lond. Math. Soc.* 13: 22 (1938)):

$$\begin{aligned} H_{N_1}(x) H_{N_2}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\min(N_1, N_2)} H_{N_1+N_2-2\nu} \frac{N_1! N_2! 2^\nu}{\nu! (N_1+N_2-2\nu)!} \binom{N_1+N_2-2\nu}{N_1-\nu} \\ &= \sum_{0 \leq \nu \leq \min(N_1, N_2)} H_{N_1+N_2-2\nu} 2^\nu \nu! \binom{N_1}{\nu} \binom{N_2}{\nu}. \end{aligned} \tag{13.45}$$

Para  $\nu = 0$ , o coeficiente de  $H_{N_1+N_2}$  é obviamente a unidade. Casos especiais como

$$H_1^2 = H_2 + 2, \quad H_1 H_2 = H_3 + 4H_1, \quad H_2^2 = H_4 + 8H_2 + 8, \quad H_1 H_3 = H_4 + 6H_2$$

podem ser derivados da Tabela 13.1 e estar de acordo com a fórmula geral do duplo produto.

Essa fórmula compacta pode ser generalizada para produtos de  $m$  polinômios de Hermite, e isso, por sua vez, dá um novo resultado de forma fechada para a integral  $I_m$ .

Vamos começar com um novo resultado para  $I_4$  contendo um produto de quatro polinômios de Hermite. Inserindo a identidade de Feldheim para  $H_{N_1} H_{N_2}$  e  $H_{N_3} H_{N_4}$  e usando ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{N_1} H_{N_2} dx = \sqrt{\pi} 2^{N_1} N_1! \delta_{N_1 N_2}$$

para o produto remanescente de dois polinômios de Hermite, temos como resultado

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{N_1} H_{N_2} H_{N_3} H_{N_4} dx \\ &= \sum_{0 \leq \mu \leq \min(N_1, N_2); 0 \leq \nu \leq \min(N_3, N_4)} 2^\mu \mu! \\ &\quad \cdot \binom{N_1}{\mu} \binom{N_2}{\mu} 2^\nu \nu! \binom{N_3}{\nu} \binom{N_4}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{N_1+N_2-2\mu} H_{N_3+N_4-2\nu} dx \\ &= \sum_{\nu=0}^{N_4} \frac{\sqrt{\pi} 2^M (N_3+N_4-2\nu)! N_1! N_2! N_3! N_4!}{(M-N_3-N_4-\nu)! (M-N_1+\nu)! (M-N_2+\nu)! (N_3-\nu)! (N_4-\nu)! \nu!}. \end{aligned} \tag{13.46}$$

Aqui, usamos a notação  $M = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4)/2$  e escrevemos os coeficientes binomiais explicitamente: portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(N_1 + N_2 - N_3 - N_4) &= M - N_3 - N_4, \\ \frac{1}{2}(N_1 - N_2 + N_3 + N_4) &= M - N_2, \\ \frac{1}{2}(N_2 - N_1 + N_3 + N_4) &= M - N_1. \end{aligned}$$

Pela ortogonalidade, temos  $\mu = (N_1 + N_2 - N_3 - N_4)/2 + \nu$ . O limite superior de  $\nu$  é  $\min(N_3, N_4, M - N_1, M - N_2) = \min(N_4, M - N_1)$  e o limite inferior é  $\max(0, N_3 + N_4 - M) = 0$ , se ordenarmos  $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4$ .

Agora voltamos à expansão do produto de  $m$  polinômios de Hermite e ao novo resultado correspondente dela obtido para  $I_m$ . Provamos a identidade generalizada de Feldheim

$$H_{N_1}(x) \cdots H_{N_m}(x) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}} H_M(x) a_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}}, \tag{13.47}$$

em que

$$M = \sum_{i=1}^{m-1} (N_i - 2\nu_i) + N_m,$$

por indução matemática. Multiplicando essa expressão por  $H_{N_{m+1}}$  e usando a identidade de Feldheim, acabamos com a mesma fórmula para  $m + 1$  polinômios de Hermite, incluindo a relação de recursão.

$$a_{\nu_1, \dots, \nu_m} = a_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}} 2^{\nu_m} \nu_m! \binom{N_{m+1}}{\nu_m} \binom{\sum_{i=1}^{m-1} (N_i - 2\nu_i) + N_{m+1}}{\nu_m}.$$

Sua solução é

$$a_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}} = \prod_{i=1}^{m-1} \binom{N_{i+1}}{\nu_i} \binom{\sum_{j=1}^{i-1} (N_j - 2\nu_j) + N_i}{\nu_i} 2^{\nu_i} \nu_i! \tag{13.48}$$

em que Os limites dos índices do somatório são

$$0 \leq \nu_1 \leq \min(N_1, N_2), \quad 0 \leq \nu_2 \leq \min(N_3, N_1 + N_2 - 2\nu_1), \dots, \\ 0 \leq \nu_{m-1} \leq \min\left(N_m, \sum_{i=1}^{m-2} (N_i - 2\nu_i) + N_{m-1}\right). \tag{13.49}$$

Agora aplicamos essa identidade generalizada de Feldheim, com índices ordenados como  $N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_m$ , a  $I_m$ , agrupando  $H_{N_2} \dots H_{N_m}$  e usando ortogonalidade para o produto remanescente de dois polinômios de Hermite  $H_{N_1} H_{\sum_{i=2}^{m-1} (N_i - 2\nu_i) + N_m}$ . Isso resulta em  $N_1 = \sum_{i=2}^{m-1} (N_i - 2\nu_i) + N_m$ , fixando  $\nu_{m-1}$ , e

$$I_m = \sqrt{\pi} 2^{N_1} N_1! \sum_{\nu_2, \dots, \nu_{m-1}} \prod_{i=2}^{m-1} \binom{N_{i+1}}{\nu_i} \binom{\sum_{j=2}^{i-1} (N_j - 2\nu_j) + N_i}{\nu_i} \nu_i! 2^{\nu_i}, \tag{13.50}$$

os limites sobre os índices do somatório são

$$0 \leq \nu_2 \leq \min(N_3, N_2), \dots, \quad 0 \leq \nu_{m-1} \leq \min\left(N_m, \sum_{i=2}^{m-2} (N_i - 2\nu_i) + N_{m-1}\right). \tag{13.51}$$

■

### Exemplo 13.1.4 APLICAÇÕES DAS FÓRMULAS DE PRODUTO

Para verificar a expressão  $I_m$  para  $m = 3$ , notamos que o somatório  $\sum_{j=2}^{i-1}$  com  $i - 1 = m - 2 = 1$  no segundo coeficiente binomial em  $I_m$  é vazio (isto é, zero); portanto, só resta  $N_i = N_{m-1} = N_2$ . Além disso, com  $\nu_{m-2} = \nu_1$ , a soma sobre os  $\nu_i$  é a soma sobre  $\nu_2$ , que é fixo pela restrição imposta ao índice do somatório  $\nu_2$ :  $N_1 = N_2 - 2\nu_2 + N_3$ . Daí,  $\nu_2 = (N_2 + N_3 - N_1)/2 = N - N_1$ , com  $N = (N_1 + N_2 + N_3)/2$ . Isto é, só resta o produto em  $I_m$ . Por conseguinte, a fórmula geral para  $I_m$  resulta em

$$I_3 = \sqrt{\pi} 2^{N_1} N_1! \binom{N_3}{\nu_2} \binom{N_2}{\nu_2} \nu_2! 2^{\nu_2} = \frac{\sqrt{\pi} 2^N N_1! N_2! N_3!}{(N - N_1)! (N - N_2)! (N - N_3)!},$$

que está de acordo com nosso resultado anterior do Exemplo 13.1.2. A última expressão é baseada nas seguintes observações. A potência de 2 tem o expoente  $N_1 + \nu_2 = N$ . Os fatoriais dos coeficientes binomiais são  $N_3 - \nu_2 = (N_1 + N_3 - N_2)/2 = N - N_2$ ,  $N_2 - \nu_2 = (N_1 + N_2 - N_3)/2 = N - N_3$ .

Em seguida, vamos considerar  $m = 4$ , em que até agora não ordenamos os índices de Hermite  $N_i$ . A razão é que a expressão geral  $I_m$  foi derivada com um agrupamento dos polinômios de Hermite diferente daquele do cálculo separado de  $I_4$  com o qual o comparamos. É por isso que teremos de permutar os índices para obter o resultado anterior para  $I_4$ . Essa é uma conclusão geral: diferentes agrupamentos de polinômios de Hermite dão diferentes permutações dos índices de Hermite no resultado geral.

Temos dois somatórios sobre  $\nu_2$  e  $\nu_{m-1} = \nu_3$ , que é fixo por causa da restrição  $N_1 = N_2 - 2\nu_2 + N_3 - 2\nu_3 + N_4$ . Daí,

$$\nu_3 = \frac{1}{2}(N_2 + N_3 + N_4 - N_1) - \nu_2 = M - N_1 - \nu_2,$$



com  $M = \frac{1}{2}(N_1 + N_2 + N_3 + N_4)$ . O expoente de 2 é  $N_1 + \nu_2 + \nu_3 = M$ . Por conseguinte, para  $m = 4$   $I_m$ , a fórmula resulta em

$$\begin{aligned} I_4 &= \sqrt{\pi} 2^{N_1} N_1! \sum_{\nu_2 \geq 0} \binom{N_3}{\nu_2} \binom{N_4}{\nu_3} \binom{N_2}{\nu_2} \binom{N_2 - 2\nu_2 + N_3}{\nu_3} \nu_2! 2^{\nu_2} \nu_3! 2^{\nu_3} \\ &= \sum_{\nu_2 \geq 0} \frac{\sqrt{\pi} 2^M N_1! N_2! N_3! N_4! (N_2 - 2\nu_2 + N_3)!}{\nu_2! \nu_3! (N_2 - \nu_2)! (N_3 - \nu_2)! (N_4 - \nu_3)! (N_2 + N_3 - 2\nu_2 - \nu_3)!} \\ &= \sum_{\nu_2 \geq 0} \frac{\sqrt{\pi} 2^M N_1! N_2! N_3! N_4! (N_2 + N_3 - 2\nu_2)!}{(N_2 - \nu_2)! (N_3 - \nu_2)! (N_4 - \nu_3)! \nu_2! \nu_3! (N_2 + N_3 - 2\nu_2 - \nu_3)!} \\ &= \sum_{\nu_2 \geq 0} \frac{\sqrt{\pi} 2^M N_1! N_2! N_3! N_4! (N_2 + N_3 - 2\nu_2)!}{\nu_2! (M - N_1 - \nu_2)! (N_3 - \nu_2)! (N_2 - \nu_2)! (M - N_2 - N_3 + \nu_2)! (M - N_4 - \nu_2)!}. \end{aligned}$$

Na última expressão substituímos  $\nu_3$  e usamos

$$\begin{aligned} N_4 - \nu_3 &= (N_1 - N_2 - N_3 + N_4) + \nu_2 = M - N_2 - N_3 + \nu_2, \\ N_2 + N_3 - 2\nu_2 - \nu_3 &= \frac{N_1 + N_2 + N_3 - N_4}{2} - \nu_2 = M - N_4 - \nu_2. \end{aligned}$$

O limite superior é  $\nu_2 \leq \min(N_2, N_3, M - N_1, M - N_4)$  e o limite inferior é  $\nu_2 \geq \max(0, N_2 + N_3 - M)$ . Se fizermos a permutação  $N_2 \leftrightarrow N_4, \nu_2 \rightarrow \nu$ , então nosso resultado anterior  $I_4$  é obtido com limite superior  $\nu \leq \min(N_4, M - N_1) = \frac{1}{2}(N_2 + N_3 + N_4 - N_1)$  e limite inferior  $\nu \geq \max(0, N_3 + N_4 - M) = 0$  porque  $N_3 + N_4 - N_1 - N_2 \leq 0$  para  $N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq 0$ . ■

A fórmula de produto de polinômios de Hermite também se aplica a produtos de funções de onda de oscilador harmônico simples,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx^2/2} H_{N_1}(x) \cdots H_{N_m}(x) dx$ , com uma diferente função exponencial de peso. Para avaliar tais integrais usamos a identidade generalizada de Feldheim para  $H_{N_2} \cdots H_{N_m}$  em conjunção com a integral (veja Gradshteyn e Ryzhik, em Leituras Adicionais),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} H_m(x) H_n(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a}\right)^{m+n+1} (1-a^2)^{(m+n)/2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(-m, -n; \frac{1-m-n}{2}; \frac{a^2}{2(a^2-1)}\right), \end{aligned}$$

em vez da integral de ortogonalidade padrão para o produto remanescente de dois polinômios de Hermite. Aqui, a função hipergeométrica é a soma finita

$${}_2F_1\left(-m, -n; \frac{1-m-n}{2}; \frac{a^2}{2(a^2-1)}\right) = \sum_{\nu=0}^{\min(m,n)-1} \frac{(-m)_\nu (-n)_\nu}{\nu! \left(\frac{1-m-n}{2}\right)_\nu} \left(\frac{a^2}{2(a^2-1)}\right)^\nu$$

com  $(-m)_\nu = (-m)(-m-1)\cdots(-m-\nu+1)$  e  $(-m)_0 \equiv 1$ . Isso dá um resultado similar a  $I_m$  um pouco mais complicado.

O potencial do oscilador também é bastante empregado em cálculos de modelos a quarks de estrutura nuclear (modelo da camada nuclear) de hádrons e da força nuclear.

Há uma segunda solução independente da Equação (13.13). Essa função de Hermite da segunda espécie é uma série infinita (Seções 9.5 e 9.6) e não tem nenhum interesse físico, ao menos até agora.

## Exercícios

**13.1.1** Admita que sabemos que os polinômios de Hermite são soluções da equação diferencial (13.13). Por isso, a relação de recorrência, Equação (13.3), e os valores de  $H_n(0)$  também são conhecidos.

(a) Suponha a existência de uma função geradora

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!}.$$

- (b) Diferencie  $g(x, t)$  em relação a  $x$ , usando a relação de recorrência; desenvolva uma EDP de primeira ordem para  $g(x, t)$ .
- (c) Integre em relação a  $x$ , mantendo  $t$  fixo.
- (d) Avalie  $g(0, t)$  usando a Equação (13.5). Por fim, mostre que

$$g(x, t) = \exp(-t^2 + 2tx).$$

**13.1.2** Ao desenvolver as propriedades dos polinômios de Hermite, parta de vários pontos diferentes, como

1. EDO de Hermite, Equação (13.13),
2. Fórmula de Rodrigues, Equação (13.7),
3. Representação integral, Equação (13.8),
4. Função geradora, Equação (13.1),
5. Construção de Gram-Schmidt de um conjunto completo de polinômios ortogonais sobre  $(-\infty, \infty)$  com um fator de peso de  $\exp(-x^2)$ , Seção 10.3.

Explique como você pode ir de qualquer um desses pontos de partida para todos os outros pontos.

**13.1.3** Prove que

$$\left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n 1 = H_n(x).$$

*Sugestão:* Verifique o primeiro par de exemplos e então use indução matemática.

**13.1.4** Prove que

$$|H_n(x)| \leq |H_n(ix)|.$$

**13.1.5** Reescreva a forma de série de  $H_n(x)$ , como uma série de potências **ascendentes**.

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } H_{2n}(x) &= (-1)^n \sum_{s=0}^n (-1)^{2s} (2x)^{2s} \frac{(2n)!}{(2s)!(n-s)!}, \\ H_{2n+1}(x) &= (-1)^n \sum_{s=0}^n (-1)^s (2x)^{2s+1} \frac{(2n+1)!}{(2s+1)!(n-s)!}. \end{aligned}$$

- 13.1.6** (a) Expanda  $x^{2r}$  em uma série de polinômios de Hermite de ordem par.
- (b) Expanda  $x^{2r+1}$  em uma série de polinômios de Hermite de ordem ímpar.

$$\begin{aligned} \text{Resposta: (a) } x^{2r} &= \frac{(2r)!}{2^{2r}} \sum_{n=0}^r \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(r-n)!} \\ \text{(b) } x^{2r+1} &= \frac{(2r+1)!}{2^{2r+1}} \sum_{n=0}^r \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(r-n)!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

*Sugestão:* Use a representação de Rodrigues e integre por partes.

**13.1.7** Mostre que

$$\begin{aligned} \text{(a) } \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx &= \begin{cases} 2\pi n!/(n/2)!, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar.} \end{cases} \\ \text{(b) } \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 2\pi \frac{(n+1)!}{((n+1)/2)!}, & n \text{ ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

**13.1.8** Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2} H_n(x) dx = 0 \quad \text{para } m \text{ um inteiro, } \quad 0 \leq m \leq n-1.$$

**13.1.9** A probabilidade de transição entre dois estados de oscilador  $m$  e  $n$  depende de

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx.$$

Mostre que essa integral é igual a  $\pi^{1/2} 2^{n-1} n! \delta_{m,n-1} + \pi^{1/2} 2^n (n+1)! \delta_{m,n+1}$ . Esse resultado mostra que tais transições podem ocorrer somente entre estados de níveis de energia adjacentes,  $m = n \pm 1$ .



*Sugestão:* Multiplique a função geradora (Equação (13.1)) por si mesma usando dois conjuntos diferentes de variáveis  $(x, s)$  e  $(x, t)$ . Alternativamente, o fator  $x$  pode ser eliminado pela relação de recorrência, Equação (13.2).

**13.1.10** Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n! \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Essa integral ocorre no cálculo do deslocamento médio quadrático de nosso oscilador quântico.

*Sugestão:* Use a relação de recorrência, Equação (13.2) e a integral de ortogonalidade

**13.1.11** Avalie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

em termos de  $n$  e  $m$  e das funções delta de Kronecker adequadas.

$$\text{Resposta: } 2^{n-1} \pi^{1/2} (2n+1)n! \delta_{nm} + 2^n \pi^{1/2} (n+2)! \delta_{n+2,m} + 2^{n-2} \pi^{1/2} n! \delta_{n-2,m}.$$

**13.1.12** Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_{n+p}(x) dx = \begin{cases} 0, & p > r \\ 2^n \pi^{1/2} (n+r)!, & p = r, \end{cases}$$

com  $n, p$  e  $r$  inteiros não-negativos.

*Sugestão:* Use a relação de recorrência, Equação (13.2),  $p$  vezes.

**13.1.13** (a) Usando a fórmula integral de Cauchy, desenvolva uma representação integral de  $H_n(x)$  baseada na Equação (13.1) com o contorno circundando o ponto  $z = -x$ .

$$\text{Resposta: } H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} e^{x^2} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z+x)^{n+1}} dz.$$

(b) Mostre por substituição direta que esse resultado satisfaz a equação de Hermite.

**13.1.14** Com

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} \frac{H_n(x)}{(2^n n! \pi^{1/2})^{1/2}},$$

verifique que

$$\begin{aligned} \hat{a}_n \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) = n^{1/2} \psi_{n-1}(x), \\ \hat{a}_n^\dagger \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) = (n+1)^{1/2} \psi_{n+1}(x). \end{aligned}$$

*Nota:* A abordagem usual de operador da Mecânica Quântica estabelece essas propriedades de elevação e redução antes da forma de  $\psi_n(x)$  ser conhecida.

**13.1.15** (a) Verifique a identidade do operador

$$x - \frac{d}{dx} = - \exp \left[ \frac{x^2}{2} \right] \frac{d}{dx} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right].$$

(b) A função de onda de oscilador harmônico simples normalizada é

$$\psi_n(x) = (\pi^{1/2} 2^n n!)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] H_n(x).$$

Mostre que essa expressão pode ser escrita como

$$\psi_n(x) = (\pi^{1/2} 2^n n!)^{-1/2} \left( x - \frac{d}{dx} \right)^n \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right].$$

*Nota:* Isso corresponde a aplicar  $n$  vezes o operador de elevação do Exercício 13.1.14.

- 13.1.16** (a) Mostre que a hamiltoniana de oscilador simples (da Equação (13.38) pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}).$$

*Sugestão:* Expresse  $E$  em unidades de  $\hbar\omega$ .

- (b) Usando a formulação de operador de criação-aniquiação da parte (a), mostre que

$$\mathcal{H}\psi(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\psi(x).$$

Isso significa que os autovalores de energia são  $E = (n + \frac{1}{2})(\hbar\omega)$ , de acordo com a Equação (13.40).

- 13.1.17** Escreva um programa para gerar os coeficientes  $a_s$ , na forma polinomial do polinômio de Hermite  $H_n(x) = \sum_{s=0}^n a_s x^s$ .

- 13.1.18** A função  $f(x)$  é expandida em uma série de Hermite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x).$$

Pela ortogonalidade e normalização dos polinômios de Hermite, o coeficiente  $a_n$  é dado por

$$a_n = \frac{1}{2^n \pi^{1/2} n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx.$$

Determine os coeficientes de Hermite  $a_n$  pela quadratura de Gauss-Hermite para  $f(x) = x^8$ . Compare os coeficientes que encontrou com AMS-55, Tabela 22.12 (referência dada na nota de pé de página 4 no Capítulo 5 ou em Referências Gerais no final do livro).

- 13.1.19** (a) Por analogia com o Exercício 12.2.13, estabeleça a matriz de coeficientes pares de polinômios de Hermite que transformarão uma série de Hermite par em uma série de potências pares:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 & \cdots \\ 0 & 4 & -48 & \cdots \\ 0 & 0 & 16 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Estenda  $B$  para manipular uma série polinomial até  $H_8(x)$ .

- (b) Inverta sua matriz para obter  $A$ , que transformará uma série de potências pares (até  $x^8$ ) em uma série de polinômios pares de Hermite. Compare os elementos de  $A$  com os listados em AMS-55 (Tabela 22.12, em Referências Gerais no final do livro).

- (c) Por fim, usando multiplicação de matrizes, determine a série de Hermite equivalente a  $f(x) = x^8$ .

- 13.1.20** Escreva uma sub-rotina para transformar uma série finita de potências,  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ , em uma série de Hermite,  $\sum_{n=0}^N b_n H_n(x)$ . Use a relação de recorrência, Equação (13.2).

*Nota:* Exercícios 13.1.19 e 13.1.20 são mais rápidos e mais precisos do que a quadratura de Gauss, Exercício 13.1.18, se  $f(x)$  estiver disponível como uma série de potências.

- 13.1.21** Escreva uma sub-rotina para avaliar elementos de matriz do polinômio de Hermite da forma

$$M_{pqr} = \int_{-\infty}^{\infty} H_p(x) H_q(x) x^r e^{-x^2} dx,$$

usando a quadratura de Gauss-Hermite de 10 pontos (para  $p + q + r \leq 19$ ). Inclua uma verificação de paridade e iguale a zero as integrais com integrando de paridade ímpar. Além disso, verifique se  $r$  está no intervalo  $|p - q| \leq r$ . Caso contrário,  $M_{pqr} = 0$ . Compare seus resultados com casos específicos listados nos Exercícios 13.1.9, 13.1.10, 13.1.11 e 13.1.12.





**13.1.22** Calcule e tabule as funções de onda normalizadas do oscilador linear

$$\psi_n(x) = 2^{-n/2} \pi^{-1/4} (n!)^{-1/2} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad \text{para } x = 0, 0(1)5, 0$$

e  $n = 0(1)5$ . Se dispuser de uma rotina de montagem de gráficos, faça um gráfico com seus resultados.

**13.1.23** Avalie  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_{N_1}(x) \cdots H_{N_4}(x) dx$  em forma fechada.

*Sugestão:*  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_{N_1}(x) H_{N_2}(x) H_{N_3}(x) dx = \frac{1}{\pi} 2^{(N_1+N_2+N_3-1)/2} \cdot \Gamma(s - N_1) \Gamma(s - N_2) \cdot \Gamma(s - N_3), s = (N_1 + N_2 + N_3 + 1)/2$  ou  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_{N_1}(x) H_{N_2}(x) dx = (-1)^{(N_1+N_2-1)/2} 2^{(N_1+N_2-1)/2} \cdot \Gamma((N_1 + N_2 + 1)/2)$  podem ser úteis. Prove essas fórmulas (veja Gradshteyn e Ryzhik, n<sup>o</sup> 7.375, em Leituras Adicionais).

## 13.2 Funções de Laguerre

### Equação Diferencial — Polinômios de Laguerre

Se começarmos com a função geradora adequada, é possível desenvolver os polinômios de Laguerre por analogia com os polinômios de Hermite. Uma alternativa seria desenvolver uma solução de série pelos métodos da Seção 9.5. Em vez disso, vamos ilustrar uma técnica diferente começando com a EDO de Laguerre e obtendo uma solução na forma de uma integral, de contorno, como fizemos com a representação integral, para a função modificada de Bessel  $K_\nu(x)$  (Seção 11.6). Partindo dessa representação integral, será derivada uma função geradora.

A EDO de Laguerre (que deriva da EDO radial da EDP de Schrödinger para o átomo de hidrogênio) é

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0. \quad (13.52)$$

Tentaremos representar  $y$ , ou melhor,  $y_n$ , uma vez que  $y$  dependerá do parâmetro  $n$ , um inteiro não-negativo, pela integral de contorno

$$y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz \quad (13.53a)$$

e demonstrar que ela satisfaz a EDO de Laguerre. O contorno inclui a origem mas não circunda o ponto  $z = 1$ . Diferenciando a exponencial na Equação (13.53a), obtemos

$$y'_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^2 z^n} dz, \quad (13.53b)$$

$$y''_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^3 z^{n-1}} dz. \quad (13.53c)$$

Substituindo no lado esquerdo da Equação (13.52), obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[ \frac{x}{(1-z)^3 z^{n-1}} - \frac{1-x}{(1-z)^2 z^n} + \frac{n}{(1-z)z^{n+1}} \right] e^{-xz/(1-z)} dz,$$

que é igual a

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^n} \right] dz. \quad (13.54)$$

Se integrarmos nossa diferencial exata ao redor de um contorno fechado (Figura 13.3), a integral desaparecerá, verificando, desse modo, que  $y_n(x)$  (Equação (13.53a)) é uma solução da equação de Laguerre.

Tornou-se costumeiro definir  $L_n(x)$ , o polinômio de Laguerre (Figura 13.4), por<sup>5</sup>

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz. \quad (13.55)$$

<sup>5</sup>Há outras definições de  $L_n(x)$  em uso. Aqui, as definições do polinômio de Laguerre  $L_n(x)$  e do polinômio associado de Laguerre  $L_n^k(x)$  estão de acordo com AMS-55, Capítulo 22. (A referência completa é dada na nota de rodapé 4 do Capítulo 5 ou em Referências Gerais no final do livro.)

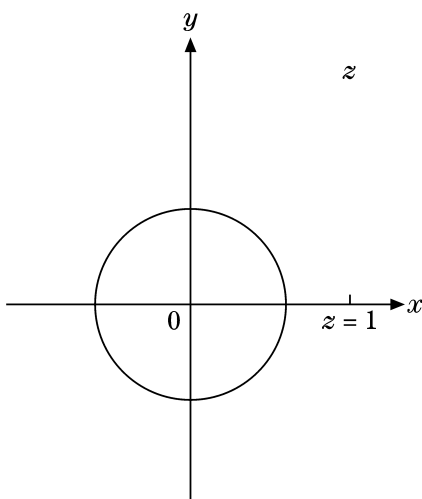


Figura 13.3: Contorno do polinômio de Laguerre.

É exatamente isso que obteríamos da série

$$g(x, z) = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n, \quad |z| < 1, \quad (13.56)$$

se multiplicássemos  $g(x, z)$  por  $z^{-n-1}$  e integrássemos ao redor da origem. Assim como no desenvolvimento do cálculo de resíduos (Seção 7.1), somente o termo  $z^{-1}$  da série sobrevive. Tendo isso como base, identificamos  $g(x, z)$  como a função geradora para os polinômios de Laguerre.

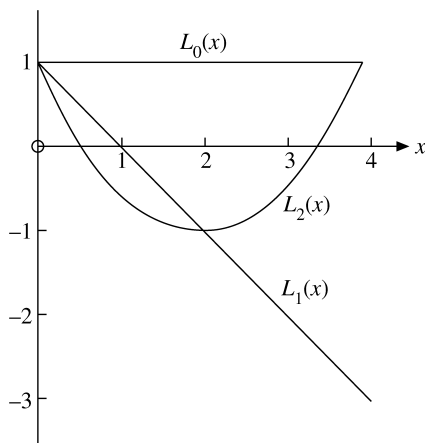


Figura 13.4: Polinômios de Laguerre.

Com a transformação

$$\frac{xz}{1-z} = s-x \quad \text{ou} \quad z = \frac{s-x}{s}, \quad (13.57)$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint \frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}} ds, \quad (13.58)$$

o novo contorno que circunda o ponto  $s = x$  no plano  $s$ . Pela fórmula integral de Cauchy (para derivadas),

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (n \text{ inteiro}), \quad (13.59)$$



dando a fórmula de Rodrigues para polinômios de Laguerre. Por essas representações de  $L_n(x)$  encontramos a forma de série (para  $n$  inteiro),

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[ x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right] \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n! x^m}{(n-m)! m!} = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^{n-s} n! x^{n-s}}{(n-s)! (n-s)! s!}, \end{aligned} \quad (13.60)$$

e os polinômios específicos listados na Tabela 13.2 (Exercício 13.2.1). Está claro que a definição de polinômios de Laguerre nas Equações (13.55), (13.56), (13.59) e (13.60) é equivalente. Aplicações práticas decidirão qual abordagem usaremos como nosso ponto de partida. A Equação (13.59) é muito conveniente para gerar a Tabela 13.2, a Equação (13.56) para derivar relações de recorrência a partir das quais a EDO Equação (13.52) é recuperada.

**Tabela 13.2** Polinômios de Laguerre

---

$L_0(x) = 1$
$L_1(x) = -x + 1$
$2!L_2(x) = x^2 - 4x + 2$
$3!L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
$4!L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
$5!L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$
$6!L_6(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

---

Por diferenciação da função geradora na Equação (13.56) em relação a  $x$  e  $z$ , obtemos relações de recorrência para os polinômios de Laguerre, como descrevemos a seguir. Usando a regra do produto para diferenciação, verificamos as identidades

$$(1-z)^2 \frac{\partial g}{\partial z} = (1-x-z)g(x,z), \quad (z-1) \frac{\partial g}{\partial x} = zg(x,z). \quad (13.61)$$

Escrevendo os lados esquerdo e direito da primeira identidade em termos de polinômios de Laguerre usando a Equação (13.56), obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_n [(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x)] z^n \\ &= \sum_n [(1-x)L_n(x) - L_{n-1}(x)] z^n. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de  $z^n$ , temos como resultado

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x). \quad (13.62)$$

Para obter a segunda relação de recursão, usamos ambas as identidades das Equações (13.61) para verificar a terceira identidade,

$$x \frac{\partial g}{\partial x} = z \frac{\partial g}{\partial z} - z \frac{\partial(zg)}{\partial z}, \quad (13.63)$$

que, quando escrita da mesma forma em termos de polinômios de Laguerre, verificamos ser equivalente a

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x). \quad (13.64)$$

A Equação (13.61), modificada para ser lida como

$$L_{n+1}(x) = 2L_n(x) - L_{n-1}(x) - \frac{1}{n+1} [(1+x)L_n(x) - L_{n-1}(x)], \quad (13.65)$$

por razões de economia e estabilidade numérica, é usada para cálculo de valores numéricos de  $L_n(x)$ . O computador começa com valores numéricos conhecidos de  $L_0(x)$  e  $L_1(x)$ , Tabela 13.2, e prossegue passo a passo. Essa é a mesma técnica discutida para o cálculo de polinômios de Legendre, Seção 12.2.

Além disso, pela Equação (13.56) encontramos

$$g(0, z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0) z^n,$$

que dá como resultado os valores especiais de polinômios de Laguerre

$$L_n(0) = 1. \tag{13.66}$$

Como vemos pela forma da função geradora, pela forma da EDO de Laguerre ou pela Tabela 13.2, os polinômios de Laguerre não têm nem simetria ímpar nem simetria par sob a transformação de paridade  $x \rightarrow -x$ .

A EDO de Laguerre não é auto-adjunta, e os polinômios de Laguerre  $L_n(x)$  por si mesmos não formam um conjunto ortogonal. Todavia, seguindo o método da Seção 10.1, se multiplicarmos a Equação (13.52) por  $e^{-x}$  (Exercício 10.1.1), obtemos

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn}. \tag{13.67}$$

Essa ortogonalidade é uma consequência da teoria de Sturm-Liouville, Seção 10.1. A normalização resulta da função geradora. Às vezes é conveniente definir funções ortogonalizadas de Laguerre (com a função de peso unitária) por

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x). \tag{13.68}$$

Nossa nova função ortonormal,  $\varphi_n(x)$ , satisfaz a EDO

$$x\varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\varphi_n(x) = 0, \tag{13.69}$$

que verificamos ter a forma (auto-adjunta) de Sturm-Liouville. Note que o intervalo  $(0 \leq x < \infty)$  foi usado porque as condições de fronteira de Sturm-Liouville são satisfeitas em suas extremidades.

### Polinômios Associados de Laguerre

Em muitas aplicações, em particular em Mecânica Quântica, precisamos dos polinômios associados de Laguerre definidos por<sup>6</sup>

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x). \tag{13.70}$$

Pela forma de série de  $L_n(x)$ , verificamos que os polinômios associados de Laguerre mais baixos são dados por

$$\begin{aligned} L_0^k(x) &= 1, \\ L_1^k(x) &= -x + k + 1, \\ L_2^k(x) &= \frac{x^2}{2} - (k + 2)x + \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}. \end{aligned} \tag{13.71}$$

Em geral,

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m, \quad k > -1. \tag{13.72}$$

Pode-se desenvolver uma função geradora diferenciando a função geradora de Laguerre  $k$  vezes para obter como resultado

$$\begin{aligned} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} &= (-1)^k \sum_{n=0}^\infty \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) z^{n+k} = \sum_{n=0}^\infty L_n^k(x) z^{n+k} \\ &= \left(\frac{z}{1-z}\right)^k \frac{e^{xz/(1-z)}}{1-z}. \end{aligned}$$

Pelos dois últimos membros dessa equação, cancelando o fator comum  $z^k$ , obtemos

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^\infty L_n^k(x) z^n, \quad |z| < 1. \tag{13.73}$$

<sup>6</sup>Alguns autores usam  $\mathfrak{L}_{n+k}^k(x) = (d^k/dx^k)[L_{n+k}(x)]$ . Daí, nossa  $L_n^k(x) = (-1)^k \mathfrak{L}_{n+k}^k(x)$ .



Por essa expressão, a expansão binomial para  $x = 0$ ,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-1}{n} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(0) z^n$$

resulta em

$$L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!}. \quad (13.74)$$

Podem-se derivar relações de recorrência a partir da função geradora ou por diferenciação das relações de recorrência do polinômio de Laguerre. Entre as numerosas possibilidades estão

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x), \quad (13.75)$$

$$x \frac{dL_n^k(x)}{dx} = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x). \quad (13.76)$$

Assim, diferenciando a EDO de Laguerre uma vez, obtemos

$$x \frac{dL_n''}{dx} + L_n'' - L_n' + (1-x) \frac{dL_n'}{dx} + n \frac{dL_n}{dx} = 0,$$

e, diferenciando a EDO de Laguerre  $k$  vezes, por fim obtemos

$$x \frac{d^k L_n''}{dx^k} + k \frac{d^{k-1} L_n''}{dx^{k-1}} - k \frac{d^{k-1} L_n'}{dx^{k-1}} + (1-x) \frac{d^k L_n'}{dx^k} + n \frac{d^k L_n}{dx^k} = 0.$$

Ajustando o índice  $n \rightarrow n+k$ , temos a EDO associada de Laguerre

$$\boxed{x \frac{d^2 L_n^k(x)}{dx^2} + (k+1-x) \frac{dL_n^k(x)}{dx} + nL_n^k(x) = 0.} \quad (13.77)$$

Quando polinômios associados de Laguerre aparecem em um problema físico, em geral é porque o problema em questão envolve a Equação (13.77). A aplicação mais importante é nos estados ligados do átomo de hidrogênio que são derivados no Exemplo 13.2.1 mais adiante.

Pode-se obter uma representação de Rodrigues do polinômio associado de Laguerre

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}), \quad (13.78)$$

substituindo a Equação (13.59) na Equação (13.70). Note que todas essas fórmulas para polinômios associados de Legendre  $L_n^k(x)$  se reduzem às expressões correspondentes para  $L_n(x)$ , quando  $k = 0$ .

A equação associada de Laguerre, Equação (13.77), não é auto-adjunta, mas pode ser colocada em forma auto-adjunta, multiplicando por  $e^{-x} x^k$ , que se torna a função de peso (Seção 10.1). Obtemos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{mn}. \quad (13.79)$$

A Equação (13.79) mostra o mesmo intervalo de ortogonalidade  $(0, \infty)$  dos polinômios de Laguerre, mas, com uma nova função de peso, temos um novo conjunto de polinômios ortogonais, os polinômios associados de Laguerre.

Fazer  $\psi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{k/2} L_n^k(x)$ ,  $\psi_n^k(x)$  satisfaz a EDO auto-adjunta

$$x \frac{d^2 \psi_n^k(x)}{dx^2} + \frac{d\psi_n^k(x)}{dx} + \left( -\frac{x}{4} + \frac{2n+k+1}{2} - \frac{k^2}{4x} \right) \psi_n^k(x) = 0. \quad (13.80)$$

As  $\psi_n^k(x)$  às vezes são denominadas **funções de Laguerre**. A Equação (13.67) é o caso especial  $k = 0$  da Equação (13.79).

Uma outra forma útil é dada definindo<sup>7</sup>

$$\Phi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{(k+1)/2} L_n^k(x). \quad (13.81)$$

<sup>7</sup>Isso corresponde a modificar a função  $\psi$  na Equação (13.80) para eliminar a derivada de primeira ordem (compare com o Exercício 9.6.11).

Substituição na equação associada de Laguerre, resulta em

$$\frac{d^2 \Phi_n^k(x)}{dx^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{2n+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2} \right) \Phi_n^k(x) = 0. \quad (13.82)$$

A integral de normalização correspondente  $\int_0^\infty |\Phi_n^k(x)|^2 dx$  é

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{k+1} [L_n^k(x)]^2 dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1). \quad (13.83)$$

Observe que as  $\Phi_n^k(x)$  **não** formam um conjunto ortogonal (exceto com  $x^{-1}$  como uma função de peso) por causa do  $x^{-1}$  no termo  $(2n+k+1)/2x$ . (As funções de Laguerre  $L_\nu^\mu(x)$  nas quais os índices  $\nu$  e  $\mu$  são **não** são inteiros podem ser definidas usando as funções hipergeométricas confluentes da Seção 13.5.)

### Exemplo 13.2.1 ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

A aplicação mais importante dos polinômios de Laguerre é na solução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio. Essa equação é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi, \quad (13.84)$$

na qual  $Z = 1$  para hidrogênio, 2 para hélio ionizado, e assim por diante. Separando variáveis, constatamos que a dependência angular de  $\psi$  são os harmônicos esféricos  $Y_L^M(\theta, \varphi)$ . A parte radial,  $R(r)$ , satisfaz a equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} R + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{L(L+1)}{r^2} R = ER. \quad (13.85)$$

Para estados ligados,  $R \rightarrow 0$ , quando  $r \rightarrow \infty$ , e  $R$  é finito na origem,  $r = 0$ . Não consideramos estados contínuos com energia positiva. Somente quando eles estiverem incluídos é que as funções de onda do hidrogênio formam um conjunto completo.

Usando abreviações (resultantes de aumentar novamente  $r$  até a variável radial sem dimensão  $\rho$ )

$$\rho = \alpha r, \quad \text{com} \quad \alpha^2 = -\frac{8mE}{\hbar^2}, \quad E < 0, \quad \lambda = \frac{mZe^2}{2\pi\epsilon_0 \alpha \hbar^2}, \quad (13.86)$$

a Equação (13.85) se torna

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} \right) + \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right) \chi(\rho) = 0, \quad (13.87)$$

em que  $\chi(\rho) = R(\rho/\alpha)$ . Uma comparação com a Equação (13.82) para  $\Phi_n^k(x)$  mostra que a Equação (13.87) é satisfeita por

$$\rho\chi(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^{L+1} L_{\lambda-L-1}^{2L+1}(\rho), \quad (13.88)$$

na qual  $k$  é substituído por  $2L+1$  por  $n$  by  $\lambda-L-1$ , pela utilização de

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{d\chi}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho\chi).$$

Devemos restringir o parâmetro  $\lambda$  impondo que ele seja um inteiro  $n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ <sup>8</sup> Isso é necessário porque a função de Laguerre de  $n$  não-inteiro divergiria<sup>9</sup> como  $\rho^n e^\rho$ , o que é inaceitável para nosso problema físico, no qual

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0.$$

Essa restrição a  $\lambda$ , imposta por nossa condição de contorno, tem o efeito de quantizar a energia,

$$E_n = -\frac{Z^2 m}{2n^2 \hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2. \quad (13.89)$$

<sup>8</sup>Essa é a notação convencional para  $\lambda$ . Esse  $n$  não é o mesmo índice  $n$  em  $\Phi_n^k(x)$ .

<sup>9</sup>Isso pode ser mostrado, como no Exercício 9.5.5.



O sinal negativo reflete o fato de que, aqui, estamos tratando com estados ligados ( $E < 0$ ), que correspondem a um elétron que não consegue escapar até o infinito, onde o potencial de Coulomb cai a zero. Usando esse resultado para  $E_n$ , temos

$$\alpha = \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2} \cdot \frac{Z}{n} = \frac{2Z}{na_0}, \quad \rho = \frac{2Z}{na_0}r, \quad (13.90)$$

com

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}, \text{ o raio de Bohr.}$$

Assim, a função de onda do hidrogênio normalizada final é escrita como

$$\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi) = \left[ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!} \right]^{1/2} e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r) Y_L^M(\theta, \varphi). \quad (13.91)$$

Existem soluções regulares para  $n \geq L + 1$ , portanto, o estado mais baixo com  $L = 1$  (denominado estado 2P) ocorre somente com  $n = 2$ . ■

### Exercícios

**13.2.1** Mostre, com o auxílio da fórmula de Leibniz, que a expansão de série de  $L_n(x)$  (Equação (13.60)) resulta da representação de Rodrigues (Equação (13.59)).

**13.2.2** (a) Usando a forma de série explícita (Equação (13.60)), mostre que

$$\begin{aligned} L'_n(0) &= -n, \\ L''_n(0) &= \frac{1}{2}n(n-1). \end{aligned}$$

(b) Repita sem usar a forma de série explícita de  $L_n(x)$ .

**13.2.3** Derive a representação de Rodrigues

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}),$$

a partir da função geradora.

**13.2.4** Derive a relação de normalização (Equação (13.79)) para os polinômios associados de Laguerre.

**13.2.5** Expanda  $x^r$  em uma série de polinômios associados de Laguerre  $L_n^k(x)$ ,  $k$  fixo e  $n$  na faixa de 0 a  $r$  (ou a  $\infty$  se  $r$  não for um inteiro).

*Sugestão:* A forma de Rodrigues de  $L_n^k(x)$  será útil.

$$\text{Resposta: } x^r = (r+k)! r! \sum_{n=0}^r \frac{(-1)^n L_n^k(x)}{(n+k)!(r-n)!}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

**13.2.6** Expanda  $e^{-ax}$  em uma série de polinômios associados de Laguerre  $L_n^k(x)$ ,  $k$  fixo e  $n$  na faixa de 0 a  $\infty$ .

(a) Avalie diretamente os coeficientes na expansão que você supôs.

(b) Desenvolva a expansão desejada a partir da função geradora.

$$\text{Resposta: } e^{-ax} = \frac{1}{(1+a)^{1+k}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{1+a} \right)^n L_n^k(x), \quad 0 \leq x < \infty.$$

**13.2.7** Mostre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{k+1} L_n^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1).$$

*Sugestão:* Note que

$$xL_n^k = (2n+k+1)L_n^k - (n+k)L_{n-1}^k - (n+1)L_{n+1}^k.$$

**13.2.8** Suponha que um problema particular em Mecânica Quântica resultou na EDO

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \left[ \frac{k^2 - 1}{4x^2} - \frac{2n + k + 1}{2x} + \frac{1}{4} \right] y = 0$$

para inteiros não-negativos  $n, k$ . Escreva  $y(x)$  como

$$y(x) = A(x)B(x)C(x),$$

impondo os requisitos de que:

- (a)  $A(x)$  seja uma exponencial **negativa** que dá o comportamento assintótico requerido de  $y(x)$ ; e
- (b)  $B(x)$  seja uma potência **positiva** de  $x$  que dá o comportamento de  $y(x)$  para  $0 \leq x \ll 1$ .

Determine  $A(x)$  e  $B(x)$ . Ache a relação entre  $C(x)$  e o polinômio associado de Laguerre.

Resposta:  $A(x) = e^{-x/2}$ ,  $B(x) = x^{(k+1)/2}$ ,  $C(x) = L_n^k(x)$ .

**13.2.9** Pela Equação (13.91), a parte radial normalizada da função de onda do hidrogênio é

$$R_{nL}(r) = \left[ \frac{\alpha^3 (n - L - 1)!}{2n(n + L)!} \right]^{1/2} e^{-\alpha r} (\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r),$$

na qual  $\alpha = 2Z/na_0 = 2Zme^2/4\pi\epsilon_0\hbar^2$ . Avalie

(a)  $\langle r \rangle = \int_0^\infty r R_{nL}(\alpha r) R_{nL}(\alpha r) r^2 dr,$

(b)  $\langle r^{-1} \rangle = \int_0^\infty r^{-1} R_{nL}(\alpha r) R_{nL}(\alpha r) r^2 dr.$

A quantidade  $\langle r \rangle$  é o deslocamento médio do elétron em relação ao núcleo, enquanto  $\langle r^{-1} \rangle$  é a média do deslocamento recíproco.

Resposta:  $\langle r \rangle = \frac{a_0}{2} [3n^2 - L(L + 1)]$ ,  $\langle r^{-1} \rangle = \frac{1}{n^2 a_0}$ .

**13.2.10** Derive a relação de recorrência para os valores esperados da função de onda do hidrogênio

$$\frac{s + 2}{n^2} \langle r^{s+1} \rangle - (2s + 3)a_0 \langle r^s \rangle + \frac{s + 1}{4} [(2L + 1)^2 - (s + 1)^2] a_0^2 \langle r^{s-1} \rangle = 0,$$

com  $s \geq -2L - 1$ ,  $\langle r^s \rangle \equiv \bar{r}^s$ .

*Sugestão:* Transforme a Equação (13.87) em uma forma análoga à Equação (13.80). Multiplique por  $\rho^{s+2}u' - c\rho^{s+1}u$ . Aqui,  $u = \rho\Phi$ . Ajuste  $c$  para cancelar termos que não resultam em valores esperados.

**13.2.11** As funções de onda do hidrogênio, Equação (13.91), são mutuamente ortogonais, como devem ser, uma vez que são autofunções da equação auto-adjunta de Schrödinger

$$\int \psi_{n_1 L_1 M_1}^* \psi_{n_2 L_2 M_2} r^2 dr d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \delta_{L_1 L_2} \delta_{M_1 M_2}.$$

Ainda assim, a integral radial tem a forma (enganadora)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^L L_{n_1-L-1}^{2L+1}(\alpha r) e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^L L_{n_2-L-1}^{2L+1}(\alpha r) r^2 dr,$$

que **parece** concordar com a Equação (13.83) e não com a relação de ortogonalidade associada de Laguerre, Equação (13.79). Como você resolve esse paradoxo?

Resposta: parâmetro  $\alpha$  depende de  $n$ . Os primeiros três  $\alpha$ , previamente mostrados, são  $2Z/n_1 a_0$ . Os três últimos termos são  $2Z/n_2 a_0$ . Para  $n_1 = n_2$ , a Equação (13.83) se aplica. Para  $n_1 \neq n_2$ , nem a Equação (13.79) nem a Equação (13.83) são aplicáveis.





- 13.2.12** A análise da Mecânica Quântica do efeito de Stark (coordenada parabólica) leva à EDO

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{du}{d\xi} \right) + \left( \frac{1}{2} E \xi + L - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4} F \xi^2 \right) u = 0.$$

Aqui,  $F$  é uma medida da energia de perturbação introduzida por um campo elétrico externo. Ache as funções de onda não-perturbadas ( $F = 0$ ) em termos de polinômios associados de Laguerre.

Resposta:  $u(\xi) = e^{-\varepsilon\xi/2} \xi^{m/2} L_p^m(\varepsilon\xi)$ , com  $\varepsilon = \sqrt{-2E} > 0$ ,  
 $p = L/\varepsilon - (m + 1)/2$ , um inteiro não-negativo.

- 13.2.13** A equação de onda para o oscilador harmônico tridimensional é

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \psi = E \psi.$$

Aqui,  $\omega$  é a frequência angular do oscilador clássico correspondente. Mostre que a parte radial de  $\psi$  (em coordenadas polares esféricas) pode ser escrita em termos de funções associadas de Laguerre de argumento ( $\beta r^2$ ), em que  $\beta = M\omega/\hbar$ .

*Sugestão:* Como no Exercício 13.2.8, separe os fatores radiais de  $r^l$  e  $e^{-\beta r^2/2}$ . A função associada de Laguerre terá a forma  $L_{1/2(n-l-1)}^{l+1/2}(\beta r^2)$ .

- 13.2.14** Escreva um programa de computador para gerar os coeficientes  $a_s$  na forma polinomial do polinômio de Laguerre  $L_n(x) = \sum_{s=0}^n a_s x^s$ .

- 13.2.15** Escreva um programa de computador para transformar uma série finita de potências  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$  em uma série de Laguerre  $\sum_{n=0}^N b_n L_n(x)$ . Use a relação de recorrência, Equação (13.62).

- 13.2.16** Tabule  $L_{10}(x)$  para  $x = 0, 0(0,1)30, 0$ . Isso incluirá as 10 raízes de  $L_{10}$ . Passando de  $x = 30, 0$ ,  $L_{10}(x)$  é monotônica crescente. Se houver um *software* gráfico disponível, monte um gráfico com seus resultados.

**Valor de verificação.** Oitava raiz = 16, 279.

- 13.2.17** Determine as 10 raízes de  $L_{10}(x)$  usando *software* de procura de raízes. Você pode usar o que sabe da localização aproximada das raízes ou desenvolver uma rotina de busca para procurar as raízes. As 10 raízes de  $L_{10}(x)$  são os pontos de avaliação para a quadratura de Gauss-Laguerre de 10 pontos. Verifique os valores que obteve comparando-os com AMS-55, Tabela 25.9. (A referência é dada na nota de rodapé 4 no Capítulo 5 ou em Referências Gerais no final do livro.)

- 13.2.18** Calcule os coeficientes de uma expansão de série de Laguerre ( $L_n(x), k = 0$ ) da exponencial  $e^{-x}$ . Avalie os coeficientes pela quadratura de Gauss-Laguerre (compare com a Equação (10.64)). Verifique os resultados que obteve comparando-os com os valores dados no Exercício 13.2.6.  
*Nota:* Aplicação direta da quadratura de Gauss-Laguerre com  $f(x)L_n(x)e^{-x}$  dá má precisão por causa do  $e^{-x}$  extra. Experimente uma mudança de variável,  $y = 2x$ , de modo que a função que aparece no integrando será simplesmente  $L_n(y/2)$ .

- 13.2.19** (a) Escreva uma sub-rotina para calcular os elementos da matriz de Laguerre

$$M_{mnp} = \int_0^\infty L_m(x) L_n(x) x^p e^{-x} dx.$$

Inclua uma verificação da condição  $|m - n| \leq p \leq m + n$ . (Se  $p$  estiver fora dessa faixa,  $M_{mnp} = 0$ . Por quê?)

*Nota:* Uma quadratura de Gauss-Laguerre de 10 pontos dará resultados precisos para  $m + n + p \leq 19$ .

- (b) Chame sua sub-rotina para calcular vários elementos da matriz de Laguerre. Verifique  $M_{mnn}$  comparando com o Exercício 13.2.7.

- 13.2.20** Escreva uma sub-rotina para calcular o valor numérico de  $L_n^k(x)$  para valores especificados de  $n, k$ , e  $x$ . Imponha que  $n$  e  $k$  sejam inteiros não-negativos e  $x \geq 0$ .

*Sugestão:* Partindo de valores conhecidos de  $L_0^k$  e  $L_1^k(x)$ , podemos usar a relação de recorrência, Equação (13.75), para gerar  $L_n^k(x), n = 2, 3, 4, \dots$

- 13.2.21** Mostre que  $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} H_n(xy) dx = \sqrt{\pi} n! P_n(y)$ , em que  $P_n$  é um polinômio de Legendre.

**13.2.22** Escreva um programa para calcular a função de onda radial normalizada do hidrogênio  $\psi_{nL}(r)$ . Essa é a  $\psi_{nLM}$  da Equação (13.91), omitindo o harmônico esférico  $Y_L^M(\theta, \varphi)$ . Considere  $Z = 1$  e  $a_0 = 1$  (o que significa que  $r$  está sendo expresso em unidades de raios de Bohr). Considere  $n$  e  $L$  como dados de entrada. Tabule  $\psi_{nL}(r)$  para  $r = 0, 0(0, 2)R$  com  $R$  suficientemente grande para exibir os aspectos significativos de  $\psi$ , o que quer dizer aproximadamente  $R = 5$ , para  $n = 1$ ,  $R = 10$ , para  $n = 2$  e  $R = 30$ , para  $n = 3$ .

### 13.3 Polinômios de Chebyshev

Nesta seção são desenvolvidos dois tipos de polinômios de Chebyshev como casos especiais de polinômios ultra-esféricos. Suas propriedades resultam da função geradora polinomial ultra-esférica. A importância primária dos polinômios de Chebyshev é em análise numérica.

#### Funções Geradoras

Na Seção 12.1 foi mencionada a função geradora para os polinômios ultra-esféricos ou de Gegenbauer,

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)t^n, \quad |x| < 1, \quad |t| < 1 \quad (13.92)$$

com  $\alpha = \frac{1}{2}$  dando origem aos polinômios de Legendre. Nesta seção, primeiro consideramos  $\alpha = 1$  e, em seguida,  $\alpha = 0$ , para gerar dois conjuntos de polinômios conhecidos como os polinômios de Chebyshev.

#### Tipo II

Com  $\alpha = 1$  e  $C_n^{(1)}(x) = U_n(x)$ , a Equação (13.92) resulta em

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad |x| < 1, \quad |t| < 1. \quad (13.93)$$

Essas funções  $U_n(x)$  geradas por  $(1 - 2xt + t^2)^{-1}$  são denominadas polinômios de Chebyshev tipo II. Embora esses polinômios tenham algumas aplicações em Física Matemática, uma aplicação não-usual é no desenvolvimento de harmônicos esféricos quadrimensionais usados na teoria do momento angular.

#### Tipo I

Com  $\alpha = 0$  há uma dificuldade. De fato, nossa função geradora se reduz à constante 1. Podemos evitar esse problema primeiro diferenciando a Equação (13.92) em  $t$ , o que resulta em

$$\frac{-\alpha(-2x + 2t)}{(1 - 2xt + t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n^{(\alpha)}(x)t^{n-1}, \quad (13.94)$$

ou

$$\frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left[ \frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha} \right] t^{n-1}. \quad (13.95)$$

Definimos  $C_n^{(0)}(x)$  por

$$C_n^{(0)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha}. \quad (13.96)$$

A finalidade de diferenciar em relação a  $t$  era obter  $\alpha$  no denominador e criar uma forma indeterminada. Agora, multiplicando a Equação (13.95) por  $2t$  e adicionando  $1 = (1 - 2xt + t^2)/(1 - 2xt + t^2)$ , obtemos

$$\frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^{(0)}(x)t^n. \quad (13.97)$$

Definimos  $T_n(x)$  por

$$T_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{n}{2} C_n^{(0)}(x), & n > 0. \end{cases} \quad (13.98)$$



Observe o tratamento especial para  $n = 0$ . É similar ao tratamento do termo  $n = 0$  nas séries de Fourier. Note também que  $C_n^{(0)}$  é o limite indicado na Equação (13.96) e não uma substituição literal de  $\alpha = 0$  na série da função geradora. Com esses novos rótulos,

$$\frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n, \quad |x| \leq 1, \quad |t| < 1. \quad (13.99)$$

Denominamos  $T_n(x)$  aos polinômios de Chebyshev tipo I. Observe que a notação e a grafia do nome dessas funções é diferente, dependendo da referência. Aqui, utilizamos a grafia recomendada em AMS-55 (a referência completa é dada na nota de rodapé 4 no Capítulo 5).

Diferenciando a função geradora (Equação (13.99)) em relação a  $t$  e multiplicando pelo denominador,  $1 - 2xt + t^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} -t - (t - x) \left[ T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n \right] &= (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nT_n(x)t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [nT_n t^{n-1} - 2xnT_n t^n + nT_n t^{n+1}], \end{aligned}$$

da qual resulta a relação de recorrência

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (13.100)$$

deslocando o índice do somatório, de modo a obter a mesma potência,  $t^n$ , em cada termo e então comparando coeficientes de  $t^n$ . Tratando a Equação (13.93) de modo semelhante, encontramos

$$-\frac{2(t - x)}{1 - 2xt + t^2} = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nU_n(x)t^{n-1},$$

da qual resulta a relação de recursão

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0 \quad (13.101)$$

pela comparação de coeficientes da mesma potência de  $t$  (veja a Tabela 13.3).

**Tabela 13.3** Relação de recursão<sup>a</sup>

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$$

	$P_n(x)$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
Legendre	$P_n(x)$	$\frac{2n+1}{n+1}$	0	$\frac{1}{n+1}$
Chebyshev I	$T_n(x)$	2	0	1
Chebyshev I deslocada	$T_n^*(x)$	4	-2	1
Chebyshev II	$U_n(x)$	2	0	1
Chebyshev II deslocada	$U_n^*(x)$	4	-2	1
Laguerre associada	$L_n^{(k)}(x)$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{2n+k+1}{n+1}$	$\frac{n+k}{n+1}$
Hermite	$H_n(x)$	2	0	2n

$P_n$  denota qualquer dos polinômios ortogonais.

Então, usando as funções geradoras para os primeiros valores de  $n$  e essas relações de recorrência para os polinômios de ordem mais alta, obtemos as Tabelas 13.4 e 13.5 (veja também as Figuras 13.5 e 13.6).

Do mesmo modo que para os polinômios de Hermite, Seção 13.1, as relações de recorrência, Equações (13.100) e (13.101), juntamente com os valores conhecidos de  $T_0(x)$ ,  $T_1(x)$ ,  $U_0(x)$  e  $U_1(x)$ , nos dão — ou melhor, dão a um computador — um meio conveniente de obter o valor numérico de qualquer  $T_n(x_0)$  ou  $U_n(x_0)$ , sendo  $x_0$  um número dado.

**Tabela 13.4** Polinômios de Chebyshev, tipo I

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 1 \\
 T_1 &= x \\
 T_2 &= 2x^2 - 1 \\
 T_3 &= 4x^3 - 3x \\
 T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
 T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
 T_6 &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1
 \end{aligned}$$

**Tabela 13.4** Polinômios de Chebyshev, tipo II

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 1 \\
 U_1 &= 2x \\
 U_2 &= 4x^2 - 1 \\
 U_3 &= 8x^3 - 4x \\
 U_4 &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\
 U_5 &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\
 U_6 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1
 \end{aligned}$$

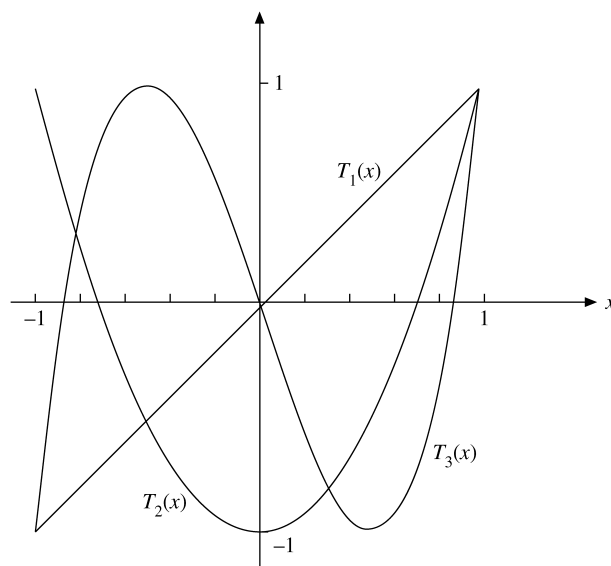


Figura 13.5: Polinômios de Chebyshev  $T_n(x)$ .

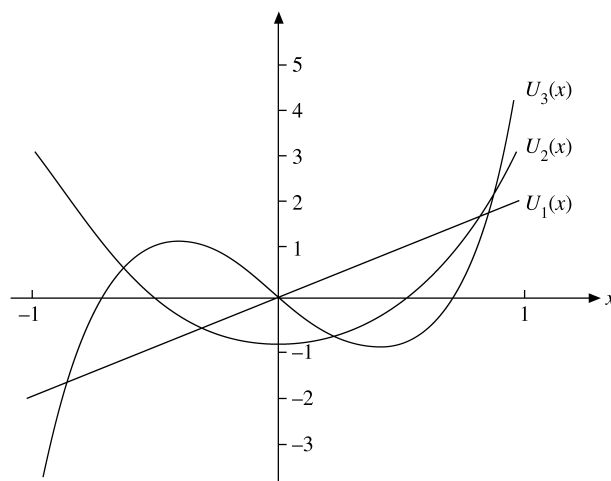


Figura 13.6: Polinômios de Chebyshev  $U_n(x)$ .

Mais uma vez, podemos obter pelas funções geradoras os valores especiais de vários polinômios:

$$\begin{aligned}
 T_n(1) &= 1, & T_n(-1) &= (-1)^n, \\
 T_{2n}(0) &= (-1)^n, & T_{2n+1}(0) &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{13.102}$$



$$\begin{aligned} U_n(1) &= n + 1, & U_n(-1) &= (-1)^n(n + 1), \\ U_{2n}(0) &= (-1)^n, & U_{2n+1}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (13.103)$$

Por exemplo, comparando a série de potências

$$\frac{1 - t^2}{(1 - t)^2} = \frac{1 + t}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^n + t^{n+1})$$

com a Equação (13.99), para  $x = 1$ , temos  $T_n(1)$  e para  $x = -1$ , uma expansão similar de  $(1 - t)/(1 + t)$  resulta em  $T_n(-1)$ , ao passo que substituir  $t \rightarrow -t^2$  na primeira série de potências resulta em  $T_n(0)$ . A série de potências para  $(1 \pm t)^{-2}$  e  $(1 + t^2)^{-1}$  gera as correspondentes  $U_n(\pm 1), U_n(0)$ .

As relações de paridade para  $T_n$  e  $U_n$  resultam de suas funções geradoras com as substituições  $t \rightarrow -t, x \rightarrow -x$ , que as deixam invariantes; elas são

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x), \quad U_n(x) = (-1)^n U_n(-x). \quad (13.104)$$

As representações de Rodrigues de  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  são

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2} (1 - x^2)^{1/2}}{2^n (n - \frac{1}{2})!} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n-1/2}] \quad (13.105)$$

e

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n + 1) \pi^{1/2}}{2^{n+1} (n + \frac{1}{2})! (1 - x^2)^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n+1/2}]. \quad (13.106)$$

### Relações de Recorrência — Derivadas

Diferenciação das funções geradoras para  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  em relação à variável  $x$  leva a uma variedade de relações de recorrência que envolvem derivadas. Por exemplo, assim obtemos da Equação (13.99)

$$(1 - 2xt + t^2) 2 \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(x) t^n = 2t \left[ T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n \right],$$

da qual extraímos a recursão

$$2T_{n-1}(x) = T'_n(x) - 2xT'_{n-1}(x) + T'_{n-2}(x), \quad (13.107)$$

que é a derivada da Equação (13.100) para  $n \rightarrow n - 1$ . Entre as recursões mais úteis que obtemos desse modo estão

$$(1 - x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) \quad (13.108)$$

e

$$(1 - x^2)U'_n(x) = -nxU_n(x) + (n + 1)U_{n-1}(x). \quad (13.109)$$

Manipulando várias dessas recursões, como fizemos na Seção 12.2 para polinômios de Legendre, podemos eliminar o índice  $n - 1$  também em favor de  $T''_n$  e estabelecer que  $T_n(x)$ , o polinômio de Chebyshev tipo I, satisfaz a EDO

$$(1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0. \quad (13.110)$$

O polinômio de Chebyshev tipo II,  $U_n(x)$ , satisfaz

$$(1 - x^2)U''_n(x) - 3xU'_n(x) + n(n + 2)U_n(x) = 0. \quad (13.111)$$

Polinômios de Chebyshev podem ser definidos partindo dessas EDOs, mas preferimos dar ênfase às funções geradoras.

A equação ultra-esférica

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} C_n^{(\alpha)}(x) - (2\alpha + 1)x \frac{d}{dx} C_n^{(\alpha)}(x) + n(n + 2\alpha) C_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (13.112)$$

é uma generalização dessas equações diferenciais, reduzindo-as à Equação (13.110), para  $\alpha = 0$ , e à Equação (13.111), para  $\alpha = 1$  (e à equação de Legendre para  $\alpha = \frac{1}{2}$ ).

### Forma Trigonométrica

Neste ponto do desenvolvimento das propriedades das soluções de Chebyshev é interessante trocar variáveis, substituindo  $x$  por  $\cos \theta$ . Com  $x = \cos \theta$  e  $d/dx = (-1/\sin \theta)(d/d\theta)$ , verificamos que

$$(1 - x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} = \frac{d^2 T_n}{d\theta^2} - \cot \theta \frac{dT_n}{d\theta}, \quad x T_n' = -\cot \theta \frac{dT_n}{d\theta}.$$

Somando esses termos, a Equação (13.110) se torna

$$\frac{d^2 T_n}{d\theta^2} + n^2 T_n = 0, \tag{13.113}$$

a equação do oscilador harmônico simples com soluções  $\cos n\theta$  e  $\sin n\theta$ . Os valores especiais (condições de contorno em  $x = 0, 1$ ) identificam

$$T_n = \cos n\theta = \cos n(\arccos x). \tag{13.114a}$$

Uma segunda solução linearmente independente das Equações (13.110) e (13.113) é rotulada

$$V_n = \sin n\theta = \sin n(\arccos x). \tag{13.114b}$$

As soluções correspondentes da equação de Chebyshev tipo II, Equação (13.111), se tornam

$$U_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \tag{13.115a}$$

$$W_n = \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin \theta}. \tag{13.115b}$$

Os dois conjuntos de soluções, tipo I e tipo II, são relacionados por

$$V_n(x) = (1 - x^2)^{1/2} U_{n-1}(x), \tag{13.116a}$$

$$W_n(x) = (1 - x^2)^{-1/2} T_{n+1}(x). \tag{13.116b}$$

Como já vimos pelas funções geradoras,  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  são polinômios. Claramente,  $V_n(x)$  e  $W_n(x)$  são **não** polinômios. Por

$$\begin{aligned} T_n(x) + iV_n(x) &= \cos n\theta + i \sin n\theta \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n = [x + i(1 - x^2)^{1/2}]^n, \quad |x| \leq 1 \end{aligned} \tag{13.117}$$

obtemos expansões

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} (1 - x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4} (1 - x^2)^2 - \dots \tag{13.118a}$$

e

$$V_n(x) = \sqrt{1 - x^2} \left[ \binom{n}{1} x^{n-1} - \binom{n}{3} x^{n-3} (1 - x^2) + \dots \right]. \tag{13.118b}$$

Pelas funções geradoras ou pelas EDOs, representações de séries de potências são

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \tag{13.119a}$$

para  $n \geq 1$ , com  $[n/2]$  o maior inteiro abaixo de  $n/2$  e

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}. \tag{13.119b}$$



### Ortogonalidade

Se a Equação (13.110) for colocada em forma auto-adjunta (Seção 10.1), obtemos  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  como um fator de peso. O fator de peso correspondente para a Equação (13.111) é  $(1 - x^2)^{+1/2}$ . As integrais de ortogonalidade resultantes,

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)(1 - x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0, \end{cases} \quad (13.120)$$

$$\int_{-1}^1 V_m(x)V_n(x)(1 - x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ 0, & m = n = 0, \end{cases} \quad (13.121)$$

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)(1 - x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}, \quad (13.122)$$

e

$$\int_{-1}^1 W_m(x)W_n(x)(1 - x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}, \quad (13.123)$$

são uma consequência direta da teoria de Sturm-Liouville, Capítulo 10. O melhor modo de obter os valores de normalização é usar  $x = \cos \theta$  e converter essas quatro integrais em integrais de normalização de Fourier (para o intervalo de meio-período  $[0, \pi]$ ).

### Exercícios

**13.3.1** Uma outra função geradora de Chebyshev é

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)t^n, \quad |t| < 1.$$

Como  $X_n(x)$  está relacionada a  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$ ?

**13.3.2** Dado

$$(1 - x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n + 2)U_n(x) = 0,$$

mostre que  $V_n(x)$  (Equação (13.116a)) satisfaz

$$(1 - x^2)V_n''(x) - xV_n'(x) + n^2V_n(x) = 0,$$

que é a equação de Chebyshev.

**13.3.3** Mostre que o wronskiano de  $T_n(x)$  e  $V_n(x)$  é dado por

$$T_n(x)V_n'(x) - T_n'(x)V_n(x) = -\frac{n}{(1 - x^2)^{1/2}}.$$

Isso verifica que  $T_n$  e  $V_n$  ( $n \neq 0$ ) são soluções independentes da Equação (13.110). Ao contrário, para  $n = 0$ , não temos independência linear. O que acontece em  $n = 0$ ? Onde está a “segunda” solução?

**13.3.4** Mostre que  $W_n(x) = (1 - x^2)^{-1/2}T_{n+1}(x)$  é uma solução de

$$(1 - x^2)W_n''(x) - 3xW_n'(x) + n(n + 2)W_n(x) = 0.$$

**13.3.5** Avalie o wronskiano de  $U_n(x)$  e  $W_n(x) = (1 - x^2)^{-1/2}T_{n+1}(x)$ .

**13.3.6**  $V_n(x) = (1 - x^2)^{1/2}U_{n-1}(x)$  não é definida para  $n = 0$ . Mostre que uma segunda solução, independente, da equação diferencial de Chebyshev para  $T_n(x)$  ( $n = 0$ ) é  $V_0(x) = \arccos x$  (ou  $\arcsen x$ ).

**13.3.7** Mostre que  $V_n(x)$  satisfaz a mesma relação de recorrência de três termos que  $T_n(x)$  (Equação (13.100)).

**13.3.8** Verifique as soluções de série para  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  (Equações (13.109a) e (13.119b)).

**13.3.9** Transforme a forma de série de  $T_n(x)$  em uma série de potências **ascendente**.

$$\text{Resposta: } T_{2n}(x) = (-1)^n n \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-m)!(2m)!} (2x)^{2m}, \quad n \geq 1,$$

$$T_{2n+1}(x) = \frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+n} (n+m)!}{(n-m)!(2m+1)!} (2x)^{2m+1}.$$

**13.3.10** Reescreva a forma de série de  $U_n(x)$ , Equação (13.119b), como uma série de potências ascendente.

$$\text{Resposta: } U_{2n}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!} (2x)^{2m},$$

$$U_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!(2m+1)!} (2x)^{2m+1}.$$

**13.3.11** Derive a representação de Rodrigues de  $T_n(x)$ ,

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2} (1-x^2)^{1/2}}{2^n (n-\frac{1}{2})!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}].$$

*Sugestão:* Uma possibilidade é usar a relação de função hipergeométrica

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right),$$

com  $z = (1-x)/2$ . Uma abordagem alternativa é desenvolver uma equação diferencial de primeira ordem para  $y = (1-x^2)^{n-1/2}$ . Diferenciação repetida dessa equação leva à equação de Chebyshev.

**13.3.12** (a) Pela equação diferencial para  $T_n$  (em forma auto-adjunta), mostre que

$$\int_{-1}^1 \frac{dT_m(x)}{dx} \frac{dT_n(x)}{dx} (1-x^2)^{1/2} dx = 0, \quad m \neq n.$$

(b) Confirme o resultado precedente mostrando que

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = nU_{n-1}(x).$$

**13.3.13** A expansão de uma potência de  $x$  em uma série de Chebyshev leva à integral

$$I_{mn} = \int_{-1}^1 x^m T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(a) Mostre que essa integral se anula para  $m < n$ .

(b) Mostre que essa integral se anula para  $m + n$  ímpar.

**13.3.14** Avalie a integral

$$I_{mn} = \int_{-1}^1 x^m T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

para  $m \geq n$  e  $m + n$  par, por cada um dos dois métodos:

(a) Trabalhe com  $x$  como a variável, substituindo  $T_n$  por sua respectiva representação de Rodrigues.

(b) Usando  $x = \cos \theta$ , transforme a integral para uma forma com  $\theta$  como a variável.

$$\text{Resposta: } I_{mn} = \pi \frac{m!}{(m-n)!} \frac{(m-n-1)!!}{(m+n)!!}, \quad m \geq n, \quad m+n \text{ par.}$$

**13.3.15** Estabeleça os seguintes limites,  $-1 \leq x \leq 1$ :

$$(a) |U_n(x)| \leq n+1, \quad (b) \left| \frac{d}{dx} T_n(x) \right| \leq n^2.$$

**13.3.16** (a) Estabeleça o seguinte limite,  $-1 \leq x \leq 1$ :  $|V_n(x)| \leq 1$ .





(b) Mostre que  $W_n(x)$  não é limitado em  $-1 \leq x \leq 1$ .

**13.3.17** Verifique as integrais de ortogonalidade-normalização para

- (a)  $T_m(x), T_n(x)$ ,      (b)  $V_m(x), V_n(x)$ ,  
 (c)  $U_m(x), U_n(x)$ ,      (d)  $W_m(x), W_n(x)$ .

*Sugestão:* Todas essas expressões podem ser convertidas para integrais de Fourier de ortogonalidade-normalização.

**13.3.18** Mostre se

- (a)  $T_m(x)$  e  $V_n(x)$  são ou não são ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  em relação ao fator de peso  $(1 - x^2)^{-1/2}$ .  
 (b)  $U_m(x)$  e  $W_n(x)$  são ou não são ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  em relação ao fator de peso  $(1 - x^2)^{1/2}$ .

**13.3.19** Derive

- (a)  $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ ,  
 (b)  $T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$ ,

pelas identidades de co-seno “correspondentes”.

**13.3.20** Várias equações relacionam os dois tipos de polinômios de Chebyshev. Como exemplos, mostre que

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

e

$$(1 - x^2)U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+2}(x).$$

**13.3.21** Mostre que

$$\frac{dV_n(x)}{dx} = -n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- (a) usando as formas trigonométricas de  $V_n$  e  $T_n$ ,  
 (b) usando a representação de Rodrigues.

**13.3.22** Começando com  $x = \cos \theta$  e  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ , expanda

$$x^k = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k$$

e mostre que

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}} \left[ T_k(x) + \binom{k}{1} T_{k-2}(x) + \binom{k}{2} T_{k-4} + \dots \right],$$

a série entre colchetes que termina com  $\binom{k}{m} T_1(x)$ , para  $k = 2m + 1$  ou  $\frac{1}{2} \binom{k}{m} T_0$  para  $k = 2m$ .

- 13.3.23** (a) Calcule e tabule as funções de Chebyshev  $V_1(x), V_2(x)$  e  $V_3(x)$ , para  $x = -1, 0(0, 1)1, 0$ .  
 (b) Uma segunda solução da equação diferencial de Chebyshev, Equação (13.100), para  $n = 0$ , é  $y(x) = \sin^{-1}x$ . Tabule e trace essa função na mesma faixa:  $-1, 0(0, 1)1, 0$ .

**13.3.24** Escreva um programa de computador para gerar os coeficientes  $a_s$  na forma polinomial do polinômio de Chebyshev  $T_n(x) = \sum_{s=0}^n a_s x^s$ .

**13.3.25** Tabule  $T_{10}(x)$  para 0,00(0,01)1,00. Isso incluirá as cinco raízes positivas de  $T_{10}$ . Se dispuser de um *software* gráfico, monte um gráfico com seus resultados.

**13.3.26** Determine as cinco raízes positivas de  $T_{10}(x)$  chamando uma sub-rotina de procura de raízes. Use o que sabe sobre a localização aproximada dessas raízes pelo Exercício 13.3.25 ou escreva uma rotina de busca para procurar as raízes. Essas cinco raízes positivas (e suas negativas) são os pontos de avaliação do método da quadratura de 10 pontos de Gauss-Chebyshev.

**Valores de verificação.**  $x_k = \cos[(2k - 1)\pi/20]$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .

**13.3.27** Desenvolva as seguintes expansões de Chebyshev (para  $[-1, 1]$ ):

$$(a) (1 - x^2)^{1/2} = \frac{2}{\pi} \left[ 1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} (4s^2 - 1)^{-1} T_{2s}(x) \right].$$

$$(b) \left. \begin{array}{l} +1, \quad 0 < x \leq 1 \\ -1, \quad -1 \leq x < 0 \end{array} \right\} = \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s + 1)^{-1} T_{2s+1}(x).$$

13.3.28 (a) Mostre que, para o intervalo  $[-1, 1]$

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{(2s - 3)!!}{(2s + 2)!!} (4s + 1) P_{2s}(x)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{4s^2 - 1} T_{2s}(x).$$

(b) Mostre que a razão entre o coeficiente de  $T_{2s}(x)$  e o de  $P_{2s}(x)$  se aproxima de  $(\pi s)^{-1}$  quando  $s \rightarrow \infty$ . Isso ilustra a convergência relativamente rápida da série de Chebyshev.

*Sugestão:* Usando as relações de recorrência de Legendre, reescreva  $xP_n(x)$  como uma combinação linear de derivadas. A substituição trigonométrica  $x = \cos \theta, T_n(x) = \cos n\theta$  é muito útil para a parte de Chebyshev.

13.3.29 Mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (4s^2 - 1)^{-2}.$$

*Sugestão:* Aplique a identidade de Parseval (ou a relação de completude) aos resultados do Exercício 13.3.28.

13.3.30 Mostre que

$$(a) \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} T_{2n+1}(x).$$

$$(b) \sin^{-1} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} T_{2n+1}(x).$$

### 13.4 Funções Hipergeométricas

No Capítulo 9, a equação hipergeométrica<sup>10</sup>

$$x(1 - x)y''(x) + [c - (a + b + 1)x]y'(x) - ab y(x) = 0 \tag{13.124}$$

foi introduzida como uma forma canônica de uma EDO linear de segunda ordem com singularidades regulares em  $x = 0, 1$  e  $\infty$ . Uma solução é

$$y(x) = {}_2F_1(a, b; c; x)$$

$$= 1 + \frac{a \cdot b}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a + 1)b(b + 1)}{c(c + 1)} \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad c \neq 0, -1, -2, -3, \dots, \tag{13.125}$$

que é conhecida como **função hipergeométrica** ou **série hipergeométrica**. O intervalo de convergência para  $c > a + b$  é  $|x| < 1$ , e  $x = 1$  e  $x = -1$  para  $c > a + b - 1$ . Em termos do símbolo de Pochhammer, usado com frequência,

$$(a)_n = a(a + 1)(a + 2) \cdots (a + n - 1) = \frac{(a + n - 1)!}{(a - 1)!},$$

$$(a)_0 = 1, \tag{13.126}$$

a função hipergeométrica se torna

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{13.127}$$

<sup>10</sup>Às vezes ela é denominada EDO de Gauss. Então, as soluções se tornam funções de Gauss.



Nessa forma, os índices inferiores 2 e 1 se tornam claros. O índice inferior principal 2 indica que aparecem dois símbolos de Pochhammer no numerador e o índice inferior final 1 indica um símbolo de Pochhammer no denominador.<sup>11</sup> (A função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1$  com um símbolo de Pochhammer no numerador e um no denominador aparece na Seção 13.5.)

Pela forma da Equação (13.125), vemos que o parâmetro  $c$  pode não ser zero ou um inteiro negativo. Por outro lado, se  $a$  ou  $b$  for igual a 0 ou um inteiro negativo, a série termina e a função hipergeométrica se torna um polinômio. Muitas outras dessas funções elementares podem ser representadas pela função hipergeométrica.<sup>12</sup> Comparando a série de potências, verificamos que

$$\ln(1+x) = x {}_2F_1(1, 1; 2; -x). \quad (13.128)$$

Para as integrais elípticas completas  $K$  e  $E$ ,

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad (13.129)$$

$$E(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (13.130)$$

As formas de série explícitas e outras propriedades das integrais elípticas são desenvolvidas na Seção 5.8.

A equação hipergeométrica como um EDO linear de segunda ordem tem uma segunda solução independente. A forma usual é

$$y(x) = x^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots \quad (13.131)$$

Se  $c$  for inteiro, as duas soluções coincidem ou (exceto se houver uma salvação por  $a$  inteiro ou  $b$  inteiro) uma das soluções aumentará demais (veja o Exercício 13.4.1). Nesse caso, espera-se que a segunda solução inclua um termo logarítmico.

Entre as formas alternativas da EDO hipergeométrica estão

$$\begin{aligned} (1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} y\left(\frac{1-z}{2}\right) - [(a+b+1)z - (a+b+1-2c)] \frac{d}{dz} y\left(\frac{1-z}{2}\right) \\ - ab y\left(\frac{1-z}{2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (13.132)$$

$$(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} y(z^2) - \left[ (2a+2b+1)z + \frac{1-2c}{z} \right] \frac{d}{dz} y(z^2) - 4ab y(z^2) = 0. \quad (13.133)$$

### Relações de Funções Contíguas

Os parâmetros  $a, b$  e  $c$  entram da mesma maneira que o parâmetro  $n$  das funções de Bessel, Legendre e de outras funções especiais. Do mesmo modo que constatamos com essas funções, esperamos relações de recorrência que envolvem mudança unitárias nos parâmetros  $a, b$  e  $c$ . A nomenclatura usual para as funções hipergeométricas, nas quais um parâmetro muda de  $+$  ou  $-1$ , é uma “função contígua”. Generalizando esse termo para incluir mudanças unitárias simultâneas em mais de um parâmetro, encontramos 26 funções contíguas a  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ . Considerando-as duas por vez, podemos desenvolver um formidável total de 325 equações entre as funções contíguas. Um exemplo típico é

$$\begin{aligned} (a-b) \{ c(a+b-1) + 1 - a^2 - b^2 + [(a-b)^2 - 1](1-x) \} {}_2F_1(a, b; c; x) \\ = (c-a)(a-b+1)b {}_2F_1(a-1, b+1; c; x) \\ + (c-b)(a-b-1)a {}_2F_1(a+1, b-1; c; x). \end{aligned} \quad (13.134)$$

Uma outra relação de função contígua aparece no Exercício 13.4.10.

<sup>11</sup>O símbolo de Pochhammer costuma ser útil em outras expressões que envolvem fatoriais, por exemplo,

$$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n z^n / n!, \quad |z| < 1.$$

<sup>12</sup>Com esses parâmetros,  $a, b$  e  $c$ , podemos representar praticamente qualquer coisa.

### Representações Hipergeométricas

Uma vez que a equação ultra-esférica (13.112) na Seção 13.3 é um caso especial da Equação (13.124), vemos que as funções ultra-esféricas (e funções de Legendre e Chebyshev) podem ser expressas como funções hipergeométricas. Para a função ultra-esférica, obtemos

$$C_n^\beta(x) = \frac{(n+2\beta)!}{2^\beta n! \beta!} {}_2F_1\left(-n, n+2\beta+1; 1+\beta; \frac{1-x}{2}\right), \quad (13.135)$$

comparando sua EDO com a Equação (13.124) e as soluções de séries de potências. Para funções de Legendre e associadas de Legendre, encontramos, de modo semelhante,

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (13.136)$$

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)! (1-x^2)^{m/2}}{(n-m)! 2^m m!} {}_2F_1\left(m-n, m+n+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (13.137)$$

Formas alternativas são:

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} {}_2F_1\left(-n, n+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right) \\ &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} {}_2F_1\left(-n, n+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right), \end{aligned} \quad (13.138)$$

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! n!} {}_2F_1\left(-n, n+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) x \\ &= (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} {}_2F_1\left(-n, n+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) x. \end{aligned} \quad (13.139)$$

Em termos de funções hipergeométricas, as funções de Chebyshev se tornam

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (13.140)$$

$$U_n(x) = (n+1) {}_2F_1\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (13.141)$$

$$V_n(x) = n\sqrt{1-x^2} {}_2F_1\left(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right). \quad (13.142)$$

Os fatores principais são determinados por comparação direta de séries de potências completas, comparação de coeficientes de potências particulares da variável ou avaliação em  $x = 0$  ou  $1$ , e assim por diante.

A série hipergeométrica pode ser usada para definir funções com índices não-inteiros. As aplicações físicas são mínimas.

### Exercícios

- 13.4.1** (a) Para  $c$ , inteiro, e  $a$  e  $b$  não-inteiros, mostre que

$${}_2F_1(a, b; c; x) \quad \text{e} \quad x^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$$

apresentam como resultado só uma solução para a equação hipergeométrica.

- (b) O que acontece se  $a$  for um inteiro, digamos,  $a = -1$  e  $c = -2$ ?

- 13.4.2** Ache as relações de recorrência de Legendre, Chebyshev I e Chebyshev II correspondentes à função hipergeométrica contígua, Equação (13.134).

- 13.4.3** Transforme os seguintes polinômios em funções hipergeométricas de argumento  $x^2$ . (a)  $T_{2n}(x)$ ; (b)  $x^{-1}T_{2n+1}(x)$ ; (c)  $U_{2n}(x)$ ; (d)  $x^{-1}U_{2n+1}(x)$ .

Resposta: (a)  $T_{2n}(x) = (-1)^n {}_2F_1(-n, n; \frac{1}{2}; x^2)$ .

(b)  $x^{-1}T_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n+1) {}_2F_1(-n, n+1; \frac{3}{2}; x^2)$ .

(c)  $U_{2n}(x) = (-1)^n {}_2F_1(-n, n+1; \frac{1}{2}; x^2)$ .

(d)  $x^{-1}U_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n+2) {}_2F_1(-n, n+2; \frac{3}{2}; x^2)$ .



**13.4.4** Derive ou verifique o fator principal nas representações hipergeométricas das funções de Chebyshev.

**13.4.5** Verifique que a função de Legendre da segunda espécie,  $Q_\nu(z)$ , é dada por

$$Q_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}\nu!}{(\nu + \frac{1}{2})!(2z)^{\nu+1}} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\nu}{2} + 1; \frac{\nu}{2} + \frac{3}{2}; z^{-2}\right),$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots$$

**13.4.6** Por analogia com a função gama incompleta, podemos definir uma função beta incompleta por

$$B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

Mostre que

$$B_x(a, b) = a^{-1}x^a {}_2F_1(a, 1-b; a+1; x).$$

**13.4.7** Verifique a representação integral

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt.$$

Quais restrições devem ser impostas aos parâmetros  $b$  e  $c$  e à variável  $z$ ?

*Nota:* A restrição sobre  $|z|$  pode ser descartada, continuação-analítica. Para  $a$  não-inteiro, o eixo real no plano  $z$  de  $a$  a  $\infty$  é uma linha de corte.

*Sugestão:* A integral tem uma semelhança com uma função beta e pode ser expandida em uma série de funções beta.

Resposta:  $\Re(c) > \Re(b) > 0$ , e  $|z| < 1$ .

**13.4.8** Prove que

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad c > a + b.$$

*Sugestão:* Esta é uma chance de usar a representação integral, Exercício 13.4.7.

**13.4.9** Prove que

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-x}{1-x}\right).$$

*Sugestão:* Experimente uma representação integral.

*Nota:* Essa relação é útil no desenvolvimento de uma representação de Rodrigues de  $T_n(x)$  (compare com o Exercício 13.3.11).

**13.4.10** Verifique que

$${}_2F_1(-n, b; c; 1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$$

*Sugestão:* Esta é uma chance de usar a relação de função contígua  $[2a - c + (b - a)x] \cdot {}_2F_1(a, b; c; x) = a(1-x) {}_2F_1(a+1, b; c; x) - (c-a) {}_2F_1(a-1, b; c; x)$  e indução matemática. Como alternativa, use a representação integral e a função beta.

## 13.5 Funções Hipergeométricas Confluentes

A equação hipergeométrica confluyente<sup>13</sup>

$$xy''(x) + (c-x)y'(x) - ay(x) = 0 \tag{13.143}$$

<sup>13</sup>Essa expressão costuma ser denominada **equação de Kummer**. Então, as soluções são **funções de Kummer**.

tem uma singularidade regular em  $x = 0$  e uma irregular em  $x = \infty$ . Ela é obtida da equação hipergeométrica da Seção 13.4 por fusão (disponível:  $x(1 - x) \rightarrow x$  na Equação (13.124)) de duas de suas três singularidades. Uma solução da equação hipergeométrica confluyente é

$$\begin{aligned} y(x) &= {}_1F_1(a; c; x) = M(a, c, x) \\ &= 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \end{aligned} \tag{13.144}$$

Essa solução é convergente para todo  $x$  finito (ou  $z$  complexo). Em termos do símbolo de Pochhammer, temos

$$M(a, c, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{13.145}$$

Claramente,  $M(a, c, x)$  se torna um polinômio se o parâmetro  $a$  é 0 ou um inteiro negativo. Numerosas outras funções mais ou menos elementares podem ser representadas pela função hipergeométrica confluyente. Como exemplos citamos a função erro e a função gama incompleta (pela Equação (8.69)):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\pi^{1/2}} x M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right), \tag{13.146}$$

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt = a^{-1} x^a M(a, a+1, -x), \quad \Re(a) > 0. \tag{13.147}$$

É óbvio que isso coincide com a primeira solução para  $c = a$ . A função erro e a função gama incompleta são discutidas na Seção 8.5.

Uma segunda solução da Equação (13.143) é dada por

$$y(x) = x^{1-c} M(a+1-c, 2-c, x), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots \tag{13.148}$$

A forma padrão da segunda solução da Equação (13.143) é uma combinação linear das Equações (13.144) e (13.148):

$$U(a, c, x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi c} \left[ \frac{M(a, c, x)}{(a-c)!(c-1)!} - \frac{x^{1-c} M(a+1-c, 2-c, x)}{(a-1)!(1-c)!} \right]. \tag{13.149}$$

Note a semelhança com nossa definição da função de Neumann, Equação (11.60). Assim como aconteceu com a nossa função de Neumann, Equação (11.60), essa definição de  $U(a, c, x)$  se torna indeterminada nesse caso para  $c$  inteiro.

Uma forma alternativa de equação hipergeométrica confluyente que será útil mais tarde é obtida mudando a variável independente de  $x$  para  $x^2$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x^2) + \left[ \frac{2c-1}{x} - 2x \right] \frac{d}{dx} y(x^2) - 4ay(x^2) = 0. \tag{13.150}$$

Como acontece com funções hipergeométricas, existem funções contíguas nas quais os parâmetros  $a$  e  $c$  são alterados por  $\pm 1$ . Incluindo os casos de alterações simultâneas nos dois parâmetros,<sup>14</sup> temos oito possibilidades. Considerando a função original e pares de funções contíguas, podemos desenvolver um total de 28 equações.<sup>15</sup>

### Representações Integrais

Muitas vezes é conveniente ter as funções hipergeométricas confluyentes na forma integral. Encontramos (Exercício 13.5.10)

$$M(a, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad \Re(c) > \Re(a) > 0, \tag{13.151}$$

$$U(a, c, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(a) > 0. \tag{13.152}$$

Três importantes técnicas para derivar ou verificar representações integrais são as seguintes:

<sup>14</sup>Slater se refere a elas como **funções associadas**.

<sup>15</sup>As relações de recorrência para funções de Bessel, Hermite e Laguerre são casos especiais dessas equações.



1. Transformação de expansões de função geradora e representações de Rodrigues: as funções de Bessel e Legendre fornecem exemplos dessa abordagem.
2. Integração direta para obter uma série: essa técnica direta é útil para uma representação de função de Bessel (Exercício 11.1.18) e de uma integral hipergeométrica (Exercício 13.4.7).
3. (a) Verificação de que a representação integral satisfaz a EDO. (b) Exclusão da outra solução. (c) Verificação de normalização. Esse é o método usado na Seção 11.5 para estabelecer uma representação integral da função modificada de Bessel  $K_\nu(z)$ . Aqui, ele funcionará para estabelecer as Equações (13.151) e (13.152).

### Funções de Bessel e Funções Modificadas de Bessel

A primeira fórmula de Kummer,

$$M(a, c, x) = e^x M(c - a, c, -x), \quad (13.153)$$

é útil para representar as funções de Bessel e modificadas de Bessel. A fórmula pode ser verificada por expansão de série ou por utilização de uma representação integral (compare com o Exercício 13.5.10).

Como se esperava da forma da equação hipergeométrica confluyente e do caráter de suas singularidades, as funções hipergeométricas confluyentes são úteis para representar inúmeras funções especiais da Física Matemática. Para as funções de Bessel,

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ix\right), \quad (13.154)$$

enquanto para as funções modificadas de Bessel da primeira espécie,

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2x\right). \quad (13.155)$$

### Funções de Hermite

As funções de Hermite são dadas por

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (13.156)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x M\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right), \quad (13.157)$$

usando a Equação (13.150).

Comparando a EDO de Laguerre com a equação hipergeométrica confluyente (13.143), temos a Equação (13.143),

$$L_n(x) = M(-n, 1, x). \quad (13.158)$$

A constante é fixada como unidade, notando a Equação (13.66) para  $x = 0$ . Para as funções associadas de Laguerre,

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} M(-n, m+1, x). \quad (13.159)$$

Obtém-se uma verificação alternativa comparando a Equação (13.159) com a solução de série de potências (Equação (13.72) da Seção 13.2). Observe que, na forma hipergeométrica, diferente da representação de Rodrigues, os índices  $n$  e  $m$  não precisam ser inteiros e, se não são inteiros,  $L_n^m(x)$  não será um polinômio.

### Casos Diversos

Há certas vantagens em expressar nossas funções especiais em termos de funções hipergeométricas e hipergeométricas confluyentes. Se o comportamento geral dessas últimas funções for conhecido, o comportamento das funções especiais que investigamos resulta em uma série de casos especiais. Isso pode ser útil para determinar o comportamento assintótico ou avaliar integrais de normalização. O comportamento assintótico de  $M(a, c, x)$  e  $U(a, c, x)$  pode ser convenientemente obtido pelas representações integrais dessas funções, Equações (13.151) e (13.152). Uma outra vantagem é que as relações entre as funções especiais são esclarecidas. Por exemplo, um exame das Equações (13.156), (13.157) e (13.159) sugere que as funções de Laguerre e Hermite são relacionadas.

Está claro que a equação hipergeométrica confluyente (13.143) não é auto-adjunta. Por essa e outras razões, é conveniente definir

$$M_{k\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\mu+1/2} M\left(\mu - k + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, x\right). \quad (13.160)$$

Essa nova função,  $M_{k\mu}(x)$ , é uma função de Whittaker que satisfaz a equação auto-adjunta

$$M''_{k\mu}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) M_{k\mu}(x) = 0. \quad (13.161)$$

A segunda solução correspondente é

$$W_{k\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\mu+1/2} U\left(\mu - k + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, x\right). \quad (13.162)$$

### Exercícios

**13.5.1** Verifique a representação hipergeométrica confluyente da função erro

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\pi^{1/2}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right).$$

**13.5.2** Mostre que as integrais de Fresnel  $C(x)$  e  $S(x)$  do Exercício 5.10.2 podem ser expressas em termos da função hipergeométrica confluyente como

$$C(x) + iS(x) = xM\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i\pi x^2}{2}\right).$$

**13.5.3** Por diferenciação direta e substituição verifique que

$$y = ax^{-a} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt = ax^{-a} \gamma(a, x)$$

satisfaz

$$xy'' + (a + 1 + x)y' + ay = 0.$$

**13.5.4** Mostre que a função modificada de Bessel da segunda espécie,  $K_\nu(x)$ , é dada por

$$K_\nu(x) = \pi^{1/2} e^{-x} (2x)^\nu U\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2x\right).$$

**13.5.5** Mostre que as integrais de co-seno e seno da Seção 8.5 podem ser expressas em termos de funções hipergeométricas confluyentes como

$$\operatorname{Ci}(x) + i \operatorname{si}(x) = -e^{ix} U(1, 1, -ix).$$

Essa relação é útil no cálculo numérico de  $\operatorname{Ci}(x)$  e  $\operatorname{si}(x)$  para valores grandes de  $x$ .

**13.5.6** Verifique a forma hipergeométrica confluyente do polinômio de Hermite,  $H_{2n+1}(x)$  (Equação (13.157)), mostrando que

(a)  $H_{2n+1}(x)/x$  satisfaz a equação hipergeométrica confluyente com  $a = -n, c = \frac{3}{2}$  e argumento  $x^2$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_{2n+1}(x)}{x} = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!}.$

**13.5.7** Mostre que a equação da função hipergeométrica confluyente contígua

$$(c - a)M(a - 1, c, x) + (2a - c + x)M(a, c, x) - aM(a + 1, c, x) = 0$$

leva à relação de recorrência da função associada de Laguerre (Equação (13.75)).

**13.5.8** Verifique as transformações de Kummer:

(a)  $M(a, c, x) = e^x M(c - a, c, -x)$

(b)  $U(a, c, x) = x^{1-c} U(a - c + 1, 2 - c, x).$





**13.5.9** Prove que

$$(a) \frac{d^n}{dx^n} M(a, c, x) = \frac{(a)_n}{(b)_n} M(a + n, b + n, x),$$

$$(b) \frac{d^n}{dx^n} U(a, c, x) = (-1)^n (a)_n U(a + n, c + n, x).$$

**13.5.10** Verifique as seguintes representações integrais:

$$(a) M(a, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad \Re(c) > \Re(a) > 0.$$

$$(b) U(a, c, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(a) > 0.$$

Sob quais condições você pode aceitar  $\Re(x) = 0$  na parte (b)?

**13.5.11** Pela representação integral de  $M(a, c, x)$ , Exercício 13.5.10(a), mostre que

$$M(a, c, x) = e^x M(c - a, c, -x).$$

*Sugestão:* Substitua a variável de integração  $t$  por  $1 - s$  para liberar o fator  $e^x$  da integral.

**13.5.12** Pela representação integral de  $U(a, c, x)$ , Exercício 13.5.10(b), mostre que a integral exponencial é dada por

$$E_1(x) = e^{-x} U(1, 1, x).$$

*Sugestão:* Substitua a variável de integração  $t$  em  $E_1(x)$  por  $x(1 + s)$ .

**13.5.13** Pelas representações integrais de  $M(a, c, x)$  e  $U(a, c, x)$ , no Exercício 13.5.10, desenvolva expansões assintóticas de

$$(a) M(a, c, x), \quad (b) U(a, c, x).$$

*Sugestão:* Você pode usar a técnica que foi empregada com  $K_\nu(z)$ , Seção 11.6.

$$\text{Resposta: (a) } \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \frac{e^x}{x^{c-a}} \left\{ 1 + \frac{(1-a)(c-a)}{1!x} + \frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!x^2} + \dots \right\}$$

$$(b) \frac{1}{x^a} \left\{ 1 + \frac{a(1+a-c)}{1!(-x)} + \frac{a(a+1)(1+a-c)(2+a-c)}{2!(-x)^2} + \dots \right\}.$$

**13.5.14** Mostre que o wronskiano, das duas funções hipergeométricas confluentes  $M(a, c, x)$  e  $U(a, c, x)$  é dado por

$$MU' - M'U = -\frac{(c-1)! e^x}{(a-1)! x^c}.$$

O que acontece se  $a$  for 0 ou um inteiro negativo?

**13.5.15** A equação de onda de Coulomb (parte radial da equação de Schrödinger com potencial de Coulomb) é

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left[ 1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right] y = 0.$$

Mostre que uma solução regular  $y = F_L(\eta, \rho)$  é dada por

$$F_L(\eta, \rho) = C_L(\eta) \rho^{L+1} e^{-i\rho} M(L+1 - i\eta, 2L+2, 2i\rho).$$

**13.5.16** (a) Mostre que a parte radial da função de onda do hidrogênio, Equação (13.81), pode ser escrita como

$$e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r)$$

$$= \frac{(n+L)!}{(n-L-1)!(2L+1)!} e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^L M(L+1-n, 2L+2, \alpha r).$$

- (b) Admitimos anteriormente que a energia total  $E$  (cinética + potencial) do elétron era negativa. Reescreva a função de onda radial (não-normalizada) para o elétron livre,  $E > 0$ .

Resposta:  $e^{i\alpha r/2}(\alpha r)^L M(L+1-in, 2L+2, -i\alpha r)$ , onda emergente. Essa representação fornece uma poderosa técnica alternativa para o cálculo de coeficientes de foto ionização e recombinação.

13.5.17 Avalie

$$(a) \int_0^\infty [M_{k\mu}(x)]^2 dx, \quad (b) \int_0^\infty [M_{k\mu}(x)]^2 \frac{dx}{x},$$

$$(c) \int_0^\infty [M_{k\mu}(x)]^2 \frac{dx}{x^{1-a}},$$

em que  $2\mu = 0, 1, 2, \dots, k - \mu - \frac{1}{2} = 0, 1, 2, \dots, a > -2\mu - 1$ .

Resposta: (a)  $(2\mu)!2k$ . (b)  $(2\mu)!$ . (c)  $(2\mu)!(2k)^a$ .

### 13.6 Funções de Mathieu

Quando EDPs como as de Laplace e Poisson e a da equação de onda são resolvidas com condições de contorno cilíndricas ou esféricas para separar variáveis em coordenadas polares, encontramos soluções radiais, que são as funções de Bessel do Capítulo 11, e soluções angulares, que são  $\sin m\varphi, \cos m\varphi$  em casos cilíndricos e harmônicos esféricos em casos esféricos. São exemplos as ondas eletromagnéticas em cavidades ressonantes, cabeçotes de cilindros circulares vibratórios e guias de onda coaxiais.

Quando a condição de contorno circular se torna elíptica nesses problemas cilíndricos, somos levados às funções de Mathieu angular e radial, que, portanto, podem ser denominadas funções cilíndricas elípticas. Na verdade, em 1868, Mathieu desenvolveu os termos principais de soluções de série do cabeçote de cilindro elíptico vibratório e, no início da década de 1900, Whittaker e outros também derivaram termos de ordem mais alta.

Aqui, nosso objetivo é dar uma introdução às ricas e complexas propriedades das funções de Mathieu.

#### Separação de Variáveis em Coordenadas Elípticas

Coordenadas cilíndricas elípticas  $\xi, \eta, z$ , que são adequadas para condições de contorno elípticas, são expressas em coordenadas retangulares como

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta, \quad z = z, \tag{13.163}$$

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi,$$

em que o parâmetro  $2c > 0$  é a distância entre os focos das elipses confocais descritas por essas coordenadas (Figura 13.7). Queremos mostrar que no limite  $c \rightarrow 0$  os focos das elipses se aglutinam como o centro de círculos. Trabalhamos principalmente com coordenada  $z$  constante, digamos,  $z = 0$ . De fato, para a variável radial fixa  $\xi =$  constante podemos eliminar a variável angular  $\eta$  para obter, pela Equação (13.163),

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \tag{13.164}$$

que descreve elipses confocais centradas na origem do plano  $x, y$  com semi-eixos maiores e menores

$$a = c \cosh \xi, \quad b = c \sinh \xi, \tag{13.165}$$

respectivamente. Uma vez que

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tgh} \xi = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 \xi}} \equiv \sqrt{1 - e^2}, \tag{13.166}$$

a excentricidade  $e = 1/\cosh \xi$  da elipse com  $0 \leq e \leq 1$ , e a distância entre os focos  $2ae = 2c$  dá uma interpretação geométrica da coordenada radial  $\xi$  e do parâmetro  $c$ . À medida que  $\xi \rightarrow \infty, e \rightarrow 0$  e as elipses se tornam círculos, o que é indicado na Figura 13.7. À medida que  $\xi \rightarrow 0$ , a elipse se torna mais alongada, até que, em  $\xi = 0$ , ela se reduz ao segmento de reta entre os focos.

Quando  $\eta =$  constante, eliminamos  $\xi$  para encontrar hipérboles confocais

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1, \tag{13.167}$$

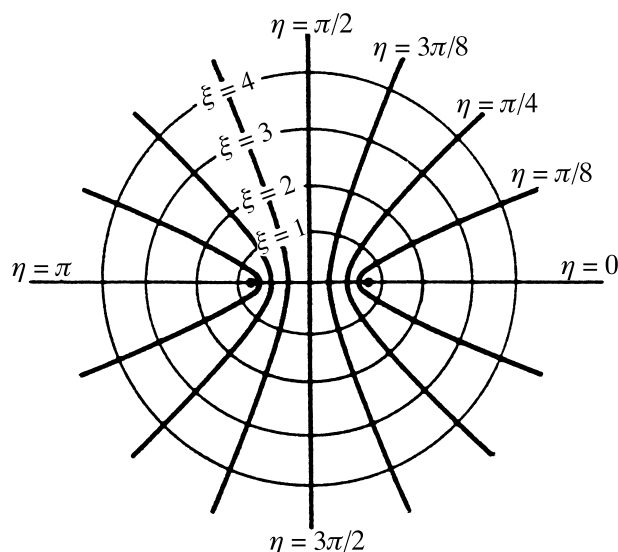


Figura 13.7: Coordenadas elípticas  $\xi, \eta$ .

que também estão representadas na Figura 13.7. Diferenciando a elipse, obtemos

$$\frac{x dx}{\cosh^2 \xi} + \frac{y dy}{\sinh^2 \xi} = 0, \quad (13.168)$$

o que significa que o vetor tangente  $(dx, dy)$  da elipse é perpendicular ao vetor  $(\frac{x}{\cosh^2 \xi}, \frac{y}{\sinh^2 \xi})$ . A condição de ortogonalidade para a hipérbole é

$$\frac{x dx}{\cos^2 \eta} - \frac{y dy}{\sin^2 \eta} = 0, \quad (13.169)$$

portanto, o produto escalar dos vetores tangenciais da elipse e da hipérbole em cada um de seus pontos de intersecção  $(x, y)$  da Equação (13.163) obedece a

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \xi \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{\sinh^2 \xi \sin^2 \eta} = c^2 - c^2 = 0. \quad (13.170)$$

Isso significa que as elipses e hipérbolas concêntricas focais formam um sistema de coordenadas ortogonais no sentido da Seção 2.1. Para extrair os fatores de escala  $h_\xi, h_\eta$  das diferenciais das coordenadas elípticas

$$\begin{aligned} dx &= c \sinh \xi \cos \eta d\xi - c \cosh \xi \sin \eta d\eta, \\ dy &= c \cosh \xi \sin \eta d\xi + c \sinh \xi \cos \eta d\eta, \end{aligned} \quad (13.171)$$

somamos seus quadrados, encontrando

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= c^2 (\sin^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) \\ &= c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) \equiv h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 \end{aligned} \quad (13.172)$$

e dando como resultado

$$h_\xi = h_\eta = c (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}. \quad (13.173)$$

Note que não há nenhum termo cruzado envolvendo  $d\xi d\eta$ , o que mostra mais uma vez que estamos tratando com coordenadas ortogonais.

Agora estamos prontos para derivar equações diferenciais de Mathieu.

### Exemplo 13.6.1 TAMBOR ELÍPTICO

Consideramos vibrações de um cabeçote de tambor elíptico com deslocamento vertical  $z = z(x, y, t)$  governado pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (13.174)$$

em que a velocidade ao quadrado  $v^2 = T/\rho$  com tensão  $T$  e densidade de massa  $\rho$  é uma constante. Primeiro, separamos a dependência de tempo do harmônico escrevendo

$$z(x, y, t) = u(x, y)w(t), \quad (13.175)$$

em que  $w(t) = \cos(\omega t + \delta)$ , sendo  $\omega$  a frequência e  $\delta$  uma fase constante. Substituindo essa função  $z$  na Equação (13.174), temos como resultado

$$\frac{1}{u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{v^2 w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} = -k^2 = \text{constante}, \quad (13.176)$$

isto é, a equação bidimensional de Helmholtz para o deslocamento  $u$ . Agora usamos a Equação (2.22) para converter o laplaciano  $\nabla^2$  para as coordenadas elípticas, onde descartamos a coordenada  $z$ . Isso resulta em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = \frac{1}{h_\xi^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + k^2 u = 0, \quad (13.177)$$

isto é, a equação de Helmholtz em coordenadas elípticas  $\xi, \eta$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + c^2 k^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) u = 0. \quad (13.178)$$

Por último, separamos  $\xi$  e  $\eta$ , escrevendo  $u(\xi, \eta) = R(\xi)\Phi(\eta)$ , o que resulta em

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + c^2 k^2 \cosh^2 \xi = c^2 k^2 \cos^2 \eta - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} = \lambda + \frac{1}{2} c^2 k^2, \quad (13.179)$$

em que  $\lambda + c^2 k^2/2$  é a constante de separação. Escrevendo  $\cosh 2\xi, \cos 2\eta$  em vez de  $\cosh^2 \xi, \cos^2 \eta$  (o que motiva a forma especial da constante separação na Equação (13.179)), encontramos a EDO linear de segunda ordem

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} - (\lambda - 2q \cosh 2\xi) R(\xi) = 0, \quad q = \frac{1}{4} c^2 k^2, \quad (13.180)$$

que também é denominada **equação radial de Mathieu**, e

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta) \Phi(\eta) = 0, \quad (13.181)$$

a **equação angular** ou **modificada, de Mathieu**. Note que o autovalor  $\lambda(q)$  é uma função do parâmetro contínuo  $q$  nas EDOs de Mathieu. É essa dependência de parâmetro que complica a análise de funções de Mathieu e as coloca entre as mais difíceis funções especiais usadas em Física. ■

Claramente, todos os pontos finitos são pontos regulares de ambas as EDOs, enquanto infinito é uma singularidade essencial para ambas as EDOs, que são do tipo de Sturm-Liouville (Capítulo 10) com funções coeficientes  $p \equiv 1$  e

$$q(\xi) = -\lambda + 2q \cosh 2\xi, \quad q(\eta) = \lambda - 2q \cos 2\eta. \quad (13.182)$$

(Essas funções  $q$  não devem ser confundidas com o parâmetro  $q$ .) Por conseqüência, suas soluções formam conjuntos ortogonais de funções. A substituição  $\eta \rightarrow i\xi$  transforma a EDO angular de Mathieu em EDO radial de Mathieu, portanto suas soluções guardam estreita relação.

Usando a substituição de Lindemann-Stieltjes  $z = \cos^2 \eta$ ,  $dz/d\eta = -\sen 2\eta$ , a EDO angular de Mathieu é transformada em uma EDO com coeficientes que são algébricos na variável  $z$  (usando  $\frac{d}{d\eta} = \frac{dz}{d\eta} \frac{d}{dz} = -\sen 2\eta \frac{d}{dz}$  e  $\frac{d^2}{d\eta^2} = -2 \cos 2\eta \frac{d}{dz} + \sen^2 2\eta \frac{d^2}{dz^2}$ ):

$$4z(1-z) \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + 2(1-2z) \frac{d\Phi}{dz} + [\lambda + 2q(1-2z)] \Phi = 0. \quad (13.183)$$

Essa EDO tem singularidades regulares em  $z = 0$  e  $z = 1$ , ao passo que o ponto no infinito é uma regularidade essencial (Capítulo 9). Por comparação, a EDO hipergeométrica tem três singularidades regulares. Mas nem todas as EDOs com duas singularidades regulares e uma singularidade essencial podem ser transformadas em uma EDO do tipo Mathieu.



### Exemplo 13.6.2 PÊNULO QUÂNTICO

Um pêndulo plano de comprimento  $l$  e massa  $m$  com potencial gravitacional  $V(\theta) = -mgl \cos \theta$  é denominado **pêndulo quântico** se sua função de onda  $\Psi$  obedece à equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2ml^2} \frac{d^2\Psi}{d\theta^2} + [V(\theta) - E]\Psi = 0, \quad (13.184)$$

em que a variável  $\theta$  é o deslocamento angular em relação à direção vertical. (Para mais detalhes e ilustrações, referimo-nos a Gutiérrez-Vega et al. em Leituras Adicionais.) Uma condição de contorno aplica-se a  $\Psi$ , de modo que ela seja de valor único; isto é,  $\Psi(\theta + 2\pi) = \Psi(\theta)$ . Substituindo

$$\theta = 2\eta, \quad \lambda = \frac{8Em^2 l^2}{\hbar^2}, \quad q = -\frac{4m^2 gl^3}{\hbar^2} \quad (13.185)$$

na equação de Schrödinger, resulta na EDO angular de Mathieu, para  $\Psi(2(\eta + \pi)) = \Psi(2\eta)$ . ■

Para muitas outras aplicações que envolvem funções de Mathieu referimo-nos a Ruby em Leituras Adicionais.

Nosso foco principal serão as soluções da EDO angular de Mathieu, que tem uma importante propriedade: sua função coeficiente é periódica com período  $\pi$ .

### Propriedades Gerais de Funções de Mathieu

Em aplicações físicas, as funções angulares de Mathieu têm de ser de valor único, isto é, periódicas com período  $2\pi$ . Vamos começar com um pouco de nomenclatura. Uma vez que as EDOs de Mathieu são invariantes sob paridade ( $\eta \rightarrow -\eta$ ), funções de Mathieu têm paridade definida. As de paridade ímpar que têm período  $2\pi$  e, para  $q$  pequeno, começam com  $\sin(2n + 1)\eta$  são denominadas  $se_{2n+1}(\eta, q)$ , sendo  $n$  inteiro,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (se é abreviatura de senoidal-elíptica). Funções de Mathieu de paridade ímpar e período  $\pi$  que começam com  $\sin 2n\eta$  para  $q$  pequeno são denominadas  $se_{2n}(\eta, q)$ , com  $n = 1, 2, \dots$ . Funções de Mathieu de paridade par, período  $\pi$ , que começam com  $\cos 2n\eta$  para  $q$  pequeno são denominadas  $ce_{2n}(\eta, q)$ , abreviatura de co-senoidal-elíptica), enquanto as de período  $2\pi$  que começam com  $\cos(2n + 1)\eta$ ,  $n = 0, 1, \dots$  para  $q$  pequeno são denominadas  $ce_{2n+1}(\eta, q)$ . No limite, onde o parâmetro  $q \rightarrow 0$  (e a EDO de Mathieu se torna a EDO do oscilador harmônico clássico), as funções de Mathieu se reduzem a essas funções trigonométricas.

A condição de periodicidade  $\Phi(\eta + 2\pi) = \Phi(\eta)$  é suficiente para determinar um conjunto de autovalores  $\lambda$  em termos de  $q$ . Uma analogia elementar desse resultado é o fato de que uma solução da EDO do oscilador harmônico clássico  $u''(\eta) + \lambda u(\eta) = 0$  tem período  $2\pi$  se, e somente se,  $\lambda = n^2$  for o quadrado de um inteiro. Tais problemas serão estudados na Seção 14.7 como aplicações da série de Fourier.

### Exemplo 13.6.3 FUNÇÕES RADIAIS DE MATHIEU

Substituindo a variável elíptica angular  $\eta \rightarrow i\xi$ , a EDO angular de Mathieu, Equação (13.181), se torna a EDO radial, Equação (13.180). Isso motiva as definições de funções radiais de Mathieu como

$$\begin{aligned} Ce_{2n+p}(\xi, q) &= ce_{2n+p}(i\xi, q), & p = 0, 1; & & n = 0, 1, \dots, \\ Se_{2n+p}(\xi, q) &= -ise_{2n+p}(i\xi, q), & p = 0, 1; & & n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Como são diferenciáveis, essas funções correspondem às soluções regulares da EDO radial de Mathieu. Claro que elas não são mais periódicas e sim, oscilatórias (Figura 13.8).

Em problemas físicos que envolvem coordenadas elípticas, a EDO radial de Mathieu, Equação (13.180), desempenha um papel correspondente ao da EDO de Bessel em geometria cilíndrica. Como há quatro famílias de funções de Bessel independentes — as soluções regulares  $J_n$  e as funções irregulares de Neumann  $N_n$ , juntamente com as funções modificadas de Bessel  $I_n$  e  $K_n$  —, esperamos quatro tipos de funções radiais de Mathieu. Por causa da paridade, as soluções se subdividem em funções de Mathieu pares e ímpares, portanto há oito tipos. Para  $q > 0$ ,

$$\begin{aligned} Je_{2n}(\xi, q) &= Ce_{2n}(\xi, q), & Je_{2n+1}(\xi, q) &= Ce_{2n+1}(\xi, q), \\ Jo_{2n}(\xi, q) &= Se_{2n}(\xi, q), & Jo_{2n+1}(\xi, q) &= Se_{2n+1}(\xi, q), & \text{regular ou da primeira espécie;} \\ & & Ne_n(\xi, q), No_n(\xi, q) & & \text{irregular ou da segunda espécie;} \end{aligned}$$

para  $q < 0$ , as soluções da EDO radial de Mathieu são denotadas por

$$\begin{aligned} Ie_n(\xi, q), Io_n(\xi, q), & & \text{regular ou da primeira espécie,} \\ Ke_n(\xi, q), Ko_n(\xi, q), & & \text{irregular ou da segunda espécie} \end{aligned}$$

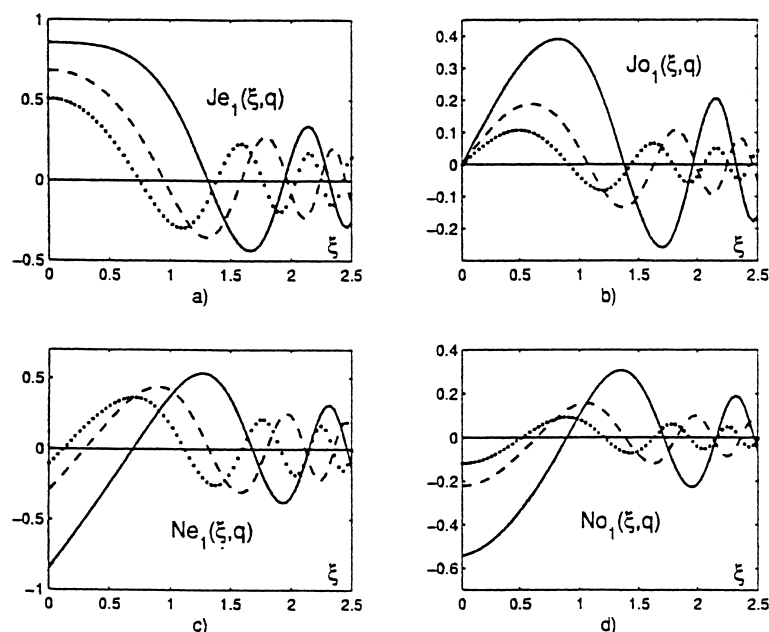


Figura 13.8: Funções radiais de Mathieu:  $q = 1$  (linha sólida),  $q = 2$  (linha interrompida),  $q = 3$  (linha pontilhada). (De Gutiérrez-Vega et al., *Am. J. Phys.* 71: 233 (2003).)

e são conhecidas como funções radiais evanescentes de Mathieu. Dessa mesma forma, podemos definir funções de Mathieu correspondentes às funções de Hankel. Algumas delas estão representadas na Figura 13.8.

Em aplicações como as do cabeçote de cilindro vibratório com condições de contorno elípticas (veja o Exemplo 13.6.1), a solução pode ser expandida em funções de Mathieu pares e ímpares:

$$\begin{aligned} ze_n &\equiv Je_n(\xi, q)ce_n(\eta, q) \cos(\omega_n t), & m \geq 0, \\ zo_n &\equiv Jo_n(\xi, q)se_n(\eta, q) \cos(\omega_n t), & m \geq 1. \end{aligned}$$

Elas obedecem às condições de contorno de Dirichlet,  $ze_n(\xi_0, \eta, t) = 0 = zo_n(\xi_0, \eta, t)$ , que são válidas contanto que as funções radiais satisfaçam  $Je_n(\xi_0, q) = 0 = Jo_n(\xi_0, q)$  contorno elíptico, em que  $\xi = \xi_0$ .

Quando a distância foca  $c \rightarrow 0$ , as funções angulares de Mathieu se tornam funções trigonométricas convencionais, enquanto as funções radiais de Mathieu se tornam funções de Bessel.

No caso de oscilações de um lago elíptico anular confocal, os modos têm de incluir funções de Mathieu da segunda espécie e, por isso, são dadas por

$$\begin{aligned} ze_n &\equiv [AJe_n(\xi, q) + BNe_n(\xi, q)]ce_n(\eta, q) \cos(\omega_n t), & m \geq 0, \\ zo_n &\equiv [AJo_n(\xi, q) + BNo_n(\xi, q)]se_n(\eta, q) \cos(\omega_n t), & m \geq 1, \end{aligned}$$

com  $A, B$  constantes. Essas soluções de onda estacionária devem obedecer às condições de contorno de Neumann nos contornos elípticos internos ( $\xi = \xi_0$ ) e externas ( $\xi = \xi_1$ ), isto é, as derivadas normais (uma “linha”o denota  $d/d\xi$ ) de  $ze_n$  e  $zo_n$  desaparecem em cada ponto das fronteiras. Para modos pares, temos  $ze'_n(\xi_0, \eta, t) = 0 = ze'_n(\xi_1, \eta, t)$ . As restrições radiais implícitas são semelhantes às Equações (11.81) e (11.82) do Exemplo 11.3.1. Exemplos numéricos e gráficos, também para ondas progressivas, são dados em Gutiérrez-Vega et al. em Leituras Adicionais. ■

Quanto a zeros de funções de Mathieu, suas expansões assintóticas e uma listagem mais completa de fórmulas, referimo-nos a Abramowitz e Stegun (AMS-55) em Leituras Adicionais, *Am. J. Phys.* 71, Jahnke e Emde e Gradshteyn e Ryzhik em Leituras Adicionais.

Para ilustrar e dar suporte à nomenclatura, queremos mostrar<sup>16</sup> que há um função angular de Mathieu que é

- par em  $\eta$  e de período  $\pi$  se, e somente se,  $\Phi'_1(\pi/2) = 0$ ;
- ímpar e de período  $\pi$  se, e somente se,  $\Phi_2(\pi/2) = 0$ ;

<sup>16</sup>Veja Hochstadt em Leituras Adicionais.



- par e de período  $2\pi$ , se, e somente se,  $\Phi_1(\pi/2) = 0$ ;
- ímpar e de período  $2\pi$ , se, e somente se,  $\Phi_2'(\pi/2) = 0$ ,

em que  $\Phi_1(\eta)$  e  $\Phi_2(\eta)$  são duas soluções linearmente independentes da EDO angular de Mathieu, de modo que

$$\Phi_1(0) = 1, \quad \Phi_1'(0) = 0; \quad \Phi_2(0) = 0, \quad \Phi_2'(0) = 1. \quad (13.186)$$

Uma vez que a EDO de Mathieu é uma EDO de segunda ordem, sabemos (Capítulo 9) que essas condições iniciais são realistas. O primeiro caso que acabamos de dar corresponde a  $ce_{2n}(\eta, q)$ , com  $\Phi_1'(\pi/2) = -2n \operatorname{sen} 2n\eta|_{\eta=\pi/2} + \dots = 0$  para  $n = 1, 2, \dots$ . O segundo é  $se_{2n}(\eta, q)$ , com  $\Phi_2(\pi/2) = \operatorname{sen} 2n\eta|_{\eta=\pi/2} + \dots = 0$ . O terceiro caso é o  $ce_{2n+1}(\eta, q)$ , com  $\Phi_1(\pi/2) = \cos(2n+1)\pi/2 + \dots = 0$ . O quarto caso é o  $se_{2n+1}(\eta, q)$ .

A chave da prova é a abordagem de Floquet para as EDOs lineares de segunda ordem com funções coeficiente periódicas, tal como a EDO angular de Mathieu ou o pêndulo simples (Exercício 13.6.1). Se  $\Phi_1(\eta)$  e  $\Phi_2(\eta)$  são duas soluções linearmente independentes da EDO, qualquer outra solução  $\Phi$  pode ser expressa como

$$\Phi(\eta) = c_1\Phi_1(\eta) + c_2\Phi_2(\eta), \quad (13.187)$$

com constantes  $c_1, c_2$ . Agora,  $\Phi_k(\eta + 2\pi)$  também são soluções porque uma EDO como essa é invariante sob a translação  $\eta \rightarrow \eta + 2\pi$  e, em particular,

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta + 2\pi) &= a_1\Phi_1(\eta) + a_2\Phi_2(\eta), \\ \Phi_2(\eta + 2\pi) &= b_1\Phi_1(\eta) + b_2\Phi_2(\eta), \end{aligned} \quad (13.188)$$

com constantes  $a_i, b_j$ . Substituindo a Equação (13.188) na Equação (13.187), obtemos

$$\Phi(\eta + 2\pi) = (c_1a_1 + c_2b_1)\Phi_1(\eta) + (c_2b_2 + c_1a_2)\Phi_2(\eta), \quad (13.189)$$

em que as constantes  $c_i$  podem ser escolhidas como soluções das equações de autovalor

$$\begin{aligned} a_1c_1 + b_1c_2 &= \lambda c_1, \\ a_2c_1 + b_2c_2 &= \lambda c_2. \end{aligned} \quad (13.190)$$

Então, o **teorema de Floquet** afirma que  $\Phi(\eta + 2\pi) = \lambda\Phi(\eta)$ , em que  $\lambda$  é uma raiz de

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13.191)$$

Obtemos um **corolário** útil se definirmos  $\mu$  e  $y$  por  $\lambda = \exp(2\pi\mu)$  e  $y(\eta) = \exp(-\mu\eta)\Phi(\eta)$ , portanto

$$y(\eta + 2\pi) = e^{-\mu\eta}e^{-2\pi\mu}\Phi(\eta + 2\pi) = e^{-\mu\eta}\Phi(\eta) = y(\eta). \quad (13.192)$$

Assim,  $\Phi(\eta) = e^{\mu\eta}y(\eta)$ , sendo  $y$  uma função periódica de  $\eta$  com período  $2\pi$ .

Vamos aplicar o argumento de Floquet às  $\Phi_k(\eta + \pi)$ , que também são soluções da EDO de Mathieu porque a última é invariante sob a translação  $\eta \rightarrow \eta + \pi$ . Usando os valores especiais na Equação (13.186), sabemos que

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta + \pi) &= \Phi_1(\pi)\Phi_1(\eta) + \Phi_1'(\pi)\Phi_2(\eta), \\ \Phi_2(\eta + \pi) &= \Phi_2(\pi)\Phi_1(\eta) + \Phi_2'(\pi)\Phi_2(\eta), \end{aligned} \quad (13.193)$$

porque essas combinações lineares de  $\Phi_k(\eta)$  são soluções da EDO de Mathieu com os valores corretos  $\Phi_i(\eta + \pi)$ ,  $\Phi_i'(\eta + \pi)$ , para  $\eta = 0$ . Por conseguinte,

$$\Phi_i(\eta + \pi) = \lambda_i\Phi_i(\eta), \quad (13.194)$$

em que  $\lambda_i$  são as raízes de

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(\pi) - \lambda & \Phi_2(\pi) \\ \Phi_1'(\pi) & \Phi_2'(\pi) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13.195)$$

O termo constante na polinomial característica é dado pelo wronskiano

$$W(\Phi_1(\eta), \Phi_2(\eta)) = C, \quad (13.196)$$

uma constante porque o coeficiente de  $d\Phi/d\eta$  na EDO angular de Mathieu desaparece, implicando  $dW/d\eta = 0$ . De fato, usando a Equação (13.186),

$$\begin{aligned} W(\Phi_1(0), \Phi_2(0)) &= \Phi_1(0)\Phi_2'(0) - \Phi_1'(0)\Phi_2(0) = 1 \\ &= W(\Phi_1(\pi), \Phi_2(\pi)), \end{aligned} \tag{13.197}$$

portanto o autovalor da Equação (13.195) para  $\lambda$  se torna

$$\begin{aligned} (\Phi_1(\pi) - \lambda)(\Phi_2'(\pi) - \lambda) - \Phi_2(\pi)\Phi_1'(\pi) &= 0 \\ &= \lambda^2 - [\Phi_1(\pi) + \Phi_2'(\pi)]\lambda + 1, \end{aligned} \tag{13.198}$$

com  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 = \Phi_1(\pi) + \Phi_2'(\pi)$ .

Se  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ , então  $\lambda_1 = \exp(i\phi)$  e  $\lambda_2 = \exp(-i\phi)$ , portanto  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \phi$ . Para  $\phi \neq 0, \pi, 2\pi, \dots$  esse caso corresponde a  $|\Phi_1(\pi) + \Phi_2'(\pi)| < 2$ , em que ambas as soluções permanecem ligadas, à medida que  $\eta \rightarrow \infty$  em etapas de  $\pi$  usando a Equação (13.194). Esses casos não resultam em funções periódicas de Mathieu, e isso também acontece quando  $|\Phi_1(\pi) + \Phi_2'(\pi)| > 2$ . Se  $\phi = 0$ , isto é,  $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$  for uma raiz dupla, então as  $\Phi_i$  têm período  $\pi$  e  $|\Phi_1(\pi) + \Phi_2'(\pi)| = 2$ . Se  $\phi = \pi$ , isto é,  $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$  for, mais uma vez, uma raiz dupla, então  $|\Phi_1(\pi) + \Phi_2'(\pi)| = -2$  e as  $\Phi_i$  têm período  $2\pi$  com  $\Phi_i(\eta + \pi) = -\Phi_i(\eta)$ .

Como a EDO angular de Mathieu é invariante sob uma transformação de paridade  $\eta \rightarrow -\eta$ , é conveniente considerar soluções

$$\Phi_e(\eta) = \frac{1}{2} [\Phi(\eta) + \Phi(-\eta)], \quad \Phi_o(\eta) = \frac{1}{2} [\Phi(\eta) - \Phi(-\eta)] \tag{13.199}$$

de paridade definida, que obedecem às mesmas condições iniciais que  $\Phi_i$ . Agora, renomeamos  $\Phi_e \rightarrow \Phi_1, \Phi_o \rightarrow \Phi_2$ , considerando que  $\Phi_1$  é par e  $\Phi_2$  é ímpar sob paridade. Essas soluções de paridade definida da EDO de Mathieu são denominadas **funções de Mathieu** e rotuladas de acordo com a nomenclatura que discutimos antes.

Se  $\Phi_1(\eta)$  tiver período  $\pi$ , então  $\Phi_1'(\eta + \pi) = \Phi_1'(\eta)$  também tem período  $\pi$ , mas é ímpar sob paridade. Substituindo  $\eta = -\pi/2$ , obtemos

$$\Phi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Phi_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\Phi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{então,} \quad \Phi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{13.200}$$

Ao contrário, se  $\Phi_1'(\pi/2) = 0$ , então  $\Phi_1(\eta)$  tem período  $\pi$ . Para ver isso, usamos

$$\Phi_1(\eta + \pi) = c_1\Phi_1(\eta) + c_2\Phi_2(\eta). \tag{13.201}$$

Essa expansão é válida porque  $\Phi_1(\eta + \pi)$  é uma solução da EDO angular de Mathieu. Agora determinamos os coeficientes  $c_i$ , fazendo  $\eta = -\pi/2$ , e recordando que  $\Phi_1$  e  $\Phi_2'$  são pares sob paridade, ao passo que  $\Phi_2$  e  $\Phi_1'$  são ímpares. Isso resulta em

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c_1\Phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - c_2\Phi_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \Phi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -c_1\Phi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2\Phi_2'\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{13.202}$$

Uma vez que  $\Phi_1'(\pi/2) = 0, \Phi_2'(\pi/2) \neq 0$ , ou o wronskiano desapareceria e resultaria  $\Phi_2 \sim \Phi_1$ . Daí,  $c_2 = 1$  resulta da segunda equação e  $c_1 = 1$  da primeira. Assim,  $\Phi_1(\eta + \pi) = \Phi_1(\eta)$ . Os outros casos que apresentamos antes podem ser provados de modo semelhante.

Como as EDOs de Mathieu são do tipo Sturm-Liouville, as funções de Mathieu representam sistemas ortogonais de funções. Portanto, para  $m, n$  inteiros não-negativos, as relações de ortogonalidade e normalizações são

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} ce_m ce_n d\eta &= \int_{-\pi}^{\pi} se_m se_n d\eta = 0, \quad \text{se } m \neq n; \\ \int_{-\pi}^{\pi} ce_m se_n d\eta &= 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} [ce_{2n}]^2 d\eta &= \int_{-\pi}^{\pi} [se_{2n}]^2 d\eta = \pi, \quad \text{se } n \geq 1; \quad \int_0^{\pi} [ce_0(\eta, q)]^2 d\eta = \pi. \end{aligned} \tag{13.203}$$





Se uma função  $f(\eta)$  for periódica com período  $\pi$ , então ela pode ser expandida em uma série de funções ortogonais de Mathieu como

$$f(\eta) = \frac{1}{2}a_0 ce_0(\eta, q) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n ce_{2n}(\eta, q) + b_n se_{2n}(\eta, q)] \quad (13.204)$$

com

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\eta) ce_{2n}(\eta, q) d\eta, & n \geq 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\eta) se_{2n}(\eta, q) d\eta, & n \geq 1. \end{aligned} \quad (13.205)$$

Existem expansões semelhantes para funções de período  $2\pi$  em termos de  $ce_{2n+1}$  e  $se_{2n+1}$ .

Expansões de série de funções de Mathieu serão derivadas na Seção 14.7.

### Exercícios

- 13.6.1** Para a EDO do pêndulo simples da Seção 5.8, aplique o método de Floquet e derive as propriedades de suas soluções semelhantes às apresentadas antes da Equação (13.186).
- 13.6.2** Derive uma função de Mathieu análoga para a expansão de Rayleigh de uma onda plana para  $\cos(k \cos \eta \cos \theta)$  e  $\sin(k \cos \eta \cos \theta)$ .

### Leituras Adicionais

- Abramowitz, M., e I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, Applied Mathematics Series-55 (AMS-55). Washington, DC: National Bureau of Standards (1964). Edição em brochura, Nova York: Dover (1974). O capítulo 22 é um resumo detalhado das propriedades e representações de polinômios ortogonais. Outros capítulos resumem propriedades de funções de Bessel, de Legendre, hipergeométricas e hipergeométricas confluentes e muitas mais.
- Buchholz, H., *The Confluent Hypergeometric Function*. Nova York: Springer-Verlag (1953); traduzido (1969). Buchholz dá grande ênfase às formas de Whittaker, de preferência às formas de Kummer. Aplicações a variedade de outras funções transcendentais.
- Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, e F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, 3 vols. Nova York: McGraw-Hill (1953). Nova tiragem Krieger (1981). Uma listagem detalhada, quase exaustiva, das propriedades das funções especiais da Física Matemática.
- Fox, L. e I. B. Parker, *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. Oxford: Oxford University Press (1968). Um relato detalhado, minucioso, mas de leitura muito fácil de polinômios de Chebyshev e suas aplicações à análise numérica.
- Gradshteyn, I. S., e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Nova York: Academic Press (1980).
- Gutiérrez-Vega, J. C., R. M. Rodríguez-Dagnino, M. A. Meneses-Nava e S. Chávez-Cerda, *Am. J. Phys.* 71: 233 (2003).
- Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics*. Nova York: Holt, Rinehart and Winston (1961), nova tiragem (1986).
- Jahnke, E., e F. Emde, *Table of Functions*. Leipzig: Teubner (1933); Nova York: Dover (1943).
- Lebedev, N. N., *Special Functions and their Applications* (traduzido por R. A. Silverman). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1965). Brochura, Nova York: Dover (1972).
- Luke, Y. L., *The Special Functions and Their Approximations*. Nova York: Academic Press (1969). Dois volumes: o volume 1 é um tratamento teórico minucioso de funções gama, funções hipergeométricas, funções hipergeométricas confluentes e funções relacionadas. O volume 2 desenvolve aproximações e outras técnicas para trabalho numérico.
- Luke, Y. L., *Mathematical Functions and Their Approximations*. Nova York: Academic Press (1975). Suplemento atualizado para *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* (AMS-55).
- Mathieu, E., *J. de Math. Pures et Appl.* 13: 137-203 (1868).
- McLachlan, N. W., *Theory and Applications of Mathieu Functions*. Oxford, UK: Clarendon Press (1947).
- Magnus, W., F. Oberhettinger, e R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Nova York: Springer (1966). Um excelente resumo exatamente daquilo que diz o título, incluindo os tópicos dos Capítulos 10 a 13.

Rainville, E. D., *Special Functions*. Nova York: Macmillan (1960), nova tiragem Chelsea (1971). Esse livro é um relato coerente, abrangente, de quase todas as funções especiais da Física Matemática que o leitor possivelmente encontrará.

Rowland, D. R., *Am. J. Phys.* 72: 758-766 (2004).

Ruby, L., *Am. J. Phys.* 64: 39-44 (1996).

Sansone, G., *Orthogonal Functions* (traduzido por A. H. Diamond). Nova York: Interscience (1959). Nova tiragem Dover (1991).

Slater, L. J., *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1960). Um desenvolvimento claro e detalhado das propriedades das funções hipergeométricas confluentes e de relações entre a equação hipergeométrica confluyente e outras EDOs da Física Matemática.

Sneddon, I. N., *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, 3<sup>a</sup> ed., Nova York: Longman (1980).

Whittaker, E. T., e G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, nova tiragem (1997). O texto clássico sobre funções especiais e análise real e complexa.

# 14

## Séries de Fourier

### 14.1 Propriedades Gerais

Fenômenos periódicos envolvendo ondas, máquinas rotativas (movimento harmônico) ou outras forças de impulsão repetitivas são descritos por funções periódicas. As séries de Fourier são uma ferramenta básica para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs) com condições de contorno periódicas. Integrais de Fourier para fenômenos não-periódicos são desenvolvidas no Capítulo 15. O nome comum deste campo é **análise de Fourier**.

Uma série de Fourier é definida como uma expansão de uma função ou representação de uma função em uma série de senos e co-senos, tal como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx. \quad (14.1)$$

Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ , e  $b_n$  estão relacionados à função periódica  $f(x)$  por integrais definidas:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (14.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen } nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (14.3)$$

que estão sujeitas ao requisito da existência das integrais. Note que  $a_0$  é destacado para tratamento especial pela inclusão do fator  $\frac{1}{2}$ , de modo que a Equação (14.2) se aplicará a todo  $a_n$ ,  $n = 0$ , bem como  $n > 0$ .

As condições impostas a  $f(x)$  para tornar válida a Equação (14.1) são que  $f(x)$  tenha somente um número finito de descontinuidades e somente um número finito de valores extremos, máximos e mínimos no intervalo  $[0, 2\pi]$ .<sup>1</sup> Funções que satisfaçam essas condições podem ser denominadas *regulares* parte por parte. As condições em si são conhecidas como condições de **Dirichlet**. Embora haja algumas funções que não obedecem a essas condições de Dirichlet, elas podem perfeitamente ser denominadas como patológicas para a finalidade de expansões de Fourier. Na vasta maioria dos problemas de Física que envolvem uma série de Fourier, essas condições serão satisfeitas. Em grande parte dos problemas físicos estaremos interessados em funções que são integráveis ao quadrado (no espaço de Hilbert  $L^2$  da Seção 10.4). Nesse espaço os senos e co-senos formam um conjunto ortogonal completo, o que, por sua vez, significa que a Equação (14.1) é válida no sentido da convergência da média.

Expressando  $\cos nx$  e  $\text{sen } nx$  em forma exponencial, podemos reescrever a Equação (14.1) como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (14.4)$$

na qual

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n > 0, \quad (14.5a)$$

e

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0. \quad (14.5b)$$

<sup>1</sup>Essas condições são **suficientes**, mas não **necessárias**.

### Variáveis Complexas — Teorema de Abel

Considere uma função  $f(z)$  representada por uma série convergente de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{in\theta}. \quad (14.6)$$

Essa é nossa série exponencial de Fourier, Equação (14.4). Separando partes real e imaginária, obtemos

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n \cos n\theta, \quad v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \operatorname{sen} n\theta, \quad (14.7a)$$

a série de Fourier de co-seno e seno. O teorema de Abel afirma que, se  $u(1, \theta)$  e  $v(1, \theta)$  são convergentes para um dado  $\theta$ , então

$$u(1, \theta) + iv(1, \theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}). \quad (14.7b)$$

Uma aplicação disso aparece no Exercício 14.1.9 e no Exemplo 14.1.1.

#### Exemplo 14.1.1 SOMATÓRIO DE UMA SÉRIE DE FOURIER

Neste capítulo, em geral estaremos mais preocupados em achar os coeficientes da expansão de Fourier de uma função conhecida. Ocasionalmente, inverteremos o processo para determinar a função representada por uma determinada série de Fourier.

Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \cos nx$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ . Visto que essa série é apenas condicionalmente convergente (e diverge em  $x = 0$ ), consideramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos nx}{n}, \quad (14.8)$$

como absolutamente convergente para  $|r| < 1$ . Nosso procedimento é tentar formar séries de potências transformando as funções trigonométricas para a forma exponencial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos nx}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{inx}}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{-inx}}{n}. \quad (14.9)$$

Agora, essas séries de potências podem ser identificadas como expansões de Maclaurin de  $-\ln(1 - z)$ ,  $z = re^{ix}$ ,  $re^{-ix}$  (Equação (5.95)), e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos nx}{n} &= -\frac{1}{2} [\ln(1 - re^{ix}) + \ln(1 - re^{-ix})] \\ &= -\ln[(1 + r^2) - 2r \cos x]^{1/2}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Fazendo  $r = 1$  e usando o teorema de Abel, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} &= -\ln(2 - 2 \cos x)^{1/2} \\ &= -\ln\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right), \quad x \in (0, 2\pi).^2 \end{aligned} \quad (14.11)$$

ambos os lados dessa expressão divergem quando  $x \rightarrow 0$  e  $2\pi$ . ■

<sup>2</sup>Os limites podem ser deslocados para  $[-\pi, \pi]$  ( $x \neq 0$ ) usando  $|x|$  no lado direito.



### Completeness

O problema de estabelecer a completude pode ser abordado de vários modos diferentes. Um deles é transformar a série trigonométrica de Fourier para a forma exponencial e compará-la com uma série de Laurent. Se expandirmos  $f(z)$  em uma série de Laurent<sup>3</sup> (admitindo que  $f(z)$  é analítica),

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n. \tag{14.12}$$

No círculo unitário  $z = e^{i\theta}$  e

$$f(z) = f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta}. \tag{14.13}$$

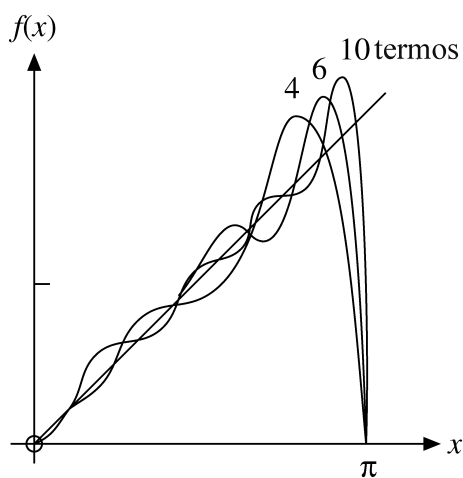


Figura 14.1: Representação de Fourier de onda em dente de serra.

A expansão de Laurent no círculo unitário (Equação (14.13)) tem a mesma forma que a série complexa de Fourier (Equação (14.12)), o que mostra a equivalência entre as duas expansões. Uma vez que a série de Laurent, por ser uma série de potências, tem a propriedade de completude, vemos que as funções de Fourier  $e^{inx}$  formam um conjunto completo. Aqui há uma limitação significativa. Séries de Laurent e séries de potências complexas não podem tratar descontinuidades como uma onda quadrada ou a onda em dente de serra da Figura 14.1 exceto no círculo de convergência.

A teoria de espaços vetoriais oferece uma segunda abordagem para a completude dos senos e co-senos. Nesse caso, a completude é estabelecida pelo teorema de Weierstrass para duas variáveis. A expansão de Fourier e a propriedade de completude podem ser esperadas porque as funções  $\sin nx, \cos nx, e^{inx}$  são todas autofunções de uma EDO linear auto-adjunta

$$y'' + n^2 y = 0. \tag{14.14}$$

Obtemos autofunções ortogonais para diferentes valores do autovalor  $n$  para o intervalo  $[0, 2\pi]$  que satisfazem as condições de contorno na teoria de Sturm-Liouville (Capítulo 10). Diferentes autofunções para o mesmo autovalor  $n$  são ortogonais. Temos

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi \delta_{mn}, & m \neq 0, \\ 0, & m = 0, \end{cases} \tag{14.15}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi \delta_{mn}, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0, \end{cases} \tag{14.16}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{para todo inteiro } m \text{ e } n. \tag{14.17}$$

<sup>3</sup>Seção 6.5.

Note que qualquer intervalo  $x_0 \leq x \leq x_0 + 2\pi$  será igualmente satisfatório. Frequentemente, usaremos  $x_0 = -\pi$  para obter o intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ . A ortogonalidade para as autofunções complexas  $e^{\pm inx}$  costuma ser **definida** em termos do conjugado complexo de um de dois fatores,

$$\int_0^{2\pi} (e^{imx})^* e^{inx} dx = 2\pi\delta_{mn}. \tag{14.18}$$

Essa expressão está de acordo com o tratamento dos harmônicos esféricos (Seção 12.6).

### Teoria de Sturm-Liouville

A teoria de Sturm-Liouville garante a validade da Equação (14.1) (para funções que satisfazem as condições de Dirichlet) e utilizar as relações de ortogonalidade, Equações (14.15), (14.16) e (14.17), nos permite calcular os coeficientes de expansão  $a_n, b_n$ , como mostram as Equações (14.2) e (14.3). Substituindo as Equações (14.2) e (14.3) na Equação (14.1), escrevemos nossa expansão de Fourier como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos nx \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt + \text{sen } nx \int_0^{2\pi} f(t) \text{sen } nt dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t-x) dt, \end{aligned} \tag{14.19}$$

sendo que o primeiro termo (constante) é o valor médio de  $f(x)$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ . A Equação (14.19) oferece uma abordagem para o desenvolvimento da integral de Fourier e de transformadas de Fourier, Seção 15.1.

Um outro modo de descrever o que estamos fazendo aqui é dizer que  $f(x)$  é parte de um espaço de Hilbert de número infinito de dimensões, tendo  $\cos nx$  e  $\text{sen } nx$  ortogonais como base. (Eles sempre podem voltar a ser normalizados para a unidade, se desejado.) Afirmar que  $\cos nx$  e  $\text{sen } nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) abrangem esse espaço de Hilbert equivale a dizer que eles formam um conjunto completo. Por fim, os coeficientes de expansão  $a_n$  e  $b_n$  correspondem às projeções de  $f(x)$ , com as integrais de produtos internos (Equações (14.2) e (14.3)) desempenhando o papel do produto escalar da Seção 1.3. Esses pontos são esboçados na Seção 10.4.

### Exemplo 14.1.2 ONDA EM DENTE DE SERRA

Podemos ter uma idéia da convergência de uma série de Fourier e do erro pela utilização de apenas um número finito de termos na série considerando a expansão de

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi, \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases} \tag{14.20}$$

Essa é uma onda em dente de serra e, por conveniência, vamos deslocar nosso intervalo de  $[0, 2\pi]$  para  $[-\pi, \pi]$ . Nesse intervalo temos  $f(x) = x$ . Usando as Equações (14.2) e (14.3), mostramos que a expansão é

$$f(x) = x = 2 \left[ \text{sen } x - \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\text{sen } nx}{n} + \dots \right]. \tag{14.21}$$

A Figura 14.1 mostra  $f(x)$ , para  $0 \leq x < \pi$ , para a soma de 4, 6 e 10 termos da série. Três características merecem comentário.

1. Há um aumento constante na precisão da representação à medida que aumenta o número de termos incluídos.
2. Todas as curvas passam pelo ponto do meio,  $f(x) = 0$ , em  $x = \pi$ .
3. Na vizinhança de  $x = \pi$  há um aumento excessivo momentâneo (*overshoot*) que persiste e não mostra nenhum sinal de diminuição.

Apenas por uma questão de interesse incidental, fazendo  $x = \pi/2$  na Equação (14.21), temos uma derivação alternativa da fórmula de Leibniz, Exercício 5.7.6. ■



### Comportamento de Descontinuidades

O comportamento de uma onda em dente de serra  $f(x)$  em  $x = \pi$  é um exemplo de uma regra geral que diz que em uma descontinuidade finita a série converge para a média aritmética. Para uma descontinuidade em  $x = x_0$  a série resulta em

$$f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)], \tag{14.22}$$

a média aritmética entre as aproximações a  $x = x_0$  pela esquerda e pela direita. Uma prova geral usando somas parciais, como na Seção (14.5), é dada por Jeffreys e Jeffreys e por Carslaw (veja as Leituras Adicionais). A prova pode ser simplificada pelo uso das funções delta de Dirac, Exercício 14.5.1.

O *overshoot* da curva em dente de serra antes de  $x = \pi$  na Figura 14.1 é um exemplo do fenômeno de Gibbs discutido na Seção 14.5.

### Exercícios

- 14.1.1** Uma função  $f(x)$  (de quadrado integrável) deve ser representada por uma série de Fourier **finita**. Uma medida conveniente da precisão da série é dada pela integral do quadrado do desvio,

$$\Delta_p = \int_0^{2\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^p (a_n \cos nx + b_n \sen nx) \right]^2 dx.$$

Mostre que o requisito de minimização de  $\Delta_p$ , isto é,

$$\frac{\partial \Delta_p}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_p}{\partial b_n} = 0,$$

para todo  $n$ , leva à escolha de  $a_n$  e  $b_n$  como dados nas Equações (14.2) e (14.3).

*Nota:* Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são independentes de  $p$ . Essa independência é uma consequência da ortogonalidade e não seria válida para potências de  $x$ , ajustando uma curva com polinômios.

- 14.1.2** Na análise de uma forma de onda complexa (marés oceânicas, terremotos, tons musicais etc.) talvez fosse mais conveniente escrever a série de Fourier como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx - \theta_n).$$

Mostre que essa expressão equivale à Equação (14.1), com

$$a_n = \alpha_n \cos \theta_n, \quad \alpha_n^2 = a_n^2 + b_n^2,$$

$$b_n = \alpha_n \sen \theta_n, \quad \tg \theta_n = b_n/a_n.$$

*Nota:* Os coeficientes  $\alpha_n^2$  como uma função de  $n$  definem o que denominamos **espectro da potência**. A importância de  $\alpha_n^2$  é sua invariância sob um deslocamento na fase  $\theta_n$ .

- 14.1.3** Uma função  $f(x)$  é expandida em um série exponencial de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Se  $f(x)$  for real,  $f(x) = f^*(x)$ , qual restrição é imposta aos coeficientes  $c_n$ ?

- 14.1.4** Admitindo que  $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$  é finita, mostre que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0.$$

*Sugestão:* Integre  $[f(x) - s_n(x)]^2$ , em que  $s_n(x)$  é a  $n$ ésima soma parcial e use a desigualdade de Bessel, Seção 10.4. Para nosso intervalo finito a suposição de que  $f(x)$  é de quadrado integrável ( $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$  é finita) implica que  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$  também é finita. O contrário não é verdadeiro.

- 14.1.5** Aplique a técnica do somatório desta seção para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sen nx}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x \leq \pi \\ -\frac{1}{2}(\pi + x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

(Figura 14.2).

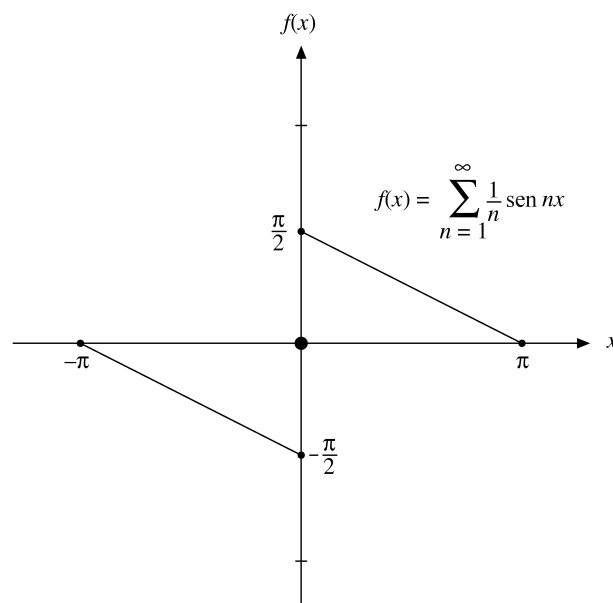


Figura 14.2: Onda em dente de serra inversa.

**14.1.6** Some a série trigonométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen } nx}{n}$$

e mostre que é igual a  $x/2$ .

**14.1.7** Some a série trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

e mostre que é igual a

$$\begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi \\ -\pi/4, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

**14.1.8** Calcule a soma da série de Fourier finita de seno para a onda em dente de serra,  $f(x) = x, (-\pi, \pi)$ , Equação (14.21). Use a série de termos 4, 6, 8 e 10 e  $x/\pi = 0,00(0,02)1,00$ . Se houver uma rotina de construção de gráficos disponível, construa um gráfico com seus resultados e compare com a Figura 14.1.

**14.1.9** Seja  $f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n/n$ . (Essa série converge para  $\ln(1+z)$  para  $|z| \leq 1$ , exceto no ponto  $z = -1$ .)

(a) Pela parte real, mostre que

$$\ln\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

(b) Usando uma troca de variável, transforme a parte (a) em

$$-\ln\left(2 \text{sen} \frac{\theta}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

## 14.2 Vantagens, Usos da Série de Fourier

### Funções Descontínuas

Uma das vantagens de uma representação de Fourier sobre alguma outra representação, tal como uma série de Taylor, é que ela pode representar uma função descontínua. Um exemplo é a onda em dente de serra da seção anterior. Outros exemplos são considerados na Seção 14.3 e nos exercícios.





### Funções Periódicas

Relacionada com essa vantagem está a utilidade de uma série de Fourier na representação de uma função periódica. Se  $f(x)$  tiver um período  $2\pi$ , talvez seja muito natural expandi-la em uma série de funções com período  $2\pi, 2\pi/2, 2\pi/3, \dots$ . Isso garante que, se nossa  $f(x)$  periódica é representada em um intervalo  $[0, 2\pi]$  ou  $[-\pi, \pi]$ , a representação vale para todo  $x$  finito.

Nesse ponto é conveniente considerar as propriedades de simetria. Usando o intervalo  $[-\pi, \pi]$ , sen  $x$  é ímpar e  $\cos x$  é uma função par de  $x$ . Daí, pelas Equações (14.2) e (14.3),<sup>4</sup> se  $f(x)$  for ímpar, todos os  $a_n = 0$  e se  $f(x)$  for par, todos os  $b_n = 0$ . Em outras palavras,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad f(x) \text{ par}, \quad (14.23)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad f(x) \text{ ímpar}, \quad (14.24)$$

Freqüentemente essas propriedades são úteis para expandir uma função dada.

Notamos que a série de Fourier é periódica. Isso é importante quando consideramos se a Equação (14.1) é válida fora do intervalo inicial. Suponha que temos apenas que

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < \pi \quad (14.25)$$

e que nos pedem para representar  $f(x)$  por uma expansão de série. Vamos considerar três entre o número infinito de expansões possíveis.

1. Se admitirmos uma expansão de Taylor, temos

$$f(x) = x, \quad (14.26)$$

uma série de um termo. Essa série (de um termo) é definida para todo  $x$  finito.

2. Usando a série de Fourier de co-senos (Equação (14.23)), e por isso admitindo que a função é representada fielmente no intervalo  $[0, \pi)$  e estendida aos intervalos vizinhos usando as propriedades de simetria conhecidas, prevemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= -x, & -\pi < x \leq 0, \\ f(x) &= 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi. \end{aligned} \quad (14.27)$$

3. Por fim, pela série de Fourier de senos (Equação (14.24)), temos

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & -\pi < x \leq 0, \\ f(x) &= x - 2\pi, & \pi < x < 2\pi. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Cada uma dessas três possibilidades — série de Taylor, série de Fourier de co-senos e série de Fourier de senos — é perfeitamente válida no intervalo original  $[0, \pi]$ . Fora dele, entretanto, o comportamento dessas séries é surpreendentemente diferente (compare com a Figura 14.3). Então, qual das três é correta? Essa pergunta não tem resposta, a menos que nos dêem mais informações sobre  $f(x)$ . Pode ser qualquer das três ou nenhuma delas. Nossas expansões de Fourier são válidas no intervalo básico. A menos que saibamos que a função  $f(x)$  é periódica com um período igual a nosso intervalo básico ou a  $(1/n)$  de nosso intervalo básico, não há nenhuma segurança de que a representação (Equação (14.1)) terá qualquer significado fora do intervalo básico.

Além das vantagens de representar funções descontínuas e periódicas, há uma terceira vantagem muito real na utilização de uma série de Fourier. Suponha que estejamos resolvendo a equação do movimento de uma partícula oscilatória sujeita a uma força de impulsão periódica. A expansão de Fourier da força de impulsão nos dá o termo fundamental e uma série de harmônicos. A EDO (linear) pode ser resolvida para cada um desses harmônicos individualmente, um processo que pode ser muito mais fácil do que lidar com a força impulsora original. Então, contanto que a EDO seja linear, todas as soluções podem ser somadas para obter a solução final.<sup>5</sup> Isso é mais do que apenas um estratagema matemático esperto.

- Corresponde a achar a resposta do sistema à freqüência fundamental e a cada uma das freqüências harmônicas.

<sup>4</sup>Com a faixa de integração  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

<sup>5</sup>Uma das características mais detestáveis das equações diferenciais não-lineares é que esse princípio da sobreposição não é válido.

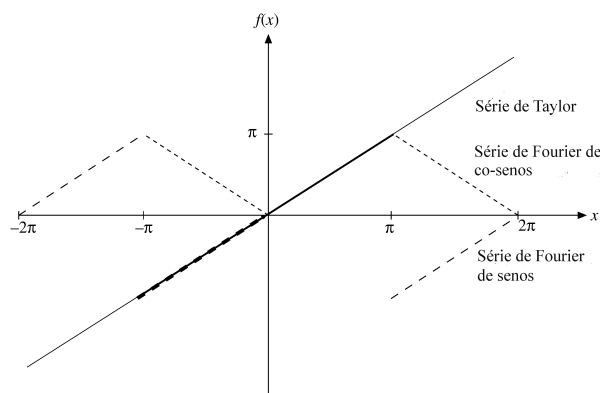


Figura 14.3: Comparação entre a série de Fourier de co-senos, a série de Fourier de senos e a série de Taylor.

Uma questão que às vezes surge é: “Os harmônicos estavam lá o tempo todo ou foram criados por nossa análise de Fourier?” Uma resposta compara a resolução funcional em harmônicos com a resolução de um vetor em componentes retangulares. As componentes podem até estar presentes, no sentido de que elas podem ser isoladas e observadas, mas a resolução certamente não é única. Daí, muitos autores preferem dizer que os harmônicos foram criados pela escolha que fizemos da expansão. Outras expansões em outros conjuntos de funções ortogonais dariam resultados diferentes. Para uma discussão mais detalhada, referimo-nos a uma série de notas e cartas no *American Journal of Physics*.<sup>6</sup>

### Mudança de Intervalo

Até aqui nossa atenção ficou restrita a um intervalo de comprimento  $2\pi$ . Essa restrição pode ser relaxada com facilidade. Se  $f(x)$  for periódica com um período  $2L$ , podemos escrever

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (14.29)$$

com

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (14.30)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14.31)$$

substituindo  $x$  na Equação (14.1) por  $\pi x/L$  e  $t$  nas Equações (14.2) e (14.3) por  $\pi t/L$ . (Por conveniência, o intervalo nas Equações (14.2) e (14.3) é deslocado para  $-\pi \leq t \leq \pi$ .) A escolha do intervalo simétrico  $(-L, L)$  **não** é essencial. Para  $f(x)$  periódica com um período de  $2L$ , qualquer intervalo  $(x_0, x_0 + 2L)$  servirá. A escolha é uma questão de conveniência ou, literalmente, de preferência pessoal.

### Exercícios

**14.2.1** As condições de contorno (tal como  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ) podem sugerir soluções da forma  $\text{sen}(n\pi x/l)$  e eliminar os co-senos correspondentes.

- (a) Verifique que as condições de contorno usadas na teoria de Sturm-Liouville são satisfeitas para o intervalo  $(0, l)$ . Note que isso é apenas metade do intervalo usual de Fourier.
- (b) Mostre que o conjunto de funções  $\varphi_n(x) = \text{sen}(n\pi x/l)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , satisfaz uma relação de ortogonalidade

$$\int_0^l \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad n > 0.$$

**14.2.2** (a) Expanda  $f(x) = x$  no intervalo  $(0, 2L)$ . Rascunhe a série que encontrou (lado direito da resposta) em  $(-2L, 2L)$ .

<sup>6</sup>B. L. Robinson, Concerning frequencies resulting from distortion. *Am. J. Phys.* 21: 391 (1953); F. W. Van Name, Jr., Concerning frequencies resulting from distortion, *ibid.* 22: 94 (1954).



Resposta:  $x = L - \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

(b) Expanda  $f(x) = x$  como uma série de seno no **meio** intervalo  $(0, L)$ . Rascunhe a série que encontrou (lado direito da resposta) em  $(-2L, 2L)$ .

Resposta:  $x = \frac{4L}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$ .

**14.2.3** Em alguns problemas é conveniente aproximar  $\operatorname{sen} \pi x$  no intervalo  $[0, 1]$  por uma parábola em que  $ax(1-x)$ ,  $a$  é uma constante. Para ter uma idéia da precisão dessa aproximação, expanda  $4x(1-x)$  em uma série de Fourier de senos  $(-1 \leq x \leq 1)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x(1+x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x.$$

RESP.  $b_n = \frac{32}{\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3}, \quad n \text{ ímpar}$   
 $b_n = 0, \quad n \text{ par}.$

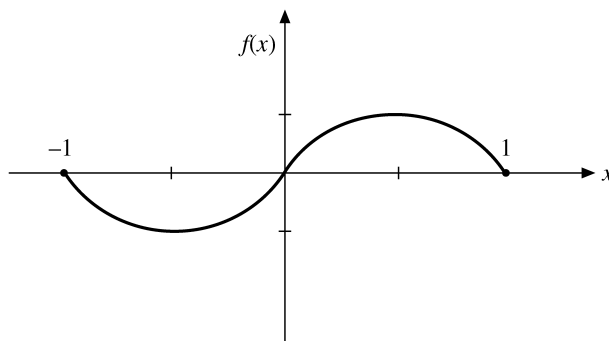


Figura 14.4: Onda senoidal parabólica.

### 14.3 Aplicações de Séries de Fourier

#### Exemplo 14.3.1 ONDA QUADRADA — ALTAS FREQUÊNCIAS

Uma aplicação da série de Fourier, a análise de uma onda “quadrada” (Figura 14.5) em termos de suas componentes de Fourier, ocorre em circuitos elétricos projetados para lidar com pulsos que sobem abruptamente. Suponha que nossa onda seja definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, & -\pi < x < 0, \\ f(x) &= h, & 0 < x < \pi. \end{aligned} \tag{14.32}$$

Pelas Equações (14.2) e (14.3), encontramos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h dt = h, \tag{14.33}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos nt dt = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{14.34}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \operatorname{sen} nt dt = \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi); \tag{14.35}$$

$$b_n = \frac{2h}{n\pi}, \quad n \text{ ímpar}, \tag{14.36}$$

$$b_n = 0, \quad n \text{ par}. \tag{14.37}$$

A série resultante é

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left( \frac{\text{sen } x}{1} + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \dots \right). \quad (14.38)$$

Exceto pelo primeiro termo, que representa uma média de  $f(x)$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , todos os termos de cosseno desapareceram. Uma vez que  $f(x) - h/2$  é ímpar, temos uma série de Fourier de senos. Embora ocorram somente os termos ímpares na série de senos, eles caem em  $n^{-1}$ . Essa **convergência condicional** é como a da série harmônica alternante. Em termos físicos, isso significa que nossa onda quadrada contém uma grande quantidade de **componentes de alta frequência**. Se o equipamento eletrônico não deixar passar essas componentes, nossa entrada de onda quadrada emergirá mais ou menos arredondada, talvez como uma bolha amorfa. ■

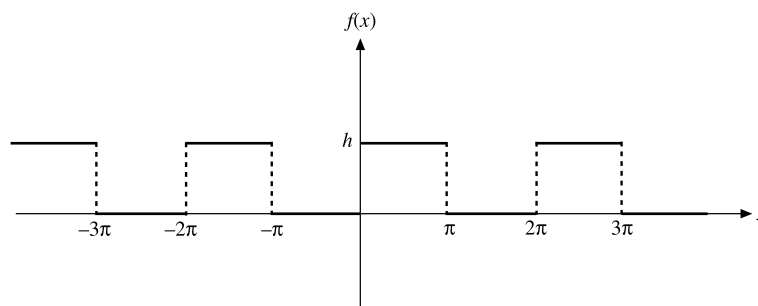


Figura 14.5: Onda quadrada.

### Exemplo 14.3.2 RETIFICADOR DE ONDA COMPLETA

Como segundo exemplo, vamos perguntar quão bem a saída de um retificador de onda completa se aproxima da corrente direta pura (Figura 14.6). Podemos imaginar que nosso retificador passou os picos positivos de uma onda senoidal de entrada e inverteu os picos negativos, o que resulta em

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{sen } \omega t, & 0 < \omega t < \pi, \\ f(t) &= -\text{sen } \omega t, & -\pi < \omega t < 0. \end{aligned} \quad (14.39)$$

Uma vez que  $f(t)$  definida aqui é par, não aparecerá nenhum termo da forma  $\text{sen } n\omega t$ . Mais uma vez, pelas Equações (14.2) e (14.3), temos

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \text{sen } \omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi}, \end{aligned} \quad (14.40)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \omega t \cos n\omega t d(\omega t) \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{2}{n^2 - 1}, & n \text{ par,} \\ &= 0, & n \text{ ímpar.} \end{aligned} \quad (14.41)$$

Note que  $[0, \pi]$  não é um intervalo de ortogonalidade para senos e co-senos juntos e não obtemos zero para  $n$  par. A série resultante é

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{n^2 - 1}. \quad (14.42)$$

A frequência original,  $\omega$ , foi eliminada. A oscilação de frequência mais baixa é  $2\omega$ . As componentes de alta frequência caem  $n^{-2}$ , mostrando que o retificador de onda completa faz um bom trabalho na aproximação da corrente direta. Se essa boa aproximação é adequada depende da aplicação particular. Se houver alguma objeção

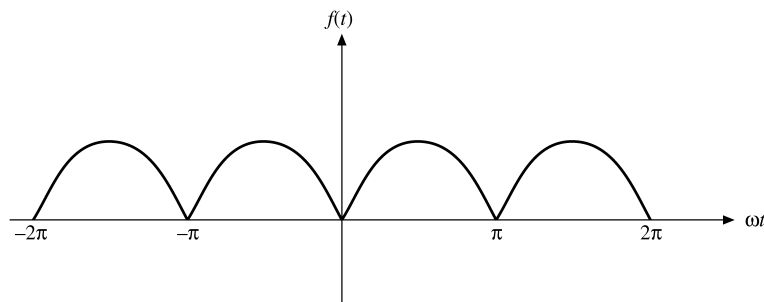


Figura 14.6: Retificador de onda completa.

contra as componentes ac remanescentes, elas ainda podem ser suprimidas por circuitos de filtro apropriados. Esses dois exemplos demonstram duas características importantes das expansões de Fourier.<sup>7</sup>

- Se  $f(x)$  tiver descontinuidades (como na onda quadrada do Exemplo 14.3.1), podemos esperar que o  $n$ ésimo coeficiente seja decrescente como  $\mathcal{O}(1/n)$ . A convergência é apenas condicional.
- Se  $f(x)$  for contínua (embora possivelmente com derivadas descontínuas, como no retificador de onda completa do Exemplo 14.3.2), podemos esperar que o  $n$ ésimo coeficiente seja decrescente como  $1/n^2$ , isto é, convergência absoluta. ■

### Exemplo 14.3.3 SÉRIE INFINITA, FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

Como exemplo final, considere o problema de expandir  $x^2$ . Seja

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi. \tag{14.43}$$

Uma vez que  $f(x)$  é par, todos os  $b_n = 0$ . Para os  $a_n$ , temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \tag{14.44}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned} \tag{14.45}$$

Disso obtemos

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}. \tag{14.46}$$

Assim como está, a Equação (14.46) não tem particular importância. Mas, se fizermos  $x = \pi$ ,

$$\cos n\pi = (-1)^n \tag{14.47}$$

e a Equação (14.46) se torna<sup>8</sup>

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{14.48}$$

ou

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2), \tag{14.49}$$

<sup>7</sup>G. Raisenbeck, Order of magnitude of Fourier coefficients. *Am. Math. Mon.* 62: 149–155 (1955).

<sup>8</sup>Note que o ponto  $x = \pi$  não é um ponto de descontinuidade.

resultando assim na função zeta de Riemann,  $\zeta(2)$ , em forma fechada (de acordo com o resultado do número de Bernoulli da Seção 5.9). Inúmeras outras séries podem ser avaliadas por nossa expansão de  $x^2$  e por expansões de outras potências de  $x$ . Algumas são incluídas nessa lista de exercícios:

Série de Fourier	Referência
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen } nx = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x), & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	Exercício 14.1.5 Exercício 14.3.3
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{sen } nx = \frac{1}{2}x, \quad -\pi < x < \pi$	Exercício 14.1.6 Exercício 14.3.2
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \text{sen}(2n+1)x = \begin{cases} -\pi/4, & -\pi < x < 0 \\ +\pi/4, & 0 < x < \pi \end{cases}$	Exercício 14.1.7 Equação (14.38)
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left[ 2 \text{sen} \left( \frac{ x }{2} \right) \right], \quad -\pi < x < \pi$	Equação (14.11) Exercício 14.1.9(b)
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \cos nx = -\ln \left[ 2 \cos \left( \frac{x}{2} \right) \right], \quad -\pi < x < \pi$	Exercício 14.1.9(a)
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x = \frac{1}{2} \ln \left[ \cot \frac{ x }{2} \right], \quad -\pi < x < \pi$	

A série de Fourier da onda quadrada da Equação (14.38) e item 3 na tabela,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n+1)x}{2n+1} = (-1)^m \frac{\pi}{4}, \quad m\pi < x < (m+1)\pi, \tag{14.50}$$

pode ser usada para derivar a **equação funcional para a função zeta de Riemann**. Sua série definidora de Dirichlet pode ser escrita de várias formas:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-s} \\ &= 2^{-s} \zeta(s) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-s}, \end{aligned}$$

implicando que a função  $\lambda(s)$  definida na Seção 5.9 (juntamente com  $\eta(s)$ ) satisfaça

$$\lambda(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-s} = (1 - 2^{-s}) \zeta(s). \tag{14.51}$$

Aqui,  $s$  é uma variável complexa. Ambas as séries de Dirichlet convergem para  $\sigma = \Re s > 1$ . Alternativamente, usando a Equação (14.51), temos

$$\eta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s), \tag{14.52}$$

que já converge para  $\Re s > 0$  usando o critério de convergência de Leibniz (veja a Seção 5.3).

Uma outra abordagem para a série de Dirichlet parte da integral de Euler para a função gama,

$$\int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-ny} dy = n^{-s} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1} dy = n^{-s} \Gamma(s), \tag{14.53}$$

que pode ser somada usando a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} = \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} = \frac{1}{e^y - 1}$$

para dar a representação integral para a função zeta:

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{s-1}}{e^y - 1} dy = \zeta(s) \Gamma(s). \tag{14.54}$$



Se combinarmos as formas alternativas da Equação (14.53),

$$\int_0^\infty y^{s-1} e^{-iny} dy = n^{-s} \Gamma(s) e^{-i\pi s/2},$$

$$\int_0^\infty y^{s-1} e^{iny} dy = n^{-s} \Gamma(s) e^{i\pi s/2},$$

obtemos

$$\int_0^\infty y^{s-1} \text{sen}(ny) dy = n^{-s} \Gamma(s) \text{sen} \frac{\pi s}{2}. \quad (14.55)$$

Dividindo ambos os lados da Equação (14.55) por  $n$  e somando sobre todos os  $n$  ímpares, temos como resultado, para  $\sigma = \Re(s) > 0$ ,

$$\int_0^\infty g(y) y^{s-1} dy = (1 - 2^{-s-1}) \zeta(s+1) \Gamma(s) \text{sen} \frac{\pi s}{2}, \quad (14.56)$$

usando as Equações (14.50) e (14.51). Aqui, a permuta entre somatório e integração é justificada pela convergência uniforme. Essa relação está no coração da equação funcional. Se dividirmos a faixa de integração em intervalos  $m\pi < y < (m+1)\pi$  e substituirmos a Equação (14.50) na Equação (14.56), encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(y) y^{s-1} dy &= \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} y^{s-1} dy \\ &= \frac{\pi^{s+1}}{4s} \left\{ \sum_{m=1}^\infty (-1)^m [(m+1)^s - m^s] + 1 \right\} \\ &= \frac{\pi^{s+1}}{2s} (1 - 2^{s+1}) \zeta(-s), \end{aligned} \quad (14.57)$$

usando a Equação (14.52). Para  $\Re s < 1$ , a série na Equação (14.57) converge para uma função analítica. Comparando as Equações (14.56) e (14.57) para a área comum de convergência com funções analíticas,  $0 < \sigma = \Re s < 1$ , obtemos a **equação funcional**.

$$\frac{\pi^{s+1}}{2s} (1 - 2^{s+1}) \zeta(-s) = (1 - 2^{-s-1}) \zeta(s+1) \Gamma(s) \text{sen} \frac{\pi s}{2},$$

que pode ser reescrita como

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \zeta(s) \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}. \quad (14.58)$$

Essa equação funcional dá uma continuação analítica de  $\zeta(s)$  no semi-plano negativo de  $s$ . Para  $s \rightarrow 1$  o pólo de  $\zeta(s)$  e o zero de  $\cos(\pi s/2)$  se cancelam na Equação (14.58), portanto resulta em  $\zeta(0) = -1/2$ . Visto que  $\cos(\pi s/2) = 0$ , para  $s = 2m + 1 =$  inteiro ímpar, a Equação (14.58) dá  $\zeta(-2m) = 0$ , os zeros triviais da função zeta para  $m = 1, 2, \dots$ . Todos os outros zeros devem estar na “faixa crítica”  $0 < \sigma = \Re s < 1$ . Eles estão estreitamente relacionados com a distribuição de números primos porque o produto de números primos para  $\zeta(s)$  (veja a Seção 5.9) pode ser convertido em uma série de Dirichlet sobre potências de números primos para  $\zeta'/\zeta = d \ln \zeta(s)/ds$ . Desse ponto em diante apresentamos apenas idéias, mas sem provas. Usando a transformada inversa de Mellin (veja a Seção 16.2), temos como resultado a relação

$$\sum_{\substack{p^m < x, p=\text{primo} \\ m=1,2,\dots}} \ln p = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s ds, \quad (14.59)$$

para  $\sigma > 1$ , que é uma pedra angular da teoria analítica dos números. Uma vez que zeros de  $\zeta(s)$  se tornam simples pólos de  $\zeta'/\zeta$ , a distribuição assintótica de números primos está diretamente relacionada pela Equação (14.59) aos zeros da função zeta de Riemann. Riemann previu que todos os zeros se encontram sobre a reta  $\sigma = 1/2$ , isto é, eles têm a forma  $1/2 + it$  com  $t$  real. Se for assim, podemos deslocar a reta de integração para a esquerda para  $\sigma = 1/2 + \varepsilon$ , o pólo simples de  $\zeta(s)$  em  $s = 1$ , dando origem ao resíduo  $x$ , enquanto a integral ao longo da reta  $\sigma = 1/2 + \varepsilon$  é de ordem  $\mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon})$ . Por conseguinte, na estimativa assintótica

$$\sum_{p < x} \ln p \sim x + \mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon}), \quad x \rightarrow \infty$$

resultaria o resto arbitrariamente pequeno para  $\varepsilon$ , o que equivale à estimativa para o número de primos abaixo de  $x$ ,

$$\pi(x) = \sum_{p < x} 1 = \int_2^x (\ln t)^{-1} dt + \mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon}), \quad x \rightarrow \infty.$$

De fato, estudos numéricos mostraram que os primeiros  $300 \times 10^9$  zeros são simples e se encontram todos sobre a linha crítica  $\sigma = 1/2$ . Se o leitor quiser mais detalhes pode consultar o texto clássico de E. C. Titchmarsh e D. R. Heath-Brown, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford, UK: Clarendon Press (1986); H. M. Edwards, *Riemann’s Zeta Function*, Nova York: Academic Press (1974) e Dover (2003); J. Van de Lune, H. J. J. Te Riele, e D. T. Winter, On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV. *Math. Comput.* 47: 667 (1986). Relatos populares podem ser encontrados em M. du Sautoy, *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*, Nova York: Harper Collins (2003); J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*. Washington, DC: Joseph Henry Press (2003); K. Sabbagh, *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Nova York: Farrar, Straus e Giroux (2003).

Mais recentemente a estatística dos zeros  $\rho$  da função zeta de Riemann sobre a linha crítica desempenhou um papel proeminente no desenvolvimento de teorias do caos (damos uma introdução no Capítulo 18). Admitindo que haja um sistema quanto-mecânico cujas energias são as partes imaginárias dos  $\rho$ , então os números primos determinam as órbitas periódicas primitivas do sistema caótico classicamente associado. Para esse caso, a fórmula de traço de Gutzwiller, que relaciona níveis de energia quântica e órbitas periódicas clássicas desempenha um papel central e pode ser mais bem entendida usando propriedades da função zeta e primos. Se o leitor quiser mais detalhes, consulte as Seções 12.6 e 12.7 em J. Keating, *The Nature of Chaos* (T. Mullin, Ed.), Oxford, UK: Clarendon Press (1993), e as referências ali encontradas. ■

## Exercícios

**14.3.1** Desenvolva a representação de série de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq \omega t \leq 0, \\ \text{sen } \omega t, & 0 \leq \omega t \leq \pi. \end{cases}$$

Essa é a saída de um retificador simples de meia-onda. Também é uma aproximação do efeito térmico solar que produz “marés” na atmosfera.

$$\text{Resposta: } f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \text{sen } \omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{n^2 - 1}.$$

**14.3.2** Uma onda em dente de serra é dada por

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Mostre que

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen } nx.$$

**14.3.3** Uma diferente onda em dente de serra é descrita por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x), & -\pi \leq x < 0 \\ +\frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Mostre que  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen } nx/n)$ .

**14.3.4** Uma onda triangular (Figura 14.7) é representada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ -x, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Represente  $f(x)$  por uma série de Fourier.

$$\text{Resposta: } f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos nx}{n^2}.$$



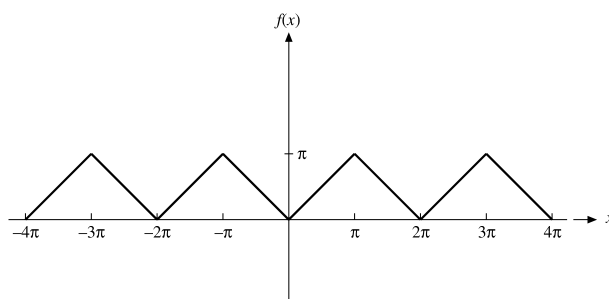


Figura 14.7: Onda triangular.

14.3.5 Expanda

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x^2 < x_0^2 \\ 0, & x^2 > x_0^2 \end{cases}$$

no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

*Nota:* Essa onda quadrada de largura variável tem uma certa importância para a música eletrônica.

- 14.3.6 Um tubo cilíndrico de metal de raio  $a$  é dividido no sentido do comprimento em duas metades que não se tocam. A metade superior é mantida em um potencial  $+V$ , a parte inferior, em um potencial  $-V$  (Figura 14.8). Separe as variáveis em equação de Laplace e resolva para o potencial eletrostático para  $r \leq a$ . Observe a semelhança entre sua solução para  $r = a$  e a série de Fourier para uma onda quadrada.

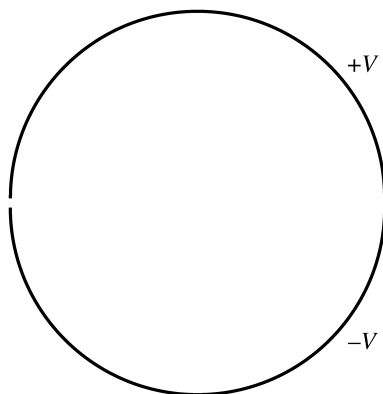


Figura 14.8: Seção transversal de tubo dividido.

- 14.3.7 Um cilindro de metal é colocado em um campo elétrico (previamente) uniforme,  $E_0$ , com o eixo do cilindro perpendicular ao do campo original.
- Ache o potencial eletrostático perturbado.
  - Ache a carga superficial induzida no cilindro como uma função de posição angular.
- 14.3.8 Transforme a expansão de Fourier de uma onda quadrada, Equação (14.38), em uma série de potências. Mostre que os coeficientes de  $x^1$  formam uma série **divergente**. Repita para os coeficientes de  $x^3$ .
- Uma série de potências não pode manipular uma descontinuidade. Esses coeficientes infinitos são o resultado de tentar vencer essa limitação básica das séries de potências.

**14.3.9** (a) Mostre que a expansão de Fourier de  $\cos ax$  é

$$\cos ax = \frac{2a \operatorname{sen} a\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2 - 2^2} - \dots \right\},$$

$$a_n = (-1)^n \frac{2a \operatorname{sen} a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}.$$

(b) Pelo resultado precedente, mostre que

$$a\pi \cot ga\pi = 1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \zeta(2p) a^{2p}.$$

Essa expressão dá uma derivação alternativa da relação entre a função zeta de Riemann e os números de Bernoulli, Equação (5.152).

**14.3.10** Derive a expansão de série de Fourier da função delta de Dirac  $\delta(x)$  no intervalo  $-\pi < x < \pi$ .

- (a) Que significância pode ser atribuída ao termo constante?
- (b) Em que região essa representação é válida?
- (c) Com a identidade

$$\sum_{n=1}^N \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(Nx/2)}{\operatorname{sen}(x/2)} \cos \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{2} \right],$$

mostre que sua representação de Fourier de  $\delta(x)$  é consistente com a Equação (1.190).

**14.3.11** Expanda  $\delta(x - t)$  em uma série de Fourier. Compare seu resultado com a forma bilinear da Equação (1.190).

$$\begin{aligned} \text{Resposta : } \delta(x - t) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx \cos nt + \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nt) \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - t). \end{aligned}$$

**14.3.12** Verifique que

$$\delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

é uma função delta de Dirac mostrando que ela satisfaz a definição de uma função delta de Dirac:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi_1) \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} d\varphi_1 = f(\varphi_2).$$

*Sugestão:* Represente  $f(\varphi_1)$  por uma série exponencial de Fourier.

*Nota:* O contínuo análogo dessa expressão é desenvolvido na Seção 15.2. A aplicação mais importante dessa expressão é na determinação de funções de Green, Seção 9.7.

**14.3.13** (a) Usando

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi,$$

mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} = \eta(2).$$

(b) Usando a série de Fourier para uma onda triangular desenvolvida no Exercício 14.3.4, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = \lambda(2).$$



(c) Usando

$$f(x) = x^4, \quad -\pi < x < \pi,$$

mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = \zeta(4), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} = \eta(4).$$

(d) Usando

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi, \\ x(\pi + x), & \pi < x < 0, \end{cases}$$

derive

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3}$$

e mostre que

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} = \beta(3).$$

(e) Usando a série de Fourier para uma onda quadrada, mostre que

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} = \beta(1).$$

Essa é a fórmula de Leibniz para  $\pi$ , obtida por uma técnica diferente no Exercício 5.7.6.

Nota: As funções  $\eta(2)$ ,  $\eta(4)$ ,  $\lambda(2)$ ,  $\beta(1)$  e  $\beta(3)$  são definidas pela série indicada. Definições gerais aparecem na Seção 5.9.

**14.3.14** (a) Ache a representação de série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(b) Pela expansão de Fourier, mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

**14.3.15** Um pulso triangular simétrico de altura e largura ajustáveis é descrito por

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x/b), & 0 \leq |x| \leq b \\ 0, & b \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Mostre que os coeficientes de Fourier são

$$a_0 = \frac{ab}{\pi}, \quad a_n = \frac{2ab}{\pi(nb)^2} (1 - \cos nb).$$

Some a série finita de Fourier até  $n = 10$  e até  $n = 100$  para  $x/\pi = 0(1/9)1$ . Considere  $a = 1$  e  $b = \pi/2$ .

(b) Chame uma sub-rotina de análise de Fourier (se disponível) para calcular os coeficientes de Fourier de  $f(x)$ ,  $a_0$  até  $a_{10}$ .

**14.3.16** (a) Usando uma sub-rotina de análise de Fourier, calcule os coeficientes de co-senos de Fourier de  $a_0$  até  $a_{10}$  de

$$f(x) = \left[ 1 - \left( \frac{x}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

(b) Faça um teste localizado calculando alguns dos coeficientes precedentes por quadratura numérica direta.

**Valores de verificação.**  $a_0 = 0,785$ ,  $a_2 = 0,284$ .

**14.3.17** Usando uma sub-rotina de análise de Fourier, calcule os coeficientes de Fourier até  $a_{10}$  e  $b_{10}$  para

(a) um retificador de onda completa, Exemplo 14.3.2,

(b) um retificador de meia-onda, Exercício 14.3.1. Verifique seus resultados comparando-os com as formas analíticas dadas (Equação (14.41) e Exercício 14.3.1).

## 14.4 Propriedades da Série de Fourier

### Convergência

Em primeiro lugar, é preciso observar que não devemos esperar que nossa série de Fourier seja uniformemente convergente se ela representar uma função descontínua. Uma série uniformemente convergente de funções contínuas ( $\sin nx, \cos nx$ ) sempre resulta em uma função contínua (compare com a Seção 5.5). Contudo, se

- (a)  $f(x)$  for contínua,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,
- (b)  $f(-\pi) = f(+\pi)$  e
- (c)  $f'(x)$  for contínua por seções,

a série de Fourier para  $f(x)$  convergirá uniformemente. Essas restrições não exigem que  $f(x)$  seja periódica, mas serão satisfeitas por funções contínuas, diferenciáveis, periódicas (período de  $2\pi$ ). Se o leitor quiser uma prova, pode consultar a literatura.<sup>9</sup> Com ou sem uma descontinuidade em  $f(x)$ , a série de Fourier dará convergência na média, Seção 10.4.

### Integração

Integração termo a termo da série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad (14.60)$$

resulta em

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \frac{a_0 x}{2} \Big|_{x_0}^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_{x_0}^x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx \Big|_{x_0}^x. \quad (14.61)$$

Está claro que o efeito da integração é colocar uma potência adicional de  $n$  no denominador de cada coeficiente, o que resulta em convergência mais rápida do que antes. Por conseqüência, uma série de Fourier convergente sempre pode ser integrada termo a termo, a série resultante convergindo uniformemente à integral da função original. Na verdade, a integração termo a termo pode ser válida mesmo se a própria série original (Equação (14.60)) não for convergente. A função  $f(x)$  precisa apenas ser integrável. Encontramos uma descrição disso em Jeffreys e Jeffreys, Seção 14.06 (veja as Leituras Adicionais).

Em termos estritos, a Equação (14.61) pode não ser uma série de Fourier; isto é, se  $a_0 \neq 0$ , haverá um termo  $\frac{1}{2}a_0x$ . Contudo,

$$\int_{x_0}^x f(x) dx - \frac{1}{2}a_0x \quad (14.62)$$

ainda será uma série de Fourier.

### Diferenciação

A situação da diferenciação é bem diferente da situação da integração. Nesse caso, recomenda-se cautela. Considere a série para

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi. \quad (14.63)$$

Constatamos imediatamente (compare com o Exercício 14.3.2) que a série de Fourier é

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (14.64)$$

Diferenciando termo a termo, obtemos

$$1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx, \quad (14.65)$$

que é não é convergente. **Atenção:** verifique a convergência de sua derivada.

Para uma onda triangular (Exercício 14.3.4), na qual a convergência é mais rápida (e uniforme),

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1, \text{ímpar}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad (14.66)$$

<sup>9</sup>Veja, por exemplo, R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5ª ed., Nova York: McGraw-Hill (1993), Seção 38.



Diferenciando termo a termo, obtemos

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1, \text{ímpar}}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n}, \tag{14.67}$$

que é a expansão de Fourier de uma onda quadrada,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases} \tag{14.68}$$

A inspeção da Figura 14.7 verifica que essa é, de fato, a derivada de nossa onda triangular.

- Por ser o inverso da integração, a operação de diferenciação colocou um fator adicional  $n$  no numerador de cada termo. Isso reduz a taxa de convergência e pode, como no primeiro caso mencionado, converter a série diferenciada em divergente.
- Em geral, diferenciação termo a termo é permissível sob as mesmas condições que relacionamos para a convergência uniforme.

### Exercícios

**14.4.1** Mostre que integração da expansão de Fourier de  $f(x) = x$ ,  $-\pi < x < \pi$  leva a

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

**14.4.2** Identidade de Parseval.

(a) Admitindo que a expansão de Fourier de  $f(x)$  é uniformemente convergente, mostre que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Essa é a identidade de Parseval. Na verdade, é um caso especial da relação de completude, Equação (10.73).

(b) Dado

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

aplique a identidade de Parseval para obter  $\zeta(4)$  em forma fechada.

(c) A condição de convergência uniforme não é necessária. Mostre isso aplicando a identidade de Parseval à onda quadrada.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)x}{2n-1}. \end{aligned}$$

**14.4.3** Mostre que integrar a expansão de Fourier da função delta de Dirac (Exercício 14.3.10) leva à representação de Fourier da onda quadrada, Equação (14.38), com  $h = 1$ .

*Nota:* Integrar o termo constante  $(1/2\pi)$  leva a um termo  $x/2\pi$ . E daí?

**14.4.4** Integre a expansão de Fourier da função degrau unitária

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Mostre que sua série integrada está de acordo com o Exercício 14.3.14.

**14.4.5** No intervalo  $(-\pi, \pi)$ ,

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & \text{para } |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & \text{para } |x| > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

(Figura 14.9).

- (a) Expanda  $\delta_n(x)$  como uma série de Fourier de co-senos.
- (b) Mostre que sua série de Fourier está de acordo com a expansão de Fourier de  $\delta(x)$  no limite quando  $n \rightarrow \infty$ .

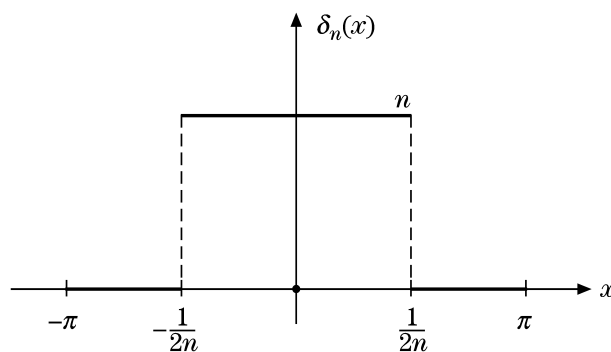


Figura 14.9: Pulso retangular.

- 14.4.6** Confirme a natureza de função delta de sua série de Fourier do Exercício 14.4.4, mostrando que, para qualquer  $f(x)$  que é finita no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e contínua em  $x = 0$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\text{Expansão de Fourier de } \delta_{\infty}(x)] dx = f(0).$$

- 14.4.7** (a) Mostre que a função delta de Dirac  $\delta(x - a)$ , expandida em uma série de Fourier de senos no meio-intervalo  $(0, L)$  ( $0 < a < L$ ), é dada por

$$\delta(x - a) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Note que essa série na verdade descreve

$$-\delta(x + a) + \delta(x - a) \quad \text{no intervalo} \quad (-L, L).$$

- (b) Integrando ambos os lados da equação precedente de 0 a  $x$ , mostre que a expansão de co-seno da onda quadrada

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ 1, & a < x < L, \end{cases}$$

é

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

para  $0 \leq x < L$ .

- (c) Verifique que o termo

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

é  $\langle f(x) \rangle$ .

- 14.4.8** Verifique a expansão de Fourier de co-seno da onda quadrada, Exercício 14.4.7(b), por cálculo direto dos coeficientes de Fourier.

- 14.4.9** (a) Uma corda está presa em ambas as extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ . Admitindo vibrações de pequena amplitude, constatamos que a amplitude  $y(x, t)$  satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$



Aqui,  $v$  é a velocidade da onda. A corda entra em vibração por um golpe seco em  $x = a$ . Por conseguinte, temos

$$y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = Lv_0 \delta(x - a) \quad \text{em } t = 0.$$

A constante  $L$  é incluída para compensar as dimensões (comprimento inverso) de  $\delta(x - a)$ . Com  $\delta(x - a)$  dada pelo Exercício 14.4.7(a), resolva a equação de onda sujeita a essas condições iniciais.

$$\text{Resposta: } y(x, t) = \frac{2v_0 L}{\pi v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen} \frac{n\pi a}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi vt}{L}.$$

(b) Mostre que a velocidade transversal da corda é dada por  $\partial y(x, t)/\partial t$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = 2v_0 \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi a}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi vt}{L}.$$

**14.4.10** Uma corda presa em  $x = 0$  e em  $x = 1$  está vibrando livremente. Seu movimento é descrito pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Admita uma expansão de Fourier da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

e determine os coeficientes  $b_n(t)$ . As condições iniciais são

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x).$$

*Nota:* Isso é apenas metade do intervalo integral de ortogonalidade convencional de Fourier. Todavia, contanto que somente os senos sejam incluídos aqui, as condições de fronteira de Sturm-Liouville ainda são satisfeitas e as funções são ortogonais.

$$\text{RESP. } b_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi vt}{l} + B_n \text{sen} \frac{n\pi vt}{l},$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx.$$

**14.4.11** (a) Vamos continuar com o problema da corda vibrante do Exercício 14.4.10. A presença de um meio resistente atenuará as vibrações segundo a equação

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Admita uma expansão de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

e novamente determine os coeficientes  $b_n(t)$ . Considere que as condições iniciais e de contorno são as mesmas do Exercício 14.4.10. Admita que a atenuação é pequena.

(b) Repita, mas agora admitindo que a atenuação é grande.

$$\text{Resposta : (a) } b_n(t) = e^{-kt/2} \{A_n \cos \omega_n t + B_n \text{sen} \omega_n t\},$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{k}{2\omega_n} A_n,$$

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 > 0.$$

$$(b) b_n(t) = e^{-kt/2} \{A_n \cos h\sigma_n t + B_n \text{sen } h\sigma_n t\},$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\sigma_n l} \int_0^l g(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{k}{2\sigma_n} A_n,$$

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 > 0.$$

- 14.4.12** Ache a distribuição de carga sobre as superfícies interiores dos semicírculos do Exercício 14.3.6. *Nota:* Você obtém uma série divergente e essa abordagem de Fourier falha. Usando técnicas de mapeamento conformal, podemos mostrar que a densidade de carga é proporcional a  $\text{csc } \theta$ . Essa  $\text{csc } \theta$  tem uma expansão de Fourier?

- 14.4.13** Dada

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x), & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

mostre, por integração, que

$$\varphi_2(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\pi + x)^2 - \frac{\pi^2}{12}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{4}(\pi - x)^2 - \frac{\pi^2}{12}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- 14.4.14** Dadas

$$\psi_{2s}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^{2s}}, \quad \psi_{2s+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{2s+1}},$$

desenvolva as seguintes relações de recorrência:

$$(a) \psi_{2s}(x) = \int_0^x \psi_{2s-1}(x) dx$$

$$(b) \psi_{2s+1}(x) = \zeta(2s+1) - \int_0^x \psi_{2s}(x) dx.$$

*Nota:* As funções  $\psi_s(x)$  e a função  $\varphi_s(x)$  dos dois exercícios precedentes são conhecidas como **funções de Clausen**. Em teoria elas podem ser usadas para melhorar a taxa de convergência de uma série de Fourier. Assim como na série do Capítulo 5, há sempre a questão da quantidade de trabalho analítico que queremos fazer e da quantidade de trabalho aritmético que queremos que o computador faça. À medida que os computadores ficam cada vez mais poderosos, o equilíbrio também está mudando progressivamente; nós estamos trabalhando menos, e os computadores, mais.

- 14.4.15** Mostre que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n+1}$$

pode ser escrita como

$$f(x) = \psi_1(x) - \varphi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(n+1)}.$$

*Nota:*  $\psi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$  são definidas nos exercícios precedentes.

## 14.5 Fenômeno de Gibbs

O fenômeno de Gibbs é um aumento excessivo momentâneo (*overshoot*), uma peculiaridade da série de Fourier e de outras séries de autofunção em uma descontinuidade simples. A Figura 14.1 mostra um exemplo.





### Somatório de Série

Na Seção 14.1 apresentamos um gráfico da soma dos primeiros termos da série de Fourier para uma onda em dente de serra (Figura 14.10). Agora, desenvolvemos métodos analíticos para fazer o somatório dos primeiros  $r$  termos de nossa série de Fourier.

Pela Equação (14.19),

$$a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-x) dt. \quad (14.69)$$

Então, a  $r$ -ésima soma parcial se torna<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} s_r(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^r (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx) \\ &= \Re \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^r e^{-i(t-x)n} \right] dt. \end{aligned} \quad (14.70)$$

Fazendo o somatório da série finita de exponenciais (progressão geométrica)<sup>11</sup> obtemos

$$s_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{sen}[(r + \frac{1}{2})(t-x)]}{\text{sen}\frac{1}{2}(t-x)} dt. \quad (14.71)$$

Essa série é convergente em todos os pontos, incluindo  $t = x$ . O fator

$$\frac{\text{sen}[(r + \frac{1}{2})(t-x)]}{2\pi \text{sen}\frac{1}{2}(t-x)}$$

é o núcleo de Dirichlet mencionado na Seção 1.15 como uma distribuição delta de Dirac.

### Onda Quadrada

Por conveniência de cálculo numérico, consideramos o comportamento da série de Fourier que representa a onda quadrada periódica

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{h}{2}, & -\pi < x < 0. \end{cases} \quad (14.72)$$

Essa é, em essência, a onda quadrada usada na Seção 14.3, e vemos imediatamente que a solução é

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} \left( \frac{\text{sen } x}{1} + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \dots \right). \quad (14.73)$$

Aplicando a Equação (14.71) à nossa onda quadrada (Equação (14.72)), temos a soma dos primeiros  $r$  termos (mais  $\frac{1}{2}a_0$ , que aqui é zero):

$$\begin{aligned} s_r(x) &= \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}[(r + \frac{1}{2})(t-x)]}{\text{sen}\frac{1}{2}(t-x)} dt - \frac{h}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\text{sen}[(r + \frac{1}{2})(t-x)]}{\text{sen}\frac{1}{2}(t-x)} dt \\ &= \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}[(r + \frac{1}{2})(t-x)]}{\text{sen}\frac{1}{2}(t-x)} dt - \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}[(r + \frac{1}{2})(t+x)]}{\text{sen}\frac{1}{2}(t+x)} dt. \end{aligned} \quad (14.74)$$

Esse último resultado se origina da transformação

$$\vec{t} - t$$

na segunda integral. Substituindo  $t - x$  no primeiro termo por  $s$  e  $t + x$  no segundo termo por  $s$ , obtemos

$$s_r(x) = \frac{h}{4\pi} \int_{-x}^{\pi-x} \frac{\text{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\text{sen}\frac{1}{2}s} ds - \frac{h}{4\pi} \int_x^{\pi+x} \frac{\text{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\text{sen}\frac{1}{2}s} ds. \quad (14.75)$$

<sup>10</sup>Há um certo interesse em observar que essa série também ocorre na análise da rede de difração ( $r$  fendas).

<sup>11</sup>Compare com o Exercício 6.1.7 com valor inicial  $n = 1$ .

Os intervalos de integração são mostrados na Figura 14.10 (parte superior). Como os integrandos têm a mesma forma matemática, as integrais de  $x$  to  $\pi - x$  são canceladas, deixando as faixas de integrais mostradas na parte inferior da Figura 14.10:

$$s_r(x) = \frac{h}{4\pi} \int_{-x}^x \frac{\text{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\text{sen}\frac{1}{2}s} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\text{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\text{sen}\frac{1}{2}s} ds. \quad (14.76)$$

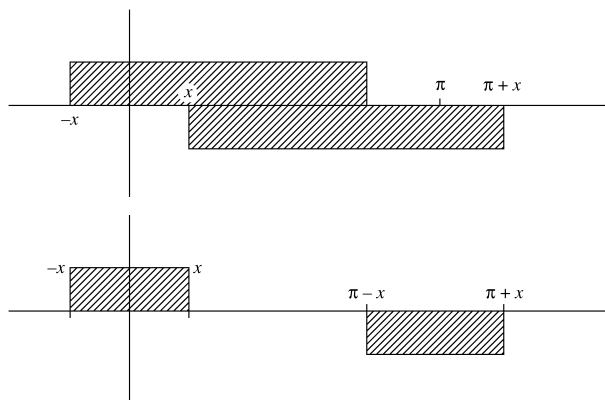


Figura 14.10: Intervalos de integração, Equação (14.75).

Considere a soma parcial na vizinhança da descontinuidade em  $x = 0$ . À medida que  $x \rightarrow 0$ , a segunda integral se torna desprezível e associamos a primeira integral com a descontinuidade em  $x = 0$ . Usando  $r + \frac{1}{2} = p$  e  $ps = \xi$ , obtemos

$$s_r(x) = \frac{h}{2\pi} \int_0^{px} \frac{\text{sen } \xi}{\text{sen}(\xi/2p)} \frac{d\xi}{p}. \quad (14.77)$$

### Cálculo de *Overshoot*

Nossa soma parcial  $s_r(x)$  começa em zero quando  $x = 0$  (de acordo com a Equação (14.22)) e aumenta até  $\xi = ps = \pi$ , ponto em que o numerador,  $\text{sen}\xi$ , fica negativo. Para  $r$  grande e, portanto, para  $p$  grande, nosso denominador permanece positivo. Obtemos o valor máximo da soma parcial tomando o limite superior  $px = \pi$ . É exatamente aqui que vemos que  $x$ , a localização do máximo *overshoot*, é inversamente proporcional ao número de termos considerados:

$$x = \frac{\pi}{p} \approx \frac{\pi}{r}.$$

Portanto, o valor máximo da soma parcial é

$$s_r(x)_{\text{máx}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \xi d\xi}{\text{sen}(\xi/2p)p} \approx \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \xi}{\xi} d\xi. \quad (14.78)$$

Em termos da integral de seno,  $\text{si}(x)$  da Seção 8.5,

$$\int_0^\pi \frac{\text{sen } \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2} + \text{si}(\pi). \quad (14.79)$$

A integral é claramente maior do que  $\pi/2$ , uma vez que ela pode ser escrita como

$$\left( \int_0^\infty - \int_\pi^{3\pi} - \int_{3\pi}^{5\pi} - \dots \right) \frac{\text{sen } \xi}{\xi} d\xi = \int_0^\pi \frac{\text{sen } \xi}{\xi} d\xi. \quad (14.80)$$

Vimos no Exemplo 7.1.4 que a integral de  $0$  a  $\infty$  é  $\pi/2$ . Estamos subtraindo uma série de termos negativos dessa integral. Uma quadratura de Gauss ou uma expansão de série de potências e integração termo a termo resulta em

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \xi}{\xi} d\xi = 1,1789797\dots, \quad (14.81)$$

o que significa que a série Fourier tende a apresentar um *overshoot* no canto positivo de cerca de 18% e um *overshoot* no canto negativo da mesma grandeza, como sugerido na Figura 14.11. A inclusão de mais termos

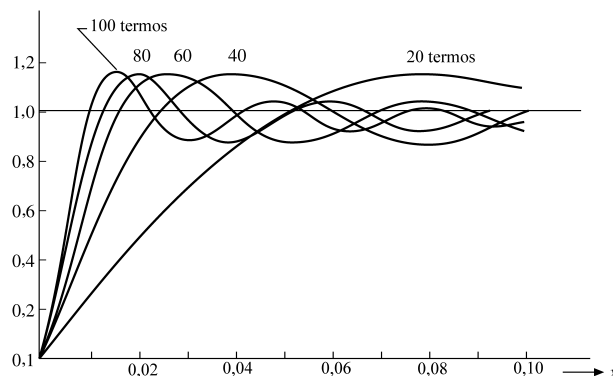


Figura 14.11: Onda quadrada — fenômeno de Gibbs.

(aumentando  $r$ ) nada faz para remover esse *overshoot*, mas limita-se a deslocá-lo para mais perto do ponto de descontinuidade. O *overshoot* é o fenômeno de Gibbs e por causa dele não se pode confiar na representação de série de Fourier para trabalho numérico de precisão, em especial na vizinhança de uma descontinuidade.

O fenômeno de Gibbs não está limitado à série de Fourier. Ocorre também com outras expansões de autofunção. O Exercício 12.3.27 é um exemplo do fenômeno de Gibbs para uma série de Legendre. Para mais detalhes, veja *Am. J. Phys.* 60: 425 (1992).

### Exercícios

- 14.5.1** Com as técnicas de somatório de soma parcial desta seção, mostre que em uma descontinuidade em  $f(x)$  a série de Fourier para  $f(x)$  assume a média aritmética dos limites da direita e da esquerda:

$$f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

Ao avaliar  $\lim_{r \rightarrow \infty} s_r(x_0)$ , talvez seja conveniente você identificar parte do integrando como uma função delta de Dirac.

- 14.5.2** Determine a soma parcial,  $s_n$ , da série na Equação (14.73) usando

$$(a) \frac{\text{sen } mx}{m} = \int_0^x \cos my \, dy, \quad (b) \sum_{p=1}^n \cos(2p-1)y = \frac{\text{sen } 2ny}{2\text{sen } y}.$$

Você concorda com o resultado dado na Equação (14.79)?

- 14.5.3** Avalie a série de função de degrau finita, Equação (14.73),  $h = 2$ , usando 100, 200, 300, 400 e 500 termos para  $x = 0, 0000(0, 0005)0, 0200$ . Rascunhe seus resultados (cinco curvas) ou, se dispuser de uma rotina de montagem de gráficos, construa um gráfico com seus resultados.

- 14.5.4** (a) Calcule o valor da integral do fenômeno de Gibbs

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

por quadratura numérica com precisão de 12 algarismos significativos.

- (b) Verifique seu resultado (1) expandindo o integrando como uma série, (2) integrando termo a termo e (3) avaliando a série integrada. Essa tarefa demanda cálculo de dupla precisão.

Resposta:  $I = 1, 178979744472$ .

## 14.6 Transformada Discreta de Fourier

Para muitos físicos, a transformada de Fourier é automaticamente a transformada contínua de Fourier do Capítulo 15. Contudo, a utilização de computadores digitais necessariamente substitui um contínuo de valores por um conjunto discreto; uma integração é substituída por um somatório. A transformada contínua de Fourier se torna a transformada discreta de Fourier e um tópico adequado para este capítulo.

### Ortogonalidade em Pontos Discretos

A ortogonalidade das funções trigonométricas e das exponenciais imaginárias é expressa nas Equações (14.15) a (14.18). Essa é a ortogonalidade usual para funções: **integração** de um produto de funções no intervalo de ortogonalidade. Os senos, co-senos e exponenciais imaginárias têm a notável propriedade de também serem ortogonais sobre uma série de pontos discretos a espaços iguais sobre o período (o intervalo de ortogonalidade).

Considere um conjunto de  $2N$  valores de tempo

$$t_k = 0, \frac{T}{2N}, \frac{2T}{2N}, \dots, \frac{(2N-1)T}{2N} \tag{14.82}$$

para o intervalo de tempo  $(0, T)$ . Então,

$$t_k = \frac{kT}{2N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1. \tag{14.83}$$

Provaremos que as funções exponenciais  $\exp(2\pi i p t_k / T)$  e  $\exp(2\pi i q t_k / T)$  satisfazem uma relação de ortogonalidade sobre os pontos discretos  $t_k$ :

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[ \exp\left(\frac{2\pi i p t_k}{T}\right) \right]^* \exp\left(\frac{2\pi i q t_k}{T}\right) = 2N \delta_{p, q \pm 2nN}. \tag{14.84}$$

Aqui,  $n, p$  e  $q$  são todos inteiros.

Substituindo  $q - p$  por  $s$ , constatamos que o lado esquerdo da Equação (14.84) se torna

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \exp\left(\frac{2\pi i s t_k}{T}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} \exp\left(\frac{2\pi i s k}{2N}\right).$$

Constatamos que o lado esquerdo da Equação (14.83) se torna  $T$ . Essa é uma série geométrica finita com um termo inicial 1 e uma razão

$$r = \exp\left(\frac{\pi i s}{N}\right).$$

Pela Equação (5.3),

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \exp\left(\frac{2\pi i s t_k}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1 - r^{2N}}{1 - r} = 0, & r \neq 1 \\ 2N, & r = 1, \end{cases} \tag{14.85}$$

estabelecendo a Equação (14.84), nossa relação de ortogonalidade básica. O valor superior, zero, é uma consequência de

$$r^{2N} = \exp(2\pi i s) = 1,$$

para  $s$  inteiro. O valor mais baixo,  $2N$ , para  $r = 1$  corresponde a  $p = q$ . Deixamos a ortogonalidade das funções trigonométricas correspondentes para o Exercício 14.6.1.

### Transformada Discreta de Fourier

Para simplificar a notação e fazer contato mais direto com a física, introduzimos o espaço  $\omega$  (recíproco), ou frequência angular, com

$$\omega_p = \frac{2\pi p}{T}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1. \tag{14.86}$$

Fazemos  $p$  se estender sobre os mesmos inteiros que  $k$ . A exponencial  $\exp(\pm 2\pi i p t_k / T)$  da Equação (14.84) se torna  $\exp(\pm i \omega_p t_k)$ . A opção de usar o sinal  $+$  ou o sinal  $-$  é uma questão de conveniência ou convenção. Em Mecânica Quântica escolhe-se o sinal negativo quando se estiver expressando a dependência temporal.

Considere uma função de tempo definida (medida) nos valores discretos de tempo  $t_k$ . Então, construímos

$$F(\omega_p) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{i \omega_p t_k}. \tag{14.87}$$



Empregando a relação de ortogonalidade, obtemos

$$\frac{1}{2N} \sum_{p=0}^{2N-1} (e^{i\omega_p t_m})^* e^{i\omega_p t_k} = \delta_{mk}, \quad (14.88)$$

e então, substituindo o índice  $m$  por  $k$ , constatamos que as amplitudes  $f(t_k)$  se tornam

$$f(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p) e^{-i\omega_p t_k}. \quad (14.89)$$

A função de tempo  $f(t_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$  e a função de frequência  $F(\omega_p)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ , são transformadas discretas de Fourier uma da outra.<sup>12</sup> Compare as Equações (14.87) e (14.89) com as transformadas contínuas de Fourier correspondentes, Equações (15.22) e (15.23) do Capítulo 15.

### Limitações

Consideradas como um par de relações matemáticas, as transformadas discretas de Fourier são exatas. Podemos dizer que os  $2N$  vetores  $\exp(-i\omega_p t_k)$ , de  $2N$  componentes,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ , formam um conjunto complexo<sup>13</sup> que abrange o espaço  $t_k$ . Então,  $f(t_k)$  na Equação (14.89) é simplesmente uma combinação linear particular desses vetores. Como alternativa, podemos considerar que as  $2N$  componentes medidas  $f(t_k)$  definem um vetor de  $2N$  componentes no espaço  $t_k$ . Então, a Equação (14.87) dá como resultado o vetor de  $2N$  componentes  $F(\omega_p)$  no espaço **recíproco**  $\omega_p$ . As Equações (14.87) e (14.89) se tornam equações matriciais, sendo  $\exp(i\omega_p t_k)/(2N)^{1/2}$  os elementos de uma matriz unitária.

As limitações da transformada discreta de Fourier surgem quando aplicamos as Equações (14.87) e (14.89) a sistemas físicos e buscamos uma interpretação física e o limite  $F(\omega_p) \rightarrow F(\omega)$ . O Exemplo 14.6.1 ilustra os problemas que podem ocorrer. A precaução mais importante a ser tomada para evitar problemas é tomar  $N$  suficientemente grande de modo a não haver nenhuma componente de frequência angular com uma frequência angular mais alta do que  $\omega_N = 2\pi N/T$ . Se o leitor quiser detalhes sobre erros e limitações na utilização da transformada discreta de Fourier, consulte Hamming em Leituras Adicionais.

### Exemplo 14.6.1 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER — ALIASING

Considere o caso simples de  $T = 2\pi$ ,  $N = 2$ , e  $f(t_k) = \cos t_k$ . Por

$$t_k = \frac{kT}{4} = \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (14.90)$$

$f(t_k) = \cos(t_k)$  é representada pelo vetor de quatro componentes

$$f(t_k) = (1, 0, -1, 0). \quad (14.91)$$

As frequências,  $\omega_p$ , são dadas pela Equação (14.86):

$$\omega_p = \frac{2\pi p}{T} = p. \quad (14.92)$$

Está claro que  $\cos t_k$  implica uma componente  $p = 1$  e nenhuma outra componente de frequência.

A matriz de transformação

$$\frac{\exp(i\omega_p t_k)}{2N} = \frac{\exp(ipk\pi/2)}{2N}$$

se torna

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}. \quad (14.93)$$

Observe que a matriz  $2N \times 2N$  tem somente  $2N$  componentes independentes. É a **repetição de valores que torna possível a técnica da transformada rápida de Fourier**.

<sup>12</sup>As duas equações de transformadas podem ser simetrizadas resultando  $(2N)^{-1/2}$  em cada equação, se desejado.

<sup>13</sup>Pela Equação (14.85), esses vetores são ortogonais e, portanto, são linearmente independentes.

Efetuada operações no vetor coluna  $f(t_k)$ , constatamos que essa matriz resulta em um vetor coluna

$$F(\omega_p) = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right). \tag{14.94}$$

Aparentemente, há uma componente de frequência  $p = 3$  presente. Reconstruímos  $f(t_k)$  pela Equação (14.89), obtendo

$$f(t_k) = \frac{1}{2}e^{-it_k} + \frac{1}{2}e^{-3it_k}. \tag{14.95}$$

Considerando partes reais, podemos reescrever a equação como

$$\Re f(t_k) = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k. \tag{14.96}$$

É óbvio que esse resultado, Equação (14.96), não é idêntico ao nosso original  $f(t_k) \cos t_k$ . Mas  $\cos t_k = \frac{1}{2} \cos t_k + \frac{1}{2} \cos 3t_k$  at  $t_k = 0, \pi/2, \pi$ ; e  $3\pi/2$ . O  $\cos t_k$  e o  $\cos 3t_k$  imitam um ao outro por causa do número limitado de pontos de dados (e da escolha particular de pontos de dados). Esse erro de uma frequência imitando outra é conhecido como **aliasing**. O problema pode ser minimizado considerando mais pontos de dados. ■

### Transformada Rápida de Fourier

A transformada rápida de Fourier é um modo particular de fatorar e rearranjar os termos nas somas da transformada discreta de Fourier. Apresentada à comunidade científica por Cooley e Tukey,<sup>14</sup> sua importância está na drástica redução do número de operações numéricas requeridas. Por causa do tremendo ganho na velocidade conseguido (e redução de custo), a transformada rápida de Fourier foi festejada como um dos poucos avanços realmente significativos na análise numérica nas últimas décadas.

Um cálculo direto de uma transformada discreta de Fourier para  $N$  valores de tempo (medidas) significaria  $N^2$  multiplicações. Para  $N$  potência de 2, a técnica da transformada rápida de Fourier de Cooley e Tukey reduz o número de multiplicações requeridas a  $(N/2) \log_2 N$ . Se  $N = 1.024 (= 2^{10})$ , a transformada rápida de Fourier consegue uma redução no processamento computacional de um fator de mais de 200. É por isso que a transformada rápida de Fourier é denominada rápida e é por isso que ela revolucionou o processamento digital de formas de ondas. Detalhes sobre a operação interna podem ser encontrados no artigo de Cooley e Tukey e no artigo de Bergland.<sup>15</sup>

### Exercícios

**14.6.1** Derive as formas trigonométricas de ortogonalidade discreta correspondentes à Equação (14.84):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2N-1} \cos\left(\frac{2\pi p t_k}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi q t_k}{T}\right) &= 0 \\ \sum_{k=0}^{2N-1} \cos\left(\frac{2\pi p t_k}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi q t_k}{T}\right) &= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ N, & p = q \neq 0, N \\ 2N, & p = q = 0, N \end{cases} \\ \sum_{k=0}^{2N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi p t_k}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi q t_k}{T}\right) &= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ N, & p = q \neq 0, N \\ 0, & p = q = 0, N. \end{cases} \end{aligned}$$

*Sugestão:* Identidades trigonométricas como

$$\operatorname{sen}A \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$$

são úteis.

**14.6.2** A Equação (14.84) exhibe ortogonalidade somando sobre pontos de tempo. Mostre que temos a mesma ortogonalidade somando sobre pontos de frequência

$$\frac{1}{2N} \sum_{p=0}^{2N-1} (e^{i\omega_p t_m})^* e^{i\omega_p t_k} = \delta_{mk}.$$

<sup>14</sup>J. W. Cooley e J. W. Tukey, *Math. Comput.* 19: 297 (1965).

<sup>15</sup>G. D. Bergland, A guided tour of the fast Fourier transform, *IEEE Spectrum*, julho, p. 41–52 (1969); veja também W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, e W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, 2<sup>a</sup> ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1996), Seção 12.3.



**14.6.3** Mostre, com detalhes, como ir de

$$F(\omega_p) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{i\omega_p t_k}$$

para

$$f(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p) e^{-i\omega_p t_k}.$$

**14.6.4** As funções  $f(t_k)$  e  $F(\omega_p)$  são transformadas discretas de Fourier uma da outra. Derive as seguintes relações de simetria:

(a) Se  $f(t_k)$  for real,  $F(\omega_p)$  é simétrica hermitiana, isto é,

$$F(\omega_p) = F^* \left( \frac{4\pi N}{T} - \omega_p \right).$$

(b) Se  $f(t_k)$  for imaginária pura,

$$F(\omega_p) = -F^* \left( \frac{4\pi N}{T} - \omega_p \right).$$

*Nota:* A simetria da parte (a) é uma ilustração do *aliasing*. A frequência  $4\pi N/T - \omega_p$  se disfarça como a frequência  $\omega_p$ .

**14.6.5** Dados  $N = 2$ ,  $T = 2\pi$  e  $f(t_k) = \text{sen } t_k$ ,

(a) ache  $F(\omega_p)$ ,  $p = 0, 1, 2, 3$ , e

(b) reconstrua  $f(t_k)$  a partir de  $F(\omega_p)$  e exiba o *aliasing* de  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_3 = 3$ .

$$\text{RESP. (a) } F(\omega_p) = (0, i/2, 0, -i/2)$$

$$(b) f(t_k) = \frac{1}{2} \text{sen } t_k - \frac{1}{2} \text{sen } 3t_k.$$

**14.6.6** Mostre que os polinômios de Chebyshev  $T_m(x)$  satisfazem uma relação de ortogonalidade discreta

$$\frac{1}{2} T_m(-1) T_n(-1) + \sum_{s=1}^{N-1} T_m(x_s) T_n(x_s) + \frac{1}{2} T_m(1) T_n(1) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ N/2, & m = n \neq 0 \\ N, & m = n = 0. \end{cases}$$

Aqui,  $x_s = \cos \theta_s$ , em que os  $(N + 1)\theta_s$  são igualmente espaçados ao longo do eixo  $\theta$ :

$$\theta_s = \frac{s\pi}{N}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N.$$

## 14.7 Expansão de Fourier de Funções de Mathieu

Como aplicação realista de séries de Fourier, agora derivamos, em primeiro lugar, equações integrais satisfeitas por funções de Mathieu, das quais, na seqüência, são obtidas séries de Fourier.

### Equações Integrais e Série de Fourier para Funções de Mathieu

Nosso primeiro objetivo é estabelecer equações integrais de Whittaker que as funções de Mathieu satisfaçam, das quais obtemos então suas representações de série de Fourier. Começamos com uma representação integral

$$V(\mathbf{r}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix \cos \theta + i y \text{sen } \theta, \theta) d\theta \quad (14.97)$$

de uma solução  $V$  da equação de Laplace com uma função diferenciável duas vezes  $f(v, \theta)$ . Aplicando  $\nabla^2$  a  $V$ , verificamos que ela obedece à EDP de Laplace. Separar variáveis na EDP de Laplace sugere escolher as forma de produto  $f(v, \theta) = e^{kv} \phi(\theta)$ . Substituindo as variáveis elípticas da Equação (13.163), escrevemos  $V$  como

$$R(\xi) \Phi(\eta) e^{kz} = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) e^{k(z + ic \cosh \xi \cos \eta \cos \theta + ic \text{senh } \xi \text{sen } \eta \text{sen } \theta)} d\theta \quad (14.98)$$

com normalização  $R(0) = 1$ . Visto que  $\xi$  e  $\eta$  são variáveis independentes, podemos fazer  $\xi = 0$ , o que leva à representação integral de Whittaker

$$\Phi(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \exp(ick \cos \theta \cos \eta) d\theta, \tag{14.99}$$

em que  $ck = 2\sqrt{q}$  pela Equação (13.180). Está claro que  $\Phi$  é par na variável  $\eta$  e periódica com período  $\pi$ . Para provar que  $\phi \sim \Phi$ , verificamos como  $\phi(\theta)$  é restringida quando admitimos que  $\Phi(\eta)$  obedece à EDO angular de Mathieu

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)\Phi(\eta) \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \exp(ick \cos \theta \cos \eta) \\ \cdot [\lambda - 2q \cos 2\eta + (ick \cos \theta \cos \eta)^2 - ick \cos \theta \cos \eta] d\theta. \end{aligned} \tag{14.100}$$

Aqui integramos o último termo do lado direito por partes, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)\Phi(\eta) \\ = \phi(\theta)(-ick \cos \eta \sin \theta) \exp(ick \cos \theta \cos \eta) \Big|_{\theta=-\pi}^{\pi} \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \exp(ick \cos \theta \cos \eta) [\lambda - 2q \cos 2\eta - ick \cos \theta \cos \eta] d\theta \\ + \int_{-\pi}^{\pi} [-\phi'(\theta)(-ick \cos \eta \sin \theta) + \phi(\theta)ick \cos \eta \cos \theta] \exp(ick \cos \theta \cos \eta) d\theta \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \exp ick \cos \theta \cos \eta [\phi(\theta)(\lambda - 2q \cos 2\eta) + \phi'(\theta)ick \cos \eta \sin \theta] d\theta, \end{aligned} \tag{14.101}$$

em que o termo integrado desaparece se  $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$ , o que admitimos ser o caso. Integrar mais uma vez por partes resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q \cos 2\eta)\Phi(\eta) = -\phi'(\theta) \exp ick \cos \theta \cos \eta \Big|_{\theta=-\pi}^{\pi} \\ + \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ick \cos \theta \cos \eta) [\phi(\theta)(\lambda - 2q \cos 2\eta) + \phi''(\theta)] d\theta, \end{aligned} \tag{14.102}$$

onde o termo integrado desaparece se  $\phi'$  for periódica com período  $\pi$ , o que admitimos ser o caso. Por conseguinte, se  $\phi(\theta)$  obedece à EDO angular de Mathieu EDO, o mesmo acontece com a integral  $\Phi(\eta)$ , na Equação (14.99). Por consequência,  $\phi(\theta) \sim \Phi(\theta)$ , onde a constante pode ser uma função do parâmetro  $q$ .

Assim, temos o resultado principal: uma solução  $\Phi(\eta)$  da EDO de Mathieu que é par na variável  $\eta$  satisfaz a equação integral

$$\Phi(\eta) = \Lambda_n(q) \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\sqrt{q} \cos \theta \cos \eta} \Phi(\theta) d\theta. \tag{14.103}$$

Quando essas funções de Mathieu são expandidas em uma série de Fourier de co-seno e normalizadas de modo que o termo principal é  $\cos n\eta$ , elas são denotadas por  $ce_n(\eta, q)$ .

De modo semelhante, soluções da EDO de Mathieu que são ímpares em  $\eta$  com termo principal  $\sin n\eta$  em uma série de Fourier são denotadas por  $se_n(\eta, q)$  e, do mesmo modo, pode-se demonstrar que elas obedecem à equação integral

$$se_n(\eta, q) = s_n(q) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2i\sqrt{q} \sin \eta \sin \theta) se_n(\theta, q) d\theta. \tag{14.104}$$





Agora chegamos à **expansão de Fourier para as funções angulares de Mathieu** e começamos com

$$\text{se}_1(\eta, q) = \text{sen } \eta + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}(q) \text{sen}(2\nu + 1)\eta, \quad \beta_{\nu}(q) = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \beta_{\mu}^{(\nu)} q^{\mu} \quad (14.105)$$

como um paradigma para a construção sistemática de funções de Mathieu de paridade ímpar. Observe que o ponto principal, isto é, o coeficiente  $\beta_{\nu}$ , de  $\text{sen}(2\nu + 1)\eta$  na série de Fourier, depende do parâmetro  $q$  e é expandido em uma série de potências. Além do mais,  $\text{se}_1$  é normalizada de modo que o coeficiente do termo principal,  $\text{sen } \eta$ , é a unidade, isto é, é independente de  $q$ . Essa característica se tornará importante quando  $\text{se}_1$  for substituída na ODE angular de Mathieu para determinar o autovalor  $\lambda(q)$ .

O fato de que a série de potências  $\beta_{\nu}$  em  $q$  começa com expoente  $\nu$  pode ser provado por uma série mais simples, porém semelhante, para  $\text{se}_1(\eta, q)$ :

$$\text{se}_1(\eta, q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu}(q) \text{sen}^{2\nu+1}\eta, \quad \gamma_{\nu}(q) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_{\mu}^{(\nu)} q^{\mu}, \quad (14.106)$$

que é útil somente para essa demonstração. Contudo, visto que precisamos expandir

$$\text{sen}^{2\nu+1}\eta = \sum_{m=0}^{\nu} B_{\nu m} \text{sen}(2m + 1)\eta \quad (14.107)$$

com coeficientes de Fourier

$$B_{\nu m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^{2\nu+1}\eta \text{sen}(2m + 1)\eta \, d\eta = \frac{(-1)^m}{2^{2\nu}} \binom{2\nu + 1}{\nu - m}, \quad (14.108)$$

que podemos procurar em uma tabela de integrais (veja Gradshteyn e Ryzhik em Leituras Adicionais do Capítulo 13), essa prova nos dá uma oportunidade de introduzir os  $B_{\nu m}$  que são não-zero somente se  $m \leq \nu$  e são elementos importantes das relações de recursão para os termos principais de  $\text{se}_1$  (e todas as outras funções de Mathieu de paridade ímpar). Substituindo a Equação (14.107) na Equação (14.106), obtemos

$$\text{se}_1(\eta, q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\nu} B_{\nu m} \gamma_{\nu}(q) \text{sen}(2m + 1)\eta. \quad (14.109)$$

Comparando essa expressão para  $\text{se}_1$  com a Equação (14.105), encontramos

$$\beta_{\nu}(q) = \sum_{m=\nu}^{\infty} B_{m\nu} \gamma_m(q). \quad (14.110)$$

Aqui, a soma começa com  $m = \nu$  porque  $B_{m\nu} = 0$  para  $m < \nu$ .

Em seguida, substituímos a Equação (14.106) na equação integral, Equação (14.104), para  $n = 1$ , em que inserimos a série de potências para  $\text{sen}(2i\sqrt{q}\text{sen } \eta \text{sen } \theta)$ . Isso resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\text{se}_1(\eta, q)}{2\pi s_1(q)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2i\sqrt{q}\text{sen } \eta \text{sen } \theta) \text{se}_1(\theta, q) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi s_1(q)} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m(q) \text{sen}^{2m+1}\eta \\ &= i\sqrt{q} \sum_{m,\nu=0}^{\infty} q^m \gamma_{\nu}(q) \text{sen}^{2m+1}\eta \frac{2^{2m+1}}{(2m + 1)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^{2\nu+2m+2}\theta \, d\theta, \end{aligned} \quad (14.111)$$

da qual obtemos as relações de recursão

$$\gamma_m(q) = \frac{2^{2m+1}}{(2m + 1)!} q^m i\sqrt{q} s_1(q) \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu}(q) \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^{2\nu+2m+2}\theta \, d\theta, \quad (14.112)$$

ao compararmos os coeficientes de  $\text{sen}^{2m+1}\eta$ . Isso mostra que a série de potências para  $\gamma_m(q)$  começa com  $q^m$ . Usar a Equação (14.110) prova que a série de potências para  $\beta_m(q)$  também começa com  $q^m$ , e isso confirma a Equação (14.105). A integral na equação (14.112) pode ser avaliada analiticamente e expressa por meio da função beta (Capítulo 8) em termos de razões de fatoriais, mas aqui não precisamos dessa fórmula. Nosso próximo objetivo é estabelecer uma relação de recursão para o termo principal  $\beta_\nu^{(\nu)}$  de  $\text{se}_1$ , na Equação (14.105). Substituímos a Equação (14.105) na equação integral, Equação (14.104), para  $n = 1$ , onde novamente inserimos a série de potências para  $\text{sen}(2i\sqrt{q}\text{sen } \eta \text{sen } \theta)$  juntamente com a expansão

$$\frac{1}{2\pi s_1(q)} = i \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m q^{m+1/2}. \tag{14.113}$$

Aqui, o fator extra,  $i\sqrt{q}$ , cancela o fator correspondente do seno na equação integral, o que resulta em

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\mu^{(\lambda)} q^{\mu+\nu} \text{sen}^{2\nu+1}\eta \frac{2^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^{2\nu+2\lambda+2}\theta \, d\theta \\ &= \sum_{m,\mu=0}^{\infty} \alpha_m q^{m+\mu} \beta_\mu^{(\nu)} \text{sen}(2\nu+1)\eta. \end{aligned} \tag{14.114}$$

Aqui, substituímos  $\text{sen}^{2\nu+1}\eta$  por  $\text{sen}(2m+1)\eta$  usando a Equação (14.107). Comparando os coeficientes de  $q^N \text{sen}(2\nu+1)\eta$ , para  $N = \mu + \nu$ , obtemos a relação de recursão

$$\sum_{\nu=n}^N \sum_{\lambda=0}^{N-\nu} \beta_{N-\nu}^{(\lambda)} \frac{2^{2\nu}}{(2\nu+1)!} B_{\nu n} B_{\nu \lambda} = \sum_{m=0}^{N-n} \alpha_m \beta_{N-m}^{(n)}. \tag{14.115}$$

Agora substituímos a Equação (14.108) para obter a **relação de recursão principal** para os coeficientes principais  $\beta_\nu^{(\nu)}$  para  $\text{se}_1$ :

$$\sum_{\nu=n}^N \sum_{\lambda=0}^{N-\nu} \frac{\beta_{N-\nu}^{(\lambda)}}{2^{2\nu}(2\nu+1)!} \binom{2\nu+1}{\nu-n} \binom{2\nu+1}{\nu-\lambda} = \sum_{m=0}^{N-n} \alpha_m \beta_{N-m}^{(n)}. \tag{14.116}$$

**Exemplo 14.7.1** COEFICIENTES PRINCIPAIS DE  $\text{se}_1$

Avaliamos a Equação (14.116) começando com  $N = 0, n = 0$ . Para esse caso, achamos  $\beta_0^{(0)} = \alpha_0 \beta_0^{(0)}$  ou  $\alpha_0 = 1$  porque o coeficiente de  $\text{sen } \eta$  em  $\text{se}_1, \beta_0^{(0)} = 1$ , por normalização. Para  $N = 1, n = 0$ , a Equação (14.116) resulta em

$$\alpha_0 \beta_1^{(0)} + \alpha_1 \beta_0^{(0)} = \beta_1^{(0)} + \frac{1}{4 \cdot 3!} \binom{3}{1} \left[ \beta_0^{(0)} \binom{3}{1} + \beta_0^{(1)} \binom{3}{0} \right], \tag{14.117}$$

em que  $\beta_0^{(1)} = 0$  e  $\beta_1^{(0)}$  é descartado, uma característica geral. Claro que  $\beta_1^{(0)} = 0$  porque  $\text{sen } \eta$  em  $\text{se}_1$  tem coeficiente unitário, o que resulta em  $\alpha_1 = 3/8$ .

O caso  $N = 1, n = 1$  resulta em

$$\frac{-1}{4 \cdot 3!} \binom{3}{0} \beta_0^{(0)} \binom{3}{1} = \alpha_0 \beta_1^{(1)}, \tag{14.118}$$

ou  $\beta_1^{(1)} = -1/8$ . O termo principal é obtido do caso geral  $n = N$ ,

$$\frac{(-1)^N}{2^{2N}(2N+1)!} \binom{2N+1}{0} \beta_0^{(0)} \binom{2N+1}{N} = \alpha_0 \beta_N^{(N)}, \tag{14.119}$$

como

$$\boxed{\beta_N^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2^{2N}(2N+1)!} \binom{2N+1}{N}}, \tag{14.120}$$



que foi derivado pela primeira vez por Mathieu. Para  $N = 1$  essa fórmula reproduz nosso resultado anterior,  $\beta_1^{(1)} = -1/8$ . ■

Para determinar o primeiro termo não-principal  $\beta_{N+1}^{(N)}$  de  $se_1$ , Equação (14.105), e o autovalor  $\lambda_1(q)$  substituimos  $se_1$  na EDO angular de Mathieu, Equação (13.181), usando as identidades trigonométricas

$$2 \cos 2\eta \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta = \operatorname{sen}(2\nu + 3)\eta + \operatorname{sen}(2\nu - 1)\eta$$

e

$$\frac{d^2 \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta}{d\eta^2} = -(2\nu + 1)^2 \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta.$$

Isso resulta em

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 se_1}{d\eta^2} + (\lambda_1 - 2q \cos 2\eta) se_1 = q(\operatorname{sen}\eta - \operatorname{sen}3\eta) + \lambda_1 \operatorname{sen}\eta - \operatorname{sen}\eta \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} [\lambda_1 - (2\nu + 1)^2] \left[ \frac{(-1)^\nu q^\nu}{2^{2\nu} \nu! (\nu + 1)!} + \beta_{\nu+1}^{(\nu)} q^{\nu+1} + \dots \right] \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta \\ &- q \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \frac{(-q)^\nu}{2^{2\nu} \nu! (\nu + 1)!} + \beta_{\nu+1}^{(\nu)} q^{\nu+1} + \dots \right] (\operatorname{sen}(2\nu + 3)\eta + \operatorname{sen}(2\nu - 1)\eta) \\ &= \left( \lambda_1 - 1 + q - q \left[ -\frac{q}{2^2 2!} + \beta_2^{(1)} q^2 + \dots \right] \right) \operatorname{sen}\eta \\ &+ \operatorname{sen}3\eta \left[ -q - q \left( \frac{q^2}{2^4 2! 3!} + \beta_3^{(2)} q^3 \right) + (\lambda_1 - 3^2) \left( -\frac{q}{2^2 2!} + \beta_2^{(1)} q^2 \right) \right] \\ &+ \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta [\lambda_1 - (2\nu + 1)^2] \left( \frac{(-q)^\nu}{2^{2\nu} \nu! (\nu + 1)!} + \beta_{\nu+1}^{(\nu)} q^{\nu+1} \right) \\ &- q \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta \left( \frac{(-q)^{\nu+1}}{2^{2(\nu+1)} (\nu + 1)! (\nu + 2)!} + \beta_{\nu+2}^{(\nu+1)} q^{\nu+2} \right) \\ &- q \operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta \left( \frac{(-q)^{\nu-1}}{2^{2(\nu-1)} (\nu - 1)! \nu!} + \beta_\nu^{(\nu-1)} q^\nu \right) + \dots \end{aligned} \quad (14.121)$$

Nessa série os coeficientes de cada potência de  $q$  dentro de diferentes termos de seno devem se anular; como o de  $\operatorname{sen}\eta$  é zero, temos como resultado o autovalor

$$\lambda_1(q) = 1 - q - \frac{1}{8} q^2 + \beta_2^{(1)} q^3 + \dots, \quad (14.122)$$

com  $\beta_2^{(1)} = 1/2^6$  vindo do coeficiente que se anula de  $q^2$  em  $\operatorname{sen}3\eta$ . Igualar o coeficiente de  $(-q)^\nu$  em  $\operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta$  a zero resulta na identidade

$$[1 - (2\nu + 1)^2] \frac{1}{2^{2\nu} \nu! (\nu + 1)!} + \frac{1}{2^{2(\nu-1)} (\nu - 1)! \nu!} = 0, \quad (14.123)$$

que verifica a determinação correta dos termos principais  $\beta_\nu^{(\nu)}$  na Equação (14.120). O coeficiente que desaparece de  $q^{\nu+1}$  em  $\operatorname{sen}(2\nu + 1)\eta$  resulta em

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{2\nu} \nu! (\nu + 1)!} + [1 - (2\nu + 1)^2] \beta_{\nu+1}^{(\nu)} - \beta_\nu^{(\nu-1)} = 0, \quad (14.124)$$

o que implica a principal **relação de recursão para coeficientes não-principais**,

$$4\nu(\nu + 1)\beta_{\nu+1}^{(\nu)} = -\beta_\nu^{(\nu-1)} + \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^{2\nu} \nu! (\nu + 1)!}, \quad (14.125)$$

para os primeiros termos não-principais. Verificamos que

$$\beta_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\nu+1} \nu}{2^{2\nu+2} (\nu + 1)!^2} \quad (14.126)$$

satisfaz essa relação de recursão. Termos de ordem mais alta não dominantes podem ser obtidos igualando o coeficiente de  $q^{\nu+2}$ , etc. No geral, derivamos a série de Fourier para

$$\boxed{se_1(\eta, q) = \text{sen}\eta + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \frac{(-q)^\nu}{2^{2\nu}\nu!(\nu+1)!} + \frac{(-q)^{\nu+1}\nu}{2^{2\nu+2}(\nu+1)!^2} + \dots \right] \cdot \text{sen}(2\nu+1)\eta.}$$

(14.127)

Um tratamento similar resulta nas séries de Fourier para  $se_{2n+1}(\eta, q)$  e  $se_{2n}(\eta, q)$ . Uma invariância da EDO de Mathieu leva à relação de simetria

$$ce_{2n+1}(\eta, q) = (-1)^n se_{2n+1}(\eta + \pi/2, -q), \tag{14.128}$$

que nos permite determinar a  $ce_{2n+1}$  de período  $2\pi$  por  $se_{2n+1}$ . De modo semelhante,  $ce_{2n}(\eta + \pi/2, -q) = se_{2n}(\eta, q)$  relaciona essas funções de Mathieu de período  $\pi$  uma à outra. Por fim, fazemos um breve rascunho de uma derivação da série de Fourier para

$$ce_0(\eta, q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(q) \cos 2n\eta, \quad \beta_n(q) = \sum_{m=n}^{\infty} \beta_m^{(n)} q^m, \tag{14.129}$$

como um paradigma para as funções de Mathieu de período  $\pi$ . Observe que essa normalização está de acordo com Whittaker e Watson e com Hochstadt em Leituras Adicionais do Capítulo 13, ao passo que em AMS-55 (a referência completa é dada na nota de rodapé 4 no Capítulo 5)  $ce_0$  difere por um fator de  $1/\sqrt{2}$ . A relação de simetria pela EDO de Mathieu,

$$ce_0\left(\frac{\pi}{2} - \eta, -q\right) = ce_0(\eta, q), \tag{14.130}$$

implica

$$\beta_n(-q) = (-1)^n \beta_n(q); \tag{14.131}$$

isto é,  $\beta_{2n}$  contém somente potências pares de  $q$  e  $\beta_{2n+1}$  somente potências ímpares.

O fato de que a série de potências para  $\beta_n(q)$  na Equação (14.129) começa com  $q^n$  pode ser provado pela expansão similar

$$ce_0(\eta, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(q) \cos^{2n} \eta, \quad \gamma_n(q) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_\mu^{(n)} q^\mu, \tag{14.132}$$

como para  $se_1$  nas Equações (14.105) a (14.112). Substituindo a Equação (14.132) na equação integral

$$ce_0(\eta, q) = c_0(q) \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\sqrt{q} \cos \theta \cos \eta} ce(\theta, q) d\theta, \tag{14.133}$$

inserindo a série de potências para a função exponencial (descartando potências ímpares  $\cos^{2m+1} \theta$  e igualando os coeficientes de  $\cos^{2m} \eta$ , temos como resultado

$$\gamma_m(q) = c_1(q) (-q)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_\mu(q) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2m+2\mu} \theta d\theta. \tag{14.134}$$

Essa relação de recursão mostra que a série de potências para  $\gamma_m(q)$  começa com  $q^m$ . Expandimos

$$\cos^{2n} \eta = \sum_{m=0}^n A_{nm} \cos 2m\eta \tag{14.135}$$

com coeficientes de Fourier

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} \eta \cos 2m\eta d\eta = \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n-m}, \tag{14.136}$$



que são não-zero somente quando  $m \leq n$ . Usando esse resultado para substituir potências de co-seno na Equação (14.132) por  $\cos 2m\eta$ , obtemos

$$\beta_n(q) = \sum_{m=n}^{\infty} A_{mn} \gamma_m(q), \quad (14.137)$$

o que confirma a Equação (14.129).

Prosseguindo como para  $se_1$  nas Equações (14.113) a (14.120), substituímos a Equação (14.129) na integral, Equação (14.133), e obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{m,\mu,\nu,\lambda=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} q^{\mu+m} \sum_{\nu=0}^m A_{m\nu} \cos(2\nu\eta) A_{m\lambda} \\ &= \sum_{m,\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_m \beta_{\mu}^{(\nu)} q^{m+\mu} \cos(2\nu\eta), \end{aligned} \quad (14.138)$$

com

$$\frac{1}{2\pi c_1(q)} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m q^m. \quad (14.139)$$

Comparando o coeficiente de  $q^N \cos(2\nu\eta)$  com  $N = m + \mu$ , extraímos a **relação de recursão para coeficientes principais**  $\beta_n^{(n)}$  de  $ce_0$

$$\sum_{m=\nu}^N (-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} A_{m\nu} \sum_{\lambda=0}^m \beta_{N-m}^{(\lambda)} A_{m\lambda} = \sum_{m=0}^N \alpha_m \beta_{N-m}^{(\nu)}, \quad (14.140)$$

com  $A_{nm}$  na Equação (14.136).

### Exemplo 14.7.2 COEFICIENTES PRINCIPAIS PARA $ce_0$

O caso  $N = 0, \nu = 0$  da Equação (14.140) resulta em

$$A_{00}^2 \beta_0^{(0)} = \alpha_0 \beta_0^{(0)}, \quad (14.141)$$

com  $A_{00} = 1$  e  $\beta_0^{(0)} = 1$  pela normalização do termo principal de  $ce_0$  para unidade, de modo que resulta  $\alpha_0 = 1$ .

O caso  $N = 1, \nu = 0$  resulta em

$$A_{00} \beta_1^{(0)} A_{00} - 2A_{10} [\beta_0^{(0)} A_{10} + \beta_0^{(1)} A_{11}] = \alpha_0 \beta_1^{(0)} + \alpha_1 \beta_0^{(0)}, \quad (14.142)$$

com  $\beta_0^{(1)} = 0$  pela Equação (14.129). Isso é simplificado para

$$\beta_1^{(0)} - \frac{1}{2} \beta_0^{(0)} = \alpha_1 \beta_0^{(0)} + \beta_1^{(0)}, \quad (14.143)$$

em que  $\beta_1^{(0)}$  é descartado. Já sabemos que  $\beta_1^{(0)} = 0$  pelo termo principal unitário de  $ce_0$ . Por conseguinte,  $\alpha_1 = -1/2$ .

Para o caso de  $N = 1, \nu = 1$ , obtemos

$$-2A_{11} \beta_0^{(0)} A_{10} = \alpha_0 \beta_1^{(1)}, \quad (14.144)$$

com  $A_{10} = 1/2 = A_{11}$ , do qual resulta  $\beta_1^{(1)} = -1/2$ . Para o caso  $N = 2, \nu = 2$ , encontramos

$$\frac{2^4}{4! 2^3} \beta_0^{(0)} A_{20} = \alpha_0 \beta_2^{(2)}, \quad (14.145)$$

com  $A_{20} = 3/8$ , do qual resulta  $\beta_2^{(2)} = 2^{-4}$ . O caso geral  $N, \nu = N$  resulta em

$$(-1)^N \frac{2^{2N}}{(2N)!} A_{NN} \beta_0^{(0)} A_{N0} = \alpha_0 \beta_N^{(N)}, \quad (14.146)$$

com  $A_{NN} = 2^{-2N+1}$ ,  $A_{N0} = \frac{1}{2^{2N-1}} \binom{2N}{N}$ , da qual resulta o termo principal

$$\beta_N^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2^{2N-1}(2N)!} \binom{2N}{N} = \frac{(-1)^N}{2^{2N-1}N!^2} \quad (14.147)$$

Os termos não-principais  $\beta_{N+1}^{(N)}$  de  $ce_0$  são mais bem determinados pela EDO angular de Mathieu por substituição da Equação (14.129), por analogia com  $se_1$ , Equações (14.121) a (14.127). Usando as identidades

$$\begin{aligned} 2 \cos(2n\eta) \cos 2\eta &= \cos(2n+2)\eta + \cos(2n-2)\eta, \\ \frac{d^2}{d\eta^2} \cos(2n\eta) &= -(2n)^2 \cos(2n\eta), \end{aligned} \quad (14.148)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 ce_0}{d\eta^2} + (\lambda_0(q) - 2q \cos 2\eta) ce_0 &= 0 \\ &= \lambda_0(q) - q \left( -\frac{q}{2} + \frac{7}{27} q^3 \right) + \dots \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - 4n^2) \cos(2n\eta) \left[ \frac{(-q)^n}{2^{2n-1}n!^2} + \beta_{n+2}^{(n)} q^{n+2} \right] \\ &\quad - q \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-q)^n}{2^{2n-1}n!^2} + \beta_{n+2}^{(n)} q^{n+2} \right] \\ &\quad \times [\cos(2n+2)\eta + \cos(2n-2)\eta]. \end{aligned} \quad (14.149)$$

Igualando o coeficiente de  $\cos(2n\eta)$   $n = 0$  a zero temos como resultado o autovalor

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{27}q^4 + \dots \quad (14.150)$$

O coeficiente de  $\cos(2n\eta)q^n$  dá como resultado uma identidade,

$$(-1)^{n+1} \frac{4n^2}{2^{2n-1}n!^2} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-3}(n-1)!^2} = 0, \quad (14.151)$$

que mostra que o termo principal na Equação (14.147) foi corretamente determinado. O coeficiente de  $q^{n+2} \cos(2n\eta)$  resulta na relação de recursão

$$-4n^2 \beta_{n+2}^{(n)} - \beta_{n+1}^{(n-1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}n!^2} + \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(n+1)!^2} = 0. \quad (14.152)$$

É correto verificar que

$$\beta_{n+2}^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{n(3n+4)}{2^{2n+3}(n+1)!^2} \quad (14.153)$$

satisfaz essa relação de recursão. No geral, derivamos a fórmula

$$\begin{aligned} ce_0(\eta, q) &= 1 + \cos 2\eta \left[ -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{27}q^3 + \dots \right] \\ &\quad + \cos 4\eta \left[ \frac{q^2}{2^5} + \dots \right] + \cos 6\eta \left[ -\frac{q^3}{2^7 3^2} + \dots \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\eta) \left[ \frac{(-q)^n}{2^{2n-1}n!^2} + \frac{(-1)^{n+1}n(3n+4)q^{n+2}}{2^{2n+3}(n+1)!^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (14.154)$$



De modo semelhante, podemos derivar

$$ce_1(\eta, q) = \cos \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n+1)\eta \left[ \frac{(-q)^n}{2^{2n}n!(n+1)!} - \frac{(-q)^{n+1}n}{2^{2n+2}(n+1)1^2} + \dots \right], \tag{14.155}$$

cujo autovalor é dado pela séries de potências

$$\lambda_1(q) = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{26}q^3 + \dots \tag{14.156}$$

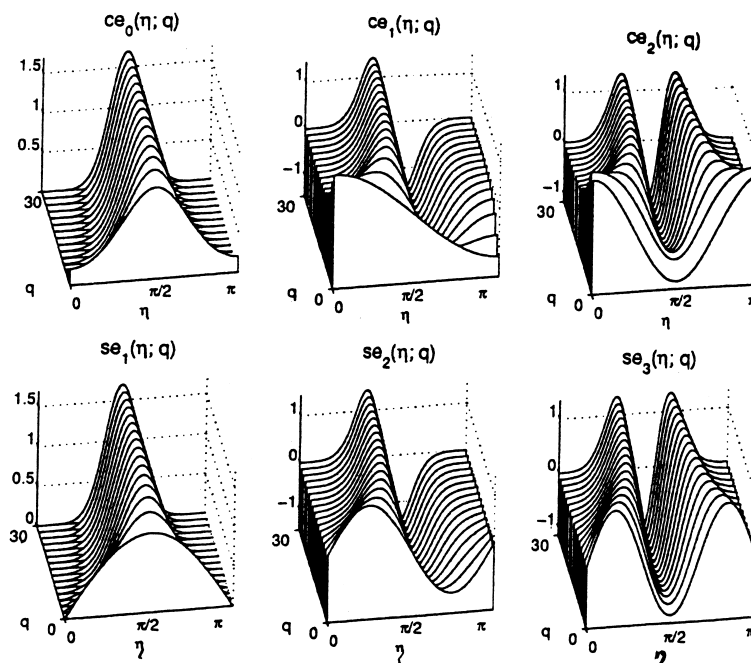


Figura 14.12: Funções Angulares de Mathieu. (De Gutiérrez-Vega et al., *Am. J. Phys.* 71: 233 (2003).)

### Exercícios

- 14.7.1 Determine os coeficientes não-principais  $\beta_{n+2}^{(n)}$  para  $se_1$ . Derive a relação de recursão correspondente.
- 14.7.2 Determine os coeficientes não-principais beta  $\beta_{n+4}^{(n)}$  para  $ce_0$ . Derive a relação de recursão correspondente.
- 14.7.3 Derive a fórmula para  $ce_1$ , Equação (14.155), e seu autovalor, Equação (14.156).

### Leituras Adicionais

Carlsaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 2<sup>a</sup> ed. Londres: Macmillan (1921); 3<sup>a</sup> ed., brochura, Nova York: Dover (1952). Essa é uma obra detalhada e clássica; inclui uma considerável discussão do fenômeno de Gibbs no capítulo IX.

Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (1973), nova tiragem Dover (1987). O Capítulo 33 dá uma excelente descrição da transformada rápida de Fourier.

Jeffreys, H., e B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3<sup>a</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1972).

Kufner, A., e J. Kadlec, *Fourier Series*. Londres: Iliffe (1971). Esse livro é um claro relato da série de Fourier no contexto do espaço de Hilbert.

Lanczos, C., *Applied Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1956), nova tiragem, Dover (1988). O livro dá uma apresentação bem escrita da técnica de convergência de Lanczos (que suprime as oscilações do fenômeno de Gibbs). Esses e vários outros tópicos são apresentados do ponto de vista de um matemático que quer resultados numéricos úteis e não apenas teoremas abstratos de existência.

Oberhettinger, F., *Fourier Expansions, A Collection of Formulas*. Nova York, Academic Press (1973).

Zygmund, A., *Trigonometric Series*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1988). O volume contém uma exposição extremamente completa, incluindo resultados relativamente recentes no reinado da matemática pura.



# 15

## Transformadas Integrais

### 15.1 Transformadas Integrais

Na Física Matemática freqüentemente encontramos pares de funções relacionadas por uma expressão da forma

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t) dt. \quad (15.1)$$

A função  $g(\alpha)$  é denominada transformada (integral) de  $f(t)$  pelo núcleo  $K(\alpha, t)$ . A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função  $f(t)$  no espaço  $t$  para uma outra função,  $g(\alpha)$ , no espaço  $\alpha$ . Essa interpretação adquire significância física na relação tempo-freqüência de transformadas de Fourier, como no Exemplo 15.3.1, e nas relações espaço real-espaço momentum da Física Quântica da Seção 15.6.

#### Transformada de Fourier

Uma das mais úteis entre o número infinito de possíveis transformadas é a transformada de Fourier, dada por

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt. \quad (15.2)$$

Duas modificações dessa forma, desenvolvidas na Seção 15.3, são as transformadas de Fourier de co-seno e as transformadas de Fourier de seno:

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (15.3)$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sen \omega t dt. \quad (15.4)$$

A transformada de Fourier é baseada no núcleo  $e^{i\omega t}$  e suas partes real e imaginária tomadas separadamente,  $\cos \omega t$  e  $\sen \omega t$ . Como esses núcleos são as funções usadas para descrever ondas, as transformadas de Fourier aparecem com freqüência em estudos de ondas e na extração de informações de ondas, em particular quando estão envolvidas informações de fase. A leitura de um interferômetro estelar, por exemplo, envolve uma transformada de Fourier do brilho em um disco estelar. A distribuição de elétrons em um átomo pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados. Na Mecânica Quântica, a origem física das relações de Fourier da Seção 15.6 é a natureza ondulatória da matéria e a descrição que fazemos da matéria em termos de ondas.

#### Exemplo 15.1.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DA GAUSSIANA

A transformada de Fourier de uma função gaussiana  $e^{-a^2 t^2}$ ,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} e^{i\omega t} dt,$$

pode ser feita analiticamente completando o quadrado no expoente,

$$-a^2 t^2 + i\omega t = -a^2 \left( t - \frac{i\omega}{2a^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2},$$

o que verificamos avaliando o quadrado. Substituindo essa identidade, obtemos

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt,$$

deslocando a variável de integração  $t \rightarrow t + \frac{i\omega}{2a^2}$ . Isso é justificado por uma aplicação do teorema de Cauchy ao retângulo com vértices  $-T, T, T + \frac{i\omega}{2a^2}, -T + \frac{i\omega}{2a^2}$  para  $T \rightarrow \infty$ , observando que o integrando não tem nenhuma singularidade nessa região e que as integrais sobre os lados, de  $\pm T$  a  $\pm T + \frac{i\omega}{2a^2}$ , se tornam desprezíveis para  $T \rightarrow \infty$ . Por fim, reescalamos a variável de integração como  $\xi = at$  na integral (veja as Equações ((8.6) e (8.8)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{a}.$$

Substituindo esses resultados, encontramos

$$g(\omega) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right),$$

mais uma vez uma gaussiana, mas em um espaço  $\omega$ . Quanto maior for  $a$ , isto é, quanto mais estreita for a gaussiana original  $e^{-a^2 t^2}$ , mais larga será sua transformada de Fourier  $\sim e^{-\omega^2/4a^2}$ . ■

### Transformadas de Laplace, Mellin e Hankel

Três outros núcleos úteis são

$$e^{-\alpha t}, \quad tJ_n(\alpha t), \quad t^{\alpha-1}.$$

Esses núcleos dão origem às seguintes transformadas

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t} dt, \quad \text{Transformada de Laplace} \quad (15.5)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)tJ_n(\alpha t) dt, \quad \text{Transformada de Hankel (Fourier-Bessel)} \quad (15.6)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)t^{\alpha-1} dt, \quad \text{Transformada de Mellin.} \quad (15.7)$$

Claro que os tipos possíveis são ilimitados. Essas transformadas são úteis na análise matemática e em aplicações físicas. Na verdade, já usamos a transformada de Mellin sem chamá-la por seu nome, isto é,  $g(\alpha) = (\alpha - 1)!$  é a transformada de Mellin de  $f(t) = e^{-t}$ . Veja E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2ª ed., Nova York: Oxford University Press (1937), para mais transformadas de Mellin. É claro que também poderíamos dizer que  $g(\alpha) = n!/\alpha^{n+1}$  é a transformada de Laplace de  $f(t) = t^n$ . Das três, a transformada de Laplace é, de longe, a mais usada e será discutida minuciosamente nas Seções 15.8 a 15.12. A transformada de Hankel, uma transformada de Fourier para uma expansão de função de Bessel, representa um caso-limite de uma série de Fourier-Bessel. Ela ocorre em problemas de potencial em coordenadas cilíndricas e é muito aplicada em acústica.

### Linearidade

Todas essas transformadas integrais são lineares, isto é,

$$\begin{aligned} & \int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] K(\alpha, t) dt \\ &= c_1 \int_a^b f_1(t) K(\alpha, t) dt + c_2 \int_a^b f_2(t) K(\alpha, t) dt, \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$\int_a^b c f(t) K(\alpha, t) dt = c \int_a^b f(t) K(\alpha, t) dt, \quad (15.9)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes e  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são funções para as quais a operação transformada é definida.

Representando nossa transformada integral linear pelo operador  $\mathcal{L}$ , obtemos

$$g(\alpha) = \mathcal{L}f(t). \quad (15.10)$$



Esperamos que exista um operador inverso  $\mathcal{L}^{-1}$ , tal que<sup>1</sup>

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}g(\alpha). \tag{15.11}$$

No caso de nossas três transformadas de Fourier,  $\mathcal{L}^{-1}$  é dado na Seção 15.3. Em geral, a determinação da transformada inversa é o principal problema da utilização de transformadas integrais. A transformada inversa de Laplace é discutida na Seção 15.12. Se o leitor quiser detalhes sobre as transformadas inversas de Hankel e Mellin, consulte as Leituras Adicionais no final do capítulo.

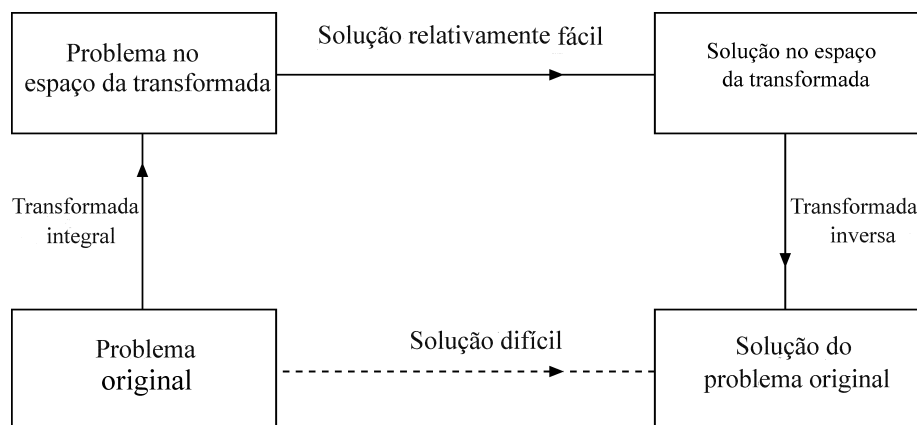


Figura 15.1: Esquema para transformadas integrais.

Transformadas integrais têm muitas aplicações e interpretações físicas especiais que serão observadas no restante deste capítulo. A aplicação mais comum está esquematizada na Figura 15.1. Há problemas que são difíceis de resolver (se é que podem ser resolvidos) nas coordenadas originais (espaço original), mas cuja transformada pode ser resolvida com relativa facilidade. Nesses casos a transformada inversa transporta a solução das coordenadas transformadas para o sistema original. O Exemplo 15.4.1 e o Exercício 15.4.1 ilustram essa técnica.

### Exercícios

**15.1.1** As transformadas de Fourier para uma função de duas variáveis são

$$F(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(ux+vy)} dx dy,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-i(ux+vy)} du dv.$$

Usando  $f(x, y) = f([x^2 + y^2]^{1/2})$ , mostre que as transformadas de Hankel de ordem zero

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr,$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} \rho F(\rho) J_0(\rho r) d\rho,$$

são um caso especial das transformadas de Fourier.

Essa técnica pode ser generalizada para derivar as transformadas de Hankel de ordem  $\nu = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  (compare com I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Nova York: McGraw-Hill (1951)). Uma abordagem mais geral, válida para  $\nu > -\frac{1}{2}$ , é apresentada em Sneddon, *The Use of Integral Transforms* (Nova York: McGraw-Hill (1972)). Poderíamos também observar que as transformadas de Hankel de ordem não-inteira  $\nu = \pm\frac{1}{2}$  se reduzem a transformadas de Fourier de seno e co-seno.

<sup>1</sup>Expectativa não é prova e, aqui, a prova da existência é complicada porque, na verdade, estamos em um espaço de Hilbert de número infinito de dimensões. Provaremos a existência nos casos especiais de interesse por construção propriamente dita.

**15.1.2** Admitindo a validade do par de equações transformada de Hankel-transformada inversa de Hankel

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)J_n(\alpha t)t dt,$$

$$f(t) = \int_0^\infty g(\alpha)J_n(\alpha t)\alpha d\alpha,$$

mostre que a função delta de Dirac tem uma representação integral de Bessel

$$\delta(t - t') = t \int_0^\infty J_n(\alpha t)J_n(\alpha t')\alpha d\alpha.$$

Essa expressão é útil para desenvolver funções de Green em coordenadas cilíndricas, em que as autofunções são funções de Bessel.

**15.1.3** Pelas transformadas de Fourier, Equações (15.22) e (15.23), mostre que a transformação

$$t \rightarrow \ln x$$

$$i\omega \rightarrow \alpha - \gamma$$

leva a

$$G(\alpha) = \int_0^\infty F(x)x^{\alpha-1}dx$$

e

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(\alpha)x^{-\alpha}d\alpha.$$

Essas expressões são as transformadas de Mellin. Uma troca similar de variáveis é empregada na Seção 15.12 para derivar a transformada inversa de Laplace.

**15.1.4** Verifique as seguintes transformadas de Mellin:

(a)  $\int_0^\infty x^{\alpha-1} \text{sen}(kx) dx = k^{-\alpha}(\alpha - 1)! \text{sen} \frac{\pi\alpha}{2}, \quad -1 < \alpha < 1.$

(b)  $\int_0^\infty x^{\alpha-1} \text{cos}(kx) dx = k^{-\alpha}(\alpha - 1)! \text{cos} \frac{\pi\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1.$

*Sugestão:* Você pode forçar as integrais a uma forma tratável inserindo um fator de convergência  $e^{-bx}$  e (após integração) fazendo  $b \rightarrow 0$ . Além disso,  $\text{cos} kx + i \text{sen} kx = \exp ikx$ .

## 15.2 Desenvolvimento da Integral de Fourier

No Capítulo 14 mostramos que séries de Fourier são úteis para representar certas funções (1) em um intervalo limitado  $[0, 2\pi]$ ,  $[-L, L]$ , e assim por diante, ou (2) para o intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ , **se a função for periódica**. Agora, voltamos nossa atenção para o problema de representar uma função não-periódica em uma faixa infinita. Em termos físicos isso significa resolver um pulso único ou pacote de ondas em ondas senoidais.

Já vimos (Seção 14.2) que, para o intervalo  $[-L, L]$ , os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  podiam ser escritos como

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{cos} \frac{n\pi t}{L} dt, \tag{15.12}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt. \tag{15.13}$$

A série de Fourier resultante é

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^\infty \text{cos} \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{cos} \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^\infty \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \tag{15.14}$$



ou

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L}(t-x) dt. \quad (15.15)$$

Agora deixamos que o parâmetro  $L$  se aproxime de infinito, transformando o intervalo finito  $[-L, L]$  no intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ . Fazemos

$$\frac{n\pi}{L} = \omega, \quad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega, \quad \text{com } L \rightarrow \infty.$$

Então, temos

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad (15.16)$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad (15.17)$$

substituindo a soma infinita pela integral sobre  $\omega$ . O primeiro termo (correspondente a  $a_0$ ) se anulou, admitindo-se que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  existe.

É preciso salientar que esse resultado (Equação (15.17)) é puramente formal. Não pretende ser uma derivação rigorosa, mas pode se tornar rigorosa (compare com I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Seção 3.2). Consideramos a Equação (15.17) a integral de Fourier. Ela está sujeita às condições de que  $f(x)$  é (1) contínua parte por parte, (2) diferenciável parte por parte e (3) absolutamente integrável, isto é,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  é finita.

### Integral de Fourier — Forma Exponencial

Nossa integral de Fourier (Equação (15.17)) pode ser colocada em forma exponencial, observando que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad (15.18)$$

enquanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt = 0; \quad (15.19)$$

$\cos \omega(t-x)$  é uma função par de  $\omega$  e  $\sin \omega(t-x)$  é uma função ímpar de  $\omega$ . Somando as Equações (15.18) (15.19) (com um fator  $i$ ), obtemos o **teorema integral de Fourier**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (15.20)$$

A variável  $\omega$  introduzida aqui é uma variável matemática aleatória. Em muitos problemas físicos, entretanto, ela corresponde à frequência angular  $\omega$ . Então podemos interpretar a Equação (15.18) ou (15.20) como uma representação de  $f(x)$  em termos de uma distribuição de trens de onda senoidais infinitamente longos de frequência angular  $\omega$ , nos quais a frequência é uma variável **contínua**.

### Derivação da Função Delta de Dirac

Se a ordem de integração da Equação (15.20) for invertida, podemos reescrevê-la como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega \right\} dt. \quad (15.20a)$$

Aparentemente, a quantidade entre colchetes se comporta como uma função  $\delta(t-x)$ . Poderíamos considerar que a Equação (15.20) nos dá uma representação da função delta de Dirac. Como alternativa, nós a consideramos uma pista para uma nova derivação do teorema integral de Fourier.

Pela Equação ((1.171b) (deslocando a singularidade de  $t = 0$  to  $t = x$ ),

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_n(t-x) dt, \quad (15.21a)$$

em que  $\delta_n(t - x)$  é uma seqüência que define a distribuição  $\delta(t - x)$ . Note que a Equação (15.21a) admite que  $f(t)$  é contínua em  $t = x$ . Consideramos que  $\delta_n(t - x)$  é

$$\delta_n(t - x) = \frac{\text{sen } n(t - x)}{\pi(t - x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{i\omega(t-x)} d\omega, \tag{15.21b}$$

usando a Equação (1.174). Substituindo na Equação (15.21a), temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-n}^n e^{i\omega(t-x)} d\omega dt. \tag{15.21c}$$

Permutando a ordem de integração e então considerando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos a Equação (15.20), o teorema integral de Fourier.

Entendendo que ele deve ter à frente um sinal de integral, como na Equação (15.21a), a identificação

$$\delta(t - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega \tag{15.21d}$$

fornece uma representação muito útil da função delta.

### 15.3 Transformadas de Fourier — Teorema da Inversão

Vamos definir  $g(\omega)$ , a transformada de Fourier da função  $f(t)$ , por

$$g(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \tag{15.22}$$

#### Transformada Exponencial

Então, pela Equação (15.20), temos a relação inversa,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{15.23}$$

Note que as Equações (15.22) e (15.23) são quase, mas não exatamente, simétricas, diferindo no sinal de  $i$ .

Aqui há dois pontos que merecem comentário. Primeiro, a simetria  $1/\sqrt{2\pi}$  é uma questão de opção e não de necessidade. Muitos autores anexarão todo o fator  $1/2\pi$  da Equação (15.20) a uma das duas equações: Equação (15.22) ou Equação (15.23). Segundo, embora a integral de Fourier, Equação (15.20), tenha sido alvo de muita atenção na literatura matemática, estaremos interessados primordialmente na transformada de Fourier e sua inversa. Elas são as equações que têm significância física.

Quando passamos o par de transformadas de Fourier para o espaço tridimensional, ele se torna

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \tag{15.23a}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k. \tag{15.23b}$$

As integrais estão em todo o espaço. A verificação, se quisermos, é imediata, substituindo o lado esquerdo de uma Equação no integrando da outra Equação e usando a função delta tridimensional.<sup>2</sup> A Equação (15.23b) pode ser interpretada como uma expansão de uma função  $f(\mathbf{r})$  em um contínuo de autofunções de onda plana; então,  $g(\mathbf{k})$  se torna a amplitude da onda,  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ .

#### Transformada de Co-Seno

Se  $f(x)$  for par ou ímpar, essas transformadas podem ser expressas de uma forma um pouco diferente. Considere, em primeiro lugar, uma função par  $f_c$  com  $f_c(x) = f_c(-x)$ . Escrevendo a exponencial da Equação (15.22) em forma trigonométrica,

$$\begin{aligned} g_c(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t) (\cos \omega t + i \text{sen } \omega t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(t) \cos \omega t dt, \end{aligned} \tag{15.24}$$

<sup>2</sup> $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(x_1 - x_2)\delta(y_1 - y_2)\delta(z_1 - z_2)$  com integral de Fourier  $\delta(x_1 - x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik_1(x_1 - x_2)] dk_1$  etc.



sendo que a dependência de  $\text{sen } \omega t$  desaparece com a integração sobre o intervalo simétrico  $(-\infty, \infty)$ . De modo semelhante, uma vez que  $\text{cos } \omega t$  é par, as Equações (15.23) se transformam em

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_c(\omega) \text{cos } \omega x \, d\omega. \quad (15.25)$$

As Equações (15.24) e (15.25) são conhecidas como transformadas de Fourier de co-seno.

### Transformada de Seno

O par correspondente de transformadas de Fourier de seno é obtido admitindo que  $f_s(x) = -f_s(-x)$ , ímpar, e aplicando os mesmos argumentos de simetria. As equações são

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(t) \text{sen } \omega t \, dt,^3 \quad (15.26)$$

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_s(\omega) \text{sen } \omega x \, d\omega. \quad (15.27)$$

Pela última equação podemos desenvolver a interpretação física de que  $f(x)$  está sendo descrita por um contínuo de ondas senoidais. A amplitude de  $\text{sen } \omega x$  é dada por  $\sqrt{2/\pi} g_s(\omega)$ , na qual  $g_s(\omega)$  é a transformada de Fourier de seno de  $f(x)$ . Veremos que a Equação (15.27) é a integral análoga ao somatório (Equação (14.24)). Interpretações similares são válidas para os casos de co-seno e exponencial.

Se considerarmos as Equações (15.22), (15.24) e (15.26) como as transformadas integrais diretas, descritas por  $\mathcal{L}$  Equação (15.10), Seção 15.1, as transformadas inversas correspondentes,  $\mathcal{L}^{-1}$  da Equação (15.11), são dadas pelas Equações (15.23), (15.25) e (15.27).

Note que cada uma das transformadas de Fourier de co-seno e de seno envolve somente valores positivos (e zero) dos argumentos. Usamos a paridade de  $f(x)$  para estabelecer as transformadas; mas, uma vez estabelecidas as transformadas, o comportamento das funções  $f$  e  $g$  para argumento negativo é irrelevante. Na verdade, as próprias equações transformadas impõem uma **paridade definida: par para a transformada de Fourier de co-seno e ímpar para a transformada de Fourier de seno.**

### Exemplo 15.3.1 TREM DE ONDAS FINITO

Uma importante aplicação da transformada de Fourier é a resolução de um pulso finito em ondas senoidais. Imagine que um trem de ondas  $\text{sen } \omega_0 t$  e seja limitado por célula de Kerr ou obturadores saturáveis de célula, de corante, de modo que temos

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen } \omega_0 t, & |t| < \frac{N\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |t| > \frac{N\pi}{\omega_0}. \end{cases} \quad (15.28)$$

Isso corresponde a  $N$  ciclos de nosso trem de ondas original (Figura 15.2). Uma vez que  $f(t)$  é ímpar, podemos usar a transformada de Fourier de seno (Equação (15.26)) para obter

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N\pi/\omega_0} \text{sen } \omega_0 t \text{sen } \omega t \, dt. \quad (15.29)$$

Integrando, encontramos nossa função amplitude:

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\text{sen}[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\text{sen}[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right]. \quad (15.30)$$

É de considerável interesse ver como  $g_s(\omega)$  depende da frequência. Para  $\omega_0$  e  $\omega \approx \omega_0$ , somente o primeiro termo será de alguma importância por causa dos denominadores. Ele está representado no gráfico da Figura 15.3. Essa é a curva da amplitude para o padrão de difração de fenda única.

Há zeros em

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{N}, \pm \frac{2}{N}, \quad \text{e assim por diante.} \quad (15.31)$$

<sup>3</sup>Note que um fator  $-i$  foi absorvido nessa  $g(\omega)$ .

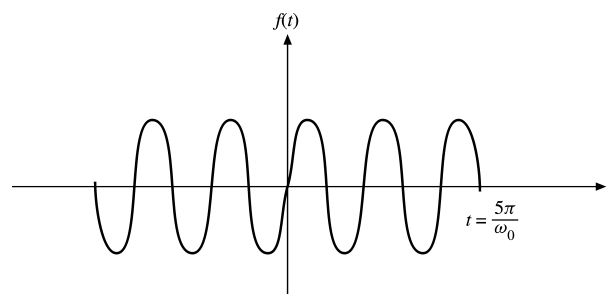


Figura 15.2: Trem de ondas finito.

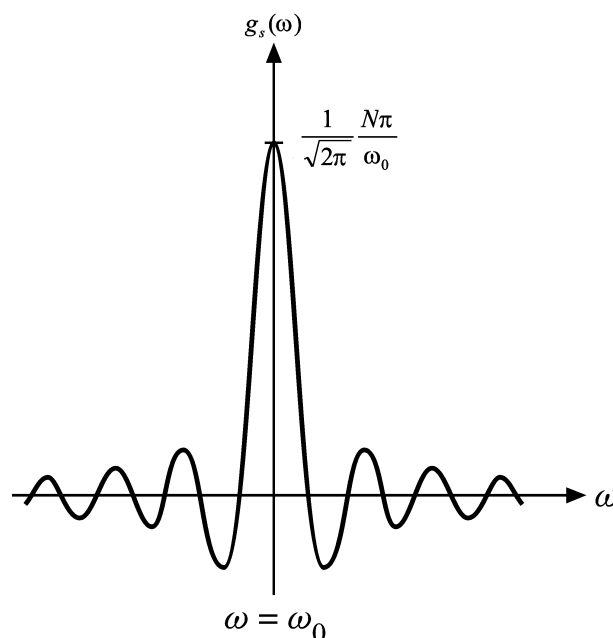


Figura 15.3: Transformada de Fourier de trem de ondas finito.

Para  $N$  grande,  $g_s(\omega)$  também pode ser interpretada como uma distribuição delta de Dirac, como na Seção 1.15. Uma vez que as distribuições fora do máximo central são pequenas nesse caso, podemos considerar

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N} \tag{15.32}$$

uma boa medida da dispersão da frequência de nosso pulso de onda. É claro que, se  $N$  for grande (um pulso longo), a dispersão da frequência será pequena. Por outro lado, se nosso pulso for limitado e ficar curto,  $N$  pequeno, a distribuição de frequência será mais larga e os máximos secundários serão mais importantes. ■

### Princípio da Incerteza

Eis aqui um análogo clássico do famoso princípio da incerteza da Mecânica Quântica. Se estivermos tratando com ondas eletromagnéticas,

$$\begin{aligned} \frac{h\omega}{2\pi} &= E, & \text{energia (de nosso fóton)} \\ \frac{h\Delta\omega}{2\pi} &= \Delta E, \end{aligned} \tag{15.33}$$

sendo  $h$  a constante de Planck. Aqui,  $\Delta E$  representa uma incerteza na energia de nosso pulso. Há também uma incerteza em relação ao tempo, porque nossa onda de  $N$  ciclos requer  $2N\pi/\omega_0$  segundos para passar. Considerando

$$\Delta t = \frac{2N\pi}{\omega_0}, \tag{15.34}$$





temos o produto dessas duas incertezas:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h \Delta \omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h \frac{\omega_0}{2\pi N} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h. \quad (15.35)$$

Na verdade, o princípio da incerteza de Heisenberg afirma que

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}, \quad (15.36)$$

e isso é claramente satisfeito em nosso exemplo.

### Exercícios

- 15.3.1** (a) Mostre que  $g(-\omega) = g^*(\omega)$  é uma condição necessária e suficiente para  $f(x)$  ser real.  
 (b) Mostre que  $g(-\omega) = -g^*(\omega)$  é uma condição necessária e suficiente para  $f(x)$  ser imaginária pura.

*Nota:* A condição da parte (a) é usada no desenvolvimento das relações de dispersão da Seção 7.2.

- 15.3.2** Seja  $F(\omega)$  a transformada (exponencial) de Fourier de  $f(x)$  e  $G(\omega)$  a transformada de Fourier de  $g(x) = f(x+a)$ . Mostre que

$$G(\omega) = e^{-ia\omega} F(\omega).$$

- 15.3.3** A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

é uma função escalonada finita simétrica.

- (a) Ache  $g_c(\omega)$ , transformada de Fourier de co-seno de  $f(x)$ .  
 (b) Considerando a transformada inversa de co-seno, mostre que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen } \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega.$$

- (c) Pela parte (b), mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = 1, \\ \frac{\pi}{2}, & |x| < 1. \end{cases}$$

- 15.3.4** (a) Mostre que as transformadas de Fourier de seno e co-seno de  $e^{-at}$  são

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}, \quad g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}.$$

*Sugestão:* Cada uma das transformadas pode ser relacionada com a outra por integração por partes.

- (b) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\omega \text{sen } \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Esses resultados também são obtidos por integração de contorno (Exercício 7.1.14).

- 15.3.5** Ache a transformada de Fourier do pulso triangular (Figura 15.4).

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|), & |x| < \frac{1}{a}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{a}. \end{cases}$$

*Nota:* Essa função dá uma outra seqüência delta com  $h = a$  e  $a \rightarrow \infty$ .

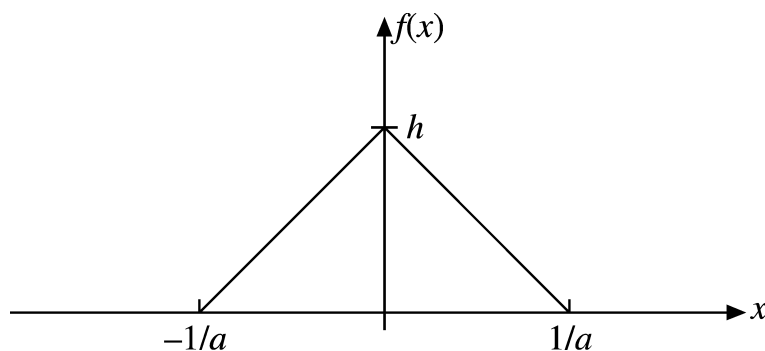


Figura 15.4: Pulso triangular.

**15.3.6** Defina uma seqüência

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

(Essa é a Equação (1.172)). Expresse  $\delta_n(x)$  como uma integral de Fourier (via o teorema integral de Fourier, transformada inversa etc.). Por fim, mostre que podemos escrever

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

**15.3.7** Usando a seqüência

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2),$$

mostre que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

*Nota:* Lembre-se de que  $\delta(x)$  é definida em termos de seu comportamento como parte de um integrando (Seção 1.15), em especial Equações (1.178) e (1.179).

**15.3.8** Derive as representações de seno e co-seno de  $\delta(t - x)$  que são comparáveis com a representação exponencial, Equação (15.21d).

Resposta.  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega t \sin \omega x d\omega, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t \cos \omega x d\omega.$

**15.3.9** Em uma cavidade ressonante, uma oscilação eletromagnética de freqüência  $\omega_0$  se extingue como

$$A(t) = A_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{-i\omega_0 t}, \quad t > 0.$$

(Considere  $A(t) = 0$ , para  $t < 0$ .) O parâmetro  $Q$  é uma medida da razão entre energia armazenada e perda de energia por ciclo. Calcule a distribuição de freqüência da oscilação,  $a^*(\omega)a(\omega)$ , em que  $a(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $A(t)$ .

*Nota:* Quanto maior for  $Q$ , mais inclinada será sua linha de ressonância.

Resposta:  $a^*(\omega)a(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2}.$

**15.3.10** Prove que

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{E_0 - i\Gamma/2 - \hbar\omega} = \begin{cases} \exp(-\frac{\Gamma t}{2\hbar}) \exp(-\frac{iE_0 t}{\hbar}), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Essa integral de Fourier aparece em uma variedade de problemas da Mecânica Quântica: penetração de barreira WKB (Wentzel-Kramers Brillouin), dispersão, teoria da perturbação dependente do tempo, e assim por diante.

*Sugestão:* Tente integração de contorno.



**15.3.11** Verifique que as seguintes são transformadas integrais de Fourier uma da outra:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad \text{e } J_0(ay), \\
 \text{(b)} \quad & \begin{cases} 0, & |x| < a, \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, & |x| > a, \end{cases} \quad \text{e } N_0(a|y|), \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} & \text{e } K_0(a|y|). \end{cases}
 \end{aligned}$$

(d) Você tem uma idéia de por que  $I_0(ay)$  não está incluída nessa lista?

*Sugestão:*  $J_0$ ,  $N_0$  e  $K_0$  podem ser transformadas com muita facilidade usando uma representação exponencial, invertendo a ordem de integração e empregando a representação exponencial da função delta de Dirac (Seção 15.2). Esses casos podem ser tratados igualmente bem como transformadas de Fourier de co-seno.

*Nota:* A relação  $K_0$  parece consequência de uma Equação de função de Green no Exercício 9.7.14.

**15.3.12** Um cálculo do campo magnético de um circuito de corrente circular em coordenadas cilíndricas circulares leva à integral

$$\int_0^\infty \cos kz k K_1(ka) dk.$$

Mostre que essa integral é igual a

$$\frac{\pi a}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

*Sugestão:* Tente diferenciar o Exercício 15.3.11(c).

**15.3.13** Como extensão do Exercício 15.3.11, mostre que

$$\text{(a)} \int_0^\infty J_0(y) dy = 1, \quad \text{(b)} \int_0^\infty N_0(y) dy = 0, \quad \text{(c)} \int_0^\infty K_0(y) dy = \frac{\pi}{2}.$$

**15.3.14** A integral de Fourier, Equação (15.18), é considerada sem significado para  $f(t) = \cos at$ . Mostre que a integral de Fourier pode ser estendida para cobrir  $f(t) = \cos at$  pela utilização da função delta de Dirac.

**15.3.15** Mostre que

$$\int_0^\infty \sin ka J_0(k\rho) dk = \begin{cases} (a^2 - \rho^2)^{-1/2}, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Aqui,  $a$  e  $\rho$  são positivos. A equação resulta da determinação da distribuição de cargas em um disco condutor isolado, de raio  $a$ . Note que a função à direita tem uma descontinuidade **infinita**  $\rho = a$ .

*Nota:* A abordagem da transformada de Laplace aparece no Exercício 15.10.8.

**15.3.16** A função  $f(r)$  tem uma transformada exponencial de Fourier,

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} k^2}.$$

Determine  $f(\mathbf{r})$ .

*Sugestão:* Use coordenadas polares esféricas no espaço  $k$ .

Resposta:  $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}$ .

**15.3.17** (a) Calcule a transformada exponencial de Fourier de  $f(x) = e^{-a|x|}$ .

(b) Calcule a transformada inversa empregando o cálculo de resíduos (Seção 7.1).

**15.3.18** Mostre que as seguintes são transformadas de Fourier uma da outra.

$$i^n J_n(t) \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) (1 - x^2)^{-1/2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$T_n(x)$  é a polinomial de Chebyshev de enésima ordem.

*Sugestão:* Com  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ , a transformada de  $T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}$  leva a uma representação integral de  $J_n(t)$ .

**15.3.19** Mostre que a transformada exponencial de Fourier de

$$f(\mu) = \begin{cases} P_n(\mu), & |\mu| \leq 1, \\ 0, & |\mu| > 1 \end{cases}$$

é  $(2i^n/2\pi)j_n(kr)$ . Aqui,  $P_n(\mu)$  é uma polinomial de Legendre e  $j_n(kr)$  é uma função de Bessel esférica.

**15.3.20** Mostre que a transformada exponencial tridimensional de Fourier de uma função radialmente simétrica pode ser reescrita como uma transformada de Fourier de seno:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [rf(r)] \text{sen } kr dr.$$

**15.3.21** (a) Mostre que  $f(x) = x^{-1/2}$  é **auto-recíproca** sob as transformadas de Fourier de co-seno e seno, isto é,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \cos xt dx &= t^{-1/2}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \text{sen } xt ds &= t^{-1/2}. \end{aligned}$$

(b) Use os resultados precedentes para avaliar as integrais de Fresnel  $\int_0^{\infty} \cos(y^2) dy$  e  $\int_0^{\infty} \text{sen}(y^2) dy$ .

## 15.4 Transformada de Fourier de Derivadas

Na Seção 15.1, a Figura 15.1 delinea a técnica geral de usar transformadas de Fourier e transformadas inversas para resolver um problema. Aqui damos um passo inicial na resolução de uma equação diferencial obtendo a transformada de Fourier de uma derivada.

Usando a forma exponencial, determinamos que a transformada de Fourier de  $f(x)$  é

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx, \tag{15.37}$$

e para  $df(x)/dx$ ,

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx. \tag{15.38}$$

Integrando a Equação (15.38) por partes, obtemos

$$g_1(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \tag{15.39}$$

Se  $f(x)$  desaparecer<sup>4</sup> quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , temos

$$g_1(\omega) = -i\omega g(\omega); \tag{15.40}$$

isto é, a transformada da derivada é  $(-i\omega)$  vezes a transformada da função original. Isso pode ser imediatamente generalizado para a enésima derivada, dando como resultado

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega), \tag{15.41}$$

contanto que todas as partes integradas desapareçam quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Esse é o poder da transformada de Fourier, a razão por que ela é tão útil para resolver equações diferenciais (parciais). A operação de diferenciação foi substituída por uma multiplicação no espaço  $\omega$ .

<sup>4</sup>À parte os casos como o Exercício 15.3.6,  $f(x)$  deve desaparecer quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , para que a transformada de Fourier de  $f(x)$  exista.



### Exemplo 15.4.1 EQUAÇÃO DE ONDA

Essa técnica pode ser usada com vantagem no tratamento de EDPs. Para ilustrar a técnica, vamos derivar uma expressão familiar da Física elementar. Uma corda infinitamente longa está vibrando livremente. A amplitude  $y$  das vibrações (pequenas) satisfaz a Equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (15.42)$$

Vamos admitir uma condição inicial

$$y(x, 0) = f(x), \quad (15.43)$$

em que  $f$  é localizada, isto é, se aproxima de zero em  $x$  grande.

Aplicando nossa transformada de Fourier em  $x$ , o que significa multiplicar por  $e^{i\alpha x}$ , e integrando sobre  $x$ , obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{i\alpha x} dx \quad (15.44)$$

ou

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Y(\alpha, t)}{\partial t^2}. \quad (15.45)$$

Aqui, usamos

$$Y(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\alpha x} dx \quad (15.46)$$

e a Equação (15.41) para a derivada de segunda ordem. Note que a parte integrada da Equação (15.39) se anula: a onda ainda não foi a  $\pm\infty$  porque está se propagando para diante no tempo e não há nenhuma fonte no infinito porque  $f(\pm\infty) = 0$ . Uma vez que não aparece nenhuma derivada em relação a  $\alpha$ , a Equação (15.45) é, na verdade, uma EDO, ou seja, a Equação do oscilador linear. Essa transformação, de uma EDP para uma EDO, é um feito significativo. Resolvemos a Equação (15.45) sujeita às condições iniciais adequadas. Em  $t = 0$ , aplicando a Equação (15.43), a Equação (15.46) se reduz a

$$Y(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha). \quad (15.47)$$

A solução geral da Equação (15.45) em forma exponencial é

$$Y(\alpha, t) = F(\alpha) e^{\pm i v \alpha t}. \quad (15.48)$$

Usando a fórmula de inversão (Equação (15.23)), temos

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (15.49)$$

e, pela Equação (15.48),

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha(x \mp vt)} d\alpha. \quad (15.50)$$

Uma vez que  $f(x)$  é a transformada inversa de Fourier de  $F(\alpha)$ ,

$$y(x, t) = f(x \mp vt), \quad (15.51)$$

correspondente às ondas que avançam nas direções  $+x$  e  $-x$ , respectivamente.

As combinações lineares de ondas particulares são dadas pela condição de contorno da Equação (15.43) e alguma outra condição de contorno, tal como uma restrição sobre  $\partial y / \partial t$ . ■

A proeza que a transformada de Fourier realiza aqui merece destaque especial.

- Nossa transformada de Fourier converteu uma EDP em uma EDO, em que o “grau de transcendência” do problema foi reduzido.

Na Seção 15.9, transformadas de Laplace são usadas para converter EDOs (com coeficientes constantes) em equações algébricas. Mais uma vez, o grau de transcendência é reduzido. O problema é simplificado, como mostra a Figura 15.1.

### Exemplo 15.4.2 EDP DO FLUXO DE CALOR

Para ilustrar outra transformação de uma EDP em uma EDO, vamos aplicar a transformada de Fourier à Equação diferencial parcial do fluxo de calor

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

em que a solução  $\psi(x, t)$  é a temperatura no espaço como uma função do tempo. Considerando a transformada de Fourier de ambos os lados dessa Equação (note que, aqui, somente  $\omega$  é a variável da transformada conjugada para  $x$  porque  $t$  é o tempo na EDP do fluxo de calor), em que

$$\Psi(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{i\omega x} dx,$$

isso resulta em uma EDO para a transformada de Fourier  $\Psi$  de  $\psi$  na variável de tempo  $t$ ,

$$\frac{\partial \Psi(\omega, t)}{\partial t} = -a^2 \omega^2 \Psi(\omega, t).$$

Integrando, obtemos

$$\ln \Psi = -a^2 \omega^2 t + \ln C \quad \text{ou} \quad \Psi = C e^{-a^2 \omega^2 t},$$

em que a constante de integração  $C$  ainda pode depender de  $\omega$  e, em geral, é determinada por condições iniciais. De fato,  $C = \Psi(\omega, 0)$  é a distribuição espacial inicial de  $\Psi$ , portanto é dada pela transformada (em  $x$ ) da distribuição espacial inicial de  $\psi$ , a saber,  $\psi(x, 0)$ . Colocando essa solução de volta em nossa transformada inversa de Fourier, temos como resultado

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega x} e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega.$$

Por simplicidade, aqui consideramos  $C$  independente de  $\omega$  (admitindo uma distribuição de temperatura inicial de função delta) e integramos completando o quadrado em  $\omega$ , como no Exemplo 15.1.1, fazendo as trocas adequadas de variáveis e parâmetros ( $a^2 \rightarrow a^2 t$ ,  $\omega \rightarrow x, t \rightarrow -\omega$ ). Isso resulta na solução particular da EDP de fluxo de calor,

$$\psi(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

que aparece como uma hipótese inteligente no Capítulo 8. Na verdade, mostramos que  $\psi$  é a transformada inversa de Fourier de  $C \exp(-a^2 \omega^2 t)$ . ■

### Exemplo 15.4.3 INVERSÃO DE EDP

Derive a integral de Fourier para a função de Green  $G_0$  da EDP de Poisson, que é uma solução de

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Uma vez conhecida  $G_0$ , a solução geral da EDP de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

da eletrostática, é dada como

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') 4\pi\rho(\mathbf{r}') d^3r'.$$

Aplicando  $\nabla^2$  a  $\Phi$  e usando a EDP que a função de Green satisfaz, verificamos que

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \int \nabla^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') 4\pi\rho(\mathbf{r}') d^3r' = - \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') 4\pi\rho(\mathbf{r}') d^3r' = -4\pi\rho(\mathbf{r}).$$



Agora usamos a transformada de Fourier de  $G_0$ , que é  $g_0$ , e desta a da função  $\delta$ , escrevendo

$$\nabla^2 \int g_0(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = - \int e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}.$$

Como os integrandos de integrais de Fourier iguais devem ser os mesmos em (quase) todo lugar, o que resulta da transformada inversa de Fourier, e com

$$\nabla e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = i\mathbf{p}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')},$$

isso resulta em  $-\mathbf{p}^2 g_0(\mathbf{p}) = -1$ . Por conseguinte, a aplicação do laplaciano à integral de Fourier  $f(\mathbf{r})$  corresponde a multiplicar sua transformada de Fourier  $g(\mathbf{p})$  por  $-\mathbf{p}^2$ . Substituir essa solução na transformada inversa de Fourier para  $G_0$  resulta em

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \mathbf{p}^2} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Podemos verificar a última parte desse resultado aplicando  $\nabla^2$  a  $G_0$  novamente e lembrando, do Capítulo 1, que  $\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ .

A transformada inversa de Fourier pode ser avaliada usando coordenadas polares, explorando a simetria esférica de  $\mathbf{p}^2$ . Por simplicidade, escrevemos  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e denominamos  $\theta$  o ângulo entre  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{p}$ ,

$$\begin{aligned} \int e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \frac{d^3p}{p^2} &= \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 e^{ipR \cos \theta} d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{iR} \int_0^\infty \frac{dp}{p} e^{ipR \cos \theta} \Big|_{\cos \theta = -1}^1 = \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty \frac{\text{sen } pR}{p} dp \\ &= \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty \frac{\text{sen } pR}{pR} d(pR) = \frac{2\pi^2}{R}, \end{aligned}$$

em que  $\theta$  e  $\varphi$  são os ângulos de  $\mathbf{p}$  e  $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , do Exemplo 7.1.4. Dividindo por  $(2\pi)^3$ , obtemos  $G_0(R) = 1/(4\pi R)$ , como afirmamos. Uma avaliação dessa transformada de Fourier por integração de contorno é dada no Exemplo 9.7.2. ■

## Exercícios

- 15.4.1** A equação de idade de Fermi unidimensional para a difusão de nêutrons que desaceleram em algum meio (como grafite) é

$$\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau}.$$

Aqui,  $q$  é o número de nêutrons que desaceleram, caindo abaixo de alguma dada energia por segundo por unidade de volume. A idade de Fermi,  $\tau$ , é uma medida da perda de energia.

Se  $q(x, 0) = S\delta(x)$ , correspondente a uma fonte plana de nêutrons em  $x = 0$ , emitindo  $S$  nêutrons por unidade de área por segundo, derive a solução

$$q = S \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}.$$

*Sugestão:* Substitua  $q(x, \tau)$  por

$$p(k, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, \tau) e^{ikx} dx.$$

Isso é análogo à difusão de calor em um meio infinito.

- 15.4.2** A Equação (15.41) resulta em

$$g_2(\omega) = -\omega^2 g(\omega)$$

para a transformada de Fourier da derivada de segunda ordem de  $f(x)$ . A condição  $f(x) \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow \pm\infty$  pode ser ligeiramente relaxada. Ache a condição menos restritiva para a equação precedente para que  $g_2(\omega)$  seja válida.

Resposta:  $\left[ \frac{df(x)}{dx} - i\omega f(x) \right] e^{i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$

15.4.3 A equação de difusão de nêutrons unidimensional com uma fonte (plana) é

$$-D \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + K^2 D \varphi(x) = Q \delta(x),$$

em que  $\varphi(x)$  é o fluxo de nêutrons,  $Q\delta(x)$  é a fonte (plana) em  $x = 0$ , e  $D$  e  $K^2$  são constantes. Aplique a transformada de Fourier. Resolva a equação em espaço de transformada. Transforme sua solução de volta ao espaço  $x$ .

Resposta:  $\varphi(x) = \frac{Q}{2KD} e^{-|Kx|}.$

15.4.4 Para uma fonte pontual na origem, a Equação de difusão de nêutron tridimensional se torna

$$-D \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + K^2 D \varphi(\mathbf{r}) = Q \delta(\mathbf{r}).$$

Aplique uma transformada de Fourier tridimensional e resolva a equação transformada. Transforme a solução de volta ao espaço  $\mathbf{r}$ .

15.4.5 (a) Dado que  $F(\mathbf{k})$  é a transformada tridimensional de Fourier de  $f(\mathbf{r})$  e  $F_1(\mathbf{k})$  é a transformada tridimensional de Fourier de  $\nabla f(\mathbf{r})$ , mostre que

$$F_1(\mathbf{k}) = (-i\mathbf{k})F(\mathbf{k}).$$

Essa é a generalização tridimensional da Equação (15.40).

(b) Mostre que a transformada tridimensional de Fourier de  $\nabla \cdot \nabla f(\mathbf{r})$  é

$$F_2(\mathbf{k}) = (-i\mathbf{k})^2 F(\mathbf{k}).$$

Nota: O vetor  $\mathbf{k}$  é um vetor no espaço da transformada. Na Seção 15.6 teremos  $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}$ , momento linear.

### 15.5 Teorema de Convolução

Empregaremos convoluções para resolver equações diferenciais, normalizar funções de onda de momentum (Seção 15.6) e para investigar funções de transferência (Seção 15.7).

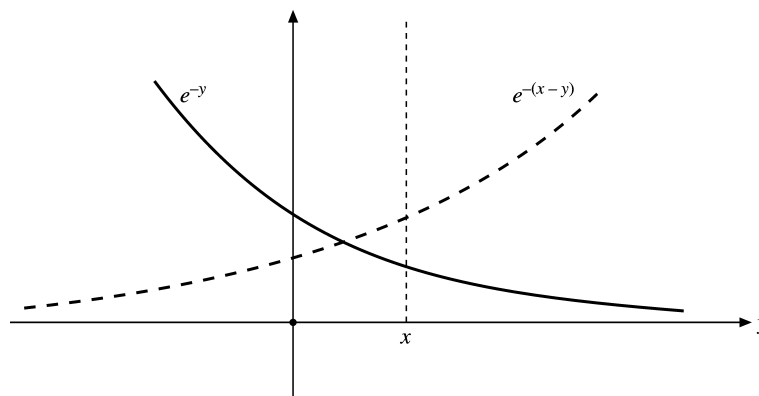


Figura 15.5: Exemplo de "dobradura".

Vamos considerar duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  com transformadas de Fourier  $F(t)$  e  $G(t)$ , respectivamente. Definimos a operação

$$f * g \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x - y) dy \tag{15.52}$$

como a **convolução** das duas funções  $f$  e  $g$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Essa forma de uma integral aparece na teoria da probabilidade na determinação da densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias independentes. Nossa





solução da equação de Poisson, Equação (9.148), pode ser interpretada como uma convolução de uma distribuição de carga,  $\rho(\mathbf{r}_2)$  e uma função de peso,  $(4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)^{-1}$ . Em outras palavras, às vezes nos referimos a isso como **Faltung**, usando a palavra alemã para “dobradura.”<sup>5</sup> Agora transformamos a integral na Equação (15.52) introduzindo as transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-y)} dt dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ity} dy \right] e^{-itx} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx} dt, \end{aligned} \tag{15.53}$$

permutando a ordem de integração e transformando  $g(y)$ . Esse resultado pode ser interpretado como segue: a transformada inversa de Fourier de um **produto** de transformadas de Fourier é a convolução das funções originais,  $f * g$ .

Para o caso especial  $x = 0$ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)g(y) dy. \tag{15.54}$$

O sinal de menos em  $-y$  sugere que tentemos modificações. Agora fazemos isso com  $g^*$  em vez de  $g$  usando uma técnica diferente.

### Relação de Parseval

Resultados análogos das Equações (15.53) e (15.54) podem ser derivados para as transformadas de Fourier de seno e co-seno (Exercícios 15.5.1 e 15.5.3). A Equação (15.54) e as correspondentes convoluções de seno e co-seno costumam ser denominadas *relações de Parseval* por analogia com o teorema de Parseval para séries de Fourier (Capítulo 14, Exercício 14.4.2).

A relação de Parseval<sup>6,7</sup>,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt \tag{15.55}$$

pode ser derivada de um modo elegante usando a representação de função delta de Dirac, Equação (15.21d). Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)e^{ixt} dx dt, \tag{15.56}$$

com atenção à conjugação complexa na transformação de  $G^*(x)$  para  $g^*(t)$ . Integrando em primeiro lugar sobre  $t$  e usando a Equação (15.21d), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)\delta(x-\omega) dx d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega, \end{aligned} \tag{15.57}$$

nossa desejada relação de Parseval. Se  $f(t) = g(t)$ , então as integrais na relação de Parseval são integrais de normalização (Seção 10.4). A Equação (15.57) garante que, se uma função  $f(t)$  for normalizada para unidade, sua transformada  $F(\omega)$  também é normalizada para unidade, o que é de extrema importância em Mecânica Quântica, como veremos na próxima seção.

Pode-se mostrar que a transformada de Fourier é uma operação unitária (no espaço de Hilbert  $L^2$ , funções quadrado de integráveis). A relação de Parseval é uma reflexão dessa propriedade unitária, análoga ao Exercício 3.4.26 para matrizes.

Na óptica de difração de Fraunhofer, o padrão de difração (amplitudes) aparece como a transformada da função que descreve a abertura (compare com o Exercício 15.5.5). Com intensidade proporcional ao quadrado

<sup>5</sup>A Figura 15.5 mostra um gráfico para  $f(y) = e^{-y}$ ,  $f(y)$ , em que fica claro que  $f(x-y)$  são imagens especulares uma da outra em relação à reta vertical  $f(y)$  e  $f(x-y)$ . Isso significa que poderíamos gerar  $y = x/2$ , dobrando  $f(x-y)$  sobre a reta  $f(y) y = x/2$ .

<sup>6</sup>Note que todos os argumentos são positivos, ao contrário da Equação (15.54).

<sup>7</sup>Alguns autores preferem restringir o nome Parseval à série e referir-se à Equação (15.55) como **teorema de Rayleigh**.

da amplitude, a relação de Parseval implica que a energia que passa pela abertura parece estar em algum lugar do padrão de difração — uma afirmação da conservação de energia. Relações de Parseval podem ser desenvolvidas independentemente da transformada inversa de Fourier e então usadas rigorosamente para derivar a transformada inversa. Detalhes são dados por Morse e Feshbach,<sup>8</sup> Seção 4.8 (veja também o Exercício 15.5.4).

### Exercícios

**15.5.1** Resolva a equação de convolução correspondente à Equação (15.53) para

(a) Transformadas de Fourier de seno

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty g(y) [f(y+x) + f(y-x)] dy = \int_0^\infty F_s(s) G_s(s) \cos sx ds,$$

em que  $f$  e  $g$  são funções ímpares.

(b) Transformadas de Fourier de co-seno

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty g(y) [f(y+x) + f(x-y)] dy = \int_0^\infty F_c(s) G_c(s) \cos sx ds,$$

em que  $f$  e  $g$  são funções pares.

**15.5.2**  $F(\rho)$  e  $G(\rho)$  são as transformadas de Hankel de  $f(r)$  e  $g(r)$ , respectivamente (Exercício 15.1.1). Derive a relação de Parseval de transformada de Hankel

$$\int_0^\infty F^*(\rho) G(\rho) \rho d\rho = \int_0^\infty f^*(r) g(r) r dr.$$

**15.5.3** Mostre que para ambas as transformadas de Fourier de seno e co-seno a relação de Parseval tem a forma

$$\int_0^\infty F(t) G(t) dt = \int_0^\infty f(y) g(y) dy.$$

**15.5.4** Partindo da relação de Parseval (Equação (15.54)), faça  $g(y) = 1, 0 \leq y \leq \alpha$ , e zero em todos os outros lugares. A partir disso, derive a transformada inversa de Fourier (Equação (15.23)).

*Sugestão:* Diferencie com relação a  $\alpha$ .

**15.5.5** (a) Um pulso retangular é descrito por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Mostre que a transformada exponencial de Fourier é

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } at}{t}.$$

Esse é o problema da difração de fenda única da óptica física. A fenda é descrita por  $f(x)$ . A **amplitude** do padrão de difração é dada pela transformada de Fourier  $F(t)$ .

(b) Use a relação de Parseval para avaliar

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt.$$

Essa integral também pode ser avaliada usando o cálculo de resíduos, Exercício 7.1.12.

Resposta: (b)  $\pi$ .

**15.5.6** Resolva a Equação de Poisson,  $\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ , pela seguinte seqüência de operações:

(a) Considere a transformada de Fourier de ambos os lados dessa equação. Resolva para a transformada de Fourier de  $\psi(\mathbf{r})$ .

(b) Efetue a transformada inversa de Fourier usando uma analogia tridimensional do teorema da convolução, Equação (15.53).

<sup>8</sup>P. M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Nova York: McGraw-Hill (1953).



- 15.5.7 (a) Dada  $f(x) = 1 - |x/2|, -2 \leq x \leq 2$ , e zero em todos os outros lugares, mostre que a transformada de Fourier de  $f(x)$  é

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\text{sen } t}{t} \right)^2.$$

- (b) Usando a relação de Parseval, calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } t}{t} \right)^4 dt.$$

Resposta: (b)  $\frac{2\pi}{3}$ .

- 15.5.8 Sendo  $F(t)$  e  $G(t)$  as transformadas de Fourier de  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t) - G(t)|^2 dt.$$

Se  $g(x)$  for uma aproximação de  $f(x)$ , a relação precedente indica que a média dos desvios ao quadrado no espaço  $t$  é igual à média dos desvios ao quadrado no espaço  $x$ .

- 15.5.9 Use a relação de Parseval para calcular

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2},$  (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}.$

Sugestão: Compare com o Exercício 15.3.4.

Resposta. (a)  $\frac{\pi}{2a^3},$  (b)  $\frac{\pi}{2a}.$

## 15.6 Representação de Momentum

Em Dinâmica Avançada e em Mecânica Quântica, momento linear e posição espacial ocorrem em pé de igualdade. Nesta seção começaremos com a distribuição espacial usual e derivaremos a distribuição de momentum correspondente. Para o caso unidimensional, nossa função de onda  $\psi(x)$  tem as seguintes propriedades:

1.  $\psi^*(x)\psi(x) dx$  é a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula quântica entre  $x$  e  $x + dx$ , e

2. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) dx = 1 \tag{15.58}$$

corresponde à probabilidade unitária.

3. Além disso, temos

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x) dx \tag{15.59}$$

para a posição **média** da partícula ao longo do eixo  $x$  que costuma ser denominada **valor esperado**.

Queremos uma função  $g(p)$  que dará a mesma informação sobre o momentum:

1.  $g^*(p)g(p) dp$  é a densidade de probabilidade de que nossa partícula quântica tenha um momentum entre  $p$  e  $p + dp$ .

2. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)g(p) dp = 1. \tag{15.60}$$

3. 
$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)p g(p) dp. \tag{15.61}$$

Como mostraremos na seqüência, tal função é dada pela transformada de Fourier de nossa função espaço  $\psi(x)$ . Especificamente,<sup>9</sup>

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx, \quad (15.62)$$

$$g^*(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) e^{ipx/\hbar} dx. \quad (15.63)$$

A função momentum tridimensional correspondente é

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3r.$$

Para verificar as Equações (15.62) e (15.63), vamos verificar as propriedades 2 e 3.

A propriedade 2, a normalização, é automaticamente satisfeita como uma relação de Parseval, Equação (15.55). Se a função espaço  $\psi(x)$  é normalizada à unidade, a função de momentum  $g(p)$  também é normalizada à unidade.

Para verificar a propriedade 3, devemos mostrar que

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(p) p g(p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) dx, \quad (15.64)$$

em que  $(\hbar/i)(d/dx)$  é o operador de momentum na representação de espaço. Substituímos as funções de momentum por funções de espaço nas quais efetuamos transformação de Fourier, e a primeira integral se torna

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-ip(x-x')/\hbar} \psi^*(x') \psi(x) dp dx' dx. \quad (15.65)$$

Agora usamos a identidade de onda plana

$$p e^{-ip(x-x')/\hbar} = \frac{d}{dx} \left[ -\frac{\hbar}{i} e^{-ip(x-x')/\hbar} \right], \quad (15.66)$$

sendo  $p$  uma constante, não um operador. Substituindo na Equação (15.65) e integrando por partes, mantendo  $x'$  e  $p$  constantes, obtemos

$$\langle p \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-x')/\hbar} dp \right] \cdot \psi^*(x') \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) dx' dx. \quad (15.67)$$

Aqui, admitimos que  $\psi(x)$  se anula quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , eliminando a parte integrada. Usando a função delta de Dirac, Equação (15.21c), a Equação (15.67) se reduz à Equação (15.64) para verificar nossa representação de momentum.

Como alternativa, integração sobre  $p$  é efetuada primeiro na Equação (15.65), levando a

$$\int_{-\infty}^{\infty} p e^{-ip(x-x')/\hbar} dp = 2\pi i \hbar^2 \delta'(x-x'),$$

e usando o Exercício 1.15.9, podemos efetuar a integração sobre  $x$ , o que transforma  $\psi(x)$  em  $-d\psi(x')/dx'$ . A integral restante sobre  $x'$  é o lado direito da Equação (15.64).

<sup>9</sup>A  $\hbar$  pode ser evitada usando o número de onda  $k, p = k\hbar$  (e  $\mathbf{p} = \mathbf{k}\hbar$ ), portanto

$$\varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \psi(x) e^{-ikx} dx.$$

Um exemplo dessa notação aparece na Seção 16.1.



### Exemplo 15.6.1 ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

O estado fundamental do átomo de hidrogênio<sup>10</sup> pode ser descrito pela função de onda espacial

$$\psi(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-r/a_0}, \quad (15.68)$$

sendo  $a_0$  o raio de Bohr,  $4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ . Agora temos uma função de onda tridimensional. A transformada correspondente à Equação (15.62) é

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3r. \quad (15.69)$$

Substituindo a Equação (15.68) na Equação (15.69) e usando

$$\int e^{-ar+ib\cdot r} d^3r = \frac{8\pi a}{(a^2 + b^2)^2}, \quad (15.70)$$

obtemos a função de onda de momentum hidrogênica,

$$g(\mathbf{p}) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{a_0^{3/2} \hbar^{5/2}}{(a_0^2 p^2 + \hbar^2)^2}. \quad (15.71)$$

Essas funções de momentum mostraram ser úteis em problemas como o espalhamento Compton de elétrons atômicos, a distribuição de comprimento de ondas da radiação dispersa, dependendo da distribuição do momentum dos elétrons-alvo.

A relação entre a representação de espaço ordinário e a representação de momentum pode ser esclarecida considerando as relações de comutação básicas da Mecânica Quântica. Passamos de uma hamiltoniana clássica para a equação de onda de Schrödinger impondo que o momentum  $p$  e a posição  $x$  **não** comutem. Em vez disso, exigimos que

$$[p, x] \equiv px - xp = -i\hbar. \quad (15.72)$$

Para o caso multidimensional, a Equação (15.72) é substituída por

$$[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}. \quad (15.73)$$

A representação de espaço de Schrödinger é obtida usando

$$x \rightarrow x: \quad p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i},$$

substituindo o momentum por uma derivada parcial de espacial. Vemos que

$$[p, x]\psi(x) = -i\hbar\psi(x). \quad (15.74)$$

Contudo, a Equação (15.72) também pode ser satisfeita igualmente bem usando

$$p \rightarrow p: \quad x_j \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Essa é a representação de momentum. Então,

$$[p, x]g(p) = -i\hbar g(p). \quad (15.75)$$

Por conseguinte, a representação ( $x$ ) não é única; ( $p$ ) é uma possibilidade alternativa.

Em geral, a representação ( $x$ ) de Schrödinger que leva à equação de onda de Schrödinger é mais conveniente porque a energia potencial  $V$  geralmente é dada como uma função de posição  $V(x, y, z)$ . A representação de momentum ( $p$ ) usualmente leva a uma equação integral (compare com o Capítulo 16 para os prós e contras das equações integrais). Como exceção, considere o oscilador harmônico. ■

<sup>10</sup>Ver E. V. Ivash, A momentum representation treatment of the hydrogen atom problem. *Am. J. Phys.* 40: 1.095 (1972), se quiser um tratamento de representação de momentum dos estados  $l = 0$  do átomo de hidrogênio.

### Exemplo 15.6.2 OSCILADOR HARMÔNICO

A hamiltoniana clássica (energia cinética + energia potencial = energia total energy)

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E, \tag{15.76}$$

em que  $k$  é a constante da lei de Hooke.

Na representação de Schrödinger obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x). \tag{15.77}$$

Para energia total  $E$  igual a  $\sqrt{(k/m)\hbar/2}$  há uma solução não-normalizada (Seção 13.1),

$$\psi(x) = e^{-(\sqrt{mk}/2\hbar)x^2}. \tag{15.78}$$

A representação de momentum leva a

$$\frac{p^2}{2m}g(p) - \frac{\hbar^2 k}{2} \frac{d^2g(p)}{dp^2} = Eg(p). \tag{15.79}$$

Mais uma vez, para

$$E = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\hbar}{2}, \tag{15.80}$$

a equação de onda de momentum (15.79) é satisfeita pela não-normalizada

$$g(p) = e^{-p^2/(2\hbar\sqrt{mk})}. \tag{15.81}$$

Qualquer das representações, de espaço ou de momentum (e um número infinito de outras possibilidades) pode ser usada, dependendo da que for mais conveniente para o problema particular em questão.

Deixamos para o Exercício 15.6.3 a demonstração de que  $g(p)$  é a função de onda de momentum correspondente à Equação (15.78), que é a transformada inversa de Fourier da Equação (15.78). ■

### Exercícios

- 15.6.1** A função  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  descreve uma onda plana de momentum  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  normalizada para densidade unitária. (Admite-se a dependência de tempo de  $e^{-i\omega t}$ . Mostre que essas funções de onda plana satisfazem uma relação de ortogonalidade.)

$$\int (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})^* e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} dx dy dz = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

- 15.6.2** Uma onda plana infinita em Mecânica Quântica pode ser representada pela função

$$\psi(x) = e^{ip'x/\hbar}.$$

Ache a função distribuição de momentum correspondente. Note que ela tem um infinito e que  $\psi(x)$  não é normalizada.

- 15.6.3** Um oscilador quântico linear em seu estado fundamental tem uma função de onda

$$\psi(x) = a^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{-x^2/2a^2}.$$

Mostre que a função de momentum correspondente é

$$g(p) = a^{1/2} \pi^{-1/4} \hbar^{-1/2} e^{-a^2 p^2/2\hbar^2}.$$

- 15.6.4** O  $n$ ésimo estado excitado do oscilador quântico linear é descrito por

$$\psi_n(x) = a^{-1/2} 2^{-n/2} \pi^{-1/4} (n!)^{-1/2} e^{-x^2/2a^2} H_n(x/a),$$

em que  $H_n(x/a)$  é o  $n$ ésimo polinômio de Hermite, Seção 13.1. Como uma extensão do Exercício 15.6.3, ache a função momentum correspondente a  $\psi_n(x)$ .

*Sugestão:*  $\psi_n(x)$  pode ser representada por  $(\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x)$ , em que  $\hat{a}^\dagger$  é o operador de elevação, Exercícios 13.1.14 a 13.1.16.



**15.6.5** Uma partícula livre na Mecânica Quântica é descrita por uma onda plana

$$\psi_k(x, t) = e^{i[kx - (\hbar k^2/2m)t]}.$$

Combinando ondas de momentum adjacente com um fator de peso de amplitude  $\varphi(k)$ , formamos um pacote de ondas

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{i[kx - (\hbar k^2/2m)t]} dk.$$

(a) Resolva para  $\varphi(k)$ , dado que

$$\Psi(x, 0) = e^{-x^2/2a^2}.$$

(b) Usando o valor conhecido de  $\varphi(k)$ , integre para obter a forma explícita de  $\Psi(x, t)$ . Note que esse pacote de ondas se difunde ou se espalha com o tempo.

$$\text{Resposta: } \Psi(x, t) = \frac{e^{-\{x^2/2[a^2 + (i\hbar/m)t]\}}}{[1 + (i\hbar t/ma^2)]^{1/2}}.$$

*Nota:* Uma discussão interessante desse problema do ponto de vista do operador de evolução é apresentada por S. M. Blinder, Evolution of a Gaussian wave packet, *Am. J. Phys.* 36: 525 (1968).

**15.6.6** Ache a função de onda de momento dependente de tempo  $g(k, t)$  correspondente a  $\Psi(x, t)$  do Exercício 15.6.5. Mostre que o pacote de ondas de momento  $g^*(k, t)g(k, t)$  é **independente** do tempo.

**15.6.7** O dêuteron, Exemplo 10.1.2, pode ser descrito razoavelmente bem com uma função de Hulthén

$$\psi(\mathbf{r}) = A[e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}]/r,$$

com  $A$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  constantes. Ache  $g(\mathbf{p})$ , a função de momentum correspondente.

*Nota:* A transformada de Fourier pode ser reescrita como transformadas de Fourier de seno e cosseno ou como uma transformada de Laplace, Seção 15.8.

**15.6.8** O fator de forma nuclear  $F(k)$  e a distribuição de carga  $\rho(r)$  são transformadas tridimensionais de Fourier uma da outra:

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

Se o fator de forma medido é

$$F(k) = (2\pi)^{-3/2} \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)^{-1},$$

ache a distribuição de carga correspondente.

$$\text{Resposta: } \rho(r) = \frac{a^2}{4\pi} \frac{e^{-ar}}{r}.$$

**15.6.9** Verifique a normalização da função de onda de momentum do hidrogênio

$$g(\mathbf{p}) = \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{a_0^{3/2} \hbar^{5/2}}{(a_0^2 p^2 + \hbar^2)^2}$$

por avaliação direta da integral

$$\int g^*(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) d^3p.$$

**15.6.10** Sendo  $\psi(\mathbf{r})$  uma função de onda em um espaço ordinário e  $\varphi(\mathbf{p})$  a função momentum correspondente, mostre que

(a)  $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathbf{r}\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3r = i\hbar \nabla_{\mathbf{p}}\varphi(\mathbf{p}),$

(b)  $\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathbf{r}^2\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3r = (i\hbar \nabla_{\mathbf{p}})^2\varphi(\mathbf{p}).$

*Nota:*  $\nabla_p$  é o gradiente em espaço de momentum:

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial p_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial p_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial p_z}.$$

Esses resultados podem ser estendidos para qualquer potência inteira positiva de  $r$  e, portanto, para qualquer função (analítica) que possa ser expandida como uma série de Maclaurin em  $r$ .

**15.6.11** A função de onda de espaço ordinário  $\psi(\mathbf{r}, t)$  satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi.$$

Mostre que a função de onda de momentum dependente de tempo correspondente satisfaz a equação análoga,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \varphi + V(i\hbar \nabla_p) \varphi.$$

*Nota:* Admita que  $V(\mathbf{r})$  pode ser expressa por uma série de Maclaurin e use o Exercício 15.6.10.  $V(i\hbar \nabla_p)$  é a mesma função da variável  $i\hbar \nabla_p$  que  $V(\mathbf{r})$  é da variável  $\mathbf{r}$ .

**15.6.12** A equação de onda de Schrödinger unidimensional independente de tempo é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Para o caso especial de  $V(x)$ , uma função analítica de  $x$ , mostre que a equação de onda de momentum correspondente é

$$V\left(i\hbar \frac{d}{dp}\right)g(p) + \frac{p^2}{2m}g(p) = Eg(p).$$

Derive essa equação de onda de momentum da transformada de Fourier, Equação (15.62), e sua inversa. Não use a substituição de  $x \rightarrow i\hbar(d/dp)$  diretamente.

## 15.7 Função de Transferência

Um pulso elétrico dependente de tempo pode ser considerado formado de uma superposição de ondas planas de muitas frequências. Para frequência angular  $\omega$ , temos uma contribuição

$$F(\omega)e^{i\omega t}.$$

Então, o pulso completo pode ser escrito como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \tag{15.82}$$

Como a frequência angular  $\omega$  está relacionada com a frequência linear  $\nu$  por

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi},$$

é costumeiro associar todo o fator  $1/2\pi$  com essa integral.

Mas, se  $\omega$  é uma frequência, o que dizer das frequências negativas? A  $\omega$  pode ser considerada um artifício matemático para evitar tratar com duas funções ( $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ ) separadamente. (Compare com a Seção 14.1.)

Como a Equação (15.82) tem a forma de uma transformada de Fourier, podemos resolver para  $F(\omega)$  escrevendo a transformada inversa,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \tag{15.83}$$

A Equação (15.83) representa uma **resolução do pulso**  $f(t)$  em suas componentes de frequência angular. A Equação (15.82) é uma **síntese do pulso** a partir de suas componentes.





Figura 15.6: Servomecanismo ou amplificador estéreo.

Considere algum dispositivo, tal como um servomecanismo ou um amplificador estéreo (Figura 5.6), com uma entrada  $f(t)$  e uma saída  $g(t)$ . Para uma entrada de uma única frequência  $\omega$ ,  $f_\omega(t) = e^{i\omega t}$ , o amplificador alterará a amplitude e pode também mudar a fase. As mudanças provavelmente dependerão da frequência. Por conseguinte,

$$g_\omega(t) = \varphi(\omega)f_\omega(t). \quad (15.84)$$

Essa função  $\varphi(\omega)$  modificadora de amplitudes e fase é denominada função **transferência** e usualmente será complexa:

$$\varphi(\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \quad (15.85)$$

em que as funções  $u(\omega)$  e  $v(\omega)$  são reais.

Na Equação (15.84) admitimos que a função transferência  $\varphi(\omega)$  é independente da amplitude de entrada e da presença ou ausência de quaisquer outras componentes da frequência. Isto é, estamos admitindo um mapeamento linear de  $f(t)$  para  $g(t)$ . Então, a saída total pode ser obtida integrando sobre a entrada inteira, como modificada pelo amplificador

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (15.86)$$

A função transferência é característica do amplificador. Uma vez conhecida (medida ou calculada) a função transferência, a saída  $g(t)$  pode ser calculada para qualquer entrada  $f(t)$ . Vamos considerar  $\varphi(\omega)$  a transformada (inversa) de Fourier de alguma função  $\Phi(t)$ :

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (15.87)$$

Então, a Equação (15.86) é a transformada de Fourier de duas transformadas inversas. Da Seção 15.5 obtemos a convolução

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(t - \tau) d\tau. \quad (15.88)$$

Interpretando a Equação (15.88), temos uma entrada — uma “causa” —  $f(\tau)$ , modificada por  $\Phi(t - \tau)$ , produzindo uma saída — um “efeito” —  $g(t)$ . Adotando o conceito da **causalidade** — a causa precede o efeito devemos requerer que  $\tau < t$ . Fazemos isso impondo

$$\Phi(t - \tau) = 0, \quad \tau > t. \quad (15.89)$$

Então a Equação (15.88) se torna

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)\Phi(t - \tau) d\tau. \quad (15.90)$$

A adoção da Equação (15.89) tem profundas conseqüências aqui e também na teoria da dispersão, Seção 7.2.

### Significância de $\Phi(t)$

Para ver a significância de  $\Phi$ , seja  $f(\tau)$  um impulso repentino começando em  $\tau = 0$ ,

$$f(\tau) = \delta(\tau),$$

em que  $\delta(\tau)$  é uma distribuição delta de Dirac no lado positivo da origem. Então a Equação (15.90) se torna

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)\Phi(t - \tau) d\tau, \quad (15.91)$$

$$g(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Isso identifica  $\Phi(t)$  como a função saída correspondente a um impulso unitário em  $t = 0$ . A Equação (15.91) também serve para estabelecer que  $\Phi(t)$  é real. Nossa função transferência original dá a saída de estado estável correspondente a uma entrada de amplitude unitária e frequência única.  $\Phi(t)$  e  $\varphi(\omega)$  são transformadas de Fourier uma da outra.

Pela Equação (15.87) agora temos

$$\varphi(\omega) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (15.92)$$

com o limite inferior igualado a zero por causalidade (Equação (15.89)). Com  $\Phi(t)$  real pela Equação (15.91), separamos as partes real e imaginária e escrevemos

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos \omega t dt, \\ v(\omega) &= - \int_0^{\infty} \Phi(t) \text{sen } \omega t dt, \quad \omega > 0. \end{aligned} \quad (15.93)$$

Por essas expressões vemos que a parte real de  $\varphi(\omega)$ ,  $u(\omega)$  é par, enquanto a parte imaginária de  $\varphi(\omega)$ ,  $v(\omega)$  é ímpar:

$$u(-\omega) = u(\omega), \quad v(-\omega) = -v(\omega).$$

Compare esse resultado com o Exercício 15.3.1.

Interpretando as Equações (15.93) como transformadas de Fourier de co-seno e seno, temos

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega) \cos \omega t d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v(\omega) \text{sen } \omega t d\omega, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (15.94)$$

Combinando as Equações (15.93) e (15.94), obtemos

$$v(\omega) = - \int_0^{\infty} \text{sen } \omega t \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega') \cos \omega' t d\omega' \right\} dt, \quad (15.95)$$

mostrando que, se nossa função transferência tiver uma parte real, ela terá também uma parte imaginária (e vice-versa). É claro que, com isso, admitimos que as transformadas de Fourier existem, assim excluindo casos como  $\Phi(t) = 1$ .

A imposição de causalidade levou à interdependência mútua das partes real e imaginária da função transferência. O leitor deve comparar isso com os resultados da teoria da dispersão da Seção 7.2, que também envolve causalidade.

Talvez seja útil mostrar que as propriedades de paridade de  $u(\omega)$  e  $v(\omega)$  requerem que  $\Phi(t)$  desapareça para  $t$  negativo. Invertendo a Equação (15.87), temos

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [u(\omega) + iv(\omega)] [\cos \omega t + i \text{sen } \omega t] d\omega. \quad (15.96)$$

Com  $u(\omega)$  par e  $v(\omega)$  ímpar, a Equação (15.96) se torna

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v(\omega) \text{sen } \omega t d\omega. \quad (15.97)$$

Pela Equação (15.94),

$$\int_0^{\infty} u(\omega) \cos \omega t d\omega = - \int_0^{\infty} v(\omega) \text{sen } \omega t d\omega, \quad t > 0. \quad (15.98)$$

Se invertermos o sinal de  $t$ ,  $\text{sen } \omega t$  inverte o sinal e, pela Equação (15.97),

$$\Phi(t) = 0, \quad t < 0$$

(o que demonstra a consistência interna de nossa análise).



## Exercício

15.7.1 Derive a convolução

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(t - \tau) d\tau.$$

## 15.8 Transformadas de Laplace

### Definição

A transformada de Laplace  $f(s)$  ou  $\mathcal{L}$  de uma função  $F(t)$  é definida por<sup>11</sup>

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt. \quad (15.99)$$

Aqui cabem alguns comentários sobre a existência da integral. A integral infinita de  $F(t)$ ,

$$\int_0^{\infty} F(t) dt,$$

**não precisa existir.** Por exemplo,  $F(t)$  pode divergir exponencialmente para  $t$  grande. Contudo, se houver alguma constante  $s_0$ , tal que

$$|e^{-s_0 t} F(t)| \leq M, \quad (15.100)$$

uma constante positiva para  $t$  suficientemente grande,  $t > t_0$ , a transformada de Laplace (Equação (15.99)) existirá para  $s > s_0$ ; diz-se que  $F(t)$  é de *ordem exponencial*. Como contra-exemplo,  $F(t) = e^{t^2}$  não satisfaz a condição dada pela Equação (15.100) e **não** é de ordem exponencial.  $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$  **não** existe.

A transformada de Laplace também pode deixar de existir por causa de uma singularidade suficientemente forte na função  $F(t)$  quando  $t \rightarrow 0$ , isto é,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

diverge na origem para  $n \leq -1$ . A transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{t^n\}$  não existe para  $n \leq -1$ .

Uma vez que, para duas funções  $F(t)$  e  $G(t)$ , para as quais existem as integrais,

$$\mathcal{L}\{aF(t) + bG(t)\} = a\mathcal{L}\{F(t)\} + b\mathcal{L}\{G(t)\}, \quad (15.101)$$

a operação denotada por  $\mathcal{L}$  é **linear**.

### Funções Elementares

Para apresentar a transformada de Laplace, vamos aplicar a operação a algumas das funções elementares. Em todos os casos, admitimos que  $F(t) = 0$ , para  $t < 0$ . Se

$$F(t) = 1, \quad t > 0,$$

então,

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0. \quad (15.102)$$

Mais uma vez, seja

$$F(t) = e^{kt}, \quad t > 0.$$

A transformada de Laplace se torna

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \frac{1}{s - k}, \quad \text{para } s > k. \quad (15.103)$$

Usando essa relação, obtemos a transformada de Laplace de certas outras funções. Visto que

$$\cosh kt = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}), \quad \sinh kt = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt}), \quad (15.104)$$

<sup>11</sup> Isso às vezes é denominado **transformada unilateral de Laplace**; a integral de  $-\infty$  to  $+\infty$  é denominada **transformada bilateral de Laplace**. Alguns autores introduzem um fator adicional  $s$ . Esse  $s$  extra parece ter pouca vantagem e está sempre atrapalhando (compare com Jeffreys e Jeffreys, Seção 14.13; para comentários adicionais, veja as Leituras Adicionais). Em geral consideramos  $s$  real e positivo. É possível ter  $s$  complexo, contanto que  $\Re(s) > 0$ .

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh kt\} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right) = \frac{s}{s^2 - k^2}, \\ \mathcal{L}\{\sinh kt\} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k} \right) = \frac{k}{s^2 - k^2}, \end{aligned} \tag{15.105}$$

ambas válidas para  $s > k$ . Temos as relações

$$\cos kt = \cosh ikt, \quad \sin kt = -i \sinh ikt. \tag{15.106}$$

Usando as Equações (15.105) com  $k$  no lugar de  $ik$ , constatamos que as transformadas de Laplace são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos kt\} &= \frac{s}{s^2 + k^2}, \\ \mathcal{L}\{\sin kt\} &= \frac{k}{s^2 + k^2}, \end{aligned} \tag{15.107}$$

ambas válidas para  $s > 0$ . Uma outra derivação dessa última transformada é dada na seção seguinte. Note que  $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\sin kt\} = 1/k$ . A transformada de Laplace atribui um valor  $1/k$  para  $\int_0^\infty \sin kt \, dt$ .

Por fim, para  $F(t) = t^n$ , temos

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt,$$

que é exatamente a função fatorial. Daí

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n > -1. \tag{15.108}$$

Note que em todas essas transformadas temos a variável  $s$  no denominador — potências negativas de  $s$ . Em particular,  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$ . A significância desse ponto é que, se  $f(s)$  envolver potências positivas de  $s$  ( $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) \rightarrow \infty$ ), então não existe nenhuma transformada inversa.

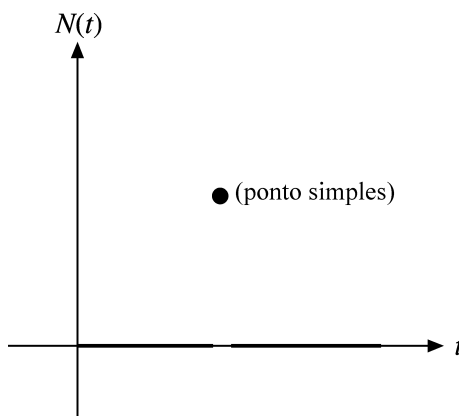


Figura 15.7: Uma possível função nula.

### Transformada Inversa

Essas operações têm pouca importância, a menos que possamos efetuar a transformada inversa, como nas transformadas de Fourier. Isto é,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s),$$

então,

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t). \tag{15.109}$$

Essa transformada inversa **não** é única. Duas funções  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$  podem ter a mesma transformada,  $f(s)$ . Contudo, nesse caso,

$$F_1(t) - F_2(t) = N(t),$$



em que  $N(t)$  é uma função nula (Figura 15.7), indicando que

$$\int_0^{t_0} N(t) dt = 0,$$

para todo  $t_0$ . Esse resultado é conhecido como **teorema de Lerch**. Portanto, para o físico e o engenheiro,  $N(t)$  quase sempre pode ser considerada zero, e a operação inversa se torna única.

A transformada inversa pode ser determinada de várias maneiras. (1) Pode-se montar uma tabela de transformadas e usá-la para efetuar a transformação inversa, exatamente como uma tábua de logaritmos pode ser usada para consultar antilogaritmos. As transformadas precedentes constituem o início de tal tabela. Se quiser um conjunto mais completo de transformadas de Laplace, veja a Tabela 15.2 (adiante) ou AMS-55, Capítulo 29 (a referência completa é dada na nota de rodapé 4 no Capítulo 5). Empregar expansões por frações parciais e vários teoremas operacionais, que são considerados em seções subseqüentes, facilita a utilização das tabelas.

- Existe uma certa justificativa para suspeitar que essas tabelas têm mais valor para resolver exercícios propostos em livros didáticos do que para resolver problemas do mundo real.
- Uma técnica geral para  $\mathcal{L}^{-1}$  será desenvolvida na Seção 15.12 usando o cálculo de resíduos.
- Para as dificuldades e possibilidades de uma abordagem numérica — inversão numérica —, referimo-nos às Leituras Adicionais.

### Expansão por Frações Parciais

A utilização de uma tabela de transformadas (ou transformadas inversas) é facilitada pela expansão de  $f(s)$  em **frações parciais**.

Nossa transformada  $f(s)$  muitas vezes ocorre na forma  $g(s)/h(s)$ , em que  $g(s)$  e  $h(s)$  são polinomiais sem nenhum fator comum, sendo  $g(s)$  de grau mais baixo do que  $h(s)$ . Se os fatores de  $h(s)$  forem todos lineares e distintos, então, pelo método das frações parciais, podemos escrever

$$f(s) = \frac{c_1}{s - a_1} + \frac{c_2}{s - a_2} + \dots + \frac{c_n}{s - a_n}, \quad (15.110)$$

em que os  $c_i$  são independentes de  $s$ . Os  $a_i$  são as raízes de  $h(s)$ . Se qualquer uma das raízes, por exemplo,  $a_1$ , múltipla (ocorrendo  $m$  vezes), então  $f(s)$  tem a forma

$$f(s) = \frac{c_{1,m}}{(s - a_1)^m} + \frac{c_{1,m-1}}{(s - a_1)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{1,1}}{s - a_1} + \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{s - a_i}. \quad (15.111)$$

Por fim, se um dos fatores for quadrático,  $(s^2 + ps + q)$ , então o numerador, em vez de ser uma simples constante, terá a forma

$$\frac{as + b}{s^2 + ps + q}.$$

Há várias maneiras de determinar as constantes introduzidas. Por exemplo, na Equação (15.110) podemos multiplicar tudo por  $(s - a_i)$  e obter

$$c_i = \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i) f(s). \quad (15.112)$$

Em casos elementares, uma solução direta costuma ser a mais fácil.

### Exemplo 15.8.1 EXPANSÃO PARCIAL POR FRAÇÕES

Seja

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} = \frac{c}{s} + \frac{as + b}{s^2 + k^2}. \quad (15.113)$$

Colocando o lado direito da Equação sobre um denominador comum e igualando potências iguais de  $s$  no numerador, obtemos

$$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} = \frac{c(s^2 + k^2) + s(as + b)}{s(s^2 + k^2)}, \quad (15.114)$$

$$c + a = 0, \quad s^2; \quad b = 0, \quad s^1; \quad ck^2 = k^2, \quad s^0.$$

Resolvendo essas expressões ( $s \neq 0$ ), temos

$$c = 1, \quad b = 0, \quad a = -1,$$

o que resulta em

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + k^2}, \tag{15.115}$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = 1 - \cos kt \tag{15.116}$$

pelas Equações (15.102) e (15.106). ■

### Exemplo 15.8.2 UMA FUNÇÃO DEGRAU

Como aplicação de transformadas de Laplace, considere a avaliação de

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } tx}{x} dx. \tag{15.117}$$

Suponha que consideramos a transformada de Laplace dessa integral definida (e imprópria):

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{\text{sen } tx}{x} dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty \frac{\text{sen } tx}{x} dx dt. \tag{15.118}$$

Agora, permutando a ordem de integração (o que é justificado),<sup>12</sup> obtemos

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \left[ \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } tx dt \right] dx = \int_0^\infty \frac{dx}{s^2 + x^2}, \tag{15.119}$$

uma vez que o fator dentro das chaves é exatamente a transformada de Laplace de  $\text{sen } tx$ . Pelas tabelas de integrais,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{s^2 + x^2} = \frac{1}{s} \text{tg}^{-1}\left(\frac{x}{s}\right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2s} = f(s). \tag{15.120}$$

Pela Equação (15.102) efetuamos a transformação inversa para obter

$$F(t) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \tag{15.121}$$

de acordo com uma avaliação pelos cálculo de resíduos (Seção 7.1). Admitimos que  $t > 0$  em  $F(t)$ . Para  $F(-t)$ , precisamos observar apenas que  $\text{sen}(-tx) = -\text{sen } tx$ , resultando em  $F(-t) = -F(t)$ . Por fim, se  $t = 0$ ,  $F(0)$  é claramente zero. Por conseguinte,

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } tx}{x} dx = \frac{\pi}{2} [2u(t) - 1] = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & t < 0. \end{cases} \tag{15.122}$$

Note que  $\int_0^\infty (\text{sen } tx/x) dx$ , considerada uma função de  $t$ , descreve uma função escalonada (Figura 15.8), um degrau de altura  $\pi$  em  $t = 0$ , o que é consistente com a Equação (1.174). ■

A técnica no exemplo precedente foi (1) introduzir uma segunda integração — a transformada de Laplace, (2) inverter a ordem de integração e (3) considerar a transformada inversa de Laplace. Há muitas oportunidades em que essa técnica de inverter a ordem de integração pode ser aplicada e já mostrou ser útil. O Exercício 15.8.6 é uma variação disso.

<sup>12</sup>Veja, em Leituras Adicionais, Jeffreys e Jeffreys (1966), Capítulo 1 (convergência uniforme de integrais).

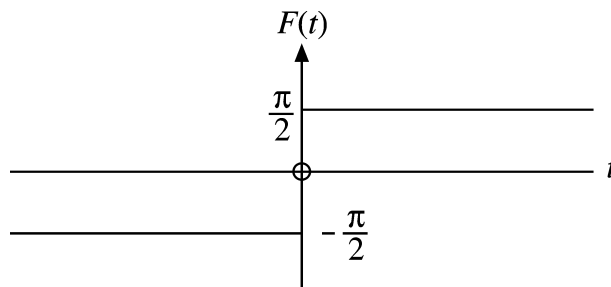


Figura 15.8:  $F(t) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } tx}{x} dx$ , uma função degrau.

### Exercícios

15.8.1 Prove que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = \lim_{t \rightarrow +0} F(t).$$

*Sugestão:* Admita que  $F(t)$  pode ser expressa como  $F(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ .

15.8.2 Mostre que

$$\frac{1}{\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\cos xt\} = \delta(x).$$

15.8.3 Verifique que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}\right\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad a^2 \neq b^2.$$

15.8.4 Usando expansões por frações parciais, mostre que

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}, \quad a \neq b.$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}, \quad a \neq b.$$

15.8.5 Usando expansões por frações parciais, mostre que, para  $a^2 \neq b^2$ ,

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right\} = -\frac{1}{a^2 - b^2} \left\{\frac{\text{sen } at}{a} - \frac{\text{sen } bt}{b}\right\},$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right\} = \frac{1}{a^2 - b^2} \{a \text{sen } at - b \text{sen } bt\}.$$

15.8.6 Sabe-se que o potencial eletrostático de um disco condutor carregado tem a forma geral (coordenadas cilíndricas circulares)

$$\Phi(\rho, z) = \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) f(k) dk,$$

sendo  $f(k)$  desconhecida. Em grandes distâncias ( $z \rightarrow \infty$ ), o potencial deve se aproximar do potencial de Coulomb  $Q/4\pi\epsilon_0 z$ . Mostre que

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}.$$

*Sugestão:* Você pode fazer  $\rho = 0$  e admitir uma expansão de Maclaurin de  $f(k)$  ou, usando  $e^{-kz}$ , construir uma seqüência delta.

15.8.7 Mostre que

$$(a) \int_0^\infty \frac{\cos s}{s^\nu} ds = \frac{\pi}{2(\nu-1)! \cos(\nu\pi/2)}, \quad 0 < \nu < 1,$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{\text{sen } s}{s^\nu} ds = \frac{\pi}{2(\nu-1)! \text{sen}(\nu\pi/2)}, \quad 0 < \nu < 2,$$

Por que  $\nu$  é restrito a  $(0, 1)$  para (a) e  $(0, 2)$  para (b)? Essas integrais podem ser interpretadas como transformadas de Fourier de  $s^{-\nu}$  e como transformadas de Mellin de  $\sin s$  e  $\cos s$ .

*Sugestão:* Substitua  $s^{-\nu}$  por uma transformada integral de Laplace:  $\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\}/(\nu-1)!$ . Então integre em relação a  $s$ . A integral resultante pode ser tratada como uma função beta (Seção 8.4).

**15.8.8** Uma função  $F(t)$  pode ser expandida em uma série de potências (Maclaurin), isto é,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Então,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt.$$

Mostre que  $f(s)$ , a transformada de Laplace de  $F(t)$ , não contém nenhuma potência de  $s$  maior do que  $s^{-1}$ . Verifique seu resultado calculando  $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ , o e comente.

**15.8.9** Mostre que a transformada de Laplace de  $M(a, c, x)$  é

$$\mathcal{L}\{M(a, c, x)\} = \frac{1}{s} {}_2F_1\left(a, 1; c, \frac{1}{s}\right).$$

## 15.9 Transformada de Laplace de Derivadas

Talvez a principal aplicação de transformadas de Laplace seja na conversão de equações diferenciais em formas mais simples que podem ser resolvidas com maior facilidade. Veremos, por exemplo, que equações diferenciais acopladas com coeficientes constantes se transformam em equações algébricas lineares simultâneas.

Vamos transformar a derivada de primeira ordem de  $F(t)$ :

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} dt.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F'(t)\} &= e^{-st} F(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\ &= s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0). \end{aligned} \tag{15.123}$$

Em termos estritos,  $F(0) = F(+0)$ <sup>13</sup> e  $dF/dt$  deve ser ao menos contínua parte por parte para  $0 \leq t < \infty$ . Naturalmente, ambas,  $F(t)$  e sua derivada, devem ser tais que as integrais não diverjam. A propósito, a Equação (15.123) dá uma outra prova do Exercício 15.8.8. Uma extensão resulta em

$$\mathcal{L}\{F^{(2)}(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - sF(+0) - F'(+0), \tag{15.124}$$

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1} F(+0) - \dots - F^{(n-1)}(+0). \tag{15.125}$$

A transformada de Laplace, assim como a transformada de Fourier, substitui diferenciação por multiplicação. Nos exemplos seguintes, EDOs se tornam equações algébricas. É aqui que está o poder e a utilidade da transformada de Laplace. Mas veja o Exemplo 15.10.3 para saber o que pode acontecer se os coeficientes não forem constantes.

Note como as condições iniciais,  $F(+0)$ ,  $F'(+0)$ , e assim por diante, estão incorporadas na transformada. A Equação (15.124) pode ser usada para derivar  $\mathcal{L}\{\sin kt\}$ . Usamos a identidade

$$-k^2 \sin kt = \frac{d^2}{dt^2} \sin kt. \tag{15.126}$$

<sup>13</sup>A aproximação de zero é pelo lado positivo.





Então, aplicando a operação da transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} -k^2 \mathcal{L}\{\text{sen } kt\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} \text{sen } kt\right\} \\ &= s^2 \mathcal{L}\{\text{sen } kt\} - s \text{sen}(0) - \left.\frac{d}{dt} \text{sen } kt\right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (15.127)$$

Uma vez que  $\text{sen}(0) = 0$  e  $d/dt \text{sen } kt|_{t=0} = k$ ,

$$\mathcal{L}\{\text{sen } kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad (15.128)$$

o que verifica a Equação (15.107).

### Exemplo 15.9.1 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Como exemplo físico, considere uma massa  $m$  oscilando sob a influência de uma mola ideal, constante de mola  $k$ . Como sempre, desprezamos o atrito. Então, a segunda lei de Newton se torna

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + kX(t) = 0; \quad (15.129)$$

além disso, consideramos as condições ideais

$$X(0) = X_0, \quad X'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$m \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 X}{dt^2}\right\} + k \mathcal{L}\{X(t)\} = 0, \quad (15.130)$$

e, usando a Equação (15.124), essa expressão se torna

$$ms^2 x(s) - msX_0 + kx(s) = 0, \quad (15.131)$$

$$x(s) = X_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{com } \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}. \quad (15.132)$$

Pela Equação (15.107) vemos que essa é a transformada de  $\cos \omega_0 t$ , que resulta em

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t, \quad (15.133)$$

como esperado. ■

### Exemplo 15.9.2 NUTAÇÃO DA TERRA

Um exemplo um pouco mais complicado é a nutação dos pólos da Terra (precessão livre de força). Se tratarmos a Terra como um esferóide (oblato) rígido, as equações de movimento de Euler se reduzem a

$$\frac{dX}{dt} = -aY, \quad \frac{dY}{dt} = +aX, \quad (15.134)$$

em que  $a \equiv [(I_z - I_x)/I_z] \omega_z$ ,  $X = \omega_x$ ,  $Y = \omega_y$  com vetor de velocidade angular  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  (Figura 15.9),  $I_z =$  momento de inércia em torno do eixo  $z$  e  $I_y = I_x$  momento de inércia em torno do eixo  $x$  (ou  $y$ ). O eixo  $z$  coincide com o eixo de simetria da Terra. A diferença entre o eixo de simetria e o eixo de rotação diária da Terra,  $\boldsymbol{\omega}$ , é de cerca de 15 metros, medida nos pólos. A transformação dessas equações diferenciais acopladas resulta em

$$sx(s) - X(0) = -ay(s), \quad sy(s) - Y(0) = ax(s). \quad (15.135)$$

Combinados para eliminar  $y(s)$ , temos

$$s^2 x(s) - sX(0) + aY(0) = -a^2 x(s),$$

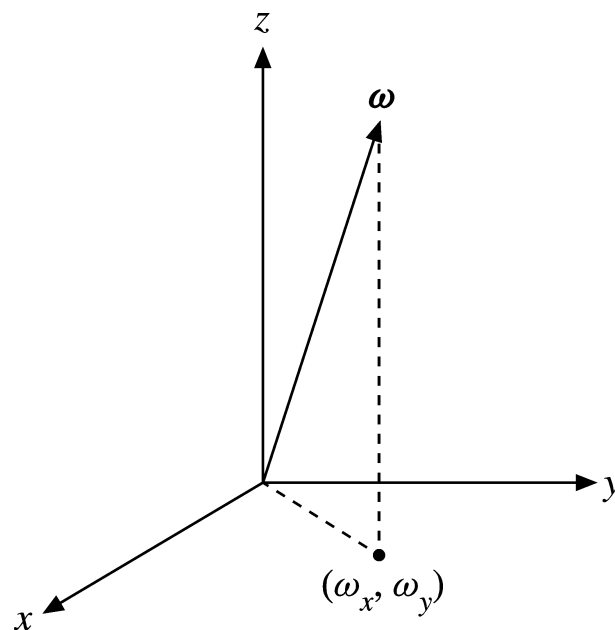


Figura 15.9:

ou

$$x(s) = X(0) \frac{s}{s^2 + a^2} - Y(0) \frac{a}{s^2 + a^2}. \tag{15.136}$$

Daí,

$$X(t) = X(0) \cos at - Y(0) \text{sen } at. \tag{15.137}$$

De modo semelhante,

$$Y(t) = X(0) \text{sen } at + Y(0) \cos at. \tag{15.138}$$

Essa expressão é considerada a rotação do vetor  $(X, Y)$  em sentido anti-horário (para  $a > 0$ ) em torno do eixo  $z$  com ângulo  $\theta = at$  e velocidade angular  $a$ .

Podemos encontrar uma interpretação direta escolhendo o eixo de tempo, de modo que  $Y(0) = 0$ . Então,

$$X(t) = X(0) \cos at, \quad Y(t) = X(0) \text{sen } at, \tag{15.139}$$

que são as equações paramétricas para rotação de  $(X, Y)$  em uma órbita circular de raio  $X(0)$ , com velocidade angular  $a$  no sentido anti-horário.

No caso da velocidade angular da Terra, o vetor  $X(0)$  é de cerca de 15 metros, enquanto  $a$ , como definida aqui, corresponde a um período  $(2\pi/a)$  de cerca de 300 dias. Na verdade, por causa dos desvios em relação ao corpo rígido idealizado que admitimos ao estabelecer as equações de Euler, o período é de aproximadamente 427 dias.<sup>14</sup> Se na Equação (15.134) fizermos

$$X(t) = L_x, \quad Y(t) = L_y,$$

em que  $L_x$  e  $L_y$  são as componentes  $x$  e  $y$  do momento angular  $\mathbf{L}$ ,  $a = -g_L B_z$ ,  $g_L$  é a razão giromagnética e  $B_z$  é o campo magnético (ao longo do eixo  $z$ ), então a Equação (15.134) descreve a precessão de Larmor de corpos carregados em um campo magnético uniforme  $B_z$ . ■

### Função Delta de Dirac

Há mais uma outra transformada que é útil para usar com equações diferenciais — a função delta de Dirac:<sup>15</sup>

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}, \quad \text{para } t_0 \geq 0, \tag{15.140}$$

<sup>14</sup>D. Menzel, ed., *Fundamental Formulas of Physics*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1955), nova tiragem, 2<sup>a</sup> ed., Dover (1960), p. 695.

<sup>15</sup>Em termos estritos, a função delta de Dirac é indefinida. Contudo, a integral sobre ela é definida. Essa abordagem é desenvolvida na Seção 1.16 usando seqüências delta.



e para  $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \tag{15.141}$$

em que se admite que estamos usando uma representação da função delta, tal que

$$\int_0^\infty \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0, \quad \text{para } t > 0. \tag{15.142}$$

Como método alternativo,  $\delta(t)$  pode ser considerada o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  de  $F(t)$ ,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon^{-1}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases} \tag{15.143}$$

Por cálculo direto,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \tag{15.144}$$

Considerando o limite da integral (em vez da integral do limite), temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{F(t)\} = 1,$$

ou Equação (15.141),

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Essa função delta costuma ser denominada função impulso porque é muito útil para descrever forças impulsivas, isto é, forças que duram somente por um intervalo de tempo muito curto.

### Exemplo 15.9.3 FORÇA IMPULSIVA

A segunda lei de Newton para força impulsiva agindo sobre uma partícula de massa  $m$  se torna

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = P\delta(t), \tag{15.145}$$

em que  $P$  é uma constante. Transformando, obtemos

$$ms^2 x(s) - msX(0) - mX'(0) = P. \tag{15.146}$$

Para uma partícula que parte do repouso,  $X'(0) = 0$ .<sup>16</sup> Também consideraremos  $X(0) = 0$ . Então,

$$x(s) = \frac{P}{ms^2}, \tag{15.147}$$

e

$$X(t) = \frac{P}{m}t, \tag{15.148}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{P}{m}, \quad \text{uma constante.} \tag{15.149}$$

O efeito do impulso  $P\delta(t)$  é transferir (instantaneamente)  $P$  unidades de momento linear à partícula.

Uma análise semelhante se aplica ao galvanômetro balístico. O torque no galvanômetro é dado inicialmente por  $k\iota$ , no qual  $\iota$  é um pulso de corrente e  $k$  é uma constante de proporcionalidade. Uma vez que  $\iota$  tem curta duração, fazemos

$$k\iota = kq \delta(t), \tag{15.150}$$

em que  $q$  é a carga total carregada pela corrente  $\iota$ . Então, sendo  $I$  o momento de inércia,

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kq \delta(t), \tag{15.151}$$

e, transformando como antes, constatamos que o efeito do pulso de corrente é uma transferência de  $kq$  unidades de momento **angular** ao galvanômetro. ■

<sup>16</sup> Isso deveria ser  $X'(+0)$ . Para incluir o efeito do impulso, considere que o impulso ocorrerá em  $t = \varepsilon$  e faça  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

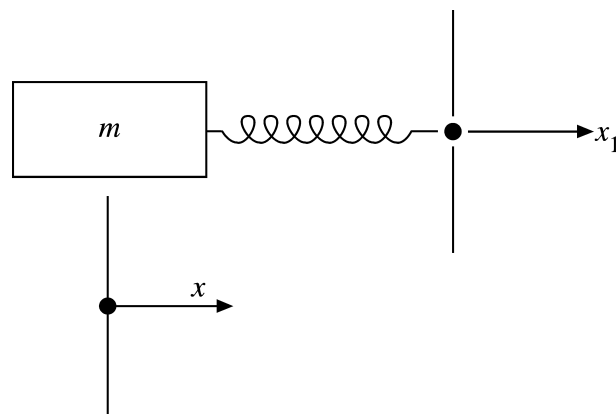


Figura 15.10: Mola.

### Exercícios

- 15.9.1** Use a expressão para a transformada de uma derivada de segunda ordem para obter a transformada de  $\cos kt$ .
- 15.9.2** Uma massa  $m$  está ligada a uma extremidade de uma mola não-estendida, com constante de mola  $k$  (Figura 15.10). No tempo  $t = 0$  a extremidade livre da mola sofre uma aceleração constante  $a$ , longe da massa. Usando transformadas de Laplace,
- (a) Ache a posição  $x$  de  $m$  como uma função do tempo.  
 (b) Determine a forma limite de  $x(t)$  para  $t$  pequeno.

Resposta: (a)  $x = \frac{1}{2}at^2 - \frac{a}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$ ,  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ,  
 (b)  $x = \frac{a\omega^2}{4!}t^4$ ,  $\omega t \ll 1$ .

- 15.9.3** Núcleos radioativos se desintegram segundo a lei

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

sendo  $N$  a concentração de um dado nuclídeo e  $\lambda$  a constante de desintegração particular. Essa equação pode ser interpretada como uma afirmação de que a taxa de desintegração é proporcional ao número desses núcleos radioativos presentes. Todos eles se desintegram independentemente. Em uma série radioativa de  $n$  nuclídeos diferentes, iniciando com  $N_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad \text{e assim por diante.} \\ \frac{dN_n}{dt} &= \lambda_{n-1} N_{n-1}, \quad \text{estável.} \end{aligned}$$

Ache  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$ ,  $n = 3$ , com  $N_1(0) = N_0$ ,  $N_2(0) = N_3(0) = 0$ .

Resposta:  $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$ ,  $N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ ,  
 $N_3(t) = N_0 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right)$ .

Ache uma expressão aproximada para  $N_2$  e  $N_3$ , válida para  $t$  pequeno quando  $\lambda_1 \approx \lambda_2$ .

Resposta:  $N_2 \approx N_0 \lambda_1 t$ ,  $N_3 \approx \frac{N_0}{2} \lambda_1 \lambda_2 t^2$ .

Ache expressões aproximadas para  $N_2$  e  $N_3$ , válidas para  $t$  grande, quando

- (a)  $\lambda_1 \gg \lambda_2$ ,  
 (b)  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ .



Resposta: (a)  $N_2 \approx N_0 e^{-\lambda_2 t}$ ,

$$N_3 \approx N_0 (1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad \lambda_1 t \gg 1.$$

(b)  $N_2 \approx N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}$ ,

$$N_3 \approx N_0 (1 - e^{-\lambda_1 t}), \quad \lambda_2 t \gg 1.$$

**15.9.4** A formação de um isótopo em um reator nuclear é dada por

$$\frac{dN_2}{dt} = nv\sigma_1 N_{10} - \lambda_2 N_2(t) - nv\sigma_2 N_2(t).$$

Aqui, o produto  $nv$  é o fluxo de nêutrons, nêutrons por centímetro cúbico vezes centímetros por segundo significa velocidade;  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ( $\text{cm}^2$ ) são medidas da probabilidade de absorção de nêutrons pelo isótopo original, concentração  $N_{10}$ , que admitimos constante, e do isótopo recentemente formado, concentração  $N_2$ , respectivamente. A constante de desintegração radioativa para o isótopo é  $\lambda_2$ .

(a) Ache a concentração  $N_2$  do novo isótopo como uma função do tempo.

(b) Se o elemento original for  $\text{Eu}^{153}$ ,  $\sigma_1 = 400 \text{ barns} = 400 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 1.000 \text{ barns} = 1.000 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ , e  $\lambda_2 = 1,4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ . Se  $N_{10} = 10^{20}$  e  $(nv) = 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , ache  $N_2$ , a concentração de  $\text{Eu}^{154}$  após um ano de irradiação contínua. Justifica-se supor que  $N_1$  é constante?

**15.9.5** Em um reator nuclear,  $\text{Xe}^{135}$  é formado como produto direto de fissão e também como um produto da desintegração de  $\text{I}^{135}$ , tempo de meia-vida de 6,7 horas. A meia-vida do  $\text{Xe}^{135}$  é de 9,2 horas. Como o  $\text{Xe}^{135}$  absorve fortemente nêutrons térmicos e por isso “envenena” o reator nuclear, sua concentração é uma questão de grande interesse. As equações relevantes são

$$\frac{dN_I}{dt} = \gamma_I \varphi \sigma_f N_U - \lambda_I N_I,$$

$$\frac{dN_X}{dt} = \lambda_I N_I + \gamma_X \varphi \sigma_f N_U - \lambda_X N_X - \varphi \sigma_X N_X.$$

Aqui,  $N_I$  = concentração de  $\text{I}^{135}$  ( $\text{Xe}^{135}$ ,  $\text{U}^{235}$ ). Admita que

$$N_U = \text{constante},$$

$$\gamma_I = \text{produção de } \text{I}^{135} \text{ por fissão} = 0,060,$$

$$\gamma_X = \text{produção de } \text{Xe}^{135} \text{ diretamente da fissão} = 0,003,$$

$$\lambda_I = \text{I}^{135} (\text{Xe}^{135}) \text{ constante de desintegração} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0,693}{t_{1/2}},$$

$$\sigma_f = \text{seção de choque de fissão de nêutron térmico para } \text{U}^{235},$$

$$\sigma_X = \text{seção de choque de absorção de nêutron térmico para } \text{Xe}^{135} \\ = 3,5 \times 10^6 \text{ barns} = 3,5 \times 10^{-18} \text{ cm}^2.$$

$$(\sigma_I, \text{ seção de choque de absorção de } \text{I}^{135}, \text{ é desprezível.})$$

$$\varphi = \text{fluxo de nêutrons} = \text{nêutrons/cm}^3 \times \text{velocidade média (cm/s)}.$$

(a) Ache  $N_X(t)$  em termos de fluxo de nêutrons  $\varphi$  e do produto  $\sigma_f N_U$ .

(b) Ache  $N_X(t \rightarrow \infty)$ .

(c) Após  $N_X$  ter alcançado o equilíbrio, o reator é paralisado,  $\varphi = 0$ . Ache  $N_X(t)$  após a paralisação. Note o aumento em  $N_X$ , que pode, durante algumas horas, interferir com a nova partida do reator.

## 15.10 Outras Propriedades

### Substituição

Se substituirmos o parâmetro  $s$  por  $s - a$  na definição da transformada de Laplace (Equação (15.99)), teremos

$$f(s - a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} F(t) dt \\ = \mathcal{L}\{e^{at} F(t)\}. \tag{15.152}$$

Por conseguinte, a substituição de  $s$  por  $s - a$  corresponde a multiplicar  $F(t)$  por  $e^{at}$  e vice-versa. Esse resultado pode ser usado com vantagem para ampliar nossa tabela de transformadas. Pela Equação (15.107), constatamos imediatamente que

$$\mathcal{L}\{e^{at} \text{sen } kt\} = \frac{k}{(s - a)^2 + k^2}; \quad (15.153)$$

além disso,

$$\mathcal{L}\{e^{at} \text{cos } kt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}, \quad s > a.$$

### Exemplo 15.10.1 OSCILADOR ATENUADO

Essas expressões são úteis quando consideramos uma massa oscilatória com atenuação proporcional à velocidade. A Equação (15.129), à qual foi adicionada essa atenuação, se torna

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = 0, \quad (15.154)$$

na qual  $b$  é uma constante de proporcionalidade. Vamos admitir que a partícula parta do repouso em  $X(0) = X_0$ ,  $X'(0) = 0$ . A equação transformada é

$$m[s^2x(s) - sX_0] + b[sx(s) - X_0] + kx(s) = 0, \quad (15.155)$$

e

$$x(s) = X_0 \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k}. \quad (15.156)$$

Essa expressão pode ser manipulada completando o quadrado do denominador:

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right). \quad (15.157)$$

Se a atenuação for pequena,  $b^2 < 4km$ , o último termo é positivo e será denotado por  $\omega_1^2$ :

$$\begin{aligned} x(s) &= X_0 \frac{s + b/m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} \\ &= X_0 \frac{s + b/2m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} + X_0 \frac{(b/2m\omega_1)\omega_1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}. \end{aligned} \quad (15.158)$$

Pela Equação (15.153),

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 e^{-(b/2m)t} \left( \cos \omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1} \text{sen } \omega_1 t \right) \\ &= X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \cos(\omega_1 t - \varphi), \end{aligned} \quad (15.159)$$

em que

$$\text{tg } \varphi = \frac{b}{2m\omega_1}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

É claro que, à medida que  $b \rightarrow 0$ , essa solução passa para a solução não-atenuada (Seção 15.9). ■

### Analogia com RLC

Vale a pena notar a similaridade entre essa oscilação harmônica simples atenuada de uma massa em uma mola e um circuito RLC (resistência, indutância e capacitância), (Figura 15.11). Em qualquer instante, a soma das diferenças de potencial ao redor do circuito deve ser zero (lei de Kirchof, conservação de energia). Isso resulta em

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = 0. \quad (15.160)$$

Diferenciando a corrente  $I$  em relação ao tempo (para eliminar a integral), temos

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (15.161)$$

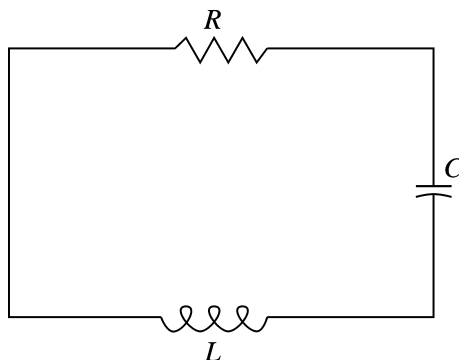


Figura 15.11: Circuito RLC.

Se substituirmos  $I(t)$  por  $X(t)$ ,  $L$  por  $m$ ,  $R$  por  $b$  e  $C^{-1}$  por  $k$ , então a Equação (15.161) é idêntica ao problema mecânico. Esse é apenas um exemplo da unificação de diversos ramos da Física pela Matemática. Uma discussão mais completa será encontrada no livro de Olson.<sup>17</sup>

### Translação

Desta vez, seja  $f(s)$  multiplicada por  $e^{-bs}$ ,  $b > 0$ :

$$\begin{aligned} e^{-bs} f(s) &= e^{-bs} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+b)} F(t) dt. \end{aligned} \tag{15.162}$$

Agora, seja  $t + b = \tau$ . A Equação (15.162) se torna

$$\begin{aligned} e^{-bs} f(s) &= \int_b^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) u(\tau - b) d\tau, \end{aligned} \tag{15.163}$$

em que  $u(\tau - b)$  é a função degrau unitária. Essa relação costuma ser denominada **teorema do deslocamento de Heaviside** (Figura 15.12).

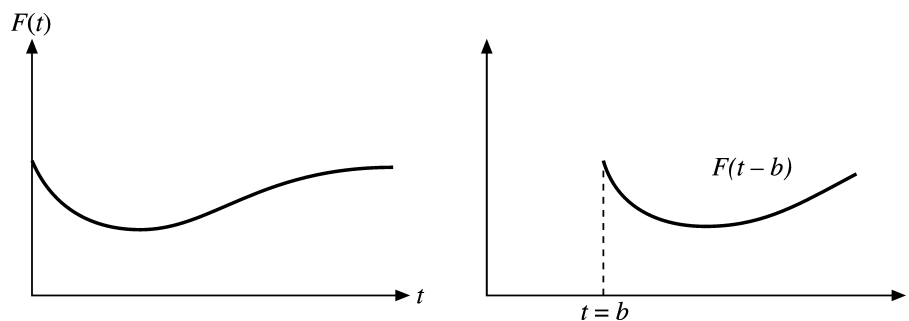


Figura 15.12: Translação.

Visto que admitimos que  $F(t)$  é igual a zero para  $t < 0$ ,  $F(\tau - b) = 0$ , para  $0 \leq \tau < b$ . Por conseguinte, podemos estender o limite inferior para zero sem mudar o valor da integral. Então, observando que  $\tau$  é somente uma variável de integração, obtemos

$$e^{-bs} f(s) = \mathcal{L}\{F(t - b)\}. \tag{15.164}$$

<sup>17</sup>H. F. Olson, *Dynamical Analogies*, Nova York: Van Nostrand (1943).

**Exemplo 15.10.2** ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A equação de onda eletromagnética, sendo  $E = E_y$  ou  $E_z$ , uma onda transversal que se propaga ao longo do eixo  $x$ , é

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = 0. \tag{15.165}$$

Transformando essa equação em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} - \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} + \frac{s}{v^2} E(x, 0) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \tag{15.166}$$

Se tivermos a condição inicial  $E(x, 0) = 0$  e

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

então,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} = \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\}. \tag{15.167}$$

A solução (dessa EDO) é

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = c_1 e^{-(s/v)x} + c_2 e^{+(s/v)x}. \tag{15.168}$$

As “constantes”  $c_1$  e  $c_2$  são obtidas por condições de contorno adicionais. Elas são constantes em relação a  $x$  mas podem depender de  $s$ . Se nossa onda permanecer finita quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{L}\{E(x, t)\}$ , também permanecerá finita. Por conseguinte,  $c_2 = 0$ . Se  $E(0, t)$  for denotada por  $F(t)$ , então  $c_1 = f(s)$  e

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = e^{-(s/v)x} f(s). \tag{15.169}$$

Pela propriedade da translação (Equação (15.164)), constatamos imediatamente que

$$E(x, t) = \begin{cases} F(t - \frac{x}{v}), & t \geq \frac{x}{v}, \\ 0, & t < \frac{x}{v}. \end{cases} \tag{15.170}$$

Diferenciação e substituição na Equação (15.165) verifica a Equação (15.170). Nossa solução representa uma onda (ou pulso) que se move na direção positiva  $x$  com velocidade  $v$ . Note que para  $x > vt$ , a região permanece não-perturbada; o pulso não teve tempo de chegar lá. Se quiséssemos que o sinal se propagasse ao longo do eixo  $x$  negativo,  $c_1$  teria de ser igualado a 0 e nós teríamos obtido

$$E(x, t) = \begin{cases} F(t + \frac{x}{v}), & t \geq -\frac{x}{v}, \\ 0, & t < -\frac{x}{v}, \end{cases} \tag{15.171}$$

uma onda ao longo do eixo  $x$  negativo. ■

**Derivada de uma Transformada**

Quando  $F(t)$ , que é, no mínimo, contínua parte por parte, e  $s$  são escolhidos, de modo que  $e^{-st}F(t)$  converge exponencialmente para  $s$  grande, a integral

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

é uniformemente convergente e pode ser diferenciada (sob o sinal de integral) em relação a  $s$ . Então,

$$f'(s) = \int_0^\infty (-t)e^{-st} F(t) dt = \mathcal{L}\{-tF(t)\}. \tag{15.172}$$

Continuando esse processo, obtemos

$$f^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n F(t)\}. \tag{15.173}$$

Todas as integrais obtidas dessa maneira serão uniformemente convergentes por causa do comportamento exponencial decrescente de  $e^{-st}F(t)$ .

Essa mesma técnica pode ser aplicada para gerar mais transformadas. Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{kt} dt = \frac{1}{s-k}, \quad s > k. \tag{15.174}$$





Diferenciando em relação a  $s$  (ou em relação a  $k$ ), obtemos

$$\mathcal{L}\{te^{kt}\} = \frac{1}{(s-k)^2}, \quad s > k. \quad (15.175)$$

### Exemplo 15.10.3 EQUAÇÃO DE BESSEL

Uma aplicação interessante de uma transformada de Laplace diferenciada aparece na solução da equação de Bessel com  $n = 0$ . Pelo Capítulo 11, temos

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0. \quad (15.176)$$

Dividindo por  $x$  e substituindo  $t = x$  e  $F(t) = y(x)$  para ficar de acordo com a presente notação, vemos que a equação de Bessel se torna

$$tF''(t) + F'(t) + tF(t) = 0. \quad (15.177)$$

Precisamos de uma solução regular, em particular,  $F(0) = 1$ . 1. Pela Equação (15.177), com  $t = 0$ ,  $F'(+0) = 0$ . Além disso, admitimos que nossa  $F(t)$  desconhecida tem uma transformada. Transformando e usando as Equações (15.123), (15.124) e (15.172), temos

$$-\frac{d}{ds}[s^2f(s) - s] + sf(s) - 1 - \frac{d}{ds}f(s) = 0. \quad (15.178)$$

Rearranjando a Equação (15.178), obtemos

$$(s^2 + 1)f'(s) + sf(s) = 0, \quad (15.179)$$

ou

$$\frac{df}{f} = -\frac{s ds}{s^2 + 1}, \quad (15.180)$$

uma EDO de primeira ordem. Por integração,

$$\ln f(s) = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + \ln C, \quad (15.181)$$

que pode ser reescrita como

$$f(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (15.182)$$

Para fazer uso da Equação (15.108), expandimos  $f(s)$  em uma série de potências negativas de  $s$ , convergente para  $s > 1$ :

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{C}{s} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{C}{s} \left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!s^4} - \dots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2 s^{2n}} + \dots\right]. \end{aligned} \quad (15.183)$$

Invertendo termo a termo, obtemos

$$F(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}. \quad (15.184)$$

Quando igualamos  $C$  a 1, como requer a condição inicial  $F(0) = 1$ ,  $F(t)$  é exatamente  $J_0(t)$ , nossa familiar função de Bessel de ordem zero. Por conseguinte,

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (15.185)$$

Note que admitimos  $s > 1$ . Deixamos a prova para  $s > 0$  como problema.

Vale a pena observar que essa aplicação foi bem-sucedida e relativamente fácil porque consideramos  $n = 0$  na equação de Bessel. Isso possibilitou dividir um fator de  $x$  (ou  $t$ ). Se não tivéssemos feito isso, os termos da forma

$t^2 F(t)$  teriam introduzido uma derivada de segunda ordem de  $f(s)$ . A equação resultante não teria sido mais fácil de resolver do que a original.

Quando passamos das EDOs lineares com coeficientes constantes, a transformada de Laplace ainda pode ser aplicada, mas não há garantia de que essa aplicação será proveitosa.

A aplicação à equação de Bessel,  $n \neq 0$ , será encontrada nas referências. Como alternativa, podemos mostrar que

$$\mathcal{L}\{J_n(at)\} = \frac{a^{-n}(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \quad (15.186)$$

expressando  $J_n(t)$  como uma série infinita e transformando termo a termo. ■

### Integração de Transformadas

Novamente, sendo  $F(t)$  no mínimo contínua parte por parte e  $x$  grande o suficiente para que  $e^{-xt}F(t)$  decresça exponencialmente (quando  $x \rightarrow \infty$ ), a integral

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}F(t) dt \quad (15.187)$$

é uniformemente convergente em relação a  $x$ . Isso justifica inverter a ordem de integração na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_s^b f(x) dx &= \int_s^b dx \int_0^\infty dt e^{-xt}F(t) \\ &= \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} (e^{-st} - e^{-bt}) dt, \end{aligned} \quad (15.188)$$

na integração com relação a  $x$ . Escolhemos o limite inferior  $s$  grande o suficiente para que  $f(s)$  esteja dentro da região de convergência uniforme. Agora, deixando  $b \rightarrow \infty$ , temos

$$\int_s^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}, \quad (15.189)$$

contanto que  $F(t)/t$  seja finita em  $t = 0$  ou divirja com menos força do que  $t^{-1}$  (de modo que  $\mathcal{L}\{F(t)/t\}$  existirá).

### Limites de Integração — Função Escalonada Unitária

Os limites de integração reais para a transformada de Laplace podem ser especificados com a função degrau unitária (Heaviside)

$$u(t - k) = \begin{cases} 0, & t < k \\ 1, & t > k. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{u(t - k)\} = \int_k^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-ks}.$$

Um pulso retangular de largura  $k$  e altura unitária é descrito por  $F(t) = u(t) - u(t - k)$ . Considerando a transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}\{u(t) - u(t - k)\} = \int_0^k e^{-st} dt = \frac{1}{s} (1 - e^{-ks}).$$

A função degrau unitária também é usada na Equação (15.163) e poderia ser invocada no Exercício 15.10.13.

### Exercícios

**15.10.1** Resolva a Equação (15.154), que descreve um oscilador harmônico simples atenuado para  $X(0) = X_0$ ,  $X'(0) = 0$  e

- (a)  $b^2 = 4$  km (criticamente atenuado),
- (b)  $b^2 > 4$  km (superatenuado).

Resposta: (a)  $X(t) = X_0 e^{-(b/2m)t} \left(1 + \frac{b}{2m} t\right)$ .



**15.10.2** Resolva a Equação (15.154), que descreve um oscilador harmônico simples atenuado para  $X(0) = 0$ ,  $X'(0) = v_0$  e

- (a)  $b^2 < 4m$  (subatenuado),
- (b)  $b^2 = 4m$  (criticamente atenuado),
- (c)  $b^2 > 4m$  (superatenuado).

Resposta: (a)  $X(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \text{sen } \omega_1 t$ ,  
 (b)  $X(t) = v_0 t e^{-(b/2m)t}$ .

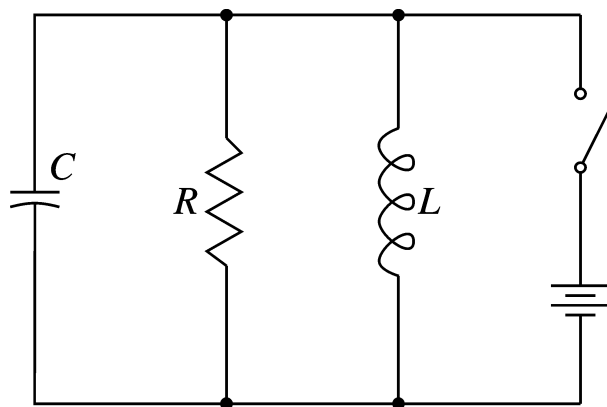


Figura 15.13: Circuito de toque de campainha.

**15.10.3** O movimento de um corpo em queda em um meio resistente pode ser descrito por

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = mg - b \frac{dX(t)}{dt},$$

quando a força de retardo é proporcional à velocidade. Ache  $X(t)$  e  $dX(t)/dt$  para as condições iniciais

$$X(0) = \frac{dX}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

**15.10.4** **Circuito de toque de campainha.** Em certos circuitos eletrônicos, resistência, indutância e capacitância são montadas em paralelo na placa de circuito (Figura 15.13). Uma voltagem constante é mantida nos elementos paralelos conservando o capacitor carregado. No tempo  $t = 0$ , o circuito é desconectado da fonte de voltagem. Ache as voltagens através dos elementos  $R$ ,  $L$  e  $C$  como uma função do tempo. Admita que  $R$  é grande.

*Sugestão:* Pelas leis de Kirchhoff,

$$I_R + I_C + I_L = 0 \quad \text{e} \quad E_R = E_C = E_L,$$

em que

$$E_R = I_R R, \quad E_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

$$E_C = \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t I_C dt,$$

$q_0 =$  carga inicial do capacitor.

Com a impedância DC de  $L = 0$ , faça  $I_L(0) = I_0$ ,  $E_L(0) = 0$ . Isso significa que  $q_0 = 0$ .

**15.10.5** Expressando  $J_0(t)$  como uma integral de contorno, aplique a operação de transformada de Laplace, inverta a ordem de integração e, assim, mostre que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \quad \text{para } s > 0.$$

**15.10.6** Desenvolva a transformada de Laplace de  $J_n(t)$  a partir de  $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$  usando as relações de recorrência da função de Bessel.

*Sugestão:* Essa é uma chance de usar indução matemática.

**15.10.7** Um cálculo do campo magnético de um circuito de corrente circular em coordenadas cilíndricas circulares leva à integral

$$\int_0^\infty e^{-kz} k J_1(ka) dk, \quad \Re(z) \geq 0.$$

Mostre que essa integral é igual a  $a/(z^2 + a^2)^{3/2}$ .

**15.10.8** O potencial eletrostático de uma carga pontual  $q$  na origem em coordenadas cilíndricas circulares é

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\rho) dk = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \Re(z) \geq 0.$$

Por essa relação, mostre que as transformadas de Fourier de co-seno e seno de  $J_0(k\rho)$  são

$$(a) \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_c\{J_0(k\rho)\} = \int_0^\infty J_0(k\rho) \cos k\zeta dk = \begin{cases} (\rho^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \rho > \zeta, \\ 0, & \rho < \zeta. \end{cases}$$

$$(b) \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_s\{J_0(k\rho)\} = \int_0^\infty J_0(k\rho) \sin k\zeta dk = \begin{cases} 0, & \rho > \zeta, \\ (\rho^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \rho < \zeta. \end{cases}$$

*Sugestão:* Substitua  $z$  por  $z + i\zeta$  e considere o limite quando  $z \rightarrow 0$ .

**15.10.9** Mostre que

$$\mathcal{L}\{I_0(at)\} = (s^2 - a^2)^{-1/2}, \quad s > a.$$

**15.10.10** Verifique as seguintes transformadas de Laplace:

$$(a) \mathcal{L}\{j_0(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a} \cot g^{-1}\left(\frac{s}{a}\right),$$

(b)  $\mathcal{L}\{n_0(at)\}$  não existe,

$$(c) \mathcal{L}\{i_0(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sinh at}{at}\right\} = \frac{1}{2a} \ln \frac{s+a}{s-a} = \frac{1}{a} \cot gh^{-1}\left(\frac{s}{a}\right),$$

(d)  $\mathcal{L}\{k_0(at)\}$  não existe.

**15.10.11** Desenvolva uma solução de transformada de Laplace da equação de Laguerre

$$tF''(t) + (1-t)F'(t) + nF(t) = 0.$$

Note que você precisa de uma derivada de uma transformada e de uma transformada de derivadas. Vá até onde puder com  $n$ ; então (e só então) faça  $n = 0$ .

**15.10.12** Mostre que a transformada de Laplace do polinômio de Laguerre  $L_n(at)$  é dada por

$$\mathcal{L}\{L_n(at)\} = \frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

**15.10.13** Mostre que

$$\mathcal{L}\{E_1(t)\} = \frac{1}{s} \ln(s+1), \quad s > 0,$$

em que

$$E_1(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{x} dx.$$

$E_1(t)$  é a função integral exponencial.

**15.10.14** (a) Pela Equação (15.189), mostre que

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt,$$

**contanto que as integrais existam.**

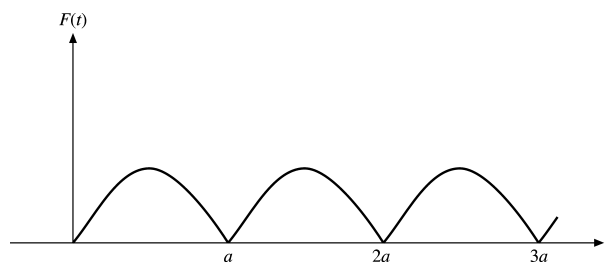


Figura 15.14: Função periódica.

(b) Pelo resultado precedente, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

de acordo com as Equações (15.122) e (7.56).

**15.10.15** (a) Mostre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen } kt}{t}\right\} = \text{cotg}^{-1}\left(\frac{s}{k}\right).$$

(b) Usando esse resultado (com  $k = 1$ ), prove que

$$\mathcal{L}\{\text{si}(t)\} = -\frac{1}{s} \text{tg}^{-1} s,$$

em que

$$\text{si}(t) = -\int_t^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx, \quad \text{a integral de seno.}$$

**15.10.16** Se  $F(t)$  for periódica (Figura 15.14) com um período  $a$ , de modo que  $F(t+a) = F(t)$  para todo  $t \geq 0$ , mostre que

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-as}},$$

agora com a integração somente sobre o **primeiro período** de  $F(t)$ .

**15.10.17** Ache a transformada de Laplace da onda quadrada (período  $a$ ) definida por

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{a}{2} \\ 0, & \frac{a}{2} < t < a. \end{cases}$$

Resposta:  $f(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-as/2}}{1 - e^{-as}}$ .

**15.10.18** Mostre que

(a)  $\mathcal{L}\{\cosh at \cos at\} = \frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$ ,      (c)  $\mathcal{L}\{\sinh at \cos at\} = \frac{as^2 - 2a^3}{s^4 + 4a^4}$ ,

(b)  $\mathcal{L}\{\cosh at \text{sen } at\} = \frac{as^2 + 2a^3}{s^4 + 4a^4}$ ,      (d)  $\mathcal{L}\{\sinh at \text{sen } at\} = \frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$ .

**15.10.19** Mostre que

(a)  $\mathcal{L}^{-1}\{(s^2 + a^2)^{-2}\} = \frac{1}{2a^3} \text{sen } at - \frac{1}{2a^2} t \cos at$ ,

(b)  $\mathcal{L}^{-1}\{s(s^2 + a^2)^{-2}\} = \frac{1}{2a} t \text{sen } at$ ,

(c)  $\mathcal{L}^{-1}\{s^2(s^2 + a^2)^{-2}\} = \frac{1}{2a} \text{sen } at + \frac{1}{2} t \cos at$ ,

(d)  $\mathcal{L}^{-1}\{s^3(s^2 + a^2)^{-2}\} = \cos at - \frac{a}{2} t \text{sen } at$ .

**15.10.20** Mostre que

$$\mathcal{L}\{(t^2 - k^2)^{-1/2}u(t - k)\} = K_0(ks).$$

*Sugestão:* Tente transformar uma representação integral de  $K_0(ks)$  na integral transformada de Laplace.

**15.10.21** A transformada de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-xs}xJ_0(x)dx = \frac{s}{(s^2 + 1)^{3/2}}$$

pode ser reescrita como

$$\frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-y}yJ_0\left(\frac{y}{s}\right)dy = \frac{s}{(s^2 + 1)^{3/2}},$$

que está na forma de quadratura de Gauss-Laguerre. Avalie essa integral para  $s = 1, 0, 0, 9, 0, 8, \dots$ , decrescendo em etapas de 0,1 até que o erro relativo alcance 10%. (O efeito do decréscimo de  $s$  é fazer com que o integrando oscile mais rapidamente por unidade de comprimento de  $y$ , reduzindo assim a precisão da quadratura numérica.)

**15.10.22** (a) Avalie

$$\int_0^\infty e^{-kz}kJ_1(ka)dk$$

pela quadratura de Gauss-Laguerre. Considere  $a = 1$  e  $z = 0, 1(0, 1)1, 0$ .

(b) Pela forma analítica, Exercício 15.10.7, calcule o erro absoluto e o erro relativo.

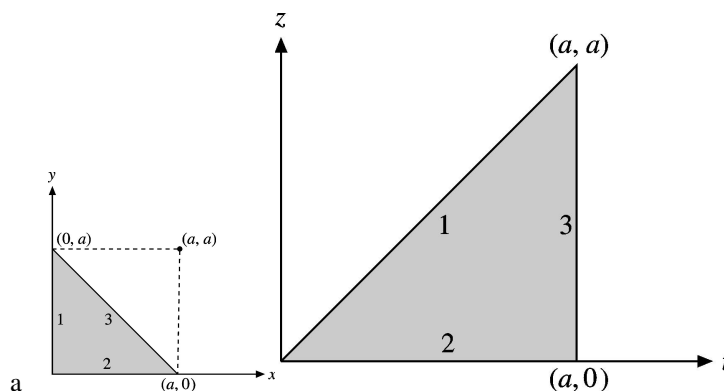


Figura 15.15: Troca de variáveis, (a) plano  $xy$ , (b) plano  $zt$ .

## 15.11 Teorema da Convolução (“Faltungen”)

Uma das propriedades mais importantes da transformada de Laplace é a dada pelo teorema da convolução, ou dobraduras.<sup>18</sup> Considerando duas transformadas,

$$f_1(s) = \mathcal{L}\{F_1(t)\} \quad \text{e} \quad f_2(s) = \mathcal{L}\{F_2(t)\}, \tag{15.190}$$

e as multiplicamos. Para evitar complicações na troca de variáveis, mantemos os limites superiores finitos:

$$f_1(s)f_2(s) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-sx}F_1(x)dx \int_0^{a-x} e^{-sy}F_2(y)dy. \tag{15.191}$$

Os limites superiores são escolhidos de modo que a área de integração, mostrada na Figura 15.15a, seja o triângulo sombreado, e não o quadrado. Se integrarmos sobre um quadrado no plano  $xy$ , teremos um paralelogramo no plano  $zt$ , o que só serve para complicar. Essa modificação é permissível porque admitimos que integrandos decrescem exponencialmente. No limite  $a \rightarrow \infty$ , uma integral sobre o triângulo não-sombreado dará contribuição zero.

<sup>18</sup>Uma derivação alternativa emprega a integral de Bromwich (Seção 15.12). Esse é o Exercício 15.12.3.



Substituindo  $x = t - z, y = z$ , a região de integração é mapeada para o triângulo mostrado na Figura 15.15b. Para verificar o mapeamento, mapeie os vértices:  $t = x + y, z = y$ . Usando jacobianos para transformar o elemento de área, temos

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} dt dz = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} dt dz \quad (15.192)$$

ou  $dx dy = dt dz$ . Com essa substituição, a Equação (15.191) se torna

$$\begin{aligned} f_1(s)f_2(s) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} \int_0^t F_1(t-z)F_2(z) dz dt \\ &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t F_1(t-z)F_2(z) dz \right\}. \end{aligned} \quad (15.193)$$

Por conveniência, essa integral é representada pelo símbolo

$$\int_0^t F_1(t-z)F_2(z) dz \equiv F_1 * F_2 \quad (15.194)$$

e denominada **convolução**, guardando estreita analogia com a convolução, de Fourier (Seção 15.5). Se substituirmos  $w = t - z$ , encontraremos

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1, \quad (15.195)$$

que mostra que a relação é simétrica.

Efetuando a transformada inversa, também encontramos

$$\mathcal{L}^{-1} \{ f_1(s)f_2(s) \} = \int_0^t F_1(t-z)F_2(z) dz. \quad (15.196)$$

Isso pode ser útil no desenvolvimento de novas transformadas ou como uma alternativa a uma expansão por frações parciais. Uma aplicação imediata é na solução de equações integrais (Seção 16.2). Uma vez que o limite superior,  $t$ , é variável, essa convolução de Laplace é útil no tratamento de equações integrais de Volterra. A convolução de Fourier com limites fixos (infinitos) se aplicaria a equações integrais de Fredholm.

### Exemplo 15.11.1 OSCILADOR FORÇADO COM ATENUAÇÃO

Como ilustração da utilização do teorema da convolução, vamos voltar à massa  $m$  presa a uma mola, com atenuação e uma força propulsora  $F(t)$ . A Equação de movimento (15.129) ou (15.154) agora se torna

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = F(t). \quad (15.197)$$

São usadas condições iniciais  $X(0) = 0, X'(0) = 0$  para simplificar essa ilustração, e a equação transformada é

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s), \quad (15.198)$$

ou

$$x(s) = \frac{f(s)}{m} \frac{1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}, \quad (15.199)$$

em que  $\omega_1^2 \equiv k/m - b^2/4m^2$ , como antes.

Pelo teorema da convolução (Equações (15.193) ou (15.196)),

$$X(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F(t-z)e^{-(b/2m)z} \text{sen } \omega_1 z dz. \quad (15.200)$$

Se a força for impulsiva,  $F(t) = P\delta(t)$ ,<sup>19</sup>

$$X(t) = \frac{P}{m\omega_1} e^{-(b/2m)t} \text{sen } \omega_1 t. \quad (15.201)$$

<sup>19</sup>Note que  $\delta(t)$  está dentro do intervalo  $[0, t]$ .

$P$  representa o momentum transferido pelo impulso, e a constante  $P/m$  assume o lugar de uma velocidade inicial  $X'(0)$ .

Se  $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$ , Equação (15.200), a Equação (15.200) pode ser usada, mas uma expansão por frações parciais talvez seja mais conveniente. Com

$$f(s) = \frac{F_0 \omega}{s^2 + \omega^2},$$

a Equação (15.199) se torna

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{F_0 \omega}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} \\ &= \frac{F_0 \omega}{m} \left[ \frac{a's + b'}{s^2 + \omega^2} + \frac{c's + d'}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (15.202)$$

Os coeficientes  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  e  $d'$  são independentes de  $s$ . Um cálculo direto mostra

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a'} &= \frac{b}{m} \omega^2 + \frac{m}{b} (\omega_0^2 - \omega^2)^2, \\ -\frac{1}{b'} &= -\frac{m}{b} (\omega_0^2 - \omega^2) \left[ \frac{b}{m} \omega^2 + \frac{m}{b} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que  $c'$  e  $d'$  levarão a termos exponencialmente decrescentes (transientes), eles serão descartados aqui. Efetuando a operação inversa, encontramos para a solução de estado estável

$$X(t) = \frac{F_0}{[b^2 \omega^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{1/2}} \text{sen}(\omega t - \varphi), \quad (15.203)$$

em que

$$\text{tg} \varphi = \frac{b \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Diferenciando o denominador, constatamos que a amplitude tem um máximo quando

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2} = \omega_1^2 - \frac{b^2}{4m^2}. \quad (15.204)$$

Essa é a condição de ressonância,<sup>20</sup> Em ressonância, a amplitude se torna  $F_0/b\omega_1$ , mostrando que a massa  $m$  entra em oscilação infinita em ressonância se desprezarmos a atenuação ( $b = 0$ ). Vale a pena observar que temos três frequências características diferentes:

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2},$$

ressonância para oscilações forçadas, com atenuação;

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2},$$

frequência de oscilação livre, com atenuação; e

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

frequência de oscilação livre, sem atenuação. Elas coincidem se a atenuação for zero. ■

Voltando às Equações (15.197) e (15.199), a Equação (15.197) é nossa EDO para a resposta de um sistema dinâmico a uma força propulsora arbitrária. A resposta final depende claramente da força propulsora, bem como das características de nosso sistema. Essa dependência dual é separada no espaço da transformada. Na Equação (15.199), a transformada da resposta (saída) aparece como o produto de dois fatores: um que descreve a força propulsora (entrada) e o outro que descreve o sistema dinâmico. Essa última parte, que modifica a entrada e resulta na saída, costuma ser denominada **função transferência**. Especificamente,  $[(s + b/2m)^2 + \omega_1^2]^{-1}$  é a função transferência correspondente a esse oscilador atenuado. O conceito de função transferência é de grande utilidade na área dos servomecanismos. Muitas vezes, as características de um determinado servomecanismo são descritas dando sua função transferência. Então, o teorema da convolução resulta no sinal de saída para um determinado sinal de entrada.

<sup>20</sup>A amplitude (ao quadrado) tem o típico denominador de ressonância, o formato da linha de Lorentz, Exercício 15.3.9.





### Exercícios

15.11.1 Pelo teorema da convolução, mostre que

$$\frac{1}{s}f(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(x) dx\right\},$$

em que  $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ .

15.11.2 Se  $F(t) = t^a$  e  $G(t) = t^b$ ,  $a > -1$ ,  $b > -1$ :

(a) Mostre que a convolução

$$F * G = t^{a+b+1} \int_0^1 y^a (1-y)^b dy.$$

(b) Usando o teorema da convolução, mostre que

$$\int_0^1 y^a (1-y)^b dy = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Essa é a fórmula de Euler para a função beta (Equação (8.59a)).

15.11.3 Usando a integral de convolução, calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \quad a^2 \neq b^2.$$

15.11.4 Um oscilador não-atenuado é propulido por uma força  $F_0 \sin \omega t$ . Ache o deslocamento como uma função do tempo. Observe que ele é uma combinação linear de dois movimentos harmônicos simples, um com a frequência da força propulsora e um com a frequência  $\omega_0$  do oscilador livre. (Admita  $X(0) = X'(0) = 0$ .)

$$\text{Resposta: } X(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin \omega t \right).$$

Outros exercícios envolvendo a convolução de Laplace aparecem na Seção 16.2.

## 15.12 Transformada Inversa de Laplace

### Integral de Bromwich

Agora desenvolvemos uma expressão para a transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  que aparece na equação

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}. \tag{15.205}$$

Uma abordagem está na transformada de Fourier, da qual conhecemos a relação inversa. Porém, há uma dificuldade. Nossa função de Fourier transformável tinha de satisfazer as condições de Dirichlet. Em particular, exigíamos que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = 0, \tag{15.206}$$

de modo que a integral infinita seria bem definida.<sup>21</sup> Agora desejamos tratar funções  $F(t)$  que podem divergir exponencialmente. Para vencer essa dificuldade, extraímos um fator exponencial,  $e^{\gamma t}$ , de nossa função de Laplace (possivelmente) divergente e escrevemos

$$F(t) = e^{\gamma t} G(t). \tag{15.207}$$

Se  $F(t)$  divergir quando  $e^{\alpha t}$ , exigimos que  $\gamma$  seja maior do que  $\alpha$ , **de modo que  $G(t)$  será convergente**. Agora, com  $G(t) = 0$ , para  $t < 0$ , e, quanto ao mais, convenientemente restrita, de modo que possa ser representada por uma integral de Fourier (Equação (15.20)),

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du \int_0^{\infty} G(v) e^{-iuv} dv. \tag{15.208}$$

<sup>21</sup>Se estiverem incluídas funções  $G(\omega)$ , pode ser um co-seno. Embora isso não satisfaça a Equação (15.206),  $G(\omega)$  ainda é limitada.

Usando a Equação (15.207), podemos reescrever (15.208) como

$$F(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du \int_0^{\infty} F(v)e^{-\gamma v} e^{-iuv} dv. \quad (15.209)$$

Agora, com a mudança de variável,

$$s = \gamma + iu, \quad (15.210)$$

a integral sobre  $v$  é lançada na forma de uma transformada de Laplace,

$$\int_0^{\infty} f(v)e^{-sv} dv = f(s); \quad (15.211)$$

agora,  $s$  é uma variável complexa, e  $\Re(s) \geq \gamma$ , para garantir convergência. Note que a transformada de Laplace mapeou uma função especificada no eixo positivo real para o plano complexo,  $\Re(s) \geq \gamma$ .<sup>22</sup>

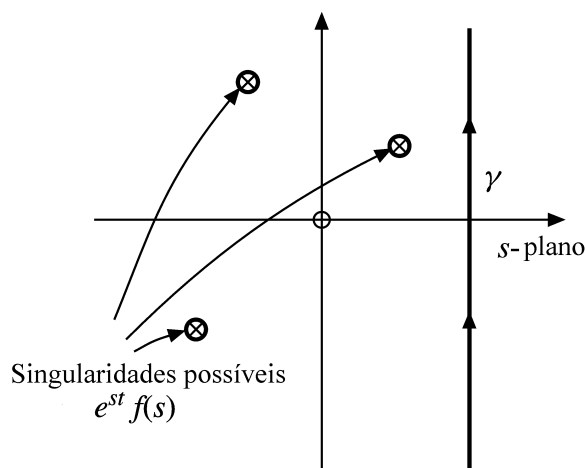


Figura 15.16: Singularidades de  $e^{st} f(s)$ .

Sendo  $\gamma$  constante,  $ds = i du$ . Substituindo a Equação (15.211) na Equação (15.209), obtemos

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds. \quad (15.212)$$

Aqui está nossa **transformada inversa**. Giramos a linha de integração em  $90^\circ$  (usando  $ds = i du$ ). O caminho tornou-se uma reta vertical infinita no plano complexo, sendo que a constante  $\gamma$  foi escolhida de modo que todas as singularidades de  $f(s)$  estão no lado esquerdo (Figura 15.16).

A Equação (15.212), nossa transformação inversa, é usualmente conhecida como **integral de Bromwich**, embora às vezes também seja denominada **teorema de Fourier-Mellin** ou **integral de Fourier-Mellin**. Agora, essa integral pode ser avaliada pelos métodos regulares de integração de contorno (Capítulo 7). Se  $t > 0$ , o contorno pode ser fechado por um semicírculo infinito no semiplano esquerdo. Então, pelo teorema do resíduo (Seção 7.1),

$$F(t) = \Sigma(\text{resíduos incluídos para } \Re(s) < \gamma). \quad (15.213)$$

É possível que esse meio de avaliação com  $\Re(s)$  se estendendo até valores negativos pareça paradoxal em vista de nossa exigência anterior de que  $\Re(s) \geq \gamma$ . O paradoxo desaparece quando nos lembramos de que o requisito  $\Re(s) \geq \gamma$  foi imposto para garantir a convergência da transformada integral de Laplace que definiu  $f(s)$ . Uma vez obtida  $f(s)$ , podemos continuar a explorar suas propriedades como uma função analítica no plano complexo qualquer que seja a escolha.<sup>23</sup> Na verdade, estamos empregando continuação analítica para obter  $\mathcal{L}\{F(t)\}$  no semiplano esquerdo, exatamente como a relação de recorrência para a função fatorial foi usada para estender a definição de integral de Euler (Equação (8.5)) ao semiplano esquerdo.

Talvez um par de exemplos possa esclarecer a avaliação da Equação (15.212).

<sup>22</sup>Para uma derivação da transformada inversa de Laplace usando somente variáveis reais, veja C. L. Bohn e R. W. Flynn, Real variable inversion of Laplace transforms: An application in plasma physics. *Am. J. Phys.* 46: 1.250 (1978).

<sup>23</sup>Em trabalho numérico é perfeitamente possível que  $f(s)$  esteja disponível somente para valores positivos de  $s$  reais e discretos. Então são indicados procedimentos numéricos. Veja Krylov e Skoblyna nas Leituras Adicionais.



**Exemplo 15.12.1** INVERSÃO VIA CÁLCULO DE RESÍDUOS

Se  $f(s) = a/(s^2 - a^2)$ , então

$$e^{st} f(s) = \frac{ae^{st}}{s^2 - a^2} = \frac{ae^{st}}{(s + a)(s - a)}. \tag{15.214}$$

Os resíduos podem ser achados usando o Exercício 6.6.1 ou vários outros meios. A primeira etapa é identificar as singularidades, os pólos. Aqui temos um pólo simples em  $s = a$  e outro pólo simples em  $s = -a$ . Pelo Exercício 6.6.1, o resíduo em  $s = a$  é  $(\frac{1}{2})e^{at}$  e o resíduo em  $s = -a$  é  $(-\frac{1}{2})e^{-at}$ . Então,

$$\text{Resíduos} = (\frac{1}{2})(e^{at} - e^{-at}) = \sinh at = F(t), \tag{15.215}$$

de acordo com a Equação (15.105). ■

**Exemplo 15.12.2**

Se

$$f(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s},$$

então  $e^{s(t-a)}$  cresce exponencialmente para  $t < a$  no semi-círculo no plano  $s$  do lado esquerdo, de modo que a integração de contorno e o teorema do resíduo não são aplicáveis. Contudo, podemos avaliar a integral explicitamente como segue. Fazemos  $\gamma \rightarrow 0$  e substituímos  $s = iy$ , portanto

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{iyt} - e^{iy(t-a)}] \frac{dy}{y}. \tag{15.216}$$

Usando a identidade de Euler, só os senos que são ímpares em  $y$  sobrevivem, e obtemos

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sen ty}{y} - \frac{\sen(t-a)y}{y} \right]. \tag{15.217}$$

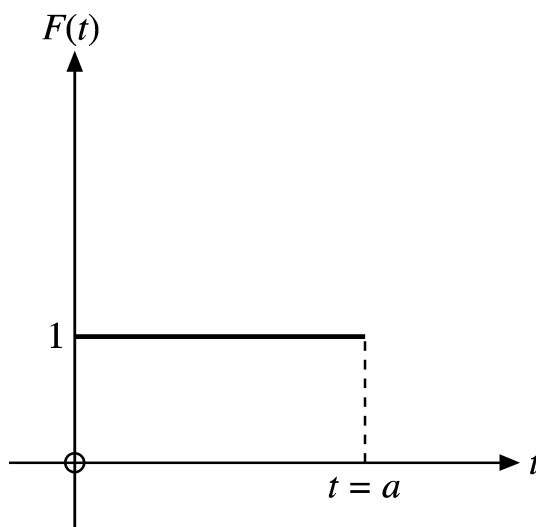


Figura 15.17: Função degrau de comprimento finito  $u(t) - u(t - a)$ .

Se  $k > 0$ , então  $\int_0^{\infty} \frac{\sen ky}{y} dy$ , e ela resulta em  $\pi/2$ , e  $-\pi/2$  se  $k < 0$ . Como consequência,  $F(t) = 0$ , se  $t > a > 0$ , e se  $t < 0$ . Se  $0 < t < a$ , então  $F(t) = 1$ , o que pode ser escrito de forma compacta em termos da função degrau unitária de Heaviside  $u(t)$ , como segue:

$$F(t) = u(t) - u(t - a) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < a, \\ 0, & t > a, \end{cases} \tag{15.218}$$

uma função degrau de altura unitária e comprimento  $a$  (Figura 15.17). ■

Convém fazer dois comentários. Primeiro, esses dois exemplos mal começam a mostrar a utilidade e o poder da integral de Bromwich. Ela está sempre disponível para inverter uma transformada complicada quando as tabelas se mostram inadequadas.

Segundo, essa derivação não é apresentada como rigorosa. Ao contrário, ela é fornecida mais como um argumento de plausibilidade, embora possa ser transformada em rigorosa. A determinação da transformada inversa é um pouco parecida com a solução de uma equação diferencial. O modo como conseguimos a solução faz pouca diferença. Pode até ser apenas um palpite. A solução sempre pode ser verificada por substituição de volta na Equação diferencial original. De modo semelhante,  $F(t)$  pode ser verificada (e deve, para conferir erros descuidados), determinando se, pela Equação (15.99),

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s).$$

Duas derivações alternativas da integral de Bromwich são os tópicos dos Exercícios 15.12.1 e 15.12.2.

Como ilustração final da utilização da transformada inversa de Laplace, temos alguns resultados do trabalho de Brillouin e Sommerfeld (1914) em teoria eletromagnética.

### Exemplo 15.12.3 VELOCIDADE DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM UM MEIO DISPERSIVO

A velocidade de grupo  $u$  de ondas progressivas está relacionada com a velocidade de fase  $v$  pela equação

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \tag{15.219}$$

Aqui,  $\lambda$  é o comprimento de onda. Na vizinhança de uma linha de absorção (ressonância),  $dv/d\lambda$  pode ser suficientemente negativa, de modo que  $u > c$  (Figura 15.18). Imediatamente surge uma pergunta: um sinal pode ser transmitido mais rapidamente do que  $c$ , a velocidade da luz no vácuo? Essa pergunta, que admite que tal velocidade de grupo é significativa, é de fundamental importância para a Teoria da Relatividade Especial.

Precisamos de uma solução para a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \tag{15.220}$$

correspondente a uma vibração harmônica começando na origem no tempo zero. Uma vez que nosso meio é dispersivo,  $v$  é uma função da frequência angular. Imagine, por exemplo, uma onda plana, frequência angular  $\omega$ , incidindo sobre um obturador na origem. Para  $t = 0$ , o obturador é aberto (instantaneamente) e a onda pode avançar ao longo do eixo  $x$  positivo.

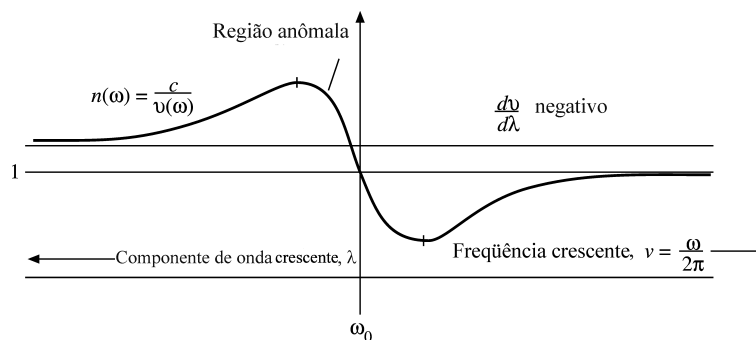


Figura 15.18: Dispersão óptica.

Então, vamos desenvolver uma solução começando em  $x = 0$ . É conveniente usar a fórmula integral de Cauchy, Equação ((6.43),

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-izt}}{z - z_0} dz = e^{-iz_0 t}$$

(para um contorno circundando  $z = z_0$  no sentido positivo). Usando  $s = -iz$  e  $z_0 = \omega$ , obtemos

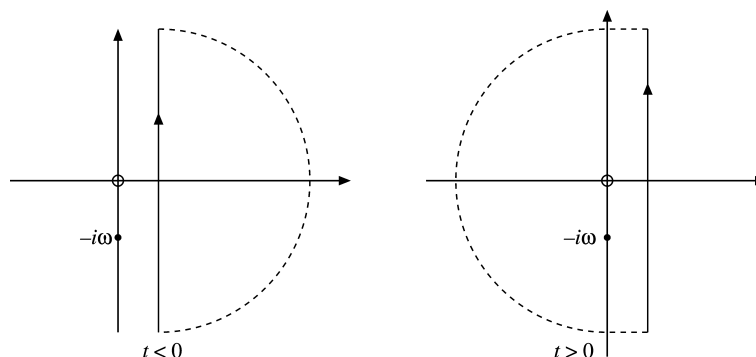


Figura 15.19: Contornos fechados possíveis.

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{s+i\omega} ds = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-i\omega t}, & t > 0. \end{cases} \quad (15.221)$$

Para ser completa, a integral do circuito é ao longo da reta vertical  $\Re(s) = \gamma$  e um semicírculo infinito, como mostra a Figura 15.19. A localização do semicírculo infinito é escolhida de modo que a integral sobre ele se anula, o que significa um semicírculo no semiplano esquerdo para  $t > 0$  o resíduo é circundado. Para  $t < 0$ , pegamos o semiplano direito e nenhuma singularidade é circundada. O fato de que isso é exatamente a integral de Bromwich pode ser verificado observando que

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-i\omega t}, & t > 0 \end{cases} \quad (15.222)$$

e aplicando a transformada de Laplace. A função transformada  $f(s)$  se torna

$$f(s) = \frac{1}{s+i\omega}. \quad (15.223)$$

Nossa integral de Cauchy-Bromwich nos fornece a dependência de tempo de um sinal que sai da origem em  $t = 0$ . Para incluir a dependência de espaço, notamos que

$$e^{s(t-x/v)}$$

satisfaz a equação de onda. Tendo isso como pista, substituímos  $t$  por  $t - x/v$  e escrevemos a solução:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s(t-x/v)}}{s+i\omega} ds. \quad (15.224)$$

Na derivação da integral de Bromwich vimos que nossa variável  $s$  substitui a variável  $\omega$  da transformação de Fourier. Por conseguinte, a velocidade de onda  $v$  pode se tornar uma função de  $s$ , isto é,  $v(s)$ . Aqui não precisamos nos preocupar com sua forma particular. Precisamos apenas da propriedade  $v \leq c$  e

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} v(s) = \text{constante}, c. \quad (15.225)$$

Isso é sugerido pelo comportamento assintótico da curva no lado direito da Figura 15.18.<sup>24</sup>

Avaliando a Equação (15.225) pelo cálculo de resíduos, podemos fechar o caminho de integração por um semicírculo no semiplano direito, contanto que

$$t - \frac{x}{c} < 0.$$

Daí,

$$\psi(x, t) = 0, \quad t - \frac{x}{c} < 0, \quad (15.226)$$

o que significa que a velocidade de nosso sinal não pode ultrapassar a velocidade da luz no vácuo,  $c$ . Esse resultado simples, porém significativo, foi estendido por Sommerfeld e Brillouin para mostrar exatamente como a onda avançava no meio dispersivo. ■

<sup>24</sup>A Equação (15.225) resulta rigorosamente da teoria da dispersão anômala. Veja também as relações de dispersão óptica de Kronig-Kramers da Seção 7.2.

**Resumo — Inversão de Transformada de Laplace**

- Uso direto de tabelas, Tabela 15.2 e referências; uso de frações parciais (Seção 15.8) e dos teoremas operacionais da Tabela 15.1.
- Integral de Bromwich, Equação (15.212), e o cálculo de resíduos.
- Inversão numérica, veja as Leituras Adicionais.

**Tabela 15.1** Operações com transformadas de Laplace

	Operações	Equação
1. Transformada de Laplace	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$	(15.99)
2. Transformada de derivada	$sf(s) - F(+0) = \mathcal{L}\{F'(t)\}$	(15.123)
	$s^2 f(s) - sF(+0) - F'(+0) = \mathcal{L}\{F''(t)\}$	(15.124)
3. Transformada de integral	$\frac{1}{s} f(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(x) dx\right\}$	(Exercício 15.11.1)
4. Substituição	$f(s - a) = \mathcal{L}\{e^{at} F(t)\}$	(15.152)
5. Translação	$e^{-bs} f(s) = \mathcal{L}\{F(t - b)\}$	(15.164)
6. Derivada de transformada	$f^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n F(t)\}$	(15.173)
7. Integral de transformada	$\int_s^\infty f(x) dx = \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$	(15.189)
8. Convolução	$f_1(s)f_2(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t F_1(t - z)F_2(z) dz\right\}$	(15.193)
9. Transformada inversa, integral de Bromwich	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s) ds = F(t)$	(15.212)



**Tabela 15.2** Transformadas de Laplace

$f(s)$	$F(t)$	Limitação	Equação
1. 1	$\delta(t)$	Singularidade em +0	(15.141)
2. $\frac{1}{s}$	1	$s > 0$	(15.102)
3. $\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$	$s > 0$ $n > -1$	(15.108)
4. $\frac{1}{s - k}$	$e^{kt}$	$s > k$	(15.103)
5. $\frac{1}{(s - k)^2}$	$te^{kt}$	$s > k$	(15.175)
6. $\frac{s}{s^2 - k^2}$	$\cosh kt$	$s > k$	(15.105)
7. $\frac{k}{s^2 - k^2}$	$\sinh kt$	$s > k$	(15.105)
8. $\frac{s}{s^2 + k^2}$	$\cos kt$	$s > 0$	(15.107)
9. $\frac{k}{s^2 + k^2}$	$\sen kt$	$s > 0$	(15.107)
10. $\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	$e^{at} \cos kt$	$s > a$	(15.153)
11. $\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	$e^{at} \sen kt$	$s > a$	(15.153)
12. $\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	$t \cos kt$	$s > 0$	(Exercício 15.10.19)
13. $\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	$t \sen kt$	$s > 0$	(Exercício 15.10.19)
14. $(s^2 + a^2)^{-1/2}$	$J_0(at)$	$s > 0$	(15.185)
15. $(s^2 - a^2)^{-1/2}$	$I_0(at)$	$s > a$	(Exercício 15.10.9)
16. $\frac{1}{a} \cotg^{-1} \left( \frac{s}{a} \right)$	$j_0(at)$	$s > 0$	(Exercício 15.10.10)
17. $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2a} \ln \frac{s+a}{s-a} \\ \frac{1}{a} \cotgh^{-1} \left( \frac{s}{a} \right) \end{array} \right\}$	$i_0(at)$	$s > a$	(Exercício 15.10.10)
18. $\frac{(s - a)^n}{s^{n+1}}$	$L_n(at)$	$s > 0$	(Exercício 15.10.12)
19. $\frac{1}{s} \ln(s + 1)$	$E_1(x) = -Ei(-x)$	$s > 0$	(Exercício 15.10.13)
20. $\frac{\ln s}{s}$	$-\ln t - \gamma$	$s > 0$	(Exercício 15.12.9)

Uma tabela de transformadas de Laplace mais extensiva aparece no Capítulo 29 de AMS-55 (referência dada na nota de rodapé 4 no Capítulo 5).

### Exercícios

**15.12.1** Derive a integral de Bromwich pela fórmula integral de Cauchy.  
*Sugestão:* Aplique a transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}$  a

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\alpha}^{\gamma + i\alpha} \frac{f(z)}{s - z} dz,$$

em que  $f(z)$  é analítica para  $\Re(z) \geq \gamma$ .

**15.12.2** Começando com

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s) ds,$$

mostre que, introduzindo

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sz} F(z) dz,$$

podemos converter uma integral na representação de Fourier de uma função delta de Dirac. A partir disso, derive a transformada inversa de Laplace.

**15.12.3** Derive o teorema da convolução da transformação de Laplace usando a integral de Bromwich.

**15.12.4** Ache

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - k^2} \right\}$$

- (a) por uma expansão por frações parciais.
- (b) Repita, usando a integral de Bromwich.

**15.12.5** Ache

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} \right\}$$

- (a) usando uma expansão por frações parciais.
- (b) Repita, usando o teorema da convolução.
- (c) Repita, usando a integral de Bromwich.

Resposta:  $F(t) = 1 - \cos kt$ .

**15.12.6** Use a integral de Bromwich para achar a função cuja transformada é  $f(s) = s^{-1/2}$ . Note que  $f(s)$  tem um ponto de ramificação em  $s = 0$ . O eixo  $x$  negativo pode ser considerado uma linha de corte.

Resposta:  $F(t) = (\pi t)^{-1/2}$ .

**15.12.7** Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1} \{ (s^2 + 1)^{-1/2} \} = J_0(t)$$

por avaliação da integral de Bromwich.

*Sugestão:* Converta sua integral de Bromwich em uma representação integral de  $J_0(t)$ . A Figura 15.20 mostra um possível contorno.

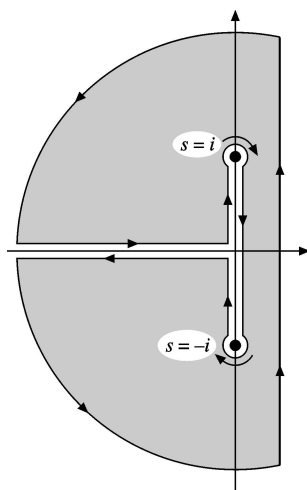


Figura 15.20: Um possível contorno para a inversão de  $J_0(t)$ .

**15.12.8** Avalie a transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \{ (s^2 - a^2)^{-1/2} \}$$

por cada um dos métodos seguintes:





- (a) Expansão em uma série e inversão termo a termo.
- (b) Cálculo direto da integral de Bromwich.
- (c) Mudança de variável na integral de Bromwich:  $s = (a/2)(z + z^{-1})$ .

**15.12.9** Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln s}{s}\right\} = -\ln t - \gamma,$$

em que  $\gamma = 0,5772\dots$  é a constante de Euler-Mascheroni.

**15.12.10** Avalie a integral de Bromwich para

$$f(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}.$$

**15.12.11 Teorema da expansão de Heaviside.** Se a transformada  $f(s)$  puder ser escrita como uma razão

$$f(s) = \frac{g(s)}{h(s)},$$

em que  $g(s)$  e  $h(s)$  são funções analíticas, sendo que  $h(s)$  tem zeros simples, isolados em  $s = s_i$ , mostre que

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{g(s)}{h(s)}\right\} = \sum_i \frac{g(s_i)}{h'(s_i)} e^{s_i t}.$$

*Sugestão:* Veja o Exercício 6.6.2.

**15.12.12** Usando a integral de Bromwich, inverta  $f(s) = s^{-2}e^{-ks}$ . Expresse  $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$  em termos da função degrau unitária (deslocada)  $u(t - k)$ .

Resposta:  $F(t) = (t - k)u(t - k)$ .

**15.12.13** Você tem uma transformada de Laplace:

$$f(s) = \frac{1}{(s + a)(s + b)}, \quad a \neq b.$$

Inverta essa transformada por cada um dos três métodos:

- (a) Frações parciais e uso de tabelas.
- (b) Teorema da convolução.
- (c) Integral de Bromwich.

Resposta:  $F(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a - b}, \quad a \neq b.$

## Leituras Adicionais

Champeney, D. C., *Fourier Transforms and Their Physical Applications*. Nova York: Academic Press (1973).

Transformadas de Fourier são desenvolvidas de uma maneira cuidadosa e fácil de entender. Aproximadamente 60%, desse livro é dedicado a aplicações de interesse em Física e Engenharia.

Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, e F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, 2 volumes. Nova York: McGraw-Hill (1954). Esse texto contém tabelas extensivas de transformadas de Fourier de seno, co-seno e transformadas exponenciais, transformadas de Laplace e transformadas inversas de Laplace, transformadas de Mellin e transformadas inversas de Mellin, transformadas de Hankel e outras transformadas integrais mais especializadas.

Hanna, J. R., *Fourier Series and Integrals of Boundary Value Problems*. Somerset, NJ: Wiley (1990). Esse livro é um tratamento amplo da solução de Fourier de problemas de valor de contorno. Os conceitos de convergência e completude recebem cuidadosa atenção.

Jeffreys, H., e B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3ª ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1972).

Krylov, V. I., e N. S. Skoblya, *Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transform*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations (1969).

Lepage, W. R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. Nova York: McGraw-Hill (1961); Nova York: Dover (1980). Uma análise de variável complexa cuidadosamente desenvolvida e então aplicada a transformadas de Fourier e Laplace. Foi escrita para ser lida por estudantes, mas dirigida aos estudantes sérios.

- McCollum, P. A., e B. F. Brown, *Laplace Transform Tables and Theorems*. Nova York: Holt, Rinehart and Winston (1965).
- Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1971). Esse é um tratamento breve, mas interessante e útil para o estudante avançado, que dá ênfase às aplicações em vez da teoria matemática abstrata.
- Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*. Nova York: McGraw-Hill (1962). Esse é um rigoroso desenvolvimento de transformadas de Fourier e Laplace e tem aplicações extensivas em ciência e engenharia.
- Roberts, G. E., e H. Kaufman, *Table of Laplace Transforms*. Filadélfia: Saunders (1966).
- Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*. Nova York: McGraw-Hill (1951), nova tiragem, Dover (1995). Um tratamento detalhado e abrangente, esse livro está repleto de aplicações a uma ampla variedade de áreas da Física Moderna e Clássica.
- Sneddon, I. H., *The Use of Integral Transforms*. Nova York: McGraw-Hill (1972). Escrito para estudantes de ciência e engenharia em termos que eles podem entender, esse livro abrange todas as transformadas integrais mencionadas neste capítulo, bem como em vários outros. São incluídas muitas aplicações.
- Van der Pol, B., e H. Bremmer, *Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral*, 3<sup>a</sup> ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1987). Temos aqui um desenvolvimento baseado no intervalo  $-\infty$  a  $+\infty$ , em vez da útil 0 a  $\infty$ . O Capítulo V contém um estudo detalhado da função delta de Dirac (função impulso).
- Wolf, K. B., *Integral Transforms in Science and Engineering*. Nova York: Plenum Press (1979). Esse livro é um tratamento muito abrangente de transformadas integrais e suas aplicações.

# 16

## Equações Integrais

### 16.1 Introdução

Com a exceção das transformadas integrais do capítulo anterior, até aqui consideramos relações entre a função desconhecida  $\varphi(x)$  e uma ou mais de suas derivadas. Agora, vamos investigar funções que contêm a função desconhecida dentro de uma integral. Como no caso das equações diferenciais, limitaremos nossas atenções a relações lineares, equações integrais lineares. Equações integrais são classificadas de duas maneiras:

- Se os **limites de integração forem fixos**, denominamos a equação de equação de **Fredholm**; se **um limite for variável**, é uma equação de **Volterra**.
- Se a **função desconhecida** aparecer **somente sob o sinal de integral**, nós a denominamos **de primeira espécie**. Se ela aparecer **dentro e fora** do sinal de integral, é denominada **de segunda espécie**.

#### Definições

Em representação simbólica, temos uma **equação de Fredholm de primeira espécie**,

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt; \quad (16.1)$$

a **equação de Fredholm de segunda espécie**, sendo  $\lambda$  o autovalor,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt; \quad (16.2)$$

a **equação de Volterra de primeira espécie**,

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt; \quad (16.3)$$

e a **equação de Volterra de segunda espécie**,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt. \quad (16.4)$$

Em todos os quatro casos  $\varphi(t)$  é a função desconhecida. Admitimos que  $K(x, t)$ , que denominamos **núcleo**, e  $f(x)$  são desconhecidos. Quando  $f(x) = 0$ , a equação é denominada **homogênea**.

Por que nos incomodamos com equações integrais? Afinal, até agora as equações diferenciais fizeram um trabalho muito bom na descrição de nosso mundo físico. Há diversas razões para introduzir equações integrais aqui.

Demos considerável ênfase à solução de equações diferenciais **sujeitas a condições de contorno particulares**. Por exemplo, a condição de contorno para  $r = 0$  determina se a função de Neumann  $N_n(r)$  está presente quando é resolvida uma equação de Bessel. A condição de contorno para  $N_n(r)$  está presente quando é resolvida uma equação de Bessel. A condição de contorno para  $r \rightarrow \infty$  determina se  $I_n(r)$  está presente em nossa solução da equação modificada de Bessel. A equação integral relaciona a função desconhecida, não somente com seus valores em pontos vizinhos (derivadas), mas também com seus valores em toda uma região, incluindo o contorno. De modo muito real, as condições de contorno são embutidas na equação integral, em vez

de impostas no estágio final da solução. Podemos ver na Seção 10.5, em que núcleos são construídos, que a forma do núcleo depende dos valores no contorno. Então, a equação integral é compacta e pode se revelar uma forma mais conveniente ou poderosa do que a equação diferencial. Problemas matemáticos como existência, unicidade e completude muitas vezes podem ser manipulados com mais facilidade e elegância em forma integral. Por fim, gostemos ou não, há alguns problemas, tais como alguns fenômenos de difusão e transporte, que não podem ser representados por equações diferenciais. Se quisermos resolver tais problemas, somos forçados a operar com equações integrais. Por fim, uma equação integral também pode aparecer como uma questão de escolha deliberada baseada na conveniência ou na necessidade do poder matemático de uma formulação de equação integral.

### Exemplo 16.1.1 REPRESENTAÇÃO DE MOMENTUM EM MECÂNICA QUÂNTICA

A equação de Schrödinger (em representação de espaço ordinário) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (16.5)$$

ou

$$(\nabla^2 + a^2)\psi(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \quad (16.6)$$

em que

$$a^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad v(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}). \quad (16.7)$$

Se generalizarmos a Equação (16.6) para

$$(\nabla^2 + a^2)\psi(\mathbf{r}) = \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') d^3r', \quad (16.8)$$

então, para o caso especial de

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = v(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (16.9)$$

uma interação local, a Equação (16.8) se reduz à Equação (16.6). Considere o par de transformadas de Fourier  $\psi$  e  $\Psi$  (compare com a nota de rodapé 9 na Seção 15.6):

$$\Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Psi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k, \quad (16.10)$$

com a abreviação  $\mathbf{p}$  para o momentum, de modo que

$$\frac{\mathbf{p}}{\hbar} = \mathbf{k} \quad (\text{número da onda}). \quad (16.11)$$

Multiplicando a Equação (16.8) pelo  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , de onda plana, obtemos

$$\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(\nabla^2 + a^2)\psi(\mathbf{r}) d^3r = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (16.12)$$

Note que o  $\nabla^2$  da esquerda opera somente sobre a  $\psi(\mathbf{r})$ . Integrando o lado esquerdo por partes e substituindo a Equação (16.10) por  $\psi(\mathbf{r}')$  no lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} \int (-k^2 + a^2)\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r &= (2\pi)^{3/2}(-k^2 + a^2)\Psi(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Psi(\mathbf{k}')e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} d^3r' d^3r d^3k'. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Se usarmos

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iint v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} d^3r' d^3r, \quad (16.14)$$

a Equação (16.13) se torna

$$(-k^2 + a^2)\Psi(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\Psi(\mathbf{k}') d^3k', \quad (16.15)$$

a equação de Fredholm de segunda espécie na qual o parâmetro  $a^2$  corresponde ao autovalor.



Para nosso caso especial, porém importante, de interação local, a aplicação da Equação (16.9) leva a

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = f(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (16.16)$$

Essa é nossa representação de momentum, equivalente a um potencial ordinário de interação estática no espaço de coordenadas. Nossa função de onda de momentum  $\Psi(\mathbf{k})$  satisfaz a equação integral, Equação (16.15). Devemos enfatizar que, até aqui, admitimos que as integrais de Fourier requeridas existem. Para um potencial de oscilador harmônico,  $V(\mathbf{r}) = r^2$ , as integrais requeridas não existiriam. A Equação (16.10) levaria a oscilações divergentes e não teríamos nenhuma Equação (16.15). ■

### Transformação de uma Equação Diferencial em uma Equação Integral

Muitas vezes descobrimos que temos uma opção. O problema físico pode ser representado por uma equação diferencial ou por uma equação integral. Vamos admitir que temos a equação diferencial e desejamos transformá-la em uma equação integral. Começando com uma EDO **linear** de segunda ordem

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = g(x) \quad (16.17)$$

com condições iniciais

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0,$$

integramos para obter

$$y'(x) = - \int_a^x A(t)y'(t) dt - \int_a^x B(t)y(t) dt + \int_a^x g(t) dt + y'_0. \quad (16.18)$$

Integrando a primeira integral da direita por partes, temos como resultado

$$y'(x) = -Ay(x) - \int_a^x (B - A')y(t) dt + \int_a^x g(t) dt + A(a)y_0 + y'_0. \quad (16.19)$$

Note como as condições iniciais estão sendo absorvidas em nossa nova versão. Integrando uma segunda vez, obtemos

$$y(x) = - \int_a^x Ay dx - \int_a^x du \int_a^u [B(t) - A'(t)]y(t) dt + \int_a^x du \int_a^u g(t) dt + [A(a)y_0 + y'_0](x - a) + y_0. \quad (16.20)$$

Para transformar essa equação em uma forma mais caprichada, usamos a relação

$$\int_a^x du \int_a^u f(t) dt = \int_a^x (x - t)f(t) dt. \quad (16.21)$$

Essa expressão pode ser verificada diferenciando ambos os lados. Visto que as derivadas são iguais, as expressões originais só podem diferir por uma constante. Fazendo  $x \rightarrow a$ , a constante desaparece e a Equação (16.21) é estabelecida. Aplicando-a à Equação (16.20), obtemos

$$y(x) = - \int_a^x \{A(t) + (x - t)[B(t) - A'(t)]\}y(t) dt + \int_a^x (x - t)g(t) dt + [A(a)y_0 + y'_0](x - a) + y_0. \quad (16.22)$$

Se agora introduzirmos as abreviações

$$K(x, t) = (t - x)[B(t) - A'(t)] - A(t), \quad (16.23)$$

$$f(x) = \int_a^x (x - t)g(t) dt + [A(a)y_0 + y'_0](x - a) + y_0,$$

a Equação (16.22) se torna

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t) dt, \quad (16.24)$$

que é a equação de Volterra de segunda espécie. Essa reformulação como equação integral de Volterra oferece certas vantagens em questões de investigação de existência e unicidade.

### Exemplo 16.1.2 EQUAÇÃO DO OSCILADOR LINEAR

Como ilustração, considere a equação de oscilador linear

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{16.25}$$

com

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Isso resulta em (compare com a Equação (16.17))

$$A(x) = 0, \quad B(x) = \omega^2, \quad g(x) = 0.$$

Substituindo na Equação (16.22) (ou Equações (16.23) e (16.24)), constatamos que a equação integral se torna

$$y(x) = x + \omega^2 \int_0^x (t-x)y(t) dt. \tag{16.26}$$

- Essa equação integral, Equação (16.26), é equivalente à equação diferencial original mais as condições iniciais. Uma verificação mostra que cada forma é, de fato, satisfeita por  $y(x) = (1/\omega)\text{sen } \omega x$ .

Vamos reconsiderar a equação de oscilador linear (16.25), mas agora com as condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y(b) = 0.$$

Uma vez que  $y'(0)$  não é dada, devemos modificar o procedimento. A primeira integração resulta em

$$y' = -\omega^2 \int_0^x y dx + y'(0). \tag{16.27}$$

Integrando uma segunda vez e usando novamente a Equação (16.21), temos

$$y = -\omega^2 \int_0^x (x-t)y(t) dt + y'(0)x. \tag{16.28}$$

Para eliminar  $y'(0)$ , desconhecida, agora impomos a condição  $y(b) = 0$ , que resulta em

$$\omega^2 \int_0^b (b-t)y(t) dt = by'(0). \tag{16.29}$$

Substituindo essa expressão de volta na Equação (16.28), obtemos

$$y(x) = -\omega^2 \int_0^x (x-t)y(t) dt + \omega^2 \frac{x}{b} \int_0^b (b-t)y(t) dt. \tag{16.30}$$

Agora vamos dividir o intervalo  $[0, b]$  em dois intervalos  $[0, x]$  e  $[x, b]$ . Uma vez que

$$\frac{x}{b}(b-t) - (x-t) = \frac{t}{b}(b-x), \tag{16.31}$$

achamos

$$y(x) = \omega^2 \int_0^x \frac{t}{b}(b-x)y(t) dt + \omega^2 \int_x^b \frac{x}{b}(b-t)y(t) dt. \tag{16.32}$$

Por fim, se definirmos um núcleo (Figura 16.1)

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{b}(b-x), & t < x, \\ \frac{x}{b}(b-t), & t > x, \end{cases} \tag{16.33}$$

temos

$$y(x) = \omega^2 \int_0^b K(x, t)y(t) dt, \tag{16.34}$$

uma equação de Fredholm homogênea de segunda espécie.

Nosso novo núcleo,  $K(x, t)$ , tem algumas propriedades interessantes.

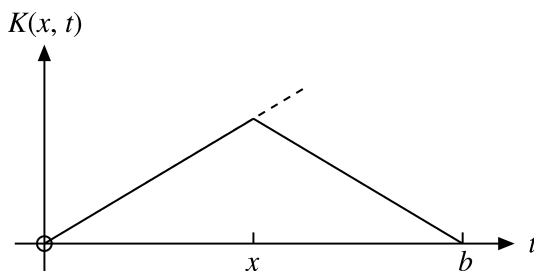


Figura 16.1:

1. É simétrico,  $K(x, t) = K(t, x)$ .
2. É contínuo, no sentido de que

$$\frac{t}{b}(b-x)\Big|_{t=x} = \frac{x}{b}(b-t)\Big|_{t=x}.$$

3. Sua derivada em relação a  $t$  é **descontínua**. À medida que  $t$  aumenta até o ponto  $t = x$ , há uma descontinuidade de  $-1$  em  $\partial K(x, t)/\partial t$ .

De acordo com essas propriedades, na Seção 9.7 identificamos  $K(x, t)$  como uma função de Green.

1. Na transformação de uma EDO linear de segunda ordem em uma equação integral, as condições iniciais ou de contorno desempenham um papel decisivo. Se tivermos condições **iniciais** (somente uma extremidade de nosso intervalo), a equação diferencial se transforma em uma equação integral de Volterra. No caso da equação do oscilador linear com condições de **contorno** (ambas as extremidades de nosso intervalo), a equação diferencial leva a uma equação integral de Fredholm com um núcleo que será uma função de Green.
2. Note que a transformação inversa (equação integral para equação diferencial) nem sempre é possível. Existem equações integrais para as quais nenhuma equação diferencial correspondente é conhecida.

### Exercícios

- 16.1.1** Começando com a EDO, integre duas vezes e derive a equação integral de Volterra correspondente a

(a)  $y''(x) - y(x) = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Resposta:  $y = \int_0^x (x-t)y(t) dt + x.$

(b)  $y''(x) - y(x) = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

Resposta:  $y = \int_0^x (x-t)y(t) dt - x + 1.$

Verifique seus resultados com a Equação (16.23).

- 16.1.2** Derive uma equação integral de Fredholm correspondente a

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1,$$

- (a) integrando duas vezes,
- (b) formando a função de Green

Resposta:  $y(x) = 1 - \int_{-1}^1 K(x, t)y(t) dt,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x)(t+1), & x > t, \\ \frac{1}{2}(1-t)(x+1), & x < t. \end{cases}$$

- 16.1.3** (a) Começando com as respostas dadas no Exercício 16.1.1, diferencie e recupere as EDOs originais e as **condições de contorno**.  
 (b) Repita para o Exercício 16.1.2.

- 16.1.4** A EDO linear geral de segunda ordem com coeficientes constantes é

$$y''(x) + a_1y'(x) + a_2y(x) = 0.$$

Dadas as condições de contorno

$$y(0) = y(1) = 0,$$

integre duas vezes e desenvolva a equação integral

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t)y(t) dt,$$

com

$$K(x, t) = \begin{cases} a_2t(1-x) + a_1(x-1), & t < x, \\ a_2x(1-t) + a_1x, & x < t. \end{cases}$$

Note que  $K(x, t)$  é simétrico e contínuo se  $a_1 = 0$ . Como isso se relaciona à condição de subadjunta da EDO?

- 16.1.5 Verifique que  $\int_a^x \int_a^x f(t) dt dx = \int_a^x (x-t)f(t) dt$  para todo  $f(t)$  (para as quais as integrais existem).
- 16.1.6 Dada  $\varphi(x) = x - \int_0^x (t-x)\varphi(t) dt$ , resolva essa equação integral convertendo-a em uma EDO (mais condições de contorno) e resolvendo a EDO (por inspeção).
- 16.1.7 Mostre que a equação de Volterra homogênea de segunda espécie

$$\psi(x) = \lambda \int_0^x K(x, t)\psi(t) dt$$

não tem nenhuma solução (à parte a trivial  $\psi = 0$ ).

*Sugestão:* Desenvolva uma expansão de Maclaurin de  $\psi(x)$ . Admita que  $\psi(x)$  e  $K(x, t)$  são diferenciáveis em relação a  $x$  como necessário.

## 16.2 Transformadas Integrais, Funções Geradoras

Assim como a diferenciação, EDOs lineares são resolvidas no Capítulo 9. Assim como a integração, não há nenhum método geral disponível para resolver equações integrais. Contudo, certos casos especiais podem ser tratados com nossas **transformadas integrais** (Capítulo 15). Por conveniência, apresentamos aqui uma lista. Se

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt,$$

então,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \psi(t) dt \quad (\text{Fourier}). \tag{16.35}$$

Se

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt,$$

então,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xt} \psi(t) dt \quad (\text{Laplace}). \tag{16.36}$$

Se

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \varphi(t) dt,$$

então,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-t} \psi(t) dt \quad (\text{Mellin}). \tag{16.37}$$

Se

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} t\varphi(t)J_{\nu}(xt) dt,$$

então,

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} t\psi(t)J_{\nu}(xt) dt \quad (\text{Hankel}). \tag{16.38}$$

Na verdade, a utilidade da técnica da transformada integral vai um pouco além dessas quatro formas especializadas.





### Exemplo 16.2.1 SOLUÇÃO DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Vamos considerar uma equação de Fredholm de primeira espécie com um núcleo do tipo geral  $k(x - t)$ ,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - t)\varphi(t) dt, \quad (16.39)$$

no qual  $\varphi(t)$  é nossa função desconhecida. **Admitindo que a transformada necessária exista**, aplicamos o teorema da convolução de Fourier (Seção 15.5) para obter

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\Phi(\omega)e^{-i\omega x} d\omega. \quad (16.40)$$

As funções  $K(\omega)$ ,  $\Phi(\omega)$  e  $F(\omega)$  são as transformadas de Fourier de  $k(x)$ ,  $\varphi(x)$  e  $f(x)$ , respectivamente. Considerando a transformada de Fourier de ambos os lados da Equação (16.40), pela Equação (16.35) temos

$$K(\omega)\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = \frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (16.41)$$

Então,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{F(\omega)}{K(\omega)}, \quad (16.42)$$

e, usando a transformada inversa de Fourier, temos

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)} e^{-i\omega x} d\omega. \quad (16.43)$$

Para uma justificativa rigorosa desse resultado, podemos seguir Morse e Feshbach (veja as Leituras Adicionais) (1953) em campos complexos. Uma extensão dessa solução de transformação aparece como o Exercício 16.2.1. ■

### Exemplo 16.2.2 EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ABEL, TEOREMA DA CONVOLAÇÃO

A equação generalizada de Abel é

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x - t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{com } \begin{cases} f(x) \text{ conhecida,} \\ \varphi(t) \text{ desconhecida.} \end{cases} \quad (16.44)$$

Considerando a transformada de Laplace de ambos os lados dessa equação, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x - t)^\alpha} dt\right\} = \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{\varphi(x)\}, \quad (16.45)$$

a última etapa segundo o teorema da convolução de Laplace (Seção 15.11). Então,

$$\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \frac{s^{1-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!}. \quad (16.46)$$

Dividindo por  $s^1$  obtemos

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \frac{s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!} = \frac{\mathcal{L}\{x^{\alpha-1}\}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(\alpha - 1)!(-\alpha)!}. \quad (16.47)$$

Combinando os fatoriais (Equação (8.32)) e aplicando mais uma vez o teorema da convolução de Laplace, constatamos que

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} \mathcal{L}\left\{\int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-\alpha}} dt\right\}. \quad (16.48)$$

Invertendo com a ajuda do Exercício 15.11.1, obtemos

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-\alpha}} dt, \quad (16.49)$$

e por fim, por diferenciação,

$$\varphi(x) = \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-\alpha}} dt. \quad (16.50)$$

<sup>1</sup>  $s^{1-\alpha}$  não tem uma inversa para  $0 < \alpha < 1$ .

### Funções Geratrizes

Ocasionalmente, o leitor pode encontrar equações integrais que envolvem funções geratrizes. Suponha que temos o caso admitidamente especial

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(1 - 2xt + x^2)^{1/2}} dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (16.51)$$

Notamos duas características importantes:

1.  $(1 - 2xt + x^2)^{-1/2}$  gera os polinômios de Legendre.
2.  $[-1, 1]$  é o intervalo de ortogonalidade para os polinômios de Legendre.

Se agora expandirmos o denominador (propriedade 1) e admitirmos que nossa função desconhecida  $\varphi(t)$  pode ser escrita como uma série desses mesmos polinômios de Legendre,

$$f(x) = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t) \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) x^r dt. \quad (16.52)$$

Utilizando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre (propriedade 2), obtemos

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2a_r}{2r + 1} x^r. \quad (16.53)$$

Podemos identificar  $a_n$  diferenciando  $n$  vezes e então fazendo  $x = 0$ :

$$f^{(n)}(0) = n! \frac{2}{2n + 1} a_n. \quad (16.54)$$

Daí,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} P_n(t). \quad (16.55)$$

Resultados similares podem ser obtidos com as outras funções geratrizes (compare com o Exercício 7.1.6).

- Essa técnica de expandir em uma série de funções especiais está sempre disponível. Vale uma tentativa sempre que a expansão for possível (e conveniente) e o intervalo for adequado.

### Exercícios

**16.2.1** O núcleo de uma equação de Fredholm da segunda espécie,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \varphi(t) dt,$$

é da forma  $k(x - t)$ .<sup>2</sup> Admitindo que as transformadas requeridas existem, mostre que

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t) e^{-ixt} dt}{1 - \sqrt{2\pi} \lambda K(t)}.$$

$F(t)$  e  $K(t)$  são as transformadas de Fourier de  $f(x)$  e  $k(x)$ , respectivamente.

**16.2.2** O núcleo de uma equação de Volterra de primeira espécie,

$$f(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt,$$

tem a forma  $k(x - t)$ . Admitindo que as transformadas requeridas existem, mostre que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(s)}{K(s)} e^{xs} ds.$$

$F(s)$  e  $K(s)$  são as transformadas de Laplace de  $f(x)$  e  $k(x)$ , respectivamente.

<sup>2</sup>Esse núcleo e um intervalo  $0 \leq x < \infty$  são características de equações integrais do tipo Wiener-Hopf. Detalhes serão encontrados no Capítulo 8 de Morse e Feshbach (1953); veja as Leituras Adicionais.



**16.2.3** O núcleo de uma equação de Volterra de segunda espécie,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t) dt,$$

tem a forma  $k(x - t)$ . Admitindo que as transformadas requeridas existem, mostre que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)} e^{xs} ds.$$

**16.2.4** Usando a solução de transformada de Laplace (Exercício 16.2.3), resolva

(a)  $\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t) dt.$

Resposta:  $\varphi(x) = \text{sen } x.$

(b)  $\varphi(x) = x - \int_0^x (t - x)\varphi(t) dt.$

Resposta:  $\varphi(x) = \text{senh } x.$

Verifique seus resultados substituindo de volta nas equações integrais originais.

**16.2.5** Reformule as equações do Exemplo 16.2.1 (Equações (16.39) a (16.43)) usando transformadas de Fourier de co-seno.

**16.2.6** Dada a equação integral de Fredholm,

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \varphi(t) dt,$$

aplique a técnica de convolução de Fourier do Exemplo 16.2.1 para resolver para  $\varphi(t)$ .

**16.2.7** Resolva a equação de Abel,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

pelo seguinte método:

- (a) Multiplique ambos os lados por  $(z - x)^{\alpha-1}$  e integre com relação a  $x$  no intervalo  $0 \leq x \leq z$ .
- (b) Inverta a ordem de integração e avalie a integral do lado direito (com relação a  $x$ ) pela função beta.

Nota:

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = B(1-\alpha, \alpha) = (-\alpha)!(\alpha-1)! = \frac{\pi}{\text{sen } \pi\alpha}.$$

**16.2.8** Dada a equação generalizada de Abel com  $f(x) = 1$ ,

$$1 = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

resolva para  $\varphi(t)$  e verifique que  $\varphi(t)$  é uma solução da equação dada.

Resposta:  $\varphi(t) = \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} t^{\alpha-1}.$

**16.2.9** A equação de Fredholm de primeira espécie tem um núcleo  $e^{-(x-t)^2}$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \varphi(t) dt.$$

Mostre que a solução é

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!} H_n(x),$$

na qual  $H_n(x)$  é um polinômio de Hermite de  $n$ -ésima ordem.

**16.2.10** Resolva a equação integral

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(1 - 2xt + x^2)^{1/2}} dt, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

para a função desconhecida  $\varphi(t)$  se

(a)  $f(x) = x^{2s}$ , (b)  $f(x) = x^{2s+1}$ .

Resposta: (a)  $\varphi(t) = \frac{4s+1}{2} P_{2s}(t)$ , (b)  $\varphi(t) = \frac{4s+3}{2} P_{2s+1}(t)$ .

**16.2.11** Uma análise da teoria da difração de Kirchhoff de um *laser* leva à equação integral

$$v(\mathbf{r}_2) = \gamma \iint K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_1) dA.$$

A função desconhecida,  $v(\mathbf{r}_1)$ , dá a distribuição geométrica do campo de radiação sobre uma superfície de espelho; a faixa de integração é sobre a superfície daquele espelho. Para espelhos esféricos confocais, a equação integral se torna

$$v(x_2, y_2) = \frac{-i\gamma e^{ikb}}{\lambda b} \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-(ik/b)(x_1 x_2 + y_1 y_2)} v(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

na qual  $b$  é a distância na linha central entre os dois espelhos *laser*. Isso pode ser colocado em forma um pouco mais simples pelas substituições

$$\frac{kx_i^2}{b} = \xi_i^2, \quad \frac{ky_i^2}{b} = \eta_i^2 \quad \text{e} \quad \frac{ka^2}{b} = \frac{2\pi a^2}{\lambda b} = \alpha^2.$$

- (a) Mostre que as variáveis se separam e obtemos duas equações integrais.
- (b) Mostre que os novos limites,  $\pm\alpha$ , podem ser aproximados por  $\pm\infty$  para uma dimensão de espelho  $a \gg \lambda$ .
- (c) Resolva as equações integrais resultantes.

### 16.3 Série de Neumann, Núcleos Separáveis (Degenerados)

Muitas e provavelmente a maioria das equações integrais não podem ser resolvidas pelas técnicas especializadas de transformadas da seção anterior. Aqui desenvolvemos três técnicas bastante gerais para resolver equações integrais. A primeira, devida em grande parte a Neumann, Liouville e Volterra, desenvolve a função desconhecida  $\varphi(x)$  como uma série de potências em  $\lambda$ , em que  $\lambda$  é uma constante dada. O método é aplicável sempre que a série convergir.

O segundo método é um tanto restrito porque requer que as duas variáveis que aparecem no núcleo  $K(x, t)$  sejam separáveis. Contudo, há duas importantes recompensas: (1) a relação entre uma equação integral e um conjunto de equações algébricas lineares simultâneas é mostrada explicitamente, e (2) o método leva a autovalores e autofunções, em estreita analogia com a Seção 3.5.

No terceiro método é delineada uma técnica, para a solução numérica de equações de Fredholm de primeira e de segunda espécies. O problema proposto pelas matrizes mal condicionadas é enfatizado.

#### Série de Neumann

Resolvemos uma equação integral linear da segunda espécie por aproximações sucessivas; nossa equação integral é a equação de Fredholm,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \tag{16.56}$$

na qual  $f(x) \neq 0$ . Se o limite superior da integral for uma variável (equação de Volterra), o seguinte desenvolvimento ainda será válido, mas com pequenas modificações. Vamos tentar (não há nenhuma **garantia** de que funcionará) aproximar nossa função desconhecida por

$$\varphi(x) \approx \varphi_0(x) = f(x). \tag{16.57}$$



Essa opção não é obrigatória. Se você tiver um palpite melhor, não se acanhe. Aqui, a opção equivale a dizer que a integral ou a constante  $\lambda$  é pequena. Para melhorar essa primeira aproximação grosseira, recolocamos  $\varphi_0(x)$  na integral, Equação (16.56), e obtemos

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt. \quad (16.58)$$

Repetindo o processo de substituir a nova  $\varphi_n(x)$  de volta na Equação (16.56), desenvolvemos a seqüência

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t_1) f(t_1) dt_1 \\ &+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) f(t_2) dt_2 dt_1 \end{aligned} \quad (16.59)$$

e

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i(x), \quad (16.60)$$

em que

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \int_a^b K(x, t_1) f(t_1) dt_1, \\ u_2(x) &= \int_a^b \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) f(t_2) dt_2 dt_1, \\ u_n(x) &= \iint \cdots \int K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-1}, t_n) \cdot f(t_n) dt_n \cdots dt_1. \end{aligned} \quad (16.61)$$

Esperamos que nossa solução  $\varphi(x)$  seja

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i(x), \quad (16.62)$$

**contanto que nossa série infinita convirja.** Podemos verificar convenientemente a convergência pelo teste da raiz de Cauchy, Seção 5.2, observando que

$$|\lambda^n u_n(x)| \leq |\lambda^n| \cdot |f|_{\text{máx}} \cdot |K|_{\text{máx}}^n \cdot |b - a|^n, \quad (16.63)$$

usando  $|f|_{\text{máx}}$  para representar o valor **máximo** de  $|f(x)|$  no intervalo  $[a, b]$  e  $|K|_{\text{máx}}$  para representar o valor máximo de  $|K(x, t)|$  nesse domínio no plano  $x, t$ . Temos convergência se

$$|\lambda| \cdot |K|_{\text{máx}} \cdot |b - a| < 1. \quad (16.64)$$

Note que  $\lambda |u_n(\text{máx})|$  está sendo usado como uma série de **comparação**. Se ele convergir, nossa série propriamente dita deve convergir. Se essa condição não for satisfeita, podemos ter ou não ter convergência. É preciso um teste mais sensível. É claro que, mesmo que a série de Neumann divirja, ainda poderá haver uma solução capaz de ser obtida por outro método.

Para ver o que foi feito com essa manipulação iterativa, talvez seja proveitoso reescrever a solução de série de Neumann, Equação (16.59), em forma de operador. Começamos reescrevendo a Equação (16.56) como

$$\varphi = \lambda K \varphi + f,$$

onde  $K$  representa o **operador integral**  $\int_a^b K(x, t) [\ ] dt$ . Resolvendo para  $\varphi$ , obtemos

$$\varphi = (1 - \lambda K)^{-1} f.$$

Expansão binomial leva à Equação (16.59). A **convergência** da série de Neumann é uma demonstração de que o operador inverso  $(1 - \lambda K)^{-1}$  existe.

**Exemplo 16.3.1** SOLUÇÃO DE SÉRIE DE NEUMANN

Para ilustrar o método de Neumann, consideramos a equação integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt. \tag{16.65}$$

Para iniciar a série de Neumann, consideramos

$$\varphi_0(x) = x. \tag{16.66}$$

Então,

$$\varphi_1(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)t dt = x + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2x \right) \Big|_{-1}^1 = x + \frac{1}{3}.$$

Substituindo  $\varphi_1(x)$  de volta na Equação (16.65), obtemos

$$\varphi_2(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)t dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\frac{1}{3} dt = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3}.$$

Continuando esse processo de substituição de volta na Equação (16.65), obtemos

$$\varphi_3(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2},$$

e, por indução,

$$\varphi_{2n}(x) = x + \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} 3^{-s} - x \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} 3^{-s}. \tag{16.67}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}. \tag{16.68}$$

Essa solução pode (e deve) ser verificada substituindo de volta na equação original, Equação (16.65). ■

É interessante notar que nossa série convergiu com facilidade, ainda que a Equação (16.64) **não** seja satisfeita nesse caso particular. Na verdade, a Equação (16.64) é um limite superior bastante grosseiro para  $\lambda$ . Podemos mostrar que uma condição necessária e suficiente para a convergência de nossa solução de série é que  $|\lambda| < |\lambda_e|$ , onde  $\lambda_e$  é o autovalor de menor grandeza da equação homogênea correspondente [ $f(x) = 0$ ]. Para esse exemplo particular,  $\lambda_e = \sqrt{3}/2$ . Claramente,  $\lambda = \frac{1}{2} < \lambda_e = \sqrt{3}/2$ .

Uma abordagem para o cálculo de perturbações dependentes de tempo em Mecânica Quântica começa com a equação integral para o operador de evolução

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V(t_1)U(t_1, t_0) dt_1. \tag{16.69a}$$

iteração leva a

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V(t_1) dt_1 + \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} V(t_1)V(t_2) dt_2 dt_1 + \dots \tag{16.69b}$$

O operador de evolução é obtido como uma série de múltiplas integrais do potencial perturbador  $V(t)$ , em estreita analogia com a série de Neumann, Equação (16.60). Para  $V = V_0$ , independente de  $t$ , o operador de evolução se torna (veja o Exercício 3.4.13, substitua  $t \rightarrow \Delta t$  e construa  $U$  a partir dos produtos de  $T(t + \Delta t, t)$  como na Equação (4.26))

$$U(t_1, t_0) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (t - t_0) V_0 \right].$$

Uma segunda relação semelhante entre a série de Neumann e a Mecânica Quântica aparece quando a equação de onda de Schrödinger para dispersão é reformulada como uma equação integral. O primeiro termo em uma solução de série de Neumann é a onda incidente (não-perturbada). O segundo termo é a aproximação de primeira ordem de Born, Equação (9.203b) da Seção 9.7.

O método de Neumann também pode ser aplicado às equações integrais de Volterra da segunda espécie, Equação (16.4) ou Equação (16.56) com o limite superior fixo,  $b$ , substituído por uma variável,  $x$ . No caso de Volterra, a série de Neumann converge para todo  $\lambda$ , contanto que o núcleo seja de quadrado integrável.



### Núcleo Separável

A técnica de substituir nossa equação integral por equações algébricas simultâneas também pode ser usada sempre que nosso núcleo  $K(x, t)$  for separável, no sentido de que

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^n M_j(x)N_j(t), \quad (16.70)$$

em que  $n$ , o limite superior da soma, é **finito**. Tais núcleos às vezes são denominados **degenerados**. Nossa classe de núcleos separáveis inclui todos os polinômios e muitas das funções transcendentais elementares, isto é,

$$\cos(t - x) = \cos t \cos x + \operatorname{sen} z \operatorname{tsen} x. \quad (16.70a)$$

Se a Equação (16.70) for satisfeita, a substituição na equação de Fredholm de segunda espécie, Equação (16.2), resulta em

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n M_j(x) \int_a^b N_j(t)\varphi(t) dt, \quad (16.71)$$

permutando integração e somatório. Agora, a integral em relação a  $t$  é uma constante,

$$\int_a^b N_j(t)\varphi(t) dt = c_j. \quad (16.72)$$

Por conseguinte, a Equação (16.71) se torna

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j M_j(x). \quad (16.73)$$

Isso nos dá  $\varphi(x)$ , nossa solução, uma vez que as constantes  $c_i$  tenham sido determinadas. A Equação (16.73) ainda nos indica a forma de  $\varphi(x)$ :  $f(x)$ , mais uma combinação linear dos fatores dependentes de  $x$  do núcleo separável.

Podemos achar  $c_i$  multiplicando a Equação (16.73) por  $N_i(x)$  e integrando para eliminar a dependência de  $x$ . A utilização da Equação (16.72) resulta em

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j, \quad (16.74)$$

onde

$$b_i = \int_a^b N_i(x)f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b N_i(x)M_j(x) dx. \quad (16.75)$$

Talvez seja proveitoso escrever a Equação (16.74) em forma matricial, com  $A = (a_{ij})$ :

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \lambda A\mathbf{c} = (1 - \lambda A)\mathbf{c}, \quad (16.76a)$$

ou<sup>3</sup>

$$\mathbf{c} = (1 - \lambda A)^{-1}\mathbf{b}. \quad (16.76b)$$

A Equação (16.76a) é equivalente a um conjunto de equações algébricas lineares simultâneas

$$\begin{aligned} (1 - \lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12}c_2 - \lambda a_{13}c_3 - \cdots &= b_1, \\ -\lambda a_{21}c_1 + (1 - \lambda a_{22})c_2 - \lambda a_{23}c_3 - \cdots &= b_2, \\ -\lambda a_{31}c_1 - \lambda a_{32}c_2 + (1 - \lambda a_{33})c_3 - \cdots &= b_3, \end{aligned} \quad \text{e assim por diante.} \quad (16.77)$$

Se nossa equação integral for homogênea,  $[f(x) = 0]$ , então  $\mathbf{b} = 0$ . Para obter uma solução, igualamos o determinante dos coeficientes de  $c_i$  a zero,

$$|1 - \lambda A| = 0, \quad (16.78)$$

exatamente como na Seção 3.5. As raízes da Equação (16.78) dão nossos autovalores. Substituindo em  $(1 - \lambda A)\mathbf{c} = 0$ , achamos os  $c_i$  e, então, a Equação (16.73) dá nossa solução.

<sup>3</sup>Note a similaridade com a forma de operador da série de Neumann.

### Exemplo 16.3.2

Para ilustrar essa técnica para determinar autovalores e autofunções da equação homogênea de Fredholm, consideramos o caso

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (t+x)\varphi(t) dt. \quad (16.79)$$

Aqui (compare com as Equações (16.71) e (16.77))

$$\begin{aligned} M_1 &= 1, & M_2(x) &= x, \\ N_1(t) &= t, & N_2 &= 1. \end{aligned}$$

A Equação (16.75) dá como resultado

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = \frac{2}{3}, \quad a_{21} = 2; \quad b_1 = 0 = b_2.$$

A Equação (16.78), nossa equação secular, se torna

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2\lambda}{3} \\ -2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (16.80)$$

Expandindo, obtemos

$$1 - \frac{4\lambda^2}{3} = 0, \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (16.81)$$

Substituindo os autovalores  $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$  na Equação (16.76), temos

$$c_1 \mp \frac{c_2}{\sqrt{3}} = 0. \quad (16.82)$$

Por fim, escolhendo  $c_1 = 1$ , a Equação (16.73) resulta em

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}x), \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (16.83)$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3}x), \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (16.84)$$

Uma vez que nossa equação é homogênea, a normalização de  $\varphi(x)$  é arbitrária. ■

Se o núcleo não for separável no sentido da Equação (16.70), ainda há a possibilidade de que ele possa ser aproximado por um núcleo que é separável. A solução exata de uma equação aproximada, uma equação que aproxima a equação original. Então a solução do problema do núcleo aproximado separável pode ser verificada substituindo de volta no problema original do núcleo inseparável.

### Solução Numérica

Há literatura extensiva sobre a solução numérica de equações integrais, e grande parte dela dedica-se a técnicas especiais para certas situações. Um método de razoável generalidade é a substituição da única equação integral por um conjunto de equações algébricas simultâneas. E, mais uma vez, são invocadas técnicas matriciais. Aqui, essa abordagem de matriz da equação algébrica simultânea é aplicada a dois casos diferentes. Para a equação homogênea de Fredholm de segunda espécie, esse método funciona bem. Para a equação de Fredholm de primeira espécie, o método é um desastre. Primeiro vamos tratar do desastre.

Consideramos a equação integral de Fredholm de primeira espécie,

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt, \quad (16.84a)$$

com  $f(x)$  e  $K(x,t)$  conhecidas e  $\varphi(t)$  desconhecida. A integral pode ser avaliada (em princípio) por técnicas de quadratura. Para precisão máxima recomenda-se o método gaussiano (se o núcleo for contínuo e tiver derivadas contínuas). A quadratura numérica substitui a integral por um somatório,

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^n A_k K(x_i, t_k)\varphi(t_k), \quad (16.84b)$$





sendo  $A_k$  os coeficientes de quadratura. Abreviamos  $f(x_i)$  como  $f_i$ ,  $\varphi(t_k)$  como  $\varphi_k$  e  $A_k K(x_i, t_k)$  como  $B_{ik}$ . Na verdade, estamos mudando de uma descrição de função para uma descrição de matriz vetorial, com as  $n$  componentes do vetor  $(f_i)$  definidas como os valores da função nos  $n$  pontos discretos  $[f(x_i)]$ . A Equação (16.84b) se torna

$$f_i = \sum_{k=1}^n B_{ik} \varphi_k,$$

uma equação matricial. Invertendo  $(B_{ik})$ , obtemos

$$\varphi(x_k) = \varphi_k = \sum_{i=1}^n B_{ki}^{-1} f_i, \tag{16.84c}$$

e a Equação (16.84a) é resolvida em princípio. Na prática, a matriz de quadratura coeficientes-núcleo costuma ser “malcondicionada”(em relação à inversão). Isso significa que no processo de inversão pequenos erros (numéricos) são multiplicados por grandes fatores. No processo de inversão todos os algarismos significativos podem ser perdidos e a Equação (16.84c) se torna um absurdo numérico.

Esse desastre não deveria ser de todo inesperado. A integração é, em essência, uma operação de ajuste.  $f(x)$  é relativamente insensível à variação local de  $\varphi(t)$ . Ao contrário,  $\varphi(t)$  pode ser extremamente sensível a pequenas mudanças em  $f(x)$ . Pequenos erros em  $f(x)$  ou em  $B^{-1}$  são aumentados e a precisão desaparece. Esse mesmo comportamento aparece em tentativas de inverter transformadas de Laplace por métodos numéricos.

Quando a técnica de quadratura de matriz é aplicada ao problema do autovalor da equação integral, a equação de Fredholm homogênea de núcleo simétrico de segunda espécie,<sup>4</sup>

$$\lambda \varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \tag{16.84d}$$

o sucesso da técnica é muito maior. Substituindo a integral por um conjunto de equações algébricas simultâneas (quadratura numérica), temos

$$\lambda \varphi_i = \sum_{k=1}^n A_k K_{ik} \varphi_k, \tag{16.84e}$$

com  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ , como antes. Os pontos  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são considerados os mesmos (numericamente) que  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , portanto  $K_{ik}$  será simétrico. O sistema é simetrizado multiplicando por  $A_i^{1/2}$ , de modo que

$$\lambda (A_i^{1/2} \varphi_i) = \sum_{k=1}^n (A_i^{1/2} K_{ik} A_k^{1/2}) (A_k^{1/2} \varphi_k). \tag{16.84f}$$

Substituindo  $A_i^{1/2} \varphi_i$  por  $\psi_i$  e  $A_i^{1/2} K_{ik} A_k^{1/2}$  por  $S_{ik}$ , obtemos

$$\lambda \psi = S \psi, \tag{16.84g}$$

com  $S$  simétrico (uma vez que admitimos que o núcleo  $K(x, t)$  é simétrico). É claro que  $\psi$  tem componentes  $\psi_i = \psi(x_i)$ . A Equação (16.84g) é nossa equação matricial de autovalor, Equação (3.136). Os autovalores são obtidos imediatamente chamando uma auto-rotina de prateleira.<sup>5</sup> Para núcleos tais como os do Exercício 16.3.15 e usando uma quadratura de Gauss-Legendre de 10 pontos, a auto-rotina determina o maior autovalor até cerca de 0,5% para os casos em que o núcleo tem descontinuidades em suas derivadas. Se as derivadas forem contínuas, a precisão é muito maior.

Linz<sup>6</sup> descreveu um interessante refinamento variacional na determinação de  $\lambda_{\text{máx}}$  com alta precisão. A chave para esse método é o Exercício 17.8.7. As componentes do vetor autofunção são obtidas pela Equação (16.84d) com  $\varphi(t_k)$  agora conhecida e  $\varphi_i = \varphi(x_i)$  gerada como requerido. (Os  $x_i$  não estão mais vinculados aos  $t_k$ .)

<sup>4</sup>O autovalor  $\lambda$  foi escrito do lado esquerdo, multiplicando a autofunção, como é costumeiro em análise matricial (Seção 3.5). Nessa forma,  $\lambda$  assumirá um **valor máximo**.

<sup>5</sup>Veja W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, e W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, 2ª ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1992), Capítulo 11, para detalhes, referências e códigos de computador. Os *softwares* simbólicos *Mathematica* e *Maple* também incluem funções matriciais para cálculo de autovalores e autovetores.

<sup>6</sup>P. Linz, On the numerical computation of eigenvalues and eigenvectors of symmetric integral equations. *Math. Comput.* 24: 905 (1970).

### Exercícios

**16.3.1** Usando a série de Neumann, resolva

$$(a) \varphi(x) = 1 - 2 \int_0^x t\varphi(t) dt,$$

$$(b) \varphi(x) = x + \int_0^x (t-x)\varphi(t) dt,$$

$$(c) \varphi(x) = x - \int_0^x (t-x)\varphi(t) dt.$$

Resposta: (a)  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ .

**16.3.2** Resolva a equação

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t+x)\varphi(t) dt$$

pelo método do núcleo separável. Compare com a solução do método de Neumann da Seção 16.3.

Resposta:  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(3x - 1)$ .

**16.3.3** Ache os autovalores e autofunções de

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt.$$

**16.3.4** Ache os autovalores e autofunções de

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-t)\varphi(t) dt.$$

Resposta:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\pi}$ ,  $\varphi(x) = A \cos x + B \sin x$ .

**16.3.5** Ache os autovalores e autofunções de

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x-t)^2 y(t) dt.$$

*Sugestão:* Esse problema pode ser tratado pelo método do núcleo separável ou por uma expansão de Legendre.

**16.3.6** Se a técnica do núcleo separável desta seção for aplicado à equação de Fredholm de primeira espécie (Equação (16.1)), mostre que a Equação (16.76) é substituída por

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Em geral, a solução para a  $\varphi(t)$  desconhecida **não** é única.

**16.3.7** Resolva

$$\psi(x) = x + \int_0^1 (1+xt)\psi(t) dt$$

por cada um dos métodos seguintes:

- (a) a técnica da série de Neumann,
- (b) a técnica do núcleo separável,
- (c) palpite calibrado.

**16.3.8** Use a técnica de núcleo separável para mostrar que

$$\psi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x \sin t \psi(t) dt$$

**não** tem nenhuma solução (à parte a trivial  $\psi = 0$ ). Explique esse resultado em termos de separabilidade e simetria.



**16.3.9** Resolva

$$\varphi(x) = 1 + \lambda^2 \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt$$

por cada um dos métodos seguintes:

- (a) redução a uma EDO (ache as condições de fronteira),
- (b) a série de Neumann,
- (c) a utilização de transformadas de Laplace.

Resposta:  $\varphi(x) = \cosh \lambda x$ .

**16.3.10** (a) Na Equação (16.69a) considere  $V = V_0$ , independente de  $t$ . Sem usar a Equação (16.69b), mostre que a Equação (16.69a) leva diretamente a

$$U(t-t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)V_0\right].$$

(b) Repita para a Equação (16.69b) sem usar a Equação (16.69a).

**16.3.11** Dada  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1+xt)\varphi(t) dt$ , resolva para os autovalores e as autofunções pela técnica do núcleo separável.

**16.3.12** Conhecer a forma das soluções pode ser uma grande vantagem. Para a equação integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1+xt)\varphi(t) dt,$$

admita que  $\varphi(x)$  tem a forma  $1+bx$ . Substitua na equação integral. Integre e resolva para  $b$  e  $\lambda$ .

**16.3.13** A equação integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 J_0(\alpha xt)\varphi(t) dt, \quad J_0(\alpha) = 0,$$

é aproximada por

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 [1-x^2t^2]\varphi(t) dt.$$

Ache o mínimo autovalor  $\lambda$  e a autofunção correspondente  $\varphi(t)$  da equação aproximada.

Resposta:  $\lambda_{\min} = 1,112486$ ,  $\varphi(x) = 1 - 0,303337x^2$ .

**16.3.14** Dada a equação integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \text{sen } \pi xt \varphi(t) dt.$$

Aproxime o núcleo por

$$K(x,t) = 4xt(1-xt) \approx \text{sen } \pi xt.$$

Ache o autovalor positivo e a autofunção correspondente para a equação integral aproximada.

Nota: Para  $K(x,t) = \text{sen } \pi xt$ ,  $\lambda = 1,6334$ .

Resposta:  $\lambda = 1,5678$ ,  $\varphi(x) = x - 0,6955x^2$   
 $(\lambda_+ = \sqrt{31} - 4, \lambda_- = -\sqrt{31} - 4)$ .

**16.3.15** A equação

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt$$

tem um núcleo degenerado  $K(x,t) = \sum_{i=1}^n M_i(x)N_i(t)$ .

(a) Mostre que essa equação integral não tem nenhuma solução simples, a menos que  $f(x)$  possa ser escrita como

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i M_i(x),$$

com os  $f_i$  constantes.

- (b) Mostre que podemos adicionar  $\varphi(x)$  a qualquer solução  $\psi(x)$ , contanto que  $\psi(x)$  seja ortogonal a todos as  $N_i(x)$ :

$$\int_a^b N_i(x)\psi(x) dx = 0 \quad \text{para todo } i.$$

**16.3.16** Usando quadratura numérica, converta

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 J_0(\alpha xt)\varphi(t) dt, \quad J_0(\alpha) = 0,$$

a um conjunto de equações lineares simultâneas.

- (a) Ache o mínimo autovalor  $\lambda$ .  
 (b) Determine  $\varphi(x)$  em valores discretos de  $x$  e construa um gráfico de  $\varphi(x)$  versus  $x$ . Compare com a autofunção aproximada do Exercício 16.3.13.

Resposta: (a)  $\lambda_{\text{mín}} = 1, 14502$ .

**16.3.17** Usando quadratura numérica, converta

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \text{sen} \pi xt \varphi(t) dt$$

a um conjunto de equações lineares simultâneas.

- (a) Ache o mínimo autovalor  $\lambda$ .  
 (b) Determine  $\varphi(x)$  em valores discretos de  $x$  e construa um gráfico de  $\varphi(x)$  versus  $x$ . Compare com a autofunção aproximada do Exercício 16.3.14.

Resposta: (a)  $\lambda_{\text{mín}} = 1, 6334$ .

**16.3.18** Dada uma equação homogênea de Fredholm de segunda espécie

$$\lambda\varphi(x) = \int_0^1 K(x, t)\varphi(t) dt.$$

- (a) Calcule o maior autovalor  $\lambda_0$ . Use a técnica de quadratura de Gauss-Legendre de 10 pontos. Para comparação, os autovalores listados por Linz são dados como  $\lambda_{\text{exato}}$ .  
 (b) Tabule  $\varphi(x_k)$ , em que os  $x_k$  são os 10 pontos de avaliação em  $[0, 1]$ .  
 (c) Tabule a razão

$$\frac{1}{\lambda_0\varphi(x)} \int_0^1 K(x, t)\varphi(t) dt \quad \text{para } x = x_k.$$

Esse é o teste para saber se você realmente tem ou não uma solução.

- (a)  $K(x, t) = e^{xt}$ .

Resposta:  $\lambda_{\text{exato}} = 1, 35303$ .

$$(b) K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x < t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x > t. \end{cases}$$

Resposta:  $\lambda_{\text{exato}} = 0, 24296$ .

- (c)  $K(x, t) = |x - t|$ .

Resposta:  $\lambda_{\text{exato}} = 0, 34741$ .

$$(d) K(x, t) = \begin{cases} x, & x < t, \\ t, & x > t. \end{cases}$$

Resposta:  $\lambda_{\text{exato}} = 0, 40528$ .

*Nota:* (1) Os pontos de avaliação  $x_i$  da quadratura de Gauss-Legendre para  $[-1, 1]$  podem ser transformados **linearmente** para  $[0, 1]$ ,

$$x_i[0, 1] = \frac{1}{2}(x_i[-1, 1] + 1).$$

Então os fatores de ponderação  $A_i$  são reduzidos proporcionalmente ao comprimento do intervalo:

$$A_i[0, 1] = \frac{1}{2}A_i[-1, 1].$$



**16.3.19** Usando a técnica da matriz variacional do Exercício 17.8.7, refine seu cálculo do autovalor do Exercício 16.3.18(c) [ $K(x, t) = |x - t|$ ]. Tente uma matriz  $40 \times 40$ .

*Nota:* Sua matriz deve ser simétrica, de modo que os autovetores (desconhecidos) serão ortogonais.

Resposta: (quadratura de Gauss-Legendre de 40 pontos) 0,34727.

## 16.4 Teoria de Hilbert-Schmidt

### Simetrização de Núcleos

Esse é o desenvolvimento das propriedades de equações integrais lineares (do tipo de Fredholm) com núcleos simétricos:

$$K(x, t) = K(t, x). \quad (16.85)$$

Antes de mergulhar na teoria, observamos que alguns importantes núcleos não-simétricos podem ser simetrizados. Se tivermos a equação

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\rho(t)\varphi(t) dt, \quad (16.86)$$

o núcleo total é, na verdade,  $K(x, t)\rho(t)$ , claramente não-simétrico se apenas  $K(x, t)$  for simétrico. Contudo, se multiplicarmos a Equação (16.86) por  $\sqrt{\rho(x)}$  e substituirmos

$$\sqrt{\rho(x)}\varphi(x) = \psi(x), \quad (16.87)$$

obtemos

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}]\psi(t) dt, \quad (16.88)$$

com um núcleo total simétrico  $K(x, t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}$ . Encontraremos  $\rho(x)$  mais adiante como um fator de ponderação positivo nessa teoria da equação integral de Sturm-Liouville.

### Funções Ortogonais

Agora focalizamos a equação homogênea de Fredholm de segunda espécie:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt. \quad (16.89)$$

Admitimos que o núcleo  $K(x, t)$  é simétrico e real. Talvez uma das primeiras perguntas que poderíamos fazer sobre essa equação fosse: “Ela faz sentido?” ou, mais exatamente, “Existe um autovalor  $\lambda$  que satisfaz essa equação?” Com a ajuda das desigualdades de Schwarz e Bessel, Capítulo 10, e Courant e Hilbert (Capítulo III, Seção 4, – veja as Leituras Adicionais), mostre que, se  $K(x, t)$  é contínuo, existe pelo menos um autovalor desses e possivelmente um número infinito deles.

Mostramos que os autovalores,  $\lambda$ , são reais e que as autofunções correspondentes,  $\varphi_i(x)$ , são ortogonais. Sejam  $\lambda_i, \lambda_j$  os dois autovalores **diferentes** e  $\varphi_i(x), \varphi_j(x)$  as duas autofunções correspondentes. Então, a Equação (16.89) se torna

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, t)\varphi_i(t) dt, \quad (16.90a)$$

$$\varphi_j(x) = \lambda_j \int_a^b K(x, t)\varphi_j(t) dt. \quad (16.90b)$$

Se multiplicarmos a Equação (16.90a) por  $\lambda_j\varphi_j(x)$  e a Equação (16.90b) por  $\lambda_i\varphi_i(x)$  e então integrarmos em relação a  $x$ , as duas equações se tornam<sup>7</sup>

$$\lambda_j \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)\varphi_j(x) dt dx, \quad (16.91a)$$

$$\lambda_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\varphi_j(t)\varphi_i(x) dt dx, \quad (16.91b)$$

<sup>7</sup>Admitimos que as integrais necessárias existem. Se o leitor quiser um exemplo de um caso patológico simples, veja o Exercício 16.4.3.

Uma vez que impusemos que  $K(x, t)$  é simétrico, a Equação (16.91b) pode ser reescrita como

$$\lambda_i \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \lambda_i \lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) \varphi_j(x) dt dx. \quad (16.92)$$

Subtraindo a Equação (16.92) da Equação (16.91a), obtemos

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0. \quad (16.93)$$

Essa expressão tem a mesma forma das Equações (10.34) na teoria de Sturm-Liouville. Uma vez que  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad i \neq j, \quad (16.94)$$

o que prova a ortogonalidade. Note que, com um núcleo simétrico real, não há nenhum complexo conjugado envolvido na Equação (16.94). Para o núcleo auto-adjunto ou hermitiano, veja o Exercício 16.4.1.

Se o autovalor  $\lambda_i$  for degenerado,<sup>8</sup> as autofunções para esse autovalor particular podem ser ortogonalizadas pelo método de Gram-Schmidt (Seção 10.3). Claro que nossas autofunções ortogonais podem ser normalizadas, e admitimos que isso foi feito. O resultado é

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij}. \quad (16.95)$$

Para demonstrar que os  $\lambda_i$  são reais, precisamos admitir conjugados complexos. Considerando o conjugado complexo da Equação (16.90a), temos

$$\varphi_i^*(x) = \lambda_i^* \int_a^b K(x, t) \varphi_i^*(t) dt, \quad (16.96)$$

contanto que o núcleo  $K(x, t)$  seja real. Agora, usando a Equação (16.96) em vez da Equação (16.90b), vemos que a análise leva a

$$(\lambda_i^* - \lambda_i) \int_a^b \varphi_i^*(x) \varphi_i(x) dx = 0. \quad (16.97)$$

Dessa vez a integral não pode desaparecer (a menos que tenhamos a solução trivial  $\varphi_i(x) = 0$ ) e

$$\lambda_i^* = \lambda_i, \quad (16.98)$$

ou  $\lambda_i$ , nosso autovalor, é real.

Essa é a **terceira** vez que trilhamos esse caminho, a primeira com matrizes hermitianas, depois com as EDOs (auto-adjuntas) de Sturm-Liouville, e agora com as equações integrais de Hilbert-Schmidt. A correspondência entre as matrizes hermitianas e as EDOs auto-adjuntas aparece em física como as duas formulações notáveis da Mecânica Quântica — a abordagem da matriz de Heisenberg e a abordagem do operador diferencial de Schrödinger. Na Seção 17.8 e no Exercício 17.7.6 vamos explorar mais a correspondência entre as equações integrais de núcleo simétrico de Hilbert-Schmidt e as equações diferenciais auto-adjuntas de Sturm-Liouville.

As autofunções de nossas equações integrais formam um conjunto completo,<sup>9</sup> no sentido de que qualquer função  $g(x)$  que possa ser gerada pela integral

$$g(x) = \int K(x, t) h(t) dt, \quad (16.99)$$

na qual  $h(t)$  é qualquer função contínua parte por parte, pode ser representada por uma série de autofunções,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (16.100)$$

<sup>8</sup>Se mais de uma autofunção distinta corresponder ao mesmo autovalor (satisfazendo a Equação (16.89)), diz-se que esse autovalor é degenerado (veja os Capítulos 3 e 4).

<sup>9</sup>Se quiser uma prova dessa afirmação, o leitor deve consultar Courant e Hilbert (1953), Capítulo III, Seção 5, nas Leituras Adicionais.



A série converge uniforme e absolutamente.

Vamos estender isso ao núcleo  $K(x, t)$ , assegurando que

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad (16.101)$$

e  $a_n = a_n(x)$ . Substituindo na equação integral original (Equação (16.89)) e usando a integral de ortogonalidade, obtemos

$$\varphi_i(x) = \lambda_i a_i(x). \quad (16.102)$$

Por conseguinte, para nossa equação homogênea de Fredholm de segunda espécie, o núcleo pode ser expresso em termos das autofunções e autovalores por

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n} \quad (\text{zero não sendo um autovalor}). \quad (16.103)$$

Aqui temos uma expansão bilinear, uma expansão linear em  $\varphi_n(x)$  e linear em  $\varphi_n(t)$ . Expansões bilineares semelhantes aparecem na Seção 9.7. É possível que a expansão dada pela Equação (16.101) talvez não exista. Como ilustração do tipo de comportamento patológico que pode ocorrer, convidamos o leitor a aplicar essa análise a

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt$$

(compare com o Exercício 16.4.3).

Devemos salientar que essa teoria de Hilbert-Schmidt refere-se ao estabelecimento de propriedades dos autovalores (reais) e autofunções (ortogonalidade, completude), propriedades que podem ser de grande interesse e valor. A teoria de Hilbert-Schmidt **não resolve** a equação integral homogênea para nós, assim como a teoria de Sturm-Liouville tampouco resolvia as EDOs do Capítulo 10. As soluções da equação integral vêm das Seções 16.2 e 16.3 (incluindo análise numérica).

### Equação Integral Não-Homogênea

Precisamos de uma solução da equação linear não-homogênea

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt. \quad (16.104)$$

Vamos admitir que as soluções da equação integral homogênea correspondente são conhecidas:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)\varphi_n(t) dt, \quad (16.105)$$

sendo que a solução  $\varphi_n(x)$  corresponde ao autovalor  $\lambda_n$ . Expandimos  $\varphi(x)$  e  $f(x)$  em termos desse conjunto de autofunções:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (a_n \text{ desconhecida}), \quad (16.106)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (b_n \text{ conhecida}). \quad (16.107)$$

Substituindo na Equação (16.104), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) dt. \quad (16.108)$$

Permutando a ordem de integração e somatório, podemos avaliar a integral pela Equação (16.105), e obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varphi_n(x)}{\lambda_n}. \quad (16.109)$$

Se multiplicarmos  $\varphi_i(x)$  e integrarmos de  $x = a$  a  $x = b$ , a ortogonalidade de nossas autofunções leva a

$$a_i = b_i + \lambda \frac{a_i}{\lambda_i}. \tag{16.110}$$

Essa expressão pode ser reescrita como

$$a_i = b_i + \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} b_i, \tag{16.111}$$

que nos leva à nossa solução

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(t)\varphi_i(t) dt}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x). \tag{16.112}$$

Aqui, admitimos que as autofunções  $\varphi_i(x)$  são normalizadas para unidade. **Note que, se  $f(x) = 0$ , não há nenhuma solução simples, a menos que,  $\lambda = \lambda_i$ .** Isso significa que nossa equação homogênea não tem nenhuma solução (exceto a trivial  $\varphi(x) = 0$ ), a menos que  $\lambda$  seja um autovalor,  $\lambda_i$ .

Caso  $\lambda$  para a equação não-homogênea (16.104) seja igual a um dos autovalores  $\lambda_p$  da equação homogênea, nossa solução (Equação (16.112)) explode. Para reparar o dano, voltamos à Equação (16.110) e damos especial atenção ao valor

$$a_p = b_p + \lambda_p \frac{a_p}{\lambda_p} = b_p + a_p \tag{16.113}$$

É claro que  $a_p$  é descartado e não é mais determinado por  $b_p$ , enquanto  $b_p = 0$ . Isso implica que  $\int f(x)\varphi_p(x) dx = 0$ ; isto é,  $f(x)$  é ortogonal à autofunção  $\varphi_p(x)$ . **Se não** for esse o caso, não temos nenhuma solução.

A Equação (16.111) ainda é válida para  $i \neq p$ , portanto, multiplicamos por  $\varphi_i(x)$  e somamos sobre  $i (i \neq p)$  para obter

$$\varphi(x) = f(x) + a_p \varphi_p + \lambda_p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{\infty} \frac{\int_a^b f(t)\varphi_i(t) dt}{\lambda_i - \lambda_p} \varphi_i(x). \tag{16.114}$$

Nessa solução  $a_p$  permanece como uma constante indeterminada.<sup>10</sup>

## Exercícios

**16.4.1** Na equação de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

o núcleo  $K(x, t)$  é auto-adjunto ou hermitiano:

$$K(x, t) = K^*(t, x).$$

Mostre que

(a) as autofunções são ortogonais, no sentido de que

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n (\lambda_m \neq \lambda_n),$$

(b) os autovalores são reais.

**16.4.2** Resolva a equação integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t+x)\varphi(t) dt$$

(compare com o Exercício 16.3.2) pelo método de Hilbert-Schmidt.

*Nota:* Aqui, a aplicação da técnica de Hilbert-Schmidt equivale a usar uma espingarda para matar um mosquito, em especial quando a equação pode ser resolvida rapidamente por expansão em polinômios de Legendre.

<sup>10</sup>Isso é como a EDO linear não-homogênea. Podemos somar à sua solução qualquer constante vezes uma solução da EDO homogênea correspondente.





**16.4.3** Resolva a equação integral de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t) dt.$$

*Nota:* Uma expansão de série do núcleo  $e^{-xt}$  permitiria uma solução do tipo de núcleo separável (Seção 16.3), exceto que a série é infinita. Isso sugere um número infinito de autovalores e autofunções. Se você parar em

$$\varphi(x) = x^{-1/2}, \quad \lambda = \pi^{-1/2},$$

terá perdido a maioria das soluções. Mostre que as integrais de normalização das autofunções **não** existem. Uma razão básica para esse comportamento anômalo é que a faixa de integração é infinita, o que faz disso uma integral “singular”.

**16.4.4** Dada

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xty(t) dt.$$

- (a) Determine  $y(x)$  como uma série de Neumann.
- (b) Ache o intervalo de  $\lambda$  para o qual sua solução de série de Neumann é convergente. Compare com o valor obtido de

$$|\lambda| \cdot |K|_{\text{máx}} < 1.$$

- (c) Ache o autovalor e a autofunção da equação integral homogênea correspondente.
- (d) Pelo método do núcleo separável, mostre que a solução é

$$y(x) = \frac{3x}{3 - \lambda}.$$

- (e) Ache  $y(x)$  pelo método de Hilbert-Schmidt.

**16.4.5** No Exercício 16.3.4,

$$K(x, t) = \cos(x - t).$$

As autofunções (não-normalizadas) são  $\cos x$  e  $\sin x$ .

- (a) Mostre que há uma função  $h(t)$ , tal que  $K(x, s)$ , considerada como uma função de  $s$  apenas, pode ser escrita

$$K(x, s) = \int_0^{2\pi} K(s, t)h(t) dt.$$

- (b) Mostre que  $K(x, t)$  pode ser expandida como

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^2 \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n}.$$

**16.4.6** A equação integral  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1 + xt)\varphi(t) dt$  tem autovalores  $\lambda_1 = 0,7889$  e  $\lambda_2 = 15,211$  e autofunções  $\varphi_1 = 1 + 0,5352x$  e  $\varphi_2 = 1 - 1,8685x$ .

- (a) Mostre que essas autofunções são ortogonais no intervalo  $[0, 1]$ .
- (b) Normalize as autofunções para unidade.
- (c) Mostre que

$$K(x, t) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(t)}{\lambda_2}.$$

Resposta: (b)  $\varphi_1(x) = 0,7831 + 0,4191x$   
 $\varphi_2(x) = 1,8403 - 3,4386x$ .

**16.4.7** Uma forma alternativa de solução para a equação integral não-homogênea, Equação (16.104), é

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i \lambda_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x).$$

- (a) Derive essa forma sem usar a Equação (16.112).
- (b) Mostre que essa forma e a Equação (16.112) são equivalentes.

- 16.4.8** (a) Mostre que as autofunções do Exercício 16.3.5 são ortogonais.  
 (b) Mostre que as autofunções do Exercício 16.3.11 são ortogonais.

### Leituras Adicionais

- Bocher, M., *An Introduction to the Study of Integral Equations*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, n<sup>o</sup> 10. Nova York: Hafner (1960). Uma útil introdução a equações integrais.
- Cochran, J. A., *The Analysis of Linear Integral Equations*. Nova York: McGraw-Hill (1972). Um tratamento abrangente de equações integrais lineares dirigido a matemáticos aplicados e a físicos matemáticos. Prevê competência matemática de nível moderado a alto da parte do leitor.
- Courant, R., e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol.1 (edição em inglês). Nova York: Interscience (1953). Essa é uma das obras clássicas da Física Matemática. Publicada pela primeira vez na Alemanha em 1924, a edição revista em língua inglesa é uma referência para um tratamento rigoroso de equações integrais, funções de Green e uma ampla variedade de outros tópicos da Física Matemática.
- Golberg, M. A., (ed.), *Solution Methods of Integral Equations*. Nova York: Plenum Press (1979). Coletânea de artigos de uma conferência sobre equações integrais. O capítulo inicial é excelente para orientação atualizada e grande número de referências.
- Kanval, R. P., *Linear Integral Equations*. Academic Press (1971), nova tiragem, Birkhäuser (1996). Esse livro é um tratamento detalhado de fácil leitura de uma variedade de técnicas para resolver equações integrais lineares.
- Morse, P. M., e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. Nova York: McGraw-Hill (1953). O Capítulo 7 é uma discussão particularmente detalhada e completa das funções de Green do ponto de vista da Física Matemática. Entretanto, note que Morse e Feshbach costumam escolher uma fonte de  $4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  em vez da nossa  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . É dada considerável atenção a regiões limitadas.
- Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Dover (1992).
- Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Nova York: Wiley (1979).

# 17

## Cálculo de Variações

### Usos do Cálculo de Variações

Agora abordaremos problemas nos quais procuramos uma função ou curva em vez de um valor de alguma variável, que converta alguma quantidade dada em estacionária, usualmente uma integral de energia ou ação. Como uma função é variada, esses problemas são denominados **variacionais**. Princípios variacionais, como os de D’Alembert e Hamilton, foram desenvolvidos na Mecânica Clássica, e técnicas de Lagrange ocorrem na Mecânica Quântica e na Teoria de Campo, por exemplo, o princípio de Fermat do caminho óptico mais curto em eletrodinâmica. Antes de mergulhar nesse ramo bastante diferente da Física Matemática, vamos resumir alguns de seus usos tanto na Física quanto na Matemática.

#### 1. Em teorias físicas existentes:

- a. Unificação de diversas áreas da Física usando energia como um conceito fundamental.
- b. Conveniência na análise, equações de Lagrange, Seção 17.3.
- c. Tratamento elegante de restrições, Seção 17.7.

**2. Ponto de partida para novas e complexas áreas da Física e da Engenharia.** Em Relatividade Geral, a geodésica é considerada a trajetória mínima de um pulso de luz ou o caminho de queda livre de uma partícula no espaço curvo de Riemann (veja geodésicas na Seção 2.10). Princípios variacionais aparecem na teoria quântica de campo. Princípios variacionais são aplicados extensivamente na teoria do controle.

**3. Unificação matemática.** A análise variacional fornece uma prova da completude das autofunções de Sturm-Liouville, Capítulo 10, e estabelece um limite inferior para os autovalores. Resultados semelhantes são obtidos para os autovalores e autofunções da equação integral de Hilbert-Schmidt, Seção 16.4.

**4. Técnicas de cálculo,** Seção 17.8. Cálculo das autofunções e autovalores da equação de Sturm-Liouville. Autofunções e autovalores de equação integral podem ser calculados usando quadratura numérica e técnicas de matrizes, Seção 16.3.

### 17.1 Uma Variável Dependente e uma Variável Independente

#### Conceito de Variação

O cálculo de variações envolve problemas nos quais a quantidade a ser minimizada (ou maximizada) aparece como uma integral estacionária, um funcional, porque uma função  $y(x, \alpha)$  precisa ser determinada a partir de uma classe descrita por um parâmetro infinitesimal  $\alpha$ . Como o caso mais simples, seja

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx. \quad (17.1)$$

Aqui,  $J$  é a quantidade que assume um valor estacionário. Sob o sinal de integral,  $f$  é uma função conhecida das variáveis  $x$  e  $\alpha$ , indicadas, assim como  $y(x, \alpha)$ ,  $y_x(x, \alpha) \equiv \partial y(x, \alpha)/\partial x$ , mas a dependência de  $y$  de  $x$  (e de  $\alpha$ ) ainda não é conhecida; isto é,  $y(x)$  é **desconhecida**. Isso significa que, embora a integral seja de  $x_1$  a  $x_2$ , o caminho de integração exato não é conhecido (Figura 17.1). Temos de escolher o caminho de integração passando pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , de modo a minimizar  $J$ . Em termos estritos, determinamos valores estacionários de  $J$ : mínimos, máximos ou pontos de sela. Na maioria dos casos de interesse para a Física, o valor estacionário será um mínimo. Esse problema é consideravelmente mais difícil do que o problema correspondente de uma função  $y(x)$  em cálculo diferencial. Na verdade, pode não haver nenhuma solução. Em cálculo diferencial, o mínimo é determinado comparando  $y(x_0)$  com  $y(x)$ , em que  $x$  se estende a pontos vizinhos. Aqui, admitimos a existência de um caminho ótimo, isto é, um caminho aceitável para o qual  $J$  é estacionária, e então comparamos  $J$  para nosso caminho ótimo (desconhecido) com a obtida de caminhos vizinhos. Dois caminhos possíveis são mostrados na

Figura 17.1. (Há um número infinito de possibilidades.) A diferença entre esses dois para um dado  $x$  é denominada variação de  $y$ ,  $\delta y$  e é convenientemente descrita introduzindo uma nova função,  $\eta(x)$ , para definir a deformação arbitrária do caminho, e um fator de escala,  $\alpha$ , para dar a grandeza da variação. A função  $\eta(x)$  é arbitrária, exceto por duas restrições. A primeira,

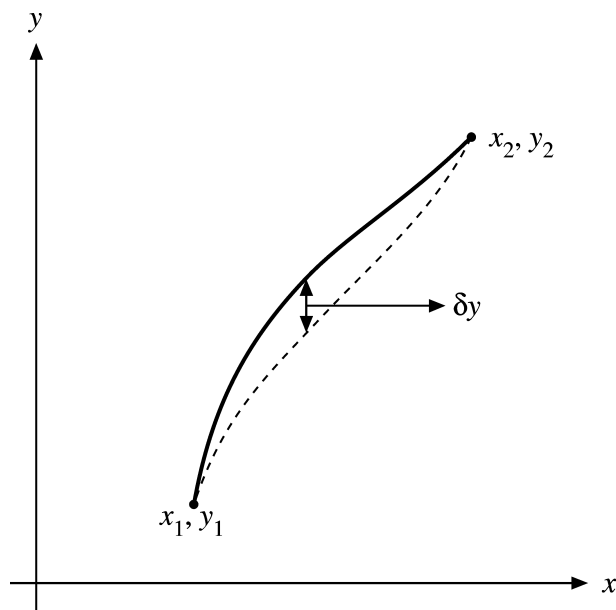


Figura 17.1: Um caminho variado.

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \tag{17.2}$$

que significa que todos os caminhos variados devem passar pelos pontos extremos fixos. A segunda, como veremos em breve, é que  $\eta(x)$  deve ser diferenciável; isto é, não podemos usar

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases} \tag{17.3}$$

mas podemos escolher que  $\eta(x)$  tenha uma forma similar às funções usadas para representar a função delta de Dirac (Capítulo 1), de modo que  $\eta(x)$  seja diferente de zero somente em uma região infinitesimal.<sup>1</sup> Então, com o caminho descrito por  $\alpha$  e  $\eta(x)$ ,

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x) \tag{17.4}$$

e

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha\eta(x). \tag{17.5}$$

Vamos escolher  $y(x, \alpha = 0)$  como o caminho desconhecido que minimizará  $J$ . Então,  $y(x, \alpha)$  para  $\alpha$  não-zero descreve um caminho vizinho. Na Equação (17.1),  $J$  agora é uma função<sup>2</sup> de nosso parâmetro  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x] dx, \tag{17.6}$$

e nossa condição para um valor extremo é que

$$\left[ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0, \tag{17.7}$$

análoga quando se anula a derivada  $dy/dx$  em cálculo diferencial.

<sup>1</sup>Compare com H. Jeffreys e B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3<sup>a</sup> ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1966), Capítulo 10, se quiser uma discussão mais completa desse ponto.

<sup>2</sup>Tecnicamente,  $J$  é uma **funcional** de  $y, y_x$ , mas uma função de  $\alpha$  dependendo das funções  $y(x, \alpha)$  e  $y_x(x, \alpha)$ :  $J[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha)]$ .



Agora, a dependência de  $\alpha$  da integral está contida em  $y(x, \alpha)$  e  $y_x(x, \alpha) = (\partial/\partial x)y(x, \alpha)$ . Por conseguinte,<sup>3</sup>

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} \right] dx. \quad (17.8)$$

Pela Equação (17.4),

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad (17.9)$$

$$\frac{\partial y_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx}, \quad (17.10)$$

portanto, a Equação (17.8) se torna

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{d\eta(x)}{dx} \right) dx. \quad (17.11)$$

Integrando o segundo termo por partes para obter  $\eta(x)$  como um fator arbitrário e comum que não desaparece, obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\eta(x)}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} dx = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y_x} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} dx. \quad (17.12)$$

A parte integrada desaparece pela Equação (17.2), e a Equação (17.11) se torna

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \eta(x) dx = 0. \quad (17.13)$$

Nessa forma  $\alpha$  foi igualada a zero, o que corresponde ao caminho, solução e, na verdade, já não é mais parte do problema.

Ocasionalmente, veremos a Equação (17.13) multiplicada por  $\delta\alpha$ , o que resulta, usando  $\eta(x)\delta\alpha = \delta y$ ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \delta y dx = \delta\alpha \left[ \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \delta J = 0. \quad (17.14)$$

Visto que  $\eta(x)$  é arbitrária, podemos escolher que ela tenha o mesmo sinal da expressão entre colchetes na Equação (17.13) toda vez que esta última for diferente de zero. Por conseguinte, o integrando é sempre não-negativo. Então, a Equação (17.13), nossa condição para a existência de um valor estacionário, só pode ser satisfeita se, e somente se, o próprio termo entre chaves for zero em quase todos os lugares. Assim, a condição para nosso valor estacionário é uma EDP<sup>4</sup>

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0}, \quad (17.15)$$

conhecida como a equação de Euler, que pode ser expressa em várias outras formas. Às vezes omitimos soluções quando elas não são diferenciáveis duas vezes, como requer a Equação (17.15). Um exemplo é a solução descontínua de Goldschmidt da Seção 17.2. É claro que a Equação (17.15) deve ser satisfeita para que  $J$  adquira um valor estacionário, isto é, para que a Equação (17.14) seja satisfeita. A Equação (17.15) é necessária, mas não é, de modo algum, suficiente.<sup>5</sup> Courant e Robbins (1996; veja as Leituras Adicionais) ilustram isso muito bem, considerando a distância em uma esfera entre pontos sobre a esfera,  $A$  e  $B$ , Figura 17.2. O caminho (1), um grande círculo, é encontrado pela Equação (17.15). Mas o caminho (2), o restante do grande círculo que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , também satisfaz a equação de Euler. O caminho (2) é um máximo, mas somente se exigirmos que ele seja um grande círculo e, ainda assim, só se fizermos menos do que um circuito; isto é, o caminho (2)  $+n$  revoluções

<sup>3</sup>Note que  $y$  e  $y_x$  estão sendo tratadas como variáveis **independentes**.

<sup>4</sup>É importante prestar muita atenção no significado de  $\partial/\partial x$  e  $d/dx$ . Por exemplo, se  $f = f[y(x), y_x, x]$ ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

O primeiro termo da direita dá a dependência **explícita** de  $x$ . Os segundo e terceiro termos dão a dependência **implícita** de  $x$  por meio de  $y_x$ .

<sup>5</sup>Se o leitor quiser uma discussão de condições suficientes e do desenvolvimento do cálculo de variações como uma parte da Matemática, consulte G. M. Ewing, *Calculus of Variations with Applications*, Nova York: Norton (1969). Condições de suficiência também são tratadas por Sagan (veja as Leituras Adicionais no final deste capítulo).

completas também é uma solução. Se não for exigido que o caminho seja um grande círculo, qualquer desvio em relação a (2) aumentará o comprimento. Dificilmente essa é a propriedade de um máximo local, e por isso ela é importante para verificar as propriedades de soluções da Equação (17.15) para ver se elas satisfazem as condições físicas do problema dado.

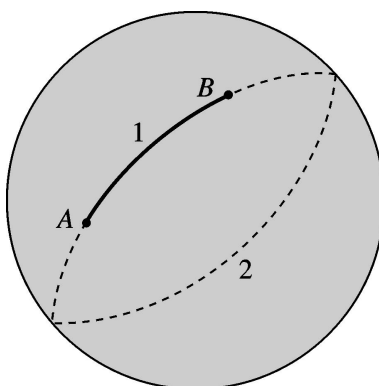


Figura 17.2: Caminhos estacionários sobre uma esfera.

**Exemplo 17.1.1** CAMINHO ÓPTICO PERTO DO HORIZONTE DE EVENTOS DE UM BURACO NEGRO  
 Determine o caminho óptico em uma atmosfera onde a velocidade da luz aumenta proporcionalmente à altura,  $v(y) = y/b$ , sendo  $b > 0$  algum parâmetro que descreve a velocidade da luz. Portanto,  $v = 0$  em  $y = 0$ , o que simula as condições na superfície de um buraco negro, denominado seu **horizonte de eventos**, onde a força gravitacional é tão forte que a velocidade da luz vai a zero, o que não a deixa escapar.

Como a luz leva o tempo mais curto, o problema variacional assuma a forma

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int \frac{ds}{v} = b \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} dt = \text{mínimo}.$$

Aqui,  $v = ds/dt = y/b$  é a velocidade da luz nesse ambiente, sendo a coordenada  $y$  a altura. Um exame da funcional variacional sugere escolher  $y$  como a variável independente porque  $x$  não aparece no integrando. Podemos trazer  $dy$  para fora do radical e mudar o papel de  $x$  e  $y$  em  $J$  da Equação (17.1) e a equação de Euler resultante. Com  $x = x(y)$ ,  $x' = dx/dy$ , obtemos

$$b \int \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{y} dy = \text{mínimo},$$

e a equação de Euler se torna

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Visto que  $\partial f / \partial x = 0$ , essa expressão pode ser integrada, dando como resultado

$$\frac{x'}{y\sqrt{x'^2 + 1}} = C_1 = \text{constante} \quad \text{ou} \quad x'^2 = C_1^2 y^2 (x'^2 + 1).$$

Separando  $dx$  e  $dy$  nessa EDO de primeira ordem, achamos a integral

$$\int^x dx = \int^y \frac{C_1 y dy}{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}},$$

que resulta em

$$x + C_2 = \frac{-1}{C_1} \sqrt{1 - C_1^2 y^2} \quad \text{ou} \quad (x + C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}.$$



Essa é uma trajetória circular da luz com centro no eixo  $x$  ao longo do horizonte de eventos (veja a Figura 17.3). Esse exemplo pode ser adaptado para uma miragem (Fata Morgana) em um deserto quando o ar quente está perto do chão e o ar mais fresco está no alto (o índice de refração muda com a altura no ar frio em comparação com o ar quente), o que muda a lei da velocidade de  $v = y/b \rightarrow v_0 - y/b$ . Nesse caso, a trajetória circular da luz não é mais convexa com centro no eixo  $x$  mas se torna côncava. ■

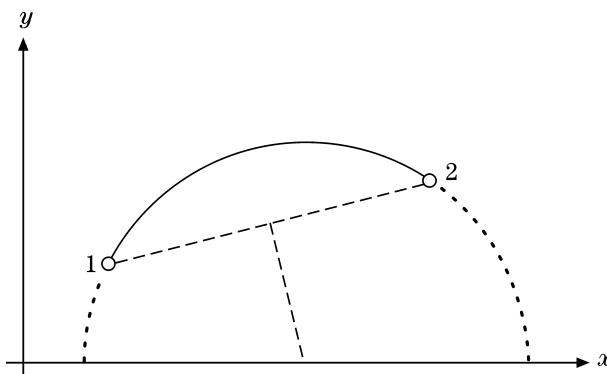


Figura 17.3: Caminho óptico circular em um meio.

### Formas Alternativas das Equações de Euler

Uma outra forma (Exercício 17.1.1) que costuma ser útil é

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0. \quad (17.16)$$

Em problemas nos quais  $f = f(y, y_x)$ , isto é, nos quais  $x$  não aparece explicitamente, a Equação (17.16) se reduz a

$$\frac{d}{dx} \left( f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0, \quad (17.17)$$

ou

$$f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} = \text{constante}. \quad (17.18)$$

### Exemplo 17.1.2 Variáveis Dependentes Omitidas

Considere o problema variacional  $\int f(\dot{\mathbf{r}}) dt = \text{mínimo}$ . Aqui,  $\mathbf{r}$  está ausente do integrando. Portanto, as equações de Euler se tornam

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0,$$

com  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , portanto,  $f_{\dot{\mathbf{r}}} = \mathbf{c} = \text{constante}$ . Resolver essas três equações para as três incógnitas  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  resulta em  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_1 = \text{constante}$ . Integrar essa velocidade constante resulta em  $\mathbf{r} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$ . Tais soluções são linhas retas, a despeito da natureza geral da função  $f$ .

Um exemplo físico que ilustra esse caso é a propagação da luz em um cristal, em que a velocidade da luz depende das direções (do cristal), mas não de sua localização, porque um cristal é um **meio homogêneo** anisotrópico. O problema variacional

$$\int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}}{v(\dot{\mathbf{r}})} dt = \text{mínimo}$$

tem a forma de nosso exemplo. Note que  $t$  não precisa ser o tempo, mas ele parametriza a trajetória da luz. ■

## Exercícios

**17.1.1** Mostre a equivalência das duas formas da equação de Euler para  $dy/dx \equiv y_x \neq 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0.$$

**17.1.2** Derive a equação de Euler expandindo o integrando

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x] dx$$

em potências de  $\alpha$ , usando uma expansão de Taylor (Maclaurin) com  $y$  e  $y_x$  como as duas variáveis (Seção 5.6).

*Nota:* A condição estacionária é  $\partial J(\alpha)/\partial \alpha = 0$ , avaliada em  $\alpha = 0$ . Os termos quadráticos em  $\alpha$  podem ser úteis para estabelecer a natureza da solução estacionária (máximo, mínimo ou ponto de sela).

**17.1.3** Ache a equação de Euler correspondente à Equação (17.15) se  $f = f(y_{xx}, y_x, y, x)$ .

$$\text{Resposta: } \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad \eta_x(x_1) = \eta_x(x_2) = 0.$$

**17.1.4** O integrando  $f(y, y_x, x)$  da equação (17.1) tem a forma

$$f(y, y_x, x) = f_1(x, y) + f_2(x, y)y_x.$$

(a) Mostre que a equação de Euler leva a

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0.$$

(b) O que isso implica para a dependência da integral  $J$  em relação à escolha do caminho?

**17.1.5** Mostre que a condição que

$$J = \int f(x, y) dx$$

tenha um valor estacionário

(a) leva a  $f(x, y)$  independente de  $y$  e

(b) resulta em nenhuma informação sobre qualquer dependência de  $x$ .

Não obtemos nenhuma solução (contínua, diferenciável). Para ser um problema variacional significativo, a dependência de  $y$  ou derivadas de ordem mais alta é essencial.

*Nota:* A situação mudará quando forem introduzidas restrições (compare com o Exercício 17.7.7).

## 17.2 Aplicações da Equação de Euler

### Exemplo 17.2.1 LINHA RETA

A aplicação mais simples da equação de Euler talvez seja na determinação da distância mais curta entre dois pontos no plano euclidiano  $xy$ . Uma vez que o elemento de distância é

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = [1 + y_x^2]^{1/2} dx, \tag{17.19}$$

a distância  $J$  pode ser escrita como

$$J = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} [1 + y_x^2]^{1/2} dx. \tag{17.20}$$





Comparando com a Equação (17.1), vemos que

$$f(y, y_x, x) = (1 + y_x^2)^{1/2}. \quad (17.21)$$

Substituindo na Equação (17.16), obtemos

$$-\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}} \right] = 0, \quad (17.22)$$

ou

$$\frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = C, \text{ uma constante.} \quad (17.23)$$

Essa equação é satisfeita por

$$y_x = a, \text{ uma segunda constante,} \quad (17.24)$$

e

$$y = ax + b, \quad (17.25)$$

que é nossa conhecida equação para uma linha reta. As constantes  $a$  e  $b$  são escolhidas de modo que a reta passe pelos dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Por conseqüência, a equação de Euler prevê que a distância mais curta<sup>6</sup> entre dois pontos fixos no espaço euclidiano é uma linha reta. ■

A generalização disso no espaço-tempo quadridimensional curvado leva ao importante conceito da geodésica em Relatividade Geral (veja a Seção 2.10).

### Exemplo 17.2.2 PELÍCULA DE SABÃO

Como uma segunda ilustração (Figura 17.4), considere que dois círculos de fios coaxiais paralelos estão conectados por uma superfície de área mínima, isto é, gerada pela rotação de uma curva  $y(x)$  em torno do eixo  $x$ . A curva deve passar por pontos extremos fixos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . O problema variacional é escolher a curva  $y(x)$ , tal que a área da superfície resultante será um mínimo.

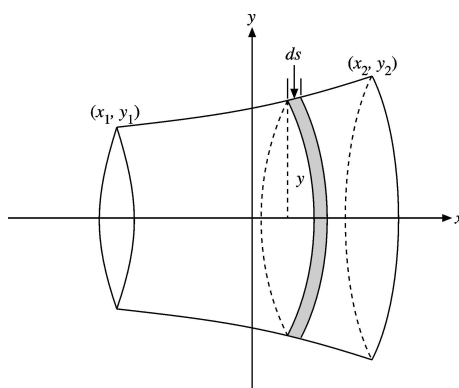


Figura 17.4: Superfície de rotação — problema da película.

Para o elemento de área mostrado na Figura 17.4,

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y(1 + y_x^2)^{1/2} dx. \quad (17.26)$$

Então, a equação variacional é

$$J = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(1 + y_x^2)^{1/2} dx. \quad (17.27)$$

Desprezando o  $2\pi$ , obtemos

$$f(y, y_x, x) = y(1 + y_x^2)^{1/2}. \quad (17.28)$$

<sup>6</sup>Tecnicamente, temos um valor estacionário. Pelo termo  $a^2$  ele pode ser identificado como um mínimo (Exercício 17.2.2).

Uma vez que  $\partial f/\partial x = 0$ , podemos aplicar a Equação (17.18) diretamente e obter

$$y(1 + y_x^2)^{1/2} - yy_x \frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = c_1, \tag{17.29}$$

ou

$$\frac{y}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = c_1. \tag{17.30}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$\frac{y^2}{1 + y_x^2} = c_1^2 \quad \text{com } c_1^2 \leq y_{\text{mín}}^2, \tag{17.31}$$

e

$$(y_x)^{-1} = \frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}. \tag{17.32}$$

Essa expressão pode ser integrada para dar

$$x = c_1 \cosh^{-1} \frac{y}{c_1} + c_2. \tag{17.33}$$

Resolvendo para  $y$ , temos

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right), \tag{17.34}$$

e, mais uma vez,  $c_1$  e  $c_2$  são determinados impondo que o co-seno hiperbólico passe pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Nossa superfície de área “mínima” é um caso especial de uma catenária de revolução ou uma **catenóide**. ■

### Película de Sabão — Área Mínima

Esse cálculo de variações contém muitas armadilhas para os desavisados. (Lembre-se de que a equação de Euler é uma condição **necessária** se admitirmos uma **solução diferenciável**. As condições de suficiência são bastante complicadas. Veja as Leituras Adicionais para detalhes.) Podemos aprender a respeitar alguns desses riscos considerando um problema físico específico, por exemplo, um problema de área mínima com  $(x_1, y_1) = (-x_0, 1)$ ,  $(x_2, y_2) = (+x_0, 1)$ . A superfície mínima é uma película de sabão esticada entre os dois anéis de raio unitário em  $x = \pm x_0$ . O problema é prever a curva  $y(x)$  que seria formada pela película de sabão.

Referindo-nos à Equação (17.34), constatamos que  $c_2 = 0$  pela simetria do problema em torno de  $x = 0$ . Então,

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1}\right), \quad c_1 \cosh\left(\frac{x_0}{c_1}\right) = 1. \tag{17.34a}$$

Se considerarmos  $x_0 = \frac{1}{2}$ , obtemos uma equação transcendental para  $c_1$ , a saber,

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{2c_1}\right). \tag{17.35}$$

Constatamos que essa equação tem duas soluções:  $c_1 = 0, 2350$ , que leva a uma curva “profunda” e  $c_1 = 0.8483$ , que leva a uma curva “achatada”. Qual das curvas será a forma assumida pela película de sabão? Antes de responder a essa pergunta, considere a situação física em que os anéis estão afastados, de modo que  $x_0 = 1$ . Então, a Equação (17.34a) se torna

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{c_1}\right), \tag{17.36}$$

que não tem **nenhuma solução real**. O significado físico é que, à medida que os anéis de raios unitários se afastaram da origem, a película de sabão alcançou um ponto no qual não podia mais manter a mesma força horizontal sobre cada seção vertical. O equilíbrio estável não era mais possível. A película de sabão se rompeu (processo irreversível) e formou uma película circular sobre cada anel (com uma área total de  $2\pi = 6, 2832 \dots$ ). Essa é a solução descontínua de Goldschmidt.

A próxima pergunta é: quão grande pode ser  $x_0$  e ainda dar uma solução real para a Equação (17.34a)?<sup>7</sup> Fazendo  $c_1^{-1} = p$ , se torna

$$p = \cosh px_0. \tag{17.37}$$

<sup>7</sup>De um ponto de vista numérico, é mais fácil inverter o problema. Escolha um valor de  $c_1$  e resolva para  $x_0$ . A Equação (17.34a) se torna  $x_0 = c_1 \cosh^{-1}(1/c_1)$ . Essa expressão tem soluções numéricas no intervalo  $0 < c_1 \leq 1$ .



Para achar  $x_{0\text{máx}}$  poderíamos resolver para  $x_0$  (como na Equação (17.33)) e então diferenciar em relação a  $p$ . Por fim, examinando a Figura 17.5, igualaríamos  $dx_0/dp$  a zero. Como alternativa, a diferenciação direta da Equação (17.37) em relação a  $p$  teria como resultado

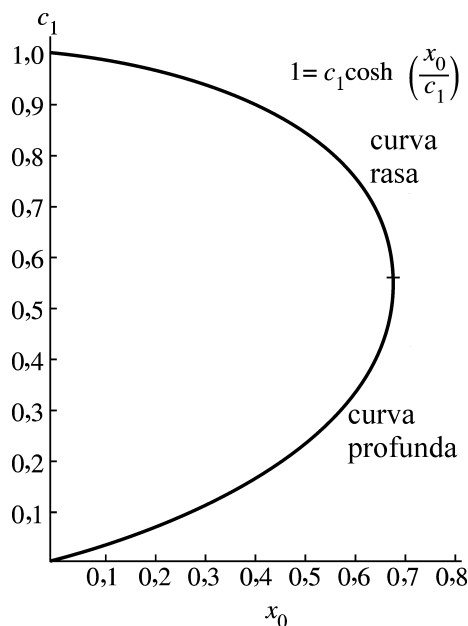


Figura 17.5: Soluções da Equação (17.34a) para anéis de raios unitários em  $x = \pm x_0$ .

$$1 = \left[ x_0 + p \frac{dx_0}{dp} \right] \sinh px_0.$$

Como impusemos que  $dx_0/dp$  se anula, temos

$$1 = x_0 \sinh px_0. \tag{17.38}$$

As Equações (17.37) e (17.38) podem ser combinadas para formar

$$px_0 = \coth px_0, \tag{17.39}$$

com a raiz

$$px_0 = 1,1997. \tag{17.40}$$

Substituindo na Equação (17.37) ou (17.38), obtemos

$$p = 1,810, \quad c_1 = 0,5524 \tag{17.41}$$

e

$$x_{0\text{máx}} = 0,6627. \tag{17.42}$$

Voltando à questão da solução da Equação (17.35) que descreve a película de sabão, vamos calcular a área correspondente a cada solução. Temos

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \int_0^{x_0} y(1+y_x^2)^{1/2} dx = \frac{4\pi}{c_1} \int_0^{x_0} y^2 dx \quad (\text{pela Equação (17.30)}) \\ &= 4\pi c_1 \int_0^{x_0} \left( \cosh \frac{x}{c_1} \right)^2 dx = \pi c_1^2 \left[ \sinh \left( \frac{2x_0}{c_1} \right) + \frac{2x_0}{c_1} \right]. \end{aligned} \tag{17.43}$$

Para  $x_0 = \frac{1}{2}$ , Equação (17.35), leva a

$$c_1 = 0,2350 \rightarrow A = 6,8456,$$

$$c_1 = 0,8483 \rightarrow A = 5,9917,$$

que mostra que a primeira só pode ser, no máximo, um mínimo local. Uma investigação mais detalhada (compare com Bliss, *Calculus of Variations*, Capítulo IV) mostra que essa superfície não é nem mesmo um mínimo local. Para  $x_0 = \frac{1}{2}$ , a película de sabão será descrita pela curva achatada

$$y = 0,8483 \cosh\left(\frac{x}{0,8483}\right). \tag{17.44}$$

Essa catenóide achatada ou rasa (catenária de revolução) será um mínimo absoluto para  $0 \leq x_0 < 0.528$ . Contudo, para  $0,528 < x_0 < 0,6627$  sua área é maior do que a da solução descontínua de Goldschmidt (6,2832) e é apenas um mínimo relativo (Figura 17.6).

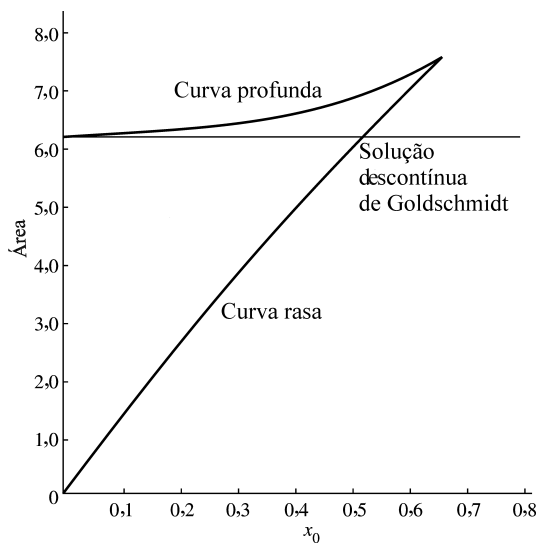


Figura 17.6: Área da catenóide (anéis de raios unitários em  $x = \pm x_0$ ).

Para uma excelente discussão dos problemas matemáticos, bem como experimentos com películas de sabão, referimo-nos a Courant e Robbins (1996) nas Leituras Adicionais no final do capítulo.

### Exercícios

- 17.2.1** Uma película de sabão se estende no espaço entre dois anéis de raios unitários com centros em  $\pm x_0$  sobre o eixo  $x$  e perpendicular ao eixo  $x$ . Usando a solução desenvolvida na Seção 17.2, estabeleça as equações transcendentais para a condição de que  $x_0$  seja tal, que a área da superfície curva de rotação é igual à área dos dois anéis (solução descontínua de Goldschmidt). Resolva para  $x_0$  (Figura 17.7).

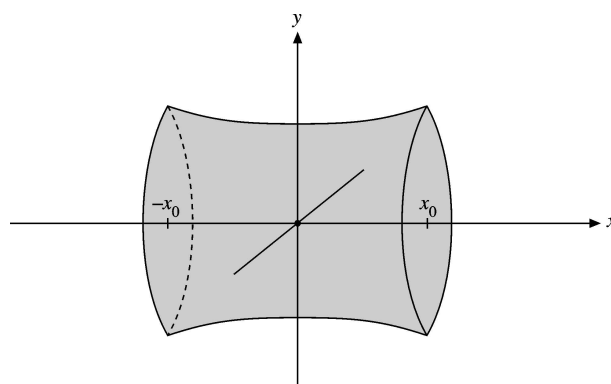


Figura 17.7: Superfície de rotação.



**17.2.2** No Exemplo 17.2.1, expanda  $J[y(x, \alpha)] - J[y(x, 0)]$  em potências de  $\alpha$ . O termo linear em  $\alpha$  leva à equação de Euler e à solução da linha reta, Equação (17.25). Investigue o termo  $\alpha^2$  e mostre que o valor estacionário de  $J$ , a distância em linha reta, é um **mínimo**.

**17.2.3** (a) Mostre que a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx, \quad \text{com } f = y(x),$$

**não** tem valores extremos.

(b) Se  $f(y, y_x, x) = y^2(x)$ , ache uma solução descontínua semelhante à solução de Goldschmidt para o problema da película de sabão.

**17.2.4** O princípio de Fermat da óptica afirma que um raio de luz seguirá a trajetória  $y(x)$  para a qual

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} n(y, x) ds$$

é um mínimo quando  $n$  é o índice de refração. Ache a trajetória do raio para  $y_2 = y_1 = 1$ ,  $-x_1 = x_2 = 1$ , se

(a)  $n = e^y$ , (b)  $n = a(y - y_0)$ ,  $y > y_0$ .

**17.2.5** Uma partícula sem atrito se move do ponto  $A$  sobre a superfície da Terra até o ponto  $B$ , deslizando por um túnel. Ache a equação diferencial a ser satisfeita se o tempo de trânsito for um mínimo. *Nota:* Admita que a Terra é uma esfera que não gira, de densidade uniforme.

Resposta: (Equação (17.15)):  $r_{\varphi\varphi}(r^3 - ra^2) + r_{\varphi}^2(2a^2 - r^2) + a^2r^2 = 0$ ,  
 $r(\varphi = 0) = r_0$ ,  $r_{\varphi}(\varphi = 0) = 0$ ,  $r(\varphi = \varphi_A) = a$ ,  $r(\varphi = \varphi_B) = a$ .

Equação (17.18):  $r_{\varphi}^2 = \frac{a^2r^2}{r_0^2} \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{a^2 - r^2}$ . A solução dessas equações é uma hipociclóide, gerada por um círculo de raio  $\frac{1}{2}(a - r_0)$  que rola dentro de um círculo de raio  $a$ . Seria interessante mostrar que o tempo de trânsito é

$$t = \pi \frac{(a^2 - r_0^2)^{1/2}}{(ag)^{1/2}}.$$

Para mais detalhes, veja P. W. Cooper, *Am. J. Phys.* 34: 68 (1966); G. Veneziano et al., *ibid.*, p. 701-704.

**17.2.6** Um raio de luz segue uma trajetória em linha reta em um primeiro meio homogêneo, é refratado em uma interface e então segue uma nova trajetória em linha reta no segundo meio. Use o princípio de Fermat da óptica para derivar a lei de refração de Snell:

$$n_1 \text{sen } \theta_1 = n_2 \text{sen } \theta_2.$$

*Sugestão:* Mantenha os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  fixos e varie  $x_0$  para satisfazer Fermat (Figura 17.8). Esse **não** é um problema de equação de Euler. (A trajetória da luz não é diferenciável em  $x_0$ .)

**17.2.7** Uma segunda configuração da película de sabão para os anéis de raios unitários em  $x = \pm x_0$  consiste em um disco circular, raio  $a$ , no plano  $x = 0$ , e duas catenóides de revolução unindo o disco e cada anel. Uma catenóide pode ser descrita por

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1} + c_3\right).$$

(a) Imponha condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = x_0$ .

(b) Embora não seja necessário, é conveniente exigir que as catenóides formem um ângulo de  $120^\circ$  em que elas se unem ao disco central. Expresse a terceira condição de contorno em termos matemáticos.

(c) Mostre que a área total de catenóides mais o disco central é

$$A = c_1^2 \left[ \sinh\left(\frac{2x_0}{c_1} + 2c_3\right) + \frac{2x_0}{c_1} \right].$$

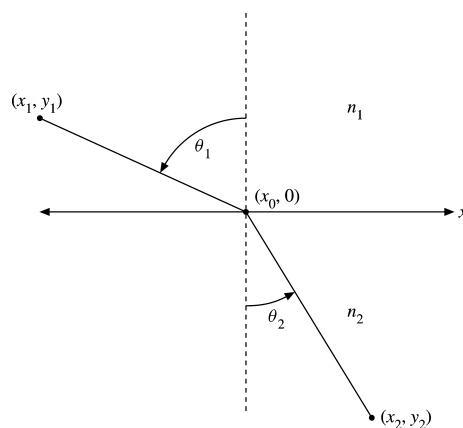


Figura 17.8: Lei de Snell.

*Nota:* Embora essa configuração de película de sabão seja realizável em termos físicos, a área é maior do que a da catenóide simples para todas as separações entre anéis para as quais ambas as películas existem.

Resposta: (a) 
$$\begin{cases} 1 = c_1 \cosh\left(\frac{x_0}{c_1} + c_3\right) \\ a = c_1 \cosh c_3, \end{cases} \quad \text{(b) } \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 30^\circ = \sinh c_3.$$

**17.2.8** Para a película de sabão descrita no Exercício 17.2.7, ache (numericamente) o valor máximo de  $x_0$ . *Nota:* Esse problema pede uma calculadora com funções hiperbólicas ou uma tabela de co-tangentes hiperbólicas.

RES.  $x_{0\text{máx}} = 0,4078$ .

**17.2.9** Ache a raiz de  $px_0 = \operatorname{cotgh} px_0$  (Equação (17.39)) e determine os valores correspondentes de  $p$  e  $x_0$  (Equações (17.41) e (17.42)). Calcule seus valores até cinco algarismos significativos.

**17.2.10** Para o problema da película de sabão de dois anéis desta seção, calcule e tabule  $x_0$ ,  $p$ ,  $p^{-1}$ , e  $A$ , a área da película de sabão para  $px_0 = 0,00(0,02)1,30$ .

**17.2.11** Ache o valor de  $x_0$  (até cinco algarismos significativos) que leva a uma área da película de sabão, Equação (17.43), igual a  $2\pi$ , a solução descontínua de Goldschmidt.

Resposta:  $x_0 = 0,52770$ .

**17.2.12** Ache a curva de declínio mais rápido de  $(0,0)$  a  $(x_0, y_0)$  para uma partícula que desliza sob gravidade e sem atrito. Mostre que a razão entre os tempos que a partícula leva ao longo de uma linha reta que une os dois pontos e os tempos que leva ao longo da curva de declínio mais rápido é  $(1 + 4/\pi^2)^{1/2}$ .

*Sugestão:* Admita que  $y$  aumenta na descida. Use a Equação (17.18) para obter  $y_x^2 = (1 - c^2 y)/c^2 y$ , em que  $c$  é uma constante de integração. Então faça a substituição  $y = (\sin^2 \varphi/2)/c^2$  para parametrizar a cicloide e considere  $(x_0, y_0) = (\pi/2c^2, 1/c^2)$ .

### 17.3 Diversas Variáveis Dependentes

Nosso problema variacional original, Equação (17.1), pode ser generalizado sob vários aspectos. Nesta seção consideramos o integrando  $f$  uma função de diversas variáveis **dependentes**  $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$  todas dependentes de  $x$ , a variável independente. Na Seção 17.4, mais uma vez  $f$  conterà somente uma função desconhecida  $y$ , mas  $y$  será uma função de diversas variáveis independentes (sobre as quais integramos). Na Seção 17.5 essas duas generalizações são combinadas. Na Seção 17.7, o valor estacionário está restrito por uma ou mais restrições.

Para mais do que uma variável dependente, a Equação (17.1) se torna

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_{1x}(x), y_{2x}(x), \dots, y_{nx}(x), x] dx. \quad (17.45)$$



Como na Seção 17.1, determinamos o valor extremo de  $J$  comparando caminhos vizinhos. Seja

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.46)$$

com as  $\eta_i$  independentes uma da outra mas sujeitas às restrições discutidas na Seção 17.1. Diferenciando a Equação (17.45) em relação a  $\alpha$  e estabelecendo  $\alpha = 0$ , uma vez que a Equação (17.7) ainda se aplica, obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \eta_{ix} \right) dx = 0, \quad (17.47)$$

sendo que o índice inferior  $x$  denota diferenciação parcial em relação a  $x$ ; isto é,  $y_{ix} = \partial y_i / \partial x$ , e assim por diante. Novamente, cada um dos termos  $(\partial f / \partial y_{ix}) \eta_{ix}$  é integrado por partes. A parte integrada se anula e a Equação (17.47) se torna

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \right) \eta_i dx = 0. \quad (17.48)$$

Uma vez que as  $\eta_i$  são arbitrárias e **independentes** umas das outras,<sup>8</sup> cada um dos termos na soma deve se anular **independentemente**. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial (\partial y_i / \partial x)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.49)$$

todo um conjunto de equações de Euler, cada uma das quais deve ser satisfeita para um valor extremo.

### Princípio de Hamilton

A aplicação mais importante da Equação (17.45) ocorre quando o integrando  $f$  é considerado um lagrangiano  $L$ . O lagrangiano (para sistemas não-relativistas, veja o Exercício 17.3.5 para uma partícula relativista) é definido como a **diferença** entre as energias cinética e potencial de um sistema:

$$L \equiv T - V. \quad (17.50)$$

Usando tempo como uma variável independente em vez de  $x$  e  $x_i(t)$  como as variáveis dependentes, obtemos

$$x \rightarrow t, \quad y_i \rightarrow x_i(t), \quad y_{ix} \rightarrow \dot{x}_i(t);$$

$x_i(t)$  é a localização e  $\dot{x}_i = dx_i/dt$  é a velocidade de partícula  $i$  como uma função do tempo. Então, a equação  $\delta J = 0$  é um enunciado matemático do princípio de Hamilton da Mecânica Clássica,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n; t) dt = 0. \quad (17.51)$$

Em palavras, o princípio de Hamilton afirma que o movimento do sistema do tempo  $t_1$  ao tempo  $t_2$  é tal que a integral de tempo do lagrangiano  $L$ , ou ação, tem um valor estacionário. As equações de Euler resultantes costumam ser chamadas de equações lagrangianas do movimento,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.} \quad (17.52)$$

Essas equações lagrangianas podem ser derivadas das equações do movimento de Newton, e as equações de Newton podem ser derivadas das equações de Lagrange. Os dois conjuntos de equações são igualmente “fundamentais”.

A formulação lagrangiana tem vantagens em relação às leis newtonianas convencionais. Enquanto as equações de Newton são equações vetoriais, vemos que as equações de Lagrange envolvem apenas quantidades escalares. As coordenadas  $x_1, x_2, \dots$  não precisam ser nenhum conjunto, padrão de coordenadas ou comprimentos. Elas podem ser selecionadas para se ajustar às condições do problema físico. As equações de Lagrange são invariantes em relação à escolha do sistema de coordenadas. As equações de Newton (em forma de componentes) não são

<sup>8</sup>Por exemplo, poderíamos estabelecer  $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \dots = 0$ , eliminando todos os termos da soma, exceto um, e então tratar  $\eta_1$  exatamente como na Seção 17.1.

visivelmente invariantes. O Exercício 2.5.10 mostra o que acontece com  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  resolvida em coordenadas polares esféricas.

Explorando o conceito de energia, podemos estender com facilidade a formulação lagrangiana da Mecânica para diversas áreas, tais como redes elétricas e sistemas acústicos. Extensões para o Eletromagnetismo aparecem nos exercícios. O resultado é uma unidade de áreas da Física que, caso contrário, seriam separadas. No desenvolvimento de novas áreas, a quantização da Mecânica lagrangiana de partículas ofereceu um modelo para a quantização de campos eletromagnéticos e levou à teoria de calibre da Eletrodinâmica Quântica.

Uma das vantagens mais valiosas do princípio de Hamilton — formulação da equação de Lagrange — é a facilidade para ver a relação entre uma simetria e uma lei de conservação. Como exemplo, seja  $x_i = \varphi$  um ângulo azimutal. Se nossa lagrangiana for independente de  $\varphi$  (isto é, se  $\varphi$  é uma coordenada que se pode ignorar), há duas conseqüências: (1) a conservação ou invariância de uma componente de momento angular e (2) pela Equação (17.52)  $\partial L/\partial \dot{\varphi} = \text{constante}$ . De modo semelhante, invariância sob translação leva à conservação de momento linear. O teorema de Noether é uma generalização dessa invariância (simetria) — a relação da lei da conservação.

### Exemplo 17.3.1 PARTÍCULA EM MOVIMENTO — COORDENADAS CARTESIANAS

Considere a Equação (17.50), que descreve uma partícula com energia cinética

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{17.53}$$

e energia potencial  $V(x)$ , na qual, como sempre, a força é dada pelo gradiente negativo do potencial,

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \tag{17.54}$$

Pela Equação (17.52),

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - \frac{\partial(T - V)}{\partial x} = m\ddot{x} - F(x) = 0, \tag{17.55}$$

que é a segunda lei do movimento de Newton. ■

### Exemplo 17.3.2 PARTÍCULA EM MOVIMENTO — COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

Agora vamos descrever uma partícula em movimento em coordenadas cilíndricas no plano  $xy$ , isto é,  $z = 0$ . A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2), \tag{17.56}$$

e consideramos  $V = 0$  por simplicidade.

A transformação de  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$  em coordenadas cilíndricas circulares poderia ser efetuada considerando  $x(\rho, \varphi)$  e  $y(\rho, \varphi)$ , Equação (2.28), e diferenciando em relação ao tempo e elevando ao quadrado. É muito mais fácil interpretar  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$  como  $v^2$  e apenas escrever as componentes de  $\mathbf{v}$  como  $\hat{\rho}(ds_\rho/dt) = \dot{\rho}\hat{\rho}$ , e assim por diante. (O  $ds_\rho$  é um incremento de **comprimento**, sendo que  $\rho$  muda por  $d\rho$ ,  $\varphi$  permanece constante. Veja as Seções 2.1 e 2.4.)

As equações lagrangianas resultam em

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{17.57}$$

A segunda equação é um enunciado de conservação de momento angular. A primeira pode ser interpretada como aceleração radial<sup>9</sup> igualada à força centrífuga. Nesse sentido, a força centrífuga é uma força real. É interessante saber que essa interpretação da força centrífuga como uma força real é suportada pela teoria geral da relatividade. ■

## Exercícios

- 17.3.1** (a) Desenvolva as equações de movimento correspondentes a  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ .  
 (b) Em que sentido suas soluções minimizam a integral  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ ?  
 Compare o resultado para a sua solução com  $x = \text{constante}$ ,  $y = \text{constante}$ .

<sup>9</sup>Esse é um segundo método para atacar o Exercício 2.4.8.





- 17.3.2** Pelas equações lagrangianas de movimento, Equação (17.52), mostre que um sistema em equilíbrio estável tem uma energia potencial mínima.
- 17.3.3** Escreva as equações lagrangianas de movimento de uma partícula em coordenadas esféricas para potencial  $V$  igual a uma constante. Identifique os termos correspondentes à (a) força centrífuga e (b) à força de Coriolis.
- 17.3.4** O pêndulo esférico consiste em uma massa ligada a um fio de comprimento  $l$ , livre para se mover em ângulo polar  $\theta$  e ângulo de azimute  $\varphi$  (Figura 17.9).

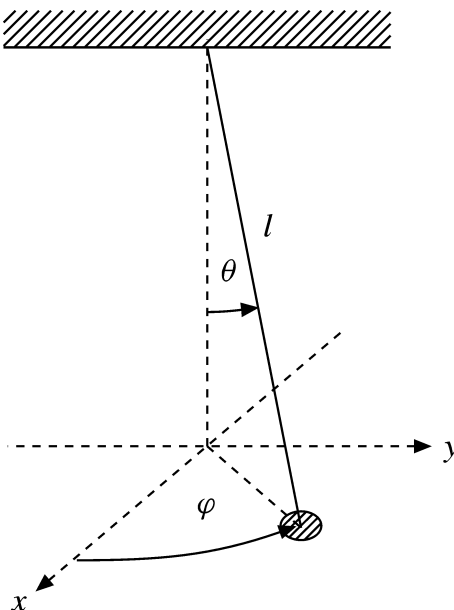


Figura 17.9: Pêndulo esférico.

- (a) Estabeleça a lagrangiana para esse sistema físico.  
 (b) Desenvolva as equações lagrangianas de movimento.

**17.3.5** Mostre que a lagrangiana

$$L = m_0 c^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) - V(\mathbf{r})$$

leva a uma forma relativista da segunda lei de Newton do movimento,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F_i,$$

na qual as componentes da força são  $F_i = -\partial V / \partial x_i$ .

**17.3.6** A lagrangiana para uma partícula com carga  $q$  em um campo eletromagnético descrito por potencial escalar  $\varphi$  e potencial vetorial  $\mathbf{A}$  é

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\varphi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Ache a equação de movimento da partícula carregada.

*Sugestão:*  $(d/dt)A_j = \partial A_j / \partial t + \sum_i (\partial A_j / \partial x_i) \dot{x}_i$ . A dependência dos campos de força  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em relação aos potenciais  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  é desenvolvida na Seção 1.13 (compare com o Exercício 1.13.10).

Resposta:  $m\ddot{x}_i = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_i$ .

**17.3.7** Considere um sistema no qual a lagrangiana é dada por

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i),$$

em que  $q_i$  e  $\dot{q}_i$  representam o conjunto de variáveis. A energia potencial  $V$  é independente da velocidade, e nem  $T$  nem  $V$  têm qualquer dependência explícita do tempo.

(a) Mostre que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) = 0.$$

(b) A quantidade constante

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

define a hamiltoniana  $H$ . Mostre que, sob as condições admitidas precedentes,  $H = T + V$ , a energia total.

*Nota:* A energia cinética  $T$  é uma função quadrática dos  $\dot{q}_i$ .

## 17.4 Diversas Variáveis Independentes

Às vezes, o integrando  $f$  da Equação (17.1) conterá uma função desconhecida,  $u$ , isto é, uma função de diversas variáveis independentes,  $u = u(x, y, z)$ , para o caso tridimensional, por exemplo. A Equação (17.1) se torna

$$J = \iiint f[u, u_x, u_y, u_z, x, y, z] dx dy dz, \quad (17.58)$$

$u_x = \partial u / \partial x$ , e assim por diante. O problema variacional é achar a função  $u(x, y, z)$  para a qual  $J$  é estacionária,

$$\delta J = \delta \alpha \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (17.59)$$

Generalizando a Seção 17.1, fazemos

$$u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z, 0) + \alpha \eta(x, y, z), \quad (17.60)$$

em que  $u(x, y, z, \alpha = 0)$  representa a função (desconhecida) para a qual a Equação (17.59) é satisfeita, ao passo que, mais uma vez,  $\eta(x, y, z)$  é o desvio arbitrário que descreve a função variada  $u(x, y, z, \alpha)$ . Esse desvio  $\eta(x, y, z)$  tem de ser diferenciável e desaparecer nas extremidades. Então, pela Equação (17.60),

$$u_x(x, y, z, \alpha) = u_x(x, y, z, 0) + \alpha \eta_x, \quad (17.61)$$

e de modo semelhante para  $u_y$  e  $u_z$ .

Diferenciando a equação integral, Equação (17.58) em relação ao parâmetro  $\alpha$  em relação ao parâmetro  $\alpha = 0$ , obtemos

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \iiint \left( \frac{\partial f}{\partial u} \eta + \frac{\partial f}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} \eta_y + \frac{\partial f}{\partial u_z} \eta_z \right) dx dy dz = 0. \quad (17.62)$$

Novamente, integramos cada um dos termos  $(\partial f / \partial u_i) \eta_i$  por partes. A parte integrada se anula nas extremidades (porque se exige que o desvio  $\eta$  caia para zero nas extremidades) e

$$\iiint \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \eta(x, y, z) dx dy dz = 0.^{10} \quad (17.63)$$

Uma vez que a variação  $\eta(x, y, z)$  é arbitrária, o termo dentro dos parênteses grandes é igualado a zero, o que resulta na equação de Euler para (três) variáveis independentes,

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z} = 0. \quad (17.64)$$

<sup>10</sup>Lembre-se de que  $\partial / \partial x$  é uma derivada parcial na qual  $y$  e  $z$  são mantidos constantes. Mas  $\partial / \partial x$  também age sobre a dependência implícita  $x$  bem como sobre a dependência explícita  $x$ . Nesse sentido, por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u_x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u_x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u_x} u_x + \frac{\partial^2 f}{\partial u_x^2} u_{xx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_y \partial u_x} u_{xy} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_z \partial u_x} u_{xz}.$$



### Exemplo 17.4.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE

Um exemplo desse tipo de problema variacional é dado pela Eletrostática. A energia de um campo eletrostático é

$$\text{densidade de energia} = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2, \quad (17.65)$$

na qual  $\mathbf{E}$  é o campo eletrostático de força usual. Em termos do potencial estático  $\varphi$ ,

$$\text{densidade de energia} = \frac{1}{2}\varepsilon(\nabla\varphi)^2. \quad (17.66)$$

Agora vamos impor o requisito de que a energia eletrostática (associada com o campo) em um dado volume seja um mínimo. (Condições de contorno sobre  $\mathbf{E}$  e  $\varphi$  ainda devem ser satisfeitas.) Temos a integral de volume<sup>11</sup>

$$J = \iiint (\text{grad}\varphi)^2 dx dy dz = \iiint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dx dy dz. \quad (17.67)$$

Com

$$f(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, x, y, z) = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2, \quad (17.68)$$

a função  $\varphi$  substituindo a função  $u$  da Equação (17.64), a equação de Euler dá como resultado

$$-2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0, \quad (17.69)$$

ou

$$\nabla^2\varphi(x, y, z) = 0, \quad (17.70)$$

que é a equação de Laplace da Eletrostática.

Uma investigação mais minuciosa mostra que esse valor estacionário é, de fato, um mínimo. Assim, o requisito de que a energia do campo seja minimizada leva à EDP de Laplace. ■

### Exercícios

**17.4.1** O lagrangiano para uma corda vibratória (vibrações de pequena amplitude) é

$$L = \int \left( \frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}\tau u_x^2 \right) dx,$$

em que  $\rho$  é a densidade de massa linear (constante) e  $\tau$  é a tensão (constante). A integração em relação a  $x$  é sobre o comprimento da corda. Mostre que a aplicação do princípio de Hamilton à densidade lagrangiana (o integrando), agora com duas variáveis independentes, leva à clássica equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

**17.4.2** Mostre que o valor estacionário da energia total do campo eletrostático do Exemplo 17.4.1 é um **mínimo**.

*Sugestão:* Use a Equação (17.61) e investigue os termos  $\alpha^2$ .

## 17.5 Diversas Variáveis Dependentes e Independentes

Em alguns casos, nosso integrando  $f$  contém mais de uma variável dependente e mais de uma variável independente. Considere

$$f = f[p(x, y, z), p_x, p_y, p_z, q(x, y, z), q_x, q_y, q_z, r(x, y, z), r_x, r_y, r_z, x, y, z]. \quad (17.71)$$

Procedemos como antes com

$$\begin{aligned} p(x, y, z, \alpha) &= p(x, y, z, 0) + \alpha\xi(x, y, z), \\ q(x, y, z, \alpha) &= q(x, y, z, 0) + \alpha\eta(x, y, z), \\ r(x, y, z, \alpha) &= r(x, y, z, 0) + \alpha\zeta(x, y, z), \end{aligned} \quad \text{e assim por diante.} \quad (17.72)$$

<sup>11</sup>O índice inferior  $x$  indica a derivada parcial de  $x$  e não uma componente de  $x$ .

Tendo em mente que  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  são independentes uma da outra, como eram as  $\eta_i$  na Seção 17.3, a mesma diferenciação, e então a integração por partes, leva a

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \quad (17.73)$$

com equações similares para funções  $q$  e  $r$ . Substituindo  $p, q, r, \dots$  por  $y_i$  e  $x, y, z, \dots$  por  $x_j$ , podemos colocar a Equação (17.73) em uma forma mais compacta:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial y_{ij}} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (17.73a)$$

na qual

$$y_{ij} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

Uma aplicação da Equação (17.73) aparece na Seção 17.7.

### Relação com a Física

O cálculo de variações do modo como foi desenvolvido até aqui dá uma descrição elegante de uma ampla variedade de fenômenos físicos. Entre esses citamos os da Mecânica Clássica na Seção 17.3; Mecânica Relativista, Exercício 17.3.5; Eletrostática, Exemplo 17.4.1, e Teoria Eletromagnética, Exercício 17.5.1. A conveniência não deve ser minimizada, mas, ao mesmo tempo, devemos estar cientes de que, nesses casos, o cálculo de variações apenas forneceu uma descrição alternativa do que já era conhecido. Mas a situação muda com teorias incompletas.

- Se a Física básica ainda não for conhecida, um princípio variacional postulado pode ser um útil ponto de partida.

### Exercício

**17.5.1** O lagrangiano (por unidade de volume) de um campo eletromagnético com uma carga de densidade  $\rho$  é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) - \rho \varphi + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}.$$

Mostre que as equações de Lagrange levam a duas equações de Maxwell. (As duas restantes são consequência da definição de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em termos de  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ .) Essa densidade de Lagrange vem de uma expressão escalar na Seção 4.6.

*Sugestão:* Considere  $A_1, A_2, A_3$  e  $\varphi$  variáveis **dependentes**,  $x, y, z$  e  $t$  variáveis **independentes**.  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são dados em termos de  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$  pelas Equações (4.142) e (1.88).

## 17.6 Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção introduzimos o conceito de restrição. Para simplificar o tratamento, a restrição aparece como uma função simples, em vez de uma integral. Nesta seção não estamos preocupados com o cálculo de variações, mas na Seção 17.7 as restrições, juntamente com nossos recém-desenvolvidos multiplicadores de Lagrange, são incorporados ao cálculo de variações.

Considere uma função de três variáveis independentes,  $f(x, y, z)$ . Para a função  $f$  ser um máximo (ou extremo),<sup>12</sup>

$$df = 0. \quad (17.74)$$

A condição necessária e suficiente para isso é

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (17.75)$$

na qual

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (17.76)$$

Em problemas de Física, muitas vezes as variáveis  $x, y, z$  estão sujeitas a restrições de modo que não são mais todas independentes. É possível, ao menos em princípio, usar cada restrição para eliminar uma variável e prosseguir com um novo conjunto menor de variáveis independentes.

<sup>12</sup>Incluindo um ponto de sela.



A utilização de multiplicadores de Lagrange é uma técnica alternativa que pode ser aplicada quando essa eliminação de variáveis é inconveniente ou indesejável. Seja nossa **equação de restrição**

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (17.77)$$

da qual  $z(x, y)$  pode ser extraída se  $x, y$  forem tomadas como as coordenadas independentes. Voltando à Equação (17.74), não mais resulta a Equação (17.75) porque agora há somente duas variáveis independentes, portanto  $dz$  não é mais arbitrária. Pela diferencial total  $d\varphi = 0$ , obtemos então

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \quad (17.78)$$

e, por conseguinte,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \lambda \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \right), \quad \lambda = -\frac{f_z}{\varphi_z},$$

admitindo  $\varphi_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$ . Assim, podemos somar a Equação (17.76) e um múltiplo da Equação (17.78) para obter

$$df + \lambda d\varphi = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (17.79)$$

Em outras palavras, nosso multiplicador Lagrange  $\lambda$  é escolhido de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad (17.80)$$

admitindo que  $\partial\varphi/\partial z \neq 0$ . Agora, a Equação (17.79) se torna

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (17.81)$$

Contudo, agora  $dx$  e  $dy$  são arbitrárias e as quantidades entre parênteses devem se anular:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \quad (17.82)$$

Quando as Equações (17.80) e (17.82) são satisfeitas,  $df = 0$  e  $f$  é um extremo. Note que agora há quatro incógnitas:  $x, y, z$  e  $\lambda$ . A quarta equação, é claro, é a equação de restrição, Equação (17.77). Queremos somente  $x, y$  e  $z$ , portanto  $\lambda$  não precisa ser determinado. Por essa razão,  $\lambda$  às vezes é denominado **multiplicador indeterminado de Lagrange**. Esse método falhará se todos os coeficientes de  $\lambda$  desaparecerem no extremo,  $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z = 0$ . Então é impossível resolver para  $\lambda$ .

Note que, pela forma das Equações (17.80) e (17.82), poderíamos identificar  $f$  como a função que assume um valor extremo sujeito a  $\varphi$ , a restrição, ou poderíamos identificar a restrição e  $f$  como a função  $\varphi$ .

Se tivermos um **conjunto de restrições**  $\varphi_k$ , então as Equações (17.80) e (17.82) se tornam

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

com um multiplicador de Lagrange separado  $\lambda_k$  para cada  $\varphi_k$ .

### Exemplo 17.6.1 PARTÍCULA DENTRO DE UMA CAIXA

Como exemplo da utilização de multiplicadores de Lagrange, considere o problema da Mecânica Quântica de uma partícula (massa  $m$ ) dentro de uma caixa. A caixa é um paralelepípedo retangular com lados  $a, b$  e  $c$ . A energia do estado fundamental da partícula é dada por

$$E = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \quad (17.83)$$

Procuramos o formato da caixa que minimizará a energia  $E$ , sujeito à restrição de que o volume seja constante,

$$V(a, b, c) = abc = k. \quad (17.84)$$

Com  $f(a, b, c) = E(a, b, c)$  e  $\varphi(a, b, c) = abc - k = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial E}{\partial a} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial a} = -\frac{h^2}{4ma^3} + \lambda bc = 0. \quad (17.85)$$

Além disso,

$$-\frac{h^2}{4mb^3} + \lambda ac = 0, \quad -\frac{h^2}{4mc^3} + \lambda ab = 0.$$

Multiplicando a primeira dessas expressões por  $a$ , a segunda por  $b$  e a terceira por  $c$ , temos

$$\lambda abc = \frac{h^2}{4ma^2} = \frac{h^2}{4mb^2} = \frac{h^2}{4mc^2}. \quad (17.86)$$

Por conseguinte, nossa solução é

$$a = b = c, \quad \text{um cubo.} \quad (17.87)$$

Note que  $\lambda$  não foi determinado, mas resulta da Equação (17.86). ■

### Exemplo 17.6.2 REATOR NUCLEAR CILÍNDRICO

Um outro exemplo é dado pela teoria do reator nuclear. Suponha que um reator nuclear (térmico) deva o ter a forma de um cilindro circular de raio  $R$  e altura  $H$ . A teoria da difusão de nêutrons fornece uma restrição:

$$\varphi(R, H) = \left(\frac{2,4048}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = \text{constante.}^{13} \quad (17.88)$$

Queremos minimizar o volume do vaso do reator,

$$f(R, H) = \pi R^2 H. \quad (17.89)$$

Aplicando a Equação (17.82), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial R} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial R} &= 2\pi RH - 2\lambda \frac{(2,4048)^2}{R^3} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial H} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial H} &= \pi R^2 - 2\lambda \frac{\pi^2}{H^3} = 0. \end{aligned} \quad (17.90)$$

Multiplicando a primeira dessas equações por  $R/2$  e a segunda por  $H$ , obtemos

$$\pi R^2 H = \lambda \frac{(2,4048)^2}{R^2} = \lambda \frac{2\pi^2}{H^2}, \quad (17.91)$$

ou altura

$$H = \frac{\sqrt{2\pi}R}{2,4048} = 1,847R, \quad (17.92)$$

para o reator cilíndrico circular reto de volume mínimo.

Em termos estritos, achamos apenas um extremo. Sua identificação como um mínimo resulta de uma consideração das equações originais. ■

### Exercícios

Os problemas seguintes devem ser resolvidos usando multiplicadores de Lagrange.

- 17.6.1** A energia de estado fundamental de uma partícula quântica de massa  $m$  dentro de uma pastilha (cilindro circular reto) é dada por

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{(2,4048)^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right),$$

na qual  $R$  é o raio e  $H$  a altura da caixa. Ache a razão entre  $R$  e  $H$  que minimizará a energia para um volume fixo.

<sup>13</sup>2,4048 ... é a raiz mais baixa da função de Bessel  $J_0(R)$  (compare com a Seção 11.1).



- 17.6.2** Ache a razão entre  $R$  (raio) e  $H$  (altura) que minimizará a área da superfície total de um cilindro circular reto de volume fixo.
- 17.6.3** O Correio dos Estados Unidos limita a remessa de encomendas de primeira classe para o Canadá a 90 centímetros de comprimento, mais a circunferência. Usando um multiplicador de Lagrange, ache o volume máximo e as dimensões de uma embalagem (paralelepípedo retangular) sujeita a essa restrição.
- 17.6.4** Um reator nuclear térmico está sujeito à restrição

$$\varphi(a, b, c) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 = B^2, \text{ uma constante.}$$

Ache as razões entre os lados de um reator na forma de um paralelepípedo regular de volume mínimo.

Resposta:  $a = b = c$ , cubo.

- 17.6.5** Para uma lente de comprimento focal  $f$ , a distância do objeto  $p$  e a distância da imagem  $q$  estão relacionadas por  $1/p + 1/q = 1/f$ . Ache a mínima distância objeto-imagem ( $p + q$ ) para  $f$  fixo. Admita objeto e imagem reais ( $p$  e  $q$  positivas).
- 17.6.6** Dada uma elipse  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ , ache o retângulo inscrito de área máxima. Mostre que a razão entre a área do retângulo de área máxima e a área da elipse é  $2/\pi \approx 0,6366$ .
- 17.6.7** Um paralelepípedo retangular está inscrito em um elipsóide com semi-eixos  $a, b$  e  $c$ . Maximize o volume do paralelepípedo retangular inscrito. Mostre que a razão entre o máximo volume e o volume do elipsóide é  $2/\pi\sqrt{3} \approx 0,367$ .
- 17.6.8** Uma esfera **deformada** tem um raio dado por  $r = r_0\{\alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \theta)\}$ , em que  $\alpha_0 \approx 1$  e  $|\alpha_2| \ll |\alpha_0|$ . Pelo Exercício 12.5.16, a área e o volume são

$$A = 4\pi r_0^2 \alpha_0^2 \left\{1 + \frac{4}{5} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2\right\}, \quad V = \frac{4\pi r_0^3}{3} \alpha_0^3 \left\{1 + \frac{3}{5} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2\right\}.$$

Termos de ordem  $\alpha_2^3$  foram desprezados.

- (a) Considerando a restrição de que o volume encerrado seja mantido constante, isto é,  $V = 4\pi r_0^3/3$ , mostre que a superfície limitadora de área mínima é uma esfera ( $\alpha_0 = 1, \alpha_2 = 0$ ).
- (b) Considerando a restrição de que a área da superfície limitadora seja mantida constante, isto é,  $A = 4\pi r_0^2$ , mostre que o volume encerrado é um máximo quando a superfície é uma esfera.
- 17.6.9** Ache o máximo valor da derivada direcional de  $\varphi(x, y, z)$ ,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos \gamma,$$

sujeita à limitação

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Resposta:  $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = |\nabla\varphi|$ .

Observações sobre os exercícios seguintes: em um sistema quântico há  $g_i$  estados quânticos distintos entre energias  $E_i$  e  $E_i + dE_i$ . O problema é descrever como  $n_i$  partículas estão distribuídas entre esses estados sujeitas a duas restrições:

- (a) número fixo de partículas.

$$\sum_i n_i = n.$$

- (b) energia total fixa,

$$\sum_i n_i E_i = E.$$

- 17.6.10** Para partículas idênticas que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, a probabilidade de um dado arranjo é

$$W_{FD} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}.$$

Mostre que maximizar  $W_{FD}$ , sujeito a um número fixo de partículas e energia total fixa, leva a

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_i} + 1}.$$

Com  $\lambda_1 = -E_0/kT$  e  $\lambda_2 = 1/kT$ , isso resulta na estatística de Fermi-Dirac.

*Sugestão:* Tente trabalhar com  $\ln W$  e usar a fórmula de Stirling, Seção 8.3. A justificativa para a **diferenciação** em relação a  $n_i$  é que, aqui, estamos tratando com um grande número de partículas,  $\Delta n_i/n_i \ll 1$ .

- 17.6.11** Para partículas idênticas mas sem nenhuma restrição ao número em um dado estado, a probabilidade de um determinado arranjo é

$$W_{BE} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!}.$$

Mostre que maximizar  $W_{BE}$ , sujeito a um número fixo de partículas e energia total fixa, leva a

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_i} - 1}.$$

Com  $\lambda_1 = -E_0/kT$  e  $\lambda_2 = 1/kT$ , isso resulta na estatística de Bose-Einstein.

*Nota:* Admita que  $g_i \gg 1$ .

- 17.6.12** Fótons satisfazem  $W_{BE}$  e a restrição da energia total constante mas, claramente, **não** satisfazem a restrição do número fixo. Mostre que eliminar a restrição do número fixo leva ao resultado anterior, porém com  $\lambda_1 = 0$ .

## 17.7 Variação com Vínculos

Como nas seções precedentes, buscamos o caminho que fará a integral

$$J = \int f\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) dx_j \quad (17.93)$$

estacionária. Esse é o caso geral em que  $x_j$  representa um conjunto de variáveis independentes, e  $y_i$ , um conjunto de variáveis dependentes. Novamente,

$$\delta J = 0. \quad (17.94)$$

Contudo, agora introduzimos um ou mais vínculos, o que significa que as  $y_i$  não são mais independentes umas das outras. Nem todas as  $\eta_i$  podem ser variadas arbitrariamente, e as Equações (17.62) e (17.73a) não se aplicariam. O vínculo pode ter a forma

$$\varphi_k(y_i, x_j) = 0, \quad (17.95)$$

como na Seção 17.6. Nesse caso podemos multiplicar por uma função de  $x_j$ , por exemplo,  $\lambda_k(x_j)$ , e integrar sobre a mesma faixa da Equação (17.93) para obter

$$\int \lambda_k(x_j) \varphi_k(y_i, x_j) dx_j = 0. \quad (17.96)$$

Então, claramente,

$$\delta \int \lambda_k(x_j) \varphi_k(y_i, x_j) dx_j = 0. \quad (17.97)$$

Como alternativa, a restrição pode aparecer na forma de uma integral

$$\int \varphi_k(y_i, \partial y_i / \partial x_j, x_j) dx_j = \text{constante}. \quad (17.98)$$

Podemos introduzir qualquer multiplicador de Lagrange **constante** e, mais uma vez, resultaria a Equação (17.97) — agora com  $\lambda$  constante.





Em qualquer dos casos, somando as Equações (17.94) e (17.97), possivelmente com mais de um vínculo, obtemos

$$\delta \int \left[ f \left( y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j \right) + \sum_k \lambda_k \varphi_k(y_i, x_j) \right] dx_j = 0. \quad (17.99)$$

O multiplicador de Lagrange  $\lambda_k$  pode depender de  $x_j$  quando  $\varphi(y_i, x_j)$  é dado na forma da Equação (17.95). Tratando todo o integrando como uma nova função,

$$g \left( y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j \right),$$

obtemos

$$g \left( y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j \right) = f + \sum_k \lambda_k \varphi_k. \quad (17.100)$$

Se tivermos  $N$   $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) e  $m$  vínculos ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), então  $N - m$  das  $\eta_i$  podem ser consideradas arbitrárias. Para as restantes  $m$   $\eta_i$ ,  $\lambda$  pode, em princípio, ser escolhido de modo a satisfazer as equações de Euler-Lagrange remanescentes, em total analogia com a Equação (17.80). O resultado é que nossa função composta em  $g$  deve satisfazer as equações de Euler-Lagrange usuais,

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial (\partial y_i / \partial x_j)} = 0, \quad (17.101)$$

com uma equação como essa para cada variável dependente  $y_i$  (compare com as Equações (17.64) e (17.73)). Então, essas equações de Euler e as equações de vínculos são resolvidas simultaneamente para achar a função que apresenta um valor estacionário.

### Funções Lagrangianas

Na ausência de vínculos, verificamos que as equações de Lagrange do movimento (Equação (17.52)) são<sup>14</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

sendo  $t$  (tempo) a única variável independente e  $q_i(t)$  (posições de partícula) um conjunto de variáveis dependentes. Usualmente as coordenadas generalizadas  $q_i$  são escolhidas para eliminar as forças de vínculo, mas isso não é necessário e nem sempre desejável. Na presença de restrições (holonômicas),  $\varphi_k = 0$ , o princípio de Hamilton é

$$\delta \int \left[ L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_k \lambda_k(t) \varphi_k(q_i, t) \right] dt = 0, \quad (17.102)$$

e as equações de movimento lagrangianas restritas são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k a_{ik} \lambda_k. \quad (17.103)$$

Usualmente,  $\varphi_k = \varphi_k(q_i, t)$ , independente das velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . Nesse caso, o coeficiente  $a_{ik}$  é dado por

$$a_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}. \quad (17.104)$$

Então,  $a_{ik} \lambda_k$  (sem somatório) representa a força do  $k$ -ésimo vínculo na direção  $q_i$  que aparece na Equação (17.103), exatamente do mesmo modo que  $-\partial V / \partial q_i$ .

### Exemplo 17.7.1 PÊNDULO SIMPLES

Para ilustrar, considere o pêndulo simples uma massa  $m$  restringida por um fio de comprimento  $l$  a oscilar em um arco (Figura 17.10). Na ausência do único vínculo.

$$\varphi_1 = r - l = 0 \quad (17.105)$$

<sup>14</sup>O símbolo  $q$  é costumeiro na Mecânica Clássica. Serve para enfatizar que a variável não é necessariamente uma variável cartesiana (e não necessariamente um comprimento).

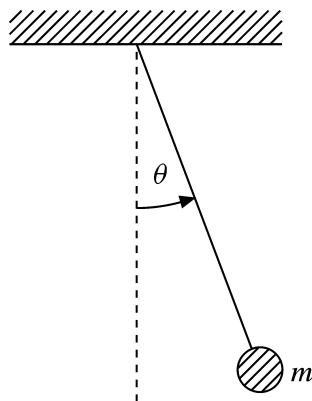


Figura 17.10: Pêndulo simples.

há duas coordenadas generalizadas  $r$  e  $\theta$  (movimento no plano vertical). O lagrangiano é

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta, \quad (17.106)$$

considerando potencial  $V$  como zero quando o pêndulo é horizontal,  $\theta = \pi/2$ . Pela Equação (17.103), as equações de movimento são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (a_{r1} = 1, a_{\theta1} = 0), \quad (17.107)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta &= \lambda_1, \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (17.108)$$

Substituindo na equação de restrição ( $r = l, \dot{r} = 0$ ), temos

$$ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = -\lambda_1, \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (17.109)$$

A segunda equação pode ser resolvida para  $\theta(t)$  para resultar em movimento harmônico simples se a amplitude for pequena ( $\sin \theta \sim \theta$ ), ao passo que a primeira equação expressa a tensão no fio em termos de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

Note que, uma vez que a equação de restrição, Equação (17.105), está na forma da Equação (17.95), o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  pode ser (e aqui é) uma função de  $t$  (ou de  $\theta$ ). ■

### Exemplo 17.7.2 DESPRENDENDO-SE DA SUPERFÍCIE DE UM TRONCO

Um problema que guarda uma relação muito próxima com esse é o de uma partícula que está deslizando sobre uma superfície cilíndrica. O objetivo é achar o ângulo crítico  $\theta_c$  no qual a partícula é lançada para fora da superfície. Esse ângulo crítico é o ângulo no qual a força de vínculo radial cai a zero (Figura 17.11). Temos

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \quad (17.110)$$

e a única equação de vínculo

$$\varphi_1 = r - l = 0. \quad (17.111)$$

Continuando como no Exemplo 17.7.1 com  $a_{r1} = 1$ ,

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta &= \lambda_1(\theta), \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr \sin \theta &= 0, \end{aligned} \quad (17.112)$$

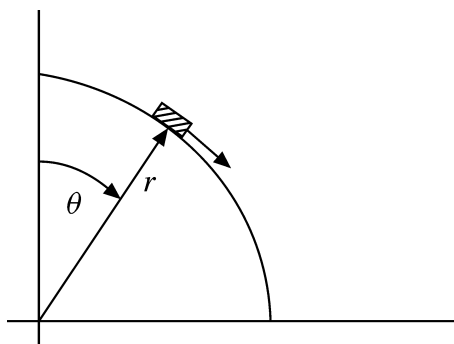


Figura 17.11: Uma partícula deslizando sobre uma superfície cilíndrica.

na qual a força de restrição  $\lambda_1(\theta)$  é uma função do ângulo  $\theta$ .<sup>15</sup> Uma vez que  $r = l$ ,  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ , a Equação (17.112) se reduz a

$$-ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \lambda_1(\theta), \quad (17.113a)$$

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0. \quad (17.113b)$$

Diferenciando a Equação (17.113a) em relação ao tempo e lembrando que

$$\frac{df(\theta)}{dt} = \frac{df(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}, \quad (17.114)$$

obtemos

$$-2ml\ddot{\theta} - mgl \cos \theta = \frac{d\lambda_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}. \quad (17.115)$$

Usando a Equação (17.113b) para eliminar o termo  $\ddot{\theta}$  e então integrando, temos

$$\lambda_1(\theta) = 3mg \cos \theta + C. \quad (17.116)$$

Uma vez que

$$\lambda_1(0) = mg, \quad (17.117)$$

$$C = -2mg. \quad (17.118)$$

A partícula  $m$  permanecerá na superfície enquanto a força de restrição for não-negativa, isto é, enquanto a superfície tiver de exercer um impulso para fora sobre a partícula:

$$\lambda_1(\theta) = 3mg \cos \theta - 2mg \geq 0. \quad (17.119)$$

O ângulo crítico se encontra em  $\lambda_1(\theta_c) = 0$ , a força de vínculo cai a zero. Pela Equação (17.119),

$$\cos \theta_c = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \theta_c = 48^\circ 11', \quad (17.120)$$

em relação à vertical. Nesse ângulo (desprezando todo o atrito) nossa partícula é lançada para fora da superfície.

Temos de reconhecer que esse resultado pode ser obtido com mais facilidade considerando uma força centrípeta variável fornecida pela componente radial da força gravitacional. O exemplo foi escolhido para ilustrar a utilização do multiplicador indeterminado de Lagrange sem confundir o leitor com um sistema físico complicado. ■

### Exemplo 17.7.3 A EQUAÇÃO DE ONDA DE SCHRÖDINGER

Como ilustração final de um mínimo restringido, vamos achar as equações de Euler para um problema da Mecânica Quântica

$$\delta \iiint \psi^*(x, y, z) H \psi(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad (17.121)$$

<sup>15</sup>Note que  $\lambda_1$  é a força **radial** exercida pelo cilindro sobre a partícula. Considerando o problema físico, vemos que  $\lambda_1$  deve depender do ângulo  $\theta$ . Antes permitimos que  $\lambda = \lambda(t)$ . Agora, estamos substituindo a dependência de tempo por uma dependência angular (desconhecida) usando  $\theta = \theta(t)$ .

com a restrição de normalização

$$\iiint \psi^* \psi \, dx \, dy \, dz = 1. \quad (17.122)$$

A Equação (17.121) é uma afirmação de que a energia do sistema é estacionária, sendo  $H$  a hamiltoniana da Mecânica Quântica para uma partícula de massa  $m$  um operador diferencial,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z). \quad (17.123)$$

A Equação (17.122) é uma restrição de estado limitado,  $\psi$  é a função de onda usual, uma variável dependente, e  $\psi^*$ , seu complexo conjugado, é tratado como uma **segunda**<sup>16</sup> variável dependente.

O integrando na Equação (17.121) envolve derivadas de **segunda ordem** que podem ser convertidas a derivadas de primeira ordem integrando por partes:

$$\int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \, dx = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big| - \int \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx. \quad (17.124)$$

Ou admitimos condições de contorno periódicas (como na teoria de Sturm-Liouville, Capítulo 10) ou que o volume de integração é tão grande que  $\psi$  e  $\psi^*$  se anulam com suficiente rapidez<sup>17</sup> no contorno. Então a parte integrada desaparece e a Equação (17.121) pode ser reescrita como

$$\delta \iiint \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V \psi^* \psi \right] \, dx \, dy \, dz = 0. \quad (17.125)$$

A função  $g$  da equação (17.100) é

$$\begin{aligned} g &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (\psi_x^* \psi_x + \psi_y^* \psi_y + \psi_z^* \psi_z) + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi, \end{aligned} \quad (17.126)$$

novamente usando o índice inferior  $x$  para denotar  $\partial/\partial x$ . Para  $y_i = \psi^*$ , a Equação (17.101) se torna

$$\frac{\partial g}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \psi_x^*} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial \psi_y^*} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \psi_z^*} = 0.$$

Isso resulta em

$$V \psi - \lambda \psi - \frac{\hbar^2}{2m} (\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}) = 0,$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = \lambda \psi. \quad (17.127)$$

Referência à Equação (17.123) nos habilita a identificar  $\lambda$  em termos físicos como a energia do sistema da quântico. Com essa interpretação, a Equação (17.127) é a celebrada equação de onda de Schrödinger. ■

Essa abordagem variacional é mais do que apenas uma questão de curiosidade acadêmica. Ela nos dá um método muito poderoso de obter soluções aproximadas da equação de onda (método variacional de Rayleigh-Ritz, Seção 17.8).

## Exercícios

**17.7.1** Uma partícula massa  $m$  está sobre uma superfície horizontal sem atrito. Ela está restrita a se mover, de modo que  $\theta = \omega t$  (braço giratório radial, nenhum atrito). Com as condições iniciais

$$t = 0, \quad r = r_0, \quad \dot{r} = 0,$$

(a) Ache as posições radiais como uma função do tempo.

Resposta:  $r(t) = r_0 \cosh \omega t$ .

(b) Ache a força exercida sobre a partícula pela restrição.

<sup>16</sup>Compare com a Seção 6.1.

<sup>17</sup>Por exemplo,  $\lim_{r \rightarrow \infty} r \psi(r) = 0$ .



Resposta:  $F^{(c)} = 2m\dot{r}\omega = 2mr_0\omega^2 \sinh \omega t$ .

- 17.7.2** Uma massa pontual  $m$  está se movendo sobre um plano achatado, horizontal, sem atrito. A massa está restrita por uma corda a se movimentar para dentro na direção radial a uma taxa constante. Usando coordenadas polares planas  $(\rho, \varphi)$ ,  $\rho = \rho_0 - kt$ ,
- (a) Estabeleça o lagrangiano.
  - (b) Obtenha as equações com vínculos de Lagrange.
  - (c) Resolva a equação de Lagrange dependente de  $\varphi$  para obter  $\omega(t)$ , a velocidade angular. Qual é o significado físico da constante de integração que você obtém de sua integração “livre”?
  - (d) Usando a  $\omega(t)$  da parte (b), resolva a equação de Lagrange (com vínculo) dependente de  $\rho$  para obter  $\lambda(t)$ . Em outras palavras, explique o que está acontecendo com a **força** de vínculo à medida que  $\rho \rightarrow 0$ .

- 17.7.3** Um cabo flexível está suspenso de dois pontos fixos. O comprimento do cabo é fixo. Ache a curva que minimizará a energia potencial gravitacional total do cabo.

Resposta: Co-seno hiperbólico.

- 17.7.4** Um volume de água fixo está girando dentro de um cilindro com velocidade angular constante  $\omega$ . Ache a curva da superfície da água que minimizará a energia potencial total da água no campo de força combinado centrífugo-gravitacional.

Resposta: Parábola.

- 17.7.5** (a) Mostre que, para um perímetro de comprimento fixo, a figura com área máxima é um círculo.  
 (b) Mostre que, para uma área fixa, a curva com perímetro mínimo é um círculo.  
*Sugestão:* O raio de curvatura  $R$  é dado por

$$R = \frac{(r^2 + r_\theta^2)^{3/2}}{rr_{\theta\theta} - 2r_\theta^2 - r^2}.$$

*Nota:* Os problemas desta seção, com variação sujeita a vínculos, costumam ser denominados *isoperimétricos*. O termo surgiu de problemas de maximização de área sujeita a um perímetro fixo, como no Exercício 17.7.5(a).

- 17.7.6** Mostre que exigir que  $J$ , dada por

$$J = \int_a^b [p(x)y_x^2 - q(x)y^2] dx,$$

tenha um valor estacionário sujeito à condição de normalização

$$\int_a^b y^2 w(x) dx = 1$$

leva à equação de Sturm-Liouville do Capítulo 10:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) + qy + \lambda wy = 0.$$

*Nota:* A condição de fronteira

$$py_x y \Big|_a^b = 0$$

é usada na Seção 10.1 para estabelecer a propriedade hermitiana do operador.

- 17.7.7** Mostre que exigir que  $J$ , dada por

$$J = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \varphi(x) \varphi(t) dx dt,$$

tenha um valor estacionário sujeito à condição de normalização

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1$$

leva à equação integral de Hilbert-Schmidt, Equação (16.89).

*Nota:* O núcleo  $K(x, t)$  é simétrico.

## 17.8 Técnica Variacional de Rayleigh-Ritz

O Exercício 17.7.6 revela uma relação entre o cálculo de variações e problemas de autovalores de autofunção. Podemos reescrever a expressão do Exercício 17.7.6 como

$$F[y(x)] = \frac{\int_a^b (py_x^2 - qy^2) dx}{\int_a^b y^2 w dx}, \quad (17.128)$$

na qual a restrição aparece no denominador como uma condição normalizadora. Após encontrar o mínimo não-restrito de  $F$ , pode ser normalizada sem alterar o valor estacionário de  $y$  porque valores estacionários de  $F$  correspondem a valores estacionários de  $J$ . Então, pelo Exercício 17.7.6, quando  $y(x)$  é tal que  $J$  e  $F$  assumem um valor estacionário, a função ótima  $y(x)$  satisfaz a equação de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) + qy + \lambda wy = 0, \quad (17.129)$$

sendo  $\lambda$  o autovalor (**não** um multiplicador de Lagrange). Integrando o primeiro termo no numerador da Equação (17.128) por partes e usando a **condição de contorno**,

$$py_x y \Big|_a^b = 0, \quad (17.130)$$

obtemos

$$F[y(x)] = - \int_a^b y \left\{ \frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) + qy \right\} dx / \int_a^b y^2 w dx. \quad (17.131)$$

Então, substituindo na Equação (17.129), os valores estacionários de  $F[y(x)]$  são dados por

$$F[y(x)] = \lambda_n, \quad (17.132)$$

sendo  $\lambda_n$  o autovalor correspondente à autofunção  $y_n$ . A Equação (17.132) com  $F$  dada pela Equação (17.128) ou Equação (17.131) forma a base do método de Rayleigh-Ritz para o cálculo de autofunções e autovalores.

### Autofunção de Estado Fundamental

Suponha que queremos calcular a autofunção de estado fundamental  $y_0$  e o autovalor<sup>18</sup>  $\lambda_0$  de algum sistema atômico ou nuclear complicado. O exemplo clássico, para o qual não existe nenhuma solução exata, é o problema do átomo de hélio. A autofunção  $y_0$  é **desconhecida**, mas admitiremos que podemos dar um palpite muito bom quanto a uma função aproximada  $y$ , portanto, matematicamente podemos escrever<sup>19</sup>

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i. \quad (17.133)$$

Os  $c_i$  são quantidades pequenas. (Sua grandeza depende da qualidade de nosso palpite.) As  $y_i$  são autofunções ortonormalizadas (também desconhecidas) e, portanto, nossa função experimental  $y$  não é normalizada.

Substituindo a função aproximada  $y$  na Equação (17.131), e observando que

$$\int_a^b y_i \left\{ \frac{d}{dx} \left( p \frac{dy_j}{dx} \right) + qy_j \right\} dx = -\lambda_i \delta_{ij}, \quad (17.134)$$

$$F[y(x)] = \frac{\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2}. \quad (17.135)$$

Aqui, consideramos que as autofunções são ortonormais — uma vez que são soluções da equação de Sturm-Liouville, Equação (17.129). Também admitimos que  $y_0$  é não-degradada. Agora, se substituirmos  $\sum_i c_i^2 \lambda_i \rightarrow \sum_i c_i^2 \lambda_0 + \sum_i c_i^2 (\lambda_i - \lambda_0)$ , obtemos

$$F[y(x)] = \lambda_0 + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 (\lambda_i - \lambda_0)}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2}. \quad (17.136)$$

A Equação (17.136) contém dois resultados importantes.

<sup>18</sup> Isso significa que  $\lambda_0$  é o autovalor mais baixo. A Equação (17.128) deixa claro que, se  $p(x) \geq 0$  e  $q(x) \leq 0$  (compare com a Tabela 10.1), então  $F[y(x)]$  tem um limite inferior e esse limite inferior é não-negativo. Lembre-se da Seção 10.1 que  $w(x) \geq 0$ .

<sup>19</sup> Estamos adivinhando a forma da função. A normalização é irrelevante.



- Enquanto o erro na autofunção  $y$  foi  $\mathcal{O}(c_i)$ , o erro em  $\lambda$  é apenas  $\mathcal{O}(c_i^2)$ . Mesmo uma aproximação ruim das autofunções pode dar como resultado um cálculo preciso do autovalor.
- Se  $\lambda_0$  for o autovalor mais baixo (estado fundamental), então, uma vez que  $\lambda_i - \lambda_0 > 0$ ,

$$F[y(x)] = \lambda \geq \lambda_0, \tag{17.137}$$

ou nossa aproximação é sempre a maior e fica cada vez mais baixa, convergindo para  $\lambda_0$ , à medida que nossa autofunção aproximada  $y$  melhora ( $c_i \rightarrow 0$ ). Note que a Equação (17.137) é uma consequência direta da Equação (17.135). Mais diretamente,  $F[y(x)]$  na Equação (17.135) é uma média ponderada positivamente dos  $\lambda_i$  e, portanto, não deve ser menor do que o menor  $\lambda_i$ , ou seja,  $\lambda_0$ . Em problemas práticos de Mecânica Quântica,  $y$  muitas vezes depende de parâmetros que podem ser variados para minimizar  $F$  e, por isso, melhorar a estimativa da energia  $\lambda_0$  do estado fundamental. Esse é o “método variacional” discutido em textos de Mecânica Quântica.

### Exemplo 17.8.1 CORDA VIBRATÓRIA

Uma corda vibratória, presa em  $x = 0$  e  $1$ , satisfaz a equação de autovalor

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{17.138}$$

e a condição de contorno  $y(0) = y(1) = 0$ . Para esse exemplo simples, reconhecemos imediatamente que  $y_0(x) = \text{sen } \pi x$  (não-normalizada) e  $\lambda_0 = \pi^2$ . Mas vamos experimentar a técnica de Rayleigh-Ritz.

Sem esquecer as condições de contorno, experimentamos

$$y(x) = x(1 - x). \tag{17.139}$$

Então, com  $p = 1$  e  $w = 1$ , a Equação (17.128) resulta em

$$F[y(x)] = \frac{\int_0^1 (1 - 2x)^2 dx}{\int_0^1 x^2(1 - x)^2 dx} = \frac{1/3}{1/30} = 10. \tag{17.140}$$

Esse resultado,  $\lambda = 10$ , é uma aproximação bastante boa (erro de 1,3%)<sup>20</sup> de  $\lambda_0 = \pi^2 = 9,8696$ . Você talvez tenha notado que  $y(x)$ , Equação (17.139), não é normalizada para unidade. O denominador em  $F[y(x)]$  compensa a falta de normalização para unidade.  $F$  também pode ser calculada a partir da Equação (17.131), visto que a Equação (17.130) é satisfeita por  $y$  da Equação (17.139).

No cálculo científico usual a autofunção seria melhorada introduzindo mais termos e parâmetros ajustáveis, tais como

$$y = x(1 - x) + a_2 x^2(1 - x)^2. \tag{17.141}$$

É conveniente, mas não necessário, que os termos adicionais sejam ortogonais. O parâmetro  $a_2$  é ajustado para **minimizar**  $F[y(x)]$ . Nesse caso, escolher  $a_2 = 1,1353$  leva  $F[y(x)]$  para baixo até 9,8697, muito próximo do valor correto do autovalor. ■

### Exercícios

- 17.8.1** Pela Equação (17.128), desenvolva detalhadamente o argumento quando  $\lambda \geq 0$  ou  $\lambda < 0$ . Explique as circunstâncias sob as quais  $\lambda = 0$ , e ilustre com vários exemplos.
- 17.8.2** Uma função desconhecida satisfaz a equação diferencial

$$y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$$

e as condições de contorno

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

<sup>20</sup>A proximidade do ajuste pode ser verificada por uma expansão de Fourier de seno (compare com o Exercício 14.2.3 no meio intervalo  $[0, 1]$  ou, o que é equivalente, no intervalo  $[-1, 1]$ , considerando  $y(x)$ ). Por causa da simetria par relativa a  $x = 1/2$ , somente aparecem termos  $n$  ímpares:

$$y(x) = x(1 - x) = \left(\frac{8}{\pi^3}\right) \left[ \text{sen } \pi x + \frac{\text{sen } 3\pi x}{3^3} + \frac{\text{sen } 5\pi x}{5^3} + \dots \right].$$

(a) Calcule a aproximação

$$\lambda = F[y_{\text{experimental}}]$$

para

$$y_{\text{experimental}} = 1 - x^2.$$

(b) Compare com o autovalor exato.

Resposta: (a)  $\lambda = 2, 5$ , (b)  $\lambda/\lambda_{\text{exato}} = 1, 013$ .

**17.8.3** No Exercício 17.8.2 use uma função experimental

$$y = 1 - x^n.$$

(a) Ache o valor de  $n$  que minimizará  $F[y_{\text{experimental}}]$ .

(b) Mostre que o valor ótimo de  $n$  leva a razão  $\lambda/\lambda_{\text{exato}}$  para baixo, até 1,003.

Resposta: (a)  $n = 1, 7247$ .

**17.8.4** Uma partícula da mecânica quântica dentro de uma esfera (Exemplo 11.7.1) satisfaz

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

com  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . A condição de contorno é que  $\psi(r = a) = 0$ , em que  $a$  é o raio da esfera. Para o estado fundamental [em que  $\psi = \psi(r)$ ], experimente um função de onda aproximada

$$\psi_a(r) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

e calcule um autovalor aproximado  $k_a^2$ .

*Sugestão:* Para determinar  $p(r)$  e  $w(r)$ , coloque sua equação em forma auto-adjunta (em coordenadas polares esféricas).

Resposta:  $k_a^2 = \frac{10,5}{a^2}$ ,  $k_{\text{exato}}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$ .

**17.8.5** A equação de onda para o oscilador da Mecânica Quântica pode ser escrita como

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + (\lambda - x^2) \psi(x) = 0,$$

com  $\lambda = 1$  para o estado fundamental (Equação (13.18)). Considere

$$\psi_{\text{experimental}} = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{a^2}, & x^2 \leq a^2 \\ 0, & x^2 > a^2 \end{cases}$$

para a função de onda do estado fundamental (sendo  $a^2$  um parâmetro ajustável) e calcule a energia de estado fundamental correspondente. De quanto é seu erro?

*Nota:* Na verdade, sua parábola não é uma aproximação muito boa para uma exponencial gaussiana. Que melhorias você pode sugerir?

**17.8.6** A equação de Schrödinger para um potencial central pode ser escrita como

$$\mathcal{L}u(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} u(r) = Eu(r).$$

O termo  $l(l+1)$ , a barreira do momento angular, vem da subdivisão da dependência angular (Seção 9.3). Tratando esse termo como uma perturbação, use sua técnica variacional para mostrar que  $E > E_0$ , em que  $E_0$  é o autovalor de energia de  $\mathcal{L}u_0 = E_0 u_0$  correspondente para  $l = 0$ . Isso significa que o estado de energia mínima terá  $l = 0$ , momento angular zero.

*Sugestão:* Você pode expandir  $u(r)$  como  $u_0(r) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ , em que  $\mathcal{L}u_i = E_i u_i$ ,  $E_i > E_0$ .

**17.8.7** Na de autovetor matricial a equação de autovalor,

$$A \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i,$$





onde  $\lambda$  é uma matriz hermitiana  $n \times n$ . Por simplicidade, admita que seus  $n$  autovalores reais (Seção 3.5) são distintos, sendo  $\lambda_1$  o maior. Se  $\mathbf{r}$  for uma aproximação de  $\mathbf{r}_1$ ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \sum_{i=2}^n \delta_i \mathbf{r}_i,$$

mostre que

$$\frac{\mathbf{r}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{r}}{\mathbf{r}^\dagger \mathbf{r}} \leq \lambda_1$$

e que o erro em  $\lambda_1$  é da ordem  $|\delta_i|^2$ . Considere  $|\delta_i| \ll 1$ .

*Sugestão:* As  $n$   $\mathbf{r}_i$  formam um conjunto ortogonal completo que abrange o espaço  $n$  dimensional (complexo).

- 17.8.8** A solução variacional do Exemplo 17.8.1 pode ser refinada considerando  $y = x(1-x) + a_2 x^2(1-x)^2$ . Usando a quadratura numérica, calcule  $\lambda_{\text{aprox}} = F[y(x)]$ , Equação (17.128), para um valor fixo de  $a_2$ . Varie  $a_2$  para minimizar  $\lambda$ . Calcule o valor de  $a_2$  que minimiza  $\lambda$  e calcule o próprio  $\lambda$ , ambos com cinco algarismos significativos. Compare seu autovalor  $\lambda$  com  $\pi^2$ .

## Leituras Adicionais

- Bliss, G. A., *Calculus of Variations*. The Mathematical Association of America. LaSalle, IL: Open Court Publishing Co. (1925). Embora seja um dos textos mais antigos, ainda é uma referência valiosa para detalhes de problemas como os de área mínima.
- Courant, R., e H. Robbins, *What Is Mathematics?* 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Oxford University Press (1996). O capítulo VII contém uma ótima discussão do cálculo de variações, incluindo soluções de película de sabão para problemas de área mínima.
- Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, 4<sup>a</sup> ed. Toronto: University of Toronto Press (1970), nova tiragem, Dover (1986). Esse livro é um tratamento muito completo de princípios variacionais e suas aplicações ao desenvolvimento da Mecânica Clássica.
- Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. Nova York: Wiley (1961), nova tiragem, Dover (1989). Esse texto delicioso também poderia figurar como uma referência para a teoria de Sturm-Liouville, funções de Legendre e Bessel e série de Fourier. O Capítulo 1 é uma introdução ao cálculo de variações, com aplicações à Mecânica. O Capítulo 7 aborda o cálculo de variações novamente e o aplica a problemas de autovalor.
- Sagan, H., *Introduction to the Calculus of Variations*. Nova York: McGraw-Hill (1969), nova tiragem, Dover (1983). Uma excelente introdução à moderna teoria do cálculo de variações, mais sofisticada e completa do que seu texto de 1961. Sagan abrange condições de suficiência e relaciona o cálculo de variações a problemas da tecnologia espacial.
- Weinstock, R., *Calculus of Variations*. Nova York: McGraw-Hill (1952); Nova York: Dover (1974). Um desenvolvimento sistemático e detalhado do cálculo de variações e aplicações à teoria de Sturm-Liouville e a problemas físicos de Elasticidade, Eletrostática e Mecânica Quântica.
- Yourgrau, W., e S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, 3<sup>a</sup> ed. Filadélfia: Saunders (1968); Nova York: Dover (1979). Um tratamento abrangente e autorizado de princípios variacionais. As discussões sobre o desenvolvimento histórico e as armadilhas metafísicas são de particular interesse.

# 18

## Métodos Não-Lineares e Caos

*Nossa mente se perderia na complexidade do mundo se essa complexidade não fosse harmoniosa; como os mtopes, veria apenas os detalhes e seria obrigada a esquecer cada um desses detalhes antes de examinar o seguinte, porque incapaz de perceber o todo. Os únicos fatos dignos de nossa atenção são os que introduzem ordem nessa complexidade e a tornam acessível a nós.*

HENRI POINCARÉ

### 18.1 Introdução

A origem da dinâmica não-linear remonta ao trabalho do famoso matemático francês Henri Poincaré sobre Mecânica Celestial na virada do século XX. A Mecânica Clássica é, em geral, não-linear em sua dependência das coordenadas das partículas e das velocidades, por exemplo, vibrações com uma força restauradora não-linear. As equações de Navier-Stokes são não-lineares, o que torna a Hidrodinâmica difícil de manipular. Contudo, durante quase quatro séculos, seguindo os passos de Galileu, Newton e outros, os físicos se concentraram em respostas previsíveis, efetivamente lineares de sistemas clássicos, que usualmente têm propriedades lineares e não-lineares.

Poincaré foi o primeiro a entender a possibilidade de comportamento completamente irregular ou “caótico” de soluções de equações diferenciais que são caracterizadas por uma extrema sensibilidade a condições iniciais: dadas condições iniciais ligeiramente diferentes, por erros de medida, por exemplo, soluções podem se desviar exponencialmente ao longo do tempo, de modo que o sistema se torna efetivamente imprevisível, ou “caótico”. Essa propriedade do caos, muitas vezes denominada efeito “borboleta”, será discutida na Seção 18.3. Desde a redescoberta desse efeito por Lorenz em meteorologia no início da década de 1960, o campo da dinâmica não-linear teve um tremendo crescimento. Assim, a dinâmica não-linear e a teoria do caos agora fazem parte da tendência dominante da Física.

Foi constatado que numerosos exemplos de sistemas não-lineares apresentavam comportamento irregular. Surpreendentemente, ordem, no sentido de similaridades quantitativas como propriedades universais ou outras irregularidades podem surgir espontaneamente no caos. Um primeiro exemplo são os números universais de Feigenbaum,  $\alpha$  e  $\delta$ , que aparecerão na Seção 18.2. Caos dinâmico não é um fenômeno raro, mas está por toda parte na natureza. Inclui as formas irregulares das nuvens, o contorno da costa e outras paisagens, que são exemplos de fractais, que serão discutidos na Seção 18.3, e fluxo turbulento de fluidos, água pingando de uma torneira e o clima, é claro. O pêndulo forçado atenuado está entre os sistemas mais simples que apresentam movimento caótico.

Condições necessárias para movimento caótico em sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais de **primeira ordem** são

- ao menos três variáveis dinâmicas e
- um ou mais termos não-lineares ligando duas ou várias delas.

Como na Mecânica Clássica, o espaço das variáveis dinâmicas dependentes do tempo de um sistema de equações diferenciais acopladas é denominado seu **espaço de fase**. Em tais sistemas determinísticos, trajetórias no espaço de fase não podem se cruzar. Se o fizessem, o sistema teria uma opção em cada interseção e não seria determinístico. Em duas dimensões, tais sistemas não-lineares permitem apenas pontos fixos. Um exemplo é um pêndulo atenuado cuja derivada de segunda ordem,  $\ddot{\theta} = f(\dot{\theta}, \theta)$ , pode ser escrita como suas derivadas de primeira,  $\omega = \dot{\theta}$ ,  $\dot{\omega} = f(\omega, \theta)$ , envolvendo apenas duas variáveis dinâmicas,  $\omega(t)$  e  $\theta(t)$ . No caso não-atenuado, haverá apenas movimento periódico e pontos de equilíbrio. Com três ou mais variáveis dinâmicas (por exemplo, pêndulo **atenuado, forçado**, escrito novamente como EDOs acopladas de primeira ordem) são possíveis trajetórias mais complicadas que não se interceptam. Elas incluem o movimento caótico e são denominadas **caos determinístico**.

Um tema central em caos é a evolução de formas **complexas** pela repetição de operações **simples** mas **não-lineares**, o que está sendo reconhecido como um **princípio de organização fundamental da natureza**. Enquanto equações diferenciais não-lineares são um lugar natural na Física para ocorrer o caos, a iteração matematicamente



mais simples de funções não-lineares oferece uma entrada mais rápida na teoria do caos, que discutiremos na Seção 18.2. Nesse contexto, o caos já surge em certas funções não-lineares de uma **única** variável.

## 18.2 O Mapa Logístico

A iteração não-linear unidimensional, ou equação de diferenças,

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1]; \quad 1 < \mu < 4, \quad (18.1)$$

é denominada **mapa logístico**. Seu padrão segue o da equação diferencial não-linear  $dx/dt = \mu x(1 - x)$ , usada por P. F. Verhulst, em 1845, para modelar o desenvolvimento de uma população prolífera cujas gerações não se sobrepõem. A densidade populacional no tempo  $n$  é  $x_n$ . O termo linear simula a taxa de nascimentos, e o termo não-linear, a taxa de óbitos da espécie em um ambiente constante controlado pelo parâmetro  $\mu$ .

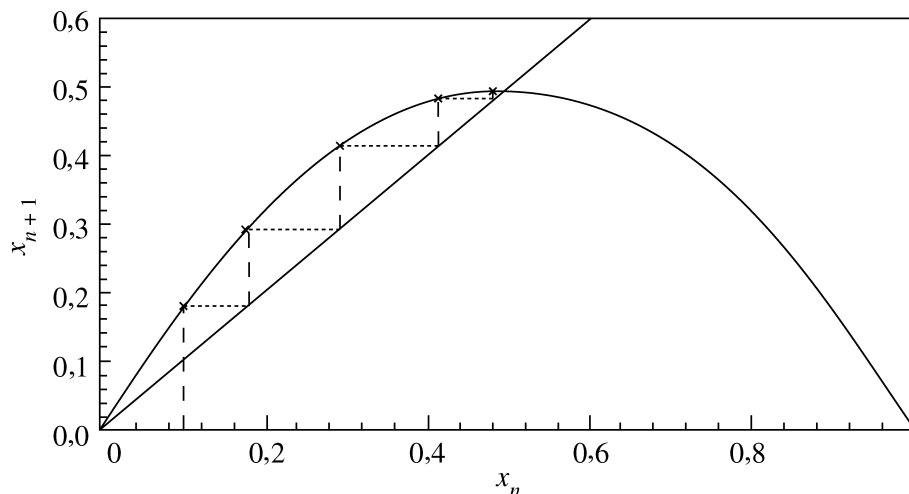


Figura 18.1: Ciclo  $(x_0, x_1, \dots)$  para o mapa logístico para  $\mu = 2$ , valor inicial  $x_0 = 0,1$  e atrator  $x^* = 1/2$ .

A função quadrática  $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  é escolhida porque tem um máximo no intervalo  $[0, 1]$  e é zero nas extremidades,  $f_\mu(0) = 0 = f_\mu(1)$ . O máximo em  $x_m = 1/2$  é determinado por  $f'_\mu(x) = 0$ , isto é,

$$f'_\mu(x_m) = \mu(1 - 2x_m) = 0, \quad x_m = \frac{1}{2}, \quad (18.2)$$

em que  $f_\mu(1/2) = \mu/4$ .

- Variar o único parâmetro  $\mu$  controla um comportamento rico e complexo, incluindo caos unidimensional, como veremos. Nesse ponto, dificilmente seriam necessários mais parâmetros e variáveis adicionais para aumentar a complexidade. Em um sentido bastante qualitativo, o simples mapa **logístico** da Equação (18.1) é representativo de muitos sistemas dinâmicos em Biologia, Química e Física.

A Figura 18.1 mostra um gráfico de  $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  juntamente com a diagonal e uma série de pontos  $(x_0, x_1, \dots)$  **ciclo**. Para construir um ciclo para um valor fixo de  $\mu$  ( $= 2$  na Figura 18.1), escolhemos algum  $x_0 \in [0, 1]$  [ $x_0 = 0,1$  na Equação (18.1)]. A reta vertical que passa por  $x_0$  intercepta a curva  $f_\mu(x)$  em  $x_1 = f_\mu(x_0)$  ( $= 0,18$  na Figura 18.1). Prosseguindo no sentido horizontal, a partir de  $x_1$  chegamos a  $x_1$  na diagonal. Partindo da abscissa  $x_1$  no sentido vertical, temos  $x_2 = f_\mu(x_1)$  sobre a curva ( $x_2 = 0,2952$  na Figura 18.1) etc. Isto é, retas verticais mostram as interseções com a curva  $f_\mu$  e retas horizontais convertem  $f_\mu(x_i) = x_{i+1}$  para a próxima abscissa.

Para qualquer valor inicial  $x_0$  com  $0 < x_0 < 1$ , os  $x_i$  convergem na direção do ponto fixo  $x^*$  ou **atrator** [=  $(0,5, 0,5)$  na Figura 18.1]:

$$\boxed{f_\mu(x^*) = \mu x^*(1 - x^*) = x^*}, \quad \text{i.e., } x^* = 1 - \frac{1}{\mu}. \quad (18.3)$$

O intervalo  $(0, 1)$  define uma **bacia de atração** para o ponto fixo  $x^*$ . O atrator  $x^*$  é **estável**, contanto que a curva  $|f'_\mu(x^*)| = |2 - \mu| < 1$  ou  $1 < \mu < 3$ , o que pode ser visto por uma expansão de Taylor de uma iteração perto do atrator:

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) = f_\mu(x^*) + f'_\mu(x^*)(x_n - x^*) + \dots, \quad \text{i.e., } \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = f'_\mu(x^*),$$

descartando os termos de ordem mais alta. Assim, se  $|f'_\mu(x^*)| < 1$ , o próximo iterado,  $x_{n+1}$ , está mais perto de  $x^*$  do que  $x_n$ , o que implica convergência e estabilidade do ponto fixo. Contudo, se  $|f'_\mu(x^*)| > 1$ ,  $x_{n+1}$  se afasta mais de  $x^*$  do que  $x_n$ , o que implica divergência e instabilidade. Dada a continuidade de  $f'_\mu$  em  $\mu$ , o ponto fixo e suas propriedades persistem quando o parâmetro (aqui  $\mu$ ) sofre uma ligeira variação.

Para  $\mu > 1$  e  $x_0 < 0$  ou  $x_0 > 1$ , é fácil verificar por meios gráficos ou analíticos que os  $x_i \rightarrow -\infty$ . A origem,  $x = 0$ , é um ponto fixo **repulsor**, uma vez que  $f'_\mu(0) = \mu > 1$  e os iterados se afastam dele. Visto que  $f'_\mu(1) = -\mu$ , o ponto  $x = 1$  é um repulsor para  $\mu > 1$ .

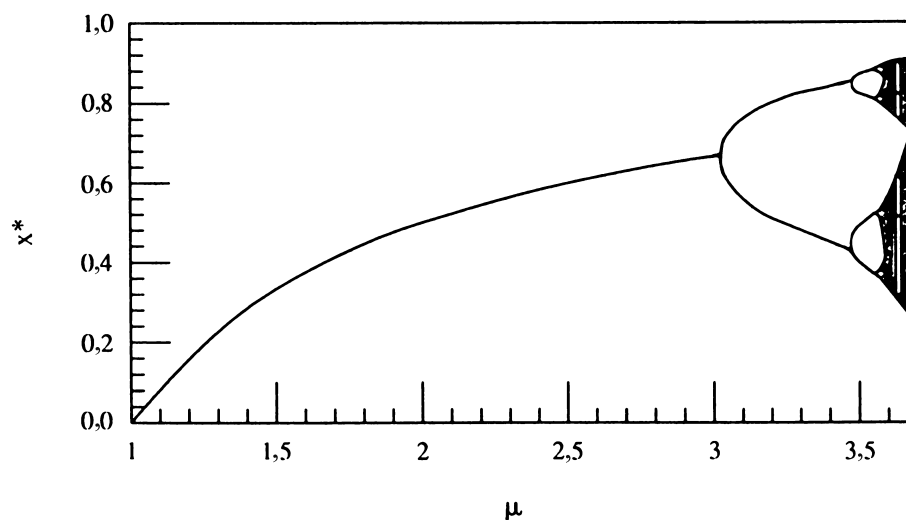


Figura 18.2: Parte do gráfico de bifurcação para o mapa logístico: pontos fixos  $x^*$  versus  $\mu$ .

Quando

$$f'_\mu(x^*) = \mu(1 - 2x^*) = 2 - \mu = -1$$

é alcançado para  $\mu = 3$ , **ocorrem dois pontos fixos**, representados como os dois ramos na Figura 18.2, à medida que  $\mu$  passa do valor 3. Eles podem ser localizados resolvendo

$$x_2^* = f_\mu(f_\mu(x_2^*)) = \mu^2 x_2^* (1 - x_2^*) [1 - \mu x_2^* (1 - x_2^*)],$$

para  $x_2^*$ . Aqui é conveniente abreviar  $f^{(1)}(x) = f_\mu(x)$ ,  $f^{(2)}(x) = f_\mu(f_\mu(x))$  para o segundo iterado etc. Agora descartamos o  $x_2^*$  comum e então reduzimos o polinômio de terceira ordem remanescente para segunda ordem, lembrando que um ponto fixo de  $f_\mu$  também é um ponto fixo de  $f^{(2)}$  porque  $f_\mu(f_\mu(x^*)) = f_\mu(x^*) = x^*$ . Assim,  $x_2^* = x^*$  é uma solução. Fatorando o polinômio quadrático, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^2 [1 - (\mu + 1)x_2^* + 2(x_2^*)^2 - \mu(x_2^*)^3] - 1 \\ &= (\mu - 1 - \mu x_2^*) [\mu + 1 - \mu(\mu + 1)x_2^* + \mu^2(x_2^*)^2]. \end{aligned}$$

As raízes do polinômio quadrático são

$$x_2^* = \frac{1}{2\mu} (\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}),$$

que são os dois ramos na Figura 18.2 para  $\mu > 3$  começando em  $x_2^* = 2/3$ . Isso mostra que ambos os pontos fixos se bifurcam nos mesmos valores de  $\mu$ . Cada  $x_2^*$  é um ponto de período 2 e invariante sob duas iterações do



mapa  $f_\mu$ . Os iterados oscilam entre ambos os ramos de pontos fixos  $x_2^*$ . Um ponto  $x_n$  é definido como um **ponto periódico de período  $n$**  para  $f_\mu$  se  $f^{(n)}(x_0) = x_0$ , mas  $f^{(i)}(x_0) \neq x_0$  para  $0 < i < n$ . Assim, para  $3 < \mu < 3,45$  (veja a Figura 18.2), o atrator estável **se bifurca**, ou se subdivide, em dois pontos fixos  $x_2^*$ . A bifurcação para  $\mu = 3$ , onde ocorre a duplicação, é denominada bifurcação em **garfo** por causa de sua forma característica (um Y arredondado). Uma bifurcação é uma mudança repentina na evolução do sistema, tal como a subdivisão de uma curva em duas curvas.

À medida que  $\mu$  passa de 3, a derivada  $df^{(2)}/dx$  decresce da unidade até  $-1$ . Para  $\mu = 1 + \sqrt{6} \sim 3,44949$ , que pode ser derivado de

$$\left. \frac{df^{(2)}}{dx} \right|_{x=x^*} = -1, f^{(2)}(x^*) = x^*,$$

cada ramo de pontos fixos se bifurca novamente, portanto  $x_4^* = f^{(4)}(x_4^*)$ , isto é, tem período 4. Para  $\mu = 1 + \sqrt{6}$  são  $x_4^* = 0,43996$  e  $x_4^* = 0,49938$ .

Com as crescentes duplicações de período, fica impossível obter soluções analíticas. As iterações são melhores quando feitas numericamente com uma máquina de calcular ou um computador, cujas rápidas melhorias (gráficos por computador, em particular) e ampla distribuição desde a década de 1970 aceleraram o desenvolvimento da teoria do caos. A seqüência de bifurcações continua com períodos cada vez mais longos até alcançar  $\mu_\infty = 3,5699456\dots$ , onde ocorre um número infinito de bifurcações. Perto de pontos de bifurcação, flutuações, erros de arredondamento nas condições iniciais etc., desempenham um papel cada vez maior porque o sistema tem de escolher entre dois amos possíveis e se torna muito mais sensível a pequenas perturbações. No presente caso, os  $x_n$  nunca se repetem. As faixas de pontos fixos  $x^*$  começam a formar um contínuo (em preto na Figura 18.2); é aí que começa o caos. Essa crescente duplicação de período é a rota para o caos para o mapa logístico que é caracterizada por uma constante universal  $\delta$ , denominada **número de Feigenbaum**. Se a primeira bifurcação ocorrer em  $\mu_1 = 3$ , a segunda em  $\mu_2 = 3,45, \dots$ , então a razão entre os espaçamentos entre os  $\mu_n$  converge para  $\delta$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta = 4,66920161\dots \tag{18.4}$$

Pelo gráfico da bifurcação na Figura 18.2, obtemos

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_2} = \frac{3,45 - 3,00}{3,54 - 3,45} = 5,0$$

como uma primeira aproximação para  $\delta$ , que é adimensional. Os correspondentes pontos  $x_n^*$  de período crítico  $2n$  levam a uma outra quantidade universal adimensional:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^* - x_{n-1}^*}{x_{n+1}^* - x_n^*} = \alpha = 2,5029\dots \tag{18.5}$$

Novamente lendo valores aproximados para  $x_n^*$  na Figura 18.2, obtemos

$$\frac{0,44 - 0,67}{0,37 - 0,44} = 3,3$$

como uma primeira aproximação para  $\alpha$ .

O número  $\delta$  de Feigenbaum é universal para a rota para o caos via duplicações de período para todos os mapas com um máximo **quadrático** similar ao mapa logístico. É um exemplo de ordem no caos. A experiência mostra que sua validade é ainda mais ampla, incluindo sistemas bidimensionais (dissipativos) e funções duas vezes diferenciáveis continuamente com bifurcações subarmônicas.<sup>1</sup> Quando os mapas se comportam como  $|x - x_m|^{1+\varepsilon}$  perto de seu máximo  $x_m$  para algum  $\varepsilon$  entre 0 e 1, o número de Feigenbaum dependerá do expoente  $\varepsilon$ ; assim,  $\delta(\varepsilon)$  varia entre  $\delta(1)$  dado na Equação (18.4) para mapas quadráticos e  $\delta(0) = 2$  para  $\varepsilon = 0$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mais detalhes e códigos de computador para o mapa logístico são dados por G. L. Baker e J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics: An Introduction*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (1990).

<sup>2</sup>Se o leitor quiser outros mapas e uma discussão sobre a fascinante história de como o caos se tornou novamente um tópico crítico de pesquisa, veja D. Holton e R. M. May, *The Nature of Chaos* (T. Mullin, ed.), Oxford, UK: Clarendon Press (1993), Seção 5, p. 95; e o livro de Gleick *Chaos* (1987), veja as Leituras Adicionais.

### Exercícios

- 18.2.1 Mostre que  $x^* = 1$  é um ponto fixo não-trivial do mapa  $x_{n+1} = x_n \exp[r(1 - x_n)]$  com uma inclinação  $1 - r$ , de modo que o equilíbrio é estável se  $0 < r < 2$ .
- 18.2.2 Desenhe um diagrama de bifurcação para o mapa exponencial do Exercício 18.2.1 para  $r > 1, 9$ .
- 18.2.3 Determine pontos fixos do mapa cúbico  $x_{n+1} = ax_n^3 + (1 - a)x_n$ , para  $0 < a < 4$  e  $0 < x_n < 1$ .
- 18.2.4 Escreva o mapa logístico atrasado no tempo  $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_{n-1})$  como um mapa bidimensional  $x_{n+1} = \mu x_n(1 - y_n)$ ,  $y_{n+1} = x_n$ , e determine alguns de seus pontos fixos.
- 18.2.5 Mostre que a segunda bifurcação para o mapa logístico que leva a ciclos de período 4 está localizada em  $\mu = 1 + \sqrt{6}$ .
- 18.2.6 Construa uma função iteração não-linear com  $\delta$  de Feigenbaum no intervalo  $2 < \delta < 4, 6692 \dots$
- 18.2.7 Determine o delta de Feigenbaum para (a) o mapa exponencial do Exercício 18.2.1, (b) algum mapa cúbico do Exercício 18.2.3, (c) o mapa logístico atrasado no tempo do Exercício 18.2.4.
- 18.2.8 Repita o Exercício 18.2.7 para o  $\alpha$  de Feigenbaum em vez do  $\delta$ .
- 18.2.9 Ache, por meios numéricos, os primeiros quatro pontos  $\mu$  para duplicação de período do mapa logístico e então obtenha as primeiras duas aproximações para o  $\delta$  de Feigenbaum. Compare com a Figura 18.2 e a Equação (18.4).
- 18.2.10 Ache, por meios numéricos, os valores  $\mu$  onde o ciclo de período 1, 3, 4, 5, 6 começa e, em seguida, onde ele se torna instável.

3,  $\mu = 3, 8284,$   
 4,  $\mu = 3, 9601,$   
 5,  $\mu = 3, 7382,$   
 6,  $\mu = 3, 6265.$

**Valores de verificação.** Para período

- 18.2.11 Repita o Exercício 18.2.9 para o  $\alpha$  de Feigenbaum.

## 18.3 Sensibilidade a Condições Iniciais e Parâmetros

### Exponentes de Lyapunov

Na Seção 18.2 descrevemos como, ao nos aproximarmos por baixo do valor do parâmetro de acumulação de duplicação de período  $\mu_\infty = 3, 5699 \dots$ , o período  $n + 1$  de ciclos  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  com  $x_{n+1} = x_0$  fica mais longo. Também é fácil verificar que as distâncias

$$d_n = |f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)| \tag{18.6}$$

crecem para  $\varepsilon > 0$  pequeno. Por experiência com comportamento caótico, constatamos que essa distância aumenta exponencialmente com  $n \rightarrow \infty$ ; isto é,  $d_n/\varepsilon = e^{\lambda n}$  ou

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \right), \tag{18.7}$$

em que  $\lambda$ , é um **expoente de Lyapunov** para o ciclo. Para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos reescrever a Equação (18.7) em termos de derivadas como

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|, \tag{18.8}$$

usando a regra da cadeia da diferenciação para  $df^{(n)}(x)/dx$ , em que

$$\frac{df^{(2)}(x_0)}{dx} = \frac{df_\mu}{dx} \Big|_{x=f_\mu(x_0)} \frac{df_\mu}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'_\mu(x_1) f'_\mu(x_0) \tag{18.9}$$

e  $f'_\mu = df_\mu/dx$ , etc. Nosso expoente de Lyapunov foi calculado no ponto  $x_0$ , e a Equação (18.8) é exata para mapas unidimensionais.

Como uma medida da sensibilidade do sistema a mudanças em condições iniciais, um único ponto não é suficiente para determinar  $\lambda$  em sistemas dinâmicos de número mais alto de dimensões em geral, no qual o movimento muitas vezes é limitado, de modo que  $d_n$  não pode ir a  $\infty$ . Nesses casos, repetimos o procedimento



para diversos pontos na trajetória e calculamos a média entre eles. Desse modo, obtemos o **expoente médio de Lyapunov** para a amostra. Esse valor médio costuma ser denominado e considerado como o expoente de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov  $\lambda$  é uma medida quantitativa do caos: uma função unidimensional iterada semelhante ao mapa logístico tem ciclos **caóticos**  $(x_0, x_1, \dots)$  para o parâmetro  $\mu$  **se o expoente médio de Lyapunov for positivo** para o valor de  $\mu$ . Qualquer ponto inicial  $x_0$  como esse é denominado **atrator estranho** ou **caótico** (a região sombreada na Figura 18.2). Para ciclos de período finito,  $\lambda$  é negativo. Esse é o caso para  $\mu < 3$ , para  $\mu < \mu_\infty$ , e até mesmo na janela periódica em  $\mu \sim 3,627$  dentro da região caótica da Figura 18.2. Em pontos de bifurcação,  $\lambda = 0$ . Para  $\mu > \mu_\infty$ , o expoente de Lyapunov é positivo, exceto nas janelas periódicas em que  $\lambda < 0$ , e  $\lambda$  cresce com  $\mu$ . Em outras palavras, o sistema se torna mais caótico à medida que o parâmetro de controle  $\mu$  aumenta.

Na região de caos do mapa logístico há uma lei de elevação para o expoente médio de Lyapunov (não a derivamos),

$$\lambda(\mu) = \lambda_0(\mu - \mu_\infty)^{\ln 2 / \ln \delta}, \quad (18.10)$$

em que  $\ln 2 / \ln \delta \sim 0,445$ ,  $\delta$  é o número universal de Feigenbaum da Seção 18.2, e  $\lambda_0$  é uma constante. Essa relação (18.10) lembra uma relação física observável em uma transição de fase (de segunda ordem). O expoente na Equação (18.10) é um número universal; o expoente de Lyapunov desempenha o papel de **parâmetro de ordem**, enquanto  $\mu - \mu_\infty$  é o análogo de  $T - T_c$ , em que  $T_c$  é a temperatura **crítica** na qual ocorre a transição de fase.

### Fractais

Em sistemas dissipativos caóticos (mas raramente em sistemas hamiltonianos conservativos), muitas vezes aparecem objetos geométricos de formas intrincadas que são denominados **fractais** porque suas dimensões não são números inteiros. Fractais são objetos geométricos irregulares cuja dimensão é tipicamente não-inteira e que existem em muitas escalas, de modo que suas partes menores são parecidas com suas partes maiores. Intuitivamente, um fractal é um conjunto que é (aproximadamente) **similar a si mesmo** sob ampliação. Um conjunto de pontos de atração com dimensões não-inteiras é denominado atrator **estranho**.

Precisamos de uma medida quantitativa de dimensionalidade para descrever fractais. Infelizmente, há várias definições com valores numéricos usualmente diferentes, nenhuma das quais, até o momento, se transformou em padrão. Para conjuntos estritamente similares a si mesmos basta uma medida. Conjuntos mais complicados (por exemplo, apenas aproximadamente similares a si mesmos) requerem mais medidas para sua completa descrição. A mais simples é a **dimensão de contagem de caixas**, devida a Kolmogorov e Hausdorff. Para um conjunto unidimensional, cobrimos a curva com segmentos de reta de comprimento  $R$ . Em duas dimensões as caixas são quadrados de área  $R^2$ , em três dimensões são cubos de volume  $R^3$  etc. Então contamos o número  $N(R)$  de caixas necessárias para cobrir o conjunto. Deixando  $R$  ir a zero, esperamos que  $N$  aumente de acordo com  $N(R) \sim R^{-d}$ . Considerando logaritmo, a **dimensão de contagem de caixas** é definida como

$$d \equiv \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln N(R)}{\ln R}. \quad (18.11)$$

Por exemplo, em um espaço bidimensional, um ponto único é coberto por um só quadrado, portanto  $\ln N(R) = 0$  e  $d = 0$ . Um conjunto finito de pontos isolados tem dimensão  $d = 0$ . Para uma curva diferenciável de comprimento  $L$ ,  $N(R) \sim L/R$  quando  $R \rightarrow 0$ , portanto  $d = 1$  pela Equação (18.11), como esperado.

Agora vamos construir um conjunto mais irregular, a curva de **Koch**. Começamos com um segmento de reta de comprimento unitário na Figura 18.3 e removemos o terço do meio. Então o substituímos por dois segmentos de comprimento  $1/3$ , que formam um triângulo na Figura 18.3. Iteramos esse procedimento com cada segmento *ad infinitum*. A curva de Koch resultante é infinitamente longa e não-diferenciável em nenhum lugar por causa do número infinito das muitas mudanças descontínuas na inclinação. Na enésima etapa cada segmento de reta tem comprimento  $R_n = 3^{-n}$  e existem  $N(R_n) = 4^n$  segmentos. Daí, sua dimensão é  $d = \ln 4 / \ln 3 = 1,26\dots$ , que é mais do que uma curva, porém menos do que uma superfície. Como a curva de Koch resulta da iteração da primeira etapa, ela é estritamente similar a si mesma.

Para o mapa logístico, a dimensão de contagem de caixas em um ponto de acumulação de duplicação de período  $\mu_\infty$  é  $0,5388\dots$ , que é um número universal para iterações de funções de uma variável com um máximo quadrático. Para ter uma idéia aproximada de como isso ocorre, considere os pares de segmentos de reta originários de sucessivos pontos de bifurcação para um dado parâmetro  $\mu$  no regime de caos (veja a Figura 18.2). Imagine remover o espaço interior das faixas caóticas. Quando passamos para a próxima bifurcação, o parâmetro de escala relevante é  $\alpha = 2,5029\dots$  da Equação (18.5). Suponha que precisamos de  $2^n$  segmentos de reta de comprimento  $R$  para cobrir  $2^n$  faixas. Então, no estágio seguinte precisamos de  $2^{n+1}$  segmentos de comprimento  $R/\alpha$  para

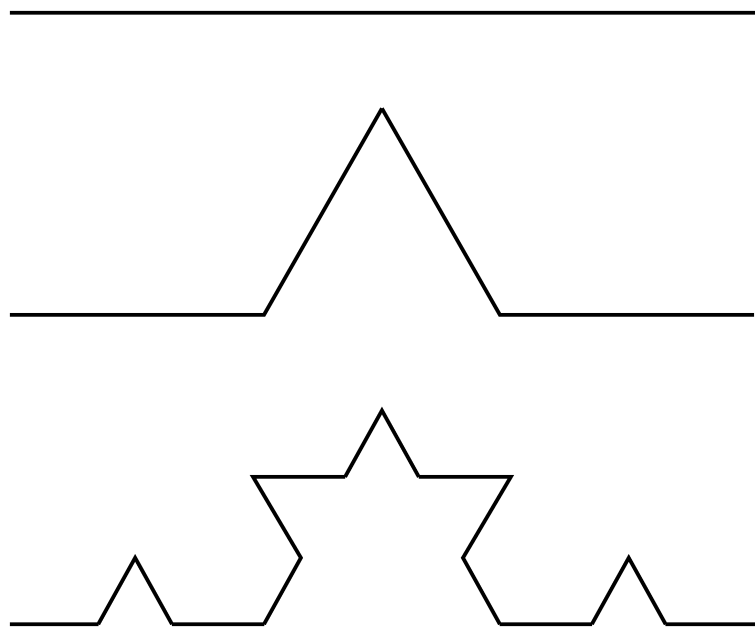


Figura 18.3: Construção da curva de Koch por iterações.

cobrir as faixas. Isso tem como resultado uma dimensão  $d = -\ln(2^n/2^{n+1})/\ln \alpha = 0,4498\dots$ . Essa estimativa grosseira pode ser melhorada levando em conta que a diferença entre a largura entre pares vizinhos de segmentos é de  $1/\alpha$  (veja a Figura 18.2). A estimativa melhorada, 0,543, é mais próxima de 0,5388. . . Esse exemplo sugere que, quando o conjunto fractal não tem uma estrutura simples similar a si mesma, então a dimensão de contagem de caixas depende do método de construção das caixas.

Por fim, passamos para os belos fractais que são surpreendentemente fáceis de gerar e cujas fotos em cores causam um impacto considerável. Para  $c = a + ib$ , complexo, o mapa complexo quadrático correspondente envolvendo a variável complexa  $z = x + iy$ ,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{18.12}$$

parece enganadoramente simples, mas o mapa bidimensional equivalente em termos das variáveis reais

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + b \tag{18.13}$$

já revela mais de sua complexidade. Esse mapa forma a base para algumas das lindas fotos multicoloridas de fractais de Mandelbrot (remetemos o leitor a Mandelbrot (1988) e Peitgen e Richter (1986) nas Leituras Adicionais), e constatou-se que ele gera formas bastante intrincadas para vários  $c \neq 0$ . Por exemplo, o **conjunto de Julia** de um mapa  $z_{n+1} = F(z_n)$  é definido como o conjunto de todos os seus pontos repulsores fixos ou periódicos. Assim, ele forma a fronteira entre condições iniciais de um mapa bidimensional iterado que leva a iterados que divergem e os que continuam dentro de alguma região finita do plano complexo. Para o caso  $c = 0$  e  $F(z) = z^2$ , pode-se mostrar que o conjunto de Julia é apenas um círculo em torno da origem do plano complexo. Ainda assim, basta somar uma constante  $c \neq 0$ , e o conjunto de Julia se torna fractal. Por exemplo, para  $c = -1$ , encontramos um colar fractal com um número infinito de laços (veja Devaney (1989) nas Leituras Adicionais).

Enquanto o conjunto de Julia é desenhado no plano complexo, o **conjunto de Mandelbrot** é construído no espaço paramétrico bidimensional  $c = (a, b) = a + bi$  da seguinte maneira. Partindo do valor inicial  $z_0 = 0 = (0, 0)$  pesquisamos a Equação (18.12) em busca de valores de parâmetros  $c$ , de modo que os  $\{z_n\}$  iterados **não** diverjam ao  $\infty$ . Cada cor fora da fronteira fractal do conjunto de Mandelbrot representa um número dado de iterações  $m$ , por exemplo, necessárias para que os  $z_n$  passem de um valor absoluto (real) especificado  $R$ ,  $|z_m| > R > |z_{m-1}|$ . Para o valor de parâmetro real  $c = a$ , o mapa resultante,  $x_{n+1} = x_n^2 + a$ , é equivalente ao mapa logístico com bifurcações de duplicação de período (veja a Seção 18.2), à medida que  $a$  aumenta no eixo real dentro do conjunto de Mandelbrot.





### Exercícios

**18.3.1** Use uma calculadora programável (ou um computador com *software* BASIC ou FORTRAN ou simbólico como Mathematica ou Maple) para obter os  $x_i$  iterados de um  $0 < x_0 < 1$  e  $f'_\mu(x_i)$  para o mapa logístico. Então calcule o expoente de Lyapunov para ciclos de período 2, 3, ... do mapa logístico para  $2 < \mu < 3,7$ . Mostre que, para  $\mu < \mu_\infty$ , o expoente de Lyapunov  $\lambda$  é 0 em pontos de bifurcação e negativo em todos os outros lugares, enquanto para  $\mu > \mu_\infty$  ele é positivo, exceto em janelas periódicas.

*Sugestão:* Veja a Figura 9.3 de Hilborn (1994) nas Leituras Adicionais.

**18.3.2** Considere o mapa  $x_{n+1} = F(x_n)$  com

$$F(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1, \\ c + dx, & x > 1, \end{cases}$$

para  $b > 0$  e  $d < 0$ . Mostre que seu expoente de Lyapunov é positivo quando  $b > 1$ ,  $d < -1$ . Construa um gráfico com algumas iterações no plano  $(x_{n+1}, x_n)$ .

## 18.4 Equações Diferenciais Não-Lineares

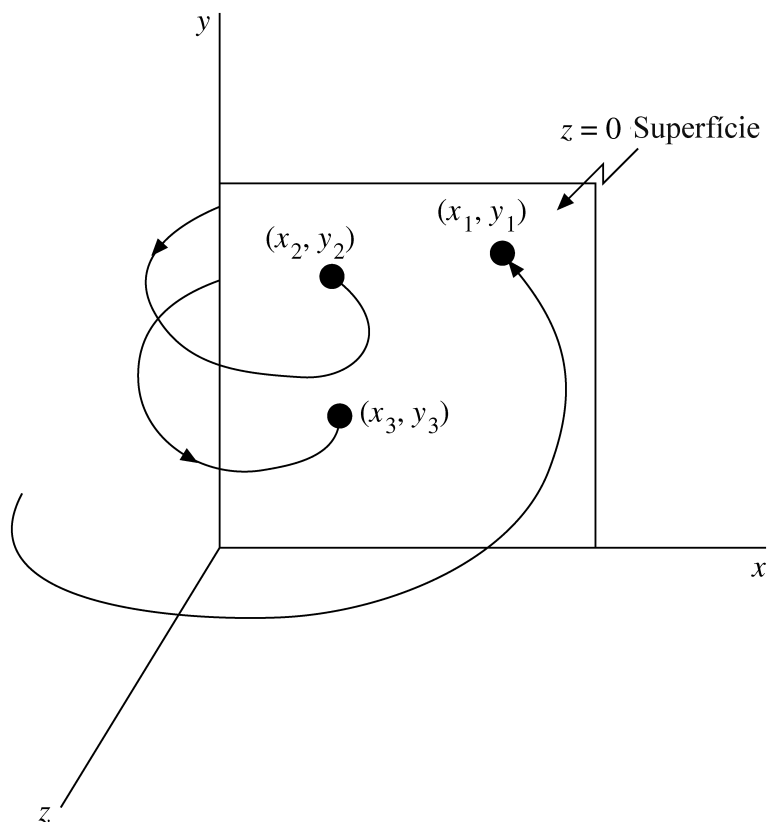


Figura 18.4: Quadro esquemático de uma seção de Poincaré.

Na Seção 18.1 mencionamos equações diferenciais não-lineares (abreviadamente EDNs) como o lugar natural da Física para ocorrência de caos, mas continuamos com a mais simples iteração de funções não-lineares de uma variável (mapas). Aqui abordamos brevemente a área muito mais ampla das EDNs e a complexidade muito maior no comportamento de suas soluções. Contudo, mapas e sistemas de soluções de EDNs guardam uma estreita relação entre si. Os últimos muitas vezes podem ser analisados em termos de mapas discretos. Uma prescrição é denominada **seção de Poincaré** de um sistema de soluções de EDN. Colocando um plano transversal em uma trajetória (de uma solução de uma EDN), ela intercepta o plano em uma série de pontos em tempos discretos crescentes, por exemplo, na Figura 18.4  $(x(t_1), y(t_1)) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ , que são registrados e analisados

por meios gráficos ou numéricos em busca de pontos fixos, bifurcações de duplicação de período, etc. Esse método é útil quando soluções de EDNs são obtidas por meios numéricos em simulações por computador, de modo que podemos gerar seções de Poincaré em várias localizações e com orientações diferentes, sendo que análise ulterior leva a mapas bidimensionais iterados

$$x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = F_2(x_n, y_n) \quad (18.14)$$

armazenados pelo computador. Entretanto, nem sempre é fácil extrair as funções  $F_j$  por meios analíticos ou gráficos.

Vamos começar com alguns exemplos clássicos de EDNs. No Capítulo 9 já discutimos a solução sóliton da EDP não-linear de Korteweg-de Vries, Equação (9.11).

## Exercício

**18.4.1** Considere a seção de Poincaré  $\{x > 0, y = \dot{x} = 0\}$  para o oscilador harmônico atenuado

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + x = 0.$$

Considere  $0 < a \ll 1$  e mostre que o mapa é dado por  $x_{n+1} = bx_n$  com  $b < 1$ . Faça uma estimativa para  $b$ .

### Equações de Bernoulli e Riccati

Equações de Bernoulli também são não-lineares e têm a forma

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)[y(x)]^n, \quad (18.15)$$

em que  $p$  e  $q$  são funções reais e  $n \neq 0, 1$  para excluir EDOs lineares de primeira ordem. Se substituirmos

$$u(x) = [y(x)]^{1-n}, \quad (18.16)$$

então a Equação (18.15) se torna uma EDO linear de primeira ordem,

$$u' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)[p(x)u(x) + q(x)], \quad (18.17)$$

que podemos resolver como descrito na Seção 9.2.

Equações de Riccati são quadráticas em  $y(x)$ :

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (18.18)$$

em que  $p \neq 0$  para excluir EDOs lineares e  $r \neq 0$  para excluir equações de Bernoulli. Não há nenhum método geral para resolver equações de Riccati. Contudo, quando se conhece uma solução especial  $y_0(x)$  da Equação (18.18) por um palpite ou inspeção, então podemos escrever a solução geral na forma  $y = y_0 + u$ , sendo que  $u$  satisfaz a equação de Bernoulli

$$u' = pu^2 + (2py_0 + q)u, \quad (18.19)$$

porque a substituição de  $y = y_0 + u$  na Equação (18.18) remove  $r(x)$  da Equação (18.18).

Exatamente como no caso das equações de Riccati, não há nenhum método geral para obter soluções exatas de outras EDOs não-lineares. É mais importante desenvolver métodos para achar o comportamento qualitativo de soluções. No Capítulo 9 mencionamos que existem soluções de séries de potências de EDOs, exceto (possivelmente) em singularidades regulares ou essenciais, que são dadas diretamente por análise local das funções coeficientes da EDO. Tal análise local também nos fornece o comportamento assintótico de soluções.

### Singularidades Fixas e Móveis, Soluções Especiais

Soluções de EDNs também têm tais pontos singulares, independentes das condições iniciais ou de contorno e denominados **singularidades fixas**. Além disso, elas podem ter singularidades **espontâneas**, ou **móveis**, que variam com as condições iniciais ou de contorno. Elas complicam a análise (assintótica) de EDNs. Esse ponto é ilustrado por comparação com a EDO linear

$$y' + \frac{y}{x-1} = 0, \quad (18.20)$$



que tem a óbvia singularidade regular em  $x = 1$ , com a EDN  $y' = y^2$ . Ambas têm a mesma solução com condição inicial  $y(0) = 1$ , a saber,  $y(x) = 1/(1 - x)$ . Todavia, para  $y(0) = 2$ , o pólo na solução (óbvia, mas verifique)  $y(x) = 2/(1 - 2x)$  da EDN passou para  $x = 1/2$ .

Para uma EDO de segunda ordem, temos uma descrição completa (o comportamento assintótico) de suas soluções quando são conhecidas (as descrições, os comportamentos assintóticos) de duas soluções linearmente independentes. Para EDNs ainda pode haver **soluções especiais** cujo comportamento assintótico não pode ser obtido de duas soluções independentes. Essa é outra propriedade **característica** de EDNs, que ilustramos novamente por um exemplo. A solução geral da EDN  $y'' = yy'/x$  é dada por

$$y(x) = 2c_1 t g(c_1 \ln x + c_2) - 1, \tag{18.21}$$

em que  $c_i$  são constantes de integração. Uma solução especial óbvia (verifique) é  $y = c_3 = \text{constante}$ , que não pode ser obtida da Equação (18) para qualquer escolha dos parâmetros  $c_1, c_2$ . Note que, usando a substituição  $x = e^t, Y(t) = y(e^t)$ , de modo que  $x dy/dx = dY/dt$ , obtemos a EDO  $Y'' = Y'(Y + 1)$ . Essa EDO pode ser integrada uma vez para resultar em  $Y' = \frac{1}{2}Y^2 + Y + c$ , com  $c = 2(c_1^2 + 1/4)$  uma constante de integração e, mais uma vez, conforme a Seção 9.2, para levar à solução da Equação (18.21).

### Equações Diferenciais Autônomas

Equações diferenciais que não contêm explicitamente a variável independente, e que aqui consideramos que seja o tempo  $t$ , são denominadas **autônomas**. A EDN de Verhulst  $\dot{y} = dy/dt = \mu y(1 - y)$ , que encontramos brevemente na Seção 18.2 como motivação para o mapa logístico, é um caso especial dessa ampla e importante classe de EDOs.<sup>3</sup> Para uma variável dependente  $y(t)$ , elas podem ser escritas como

$$\dot{y} = f(y), \tag{18.22a}$$

e para diversas variáveis dependentes, como um sistema

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{18.22b}$$

com funções suficientemente diferenciáveis  $f, f_i$ . Uma solução da Equação (18.22b) é uma curva ou trajetória  $y(t)$  para  $n = 1$  e, em geral, uma trajetória  $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  em um (assim denominado) **espaço de fase**  $n$  dimensional. Como já discutimos na Seção 18.1, duas trajetórias não podem se cruzar por causa da unicidade das soluções de EDOs. Claramente, soluções do sistema algébrico

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \tag{18.23}$$

são pontos especiais no espaço de fase, onde a posição do vetor  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  não se move na trajetória; eles são denominados **pontos críticos** (ou **fixos**). Acontece que uma análise local de soluções perto de pontos críticos nos leva a entender o comportamento global das soluções. Primeiro, vamos examinar um exemplo simples.

Para a EDO de Verhulst,  $f(y) = \mu y(1 - y) = 0$  resulta em  $y = 0$  e  $y = 1$  como os pontos críticos. Para o mapa logístico,  $y = 0$  e  $y = 1$  são pontos repulsores fixos porque  $df/dy(0) = \mu$  em  $y = 0$  e  $df/dy(1) = -\mu$  em  $y = 1$ , para  $\mu > 1$ . Uma análise local perto de  $y = 0$  sugere desprezar o termo  $y^2$  e resolver  $\dot{y} = \mu y$  em seu lugar. Integrando  $\int dy/y = \mu t + \ln c$ , temos como resultado a solução  $y(t) = ce^{\mu t}$ , que diverge quando  $t \rightarrow \infty$ , portanto,  $y = 0$  é um ponto crítico repulsor. (Note que para  $\mu < 0$  do mapa logístico o ponto crítico  $y = 0$  seria atrator, levando a uma solução convergente  $y \sim e^{\mu t}$ .) De modo semelhante em  $y = 1$ ,  $\int dy/(1 - y) = \mu t - \ln c$  leva a  $y(t) = 1 - ce^{-\mu t} \rightarrow 1$ , para  $t \rightarrow \infty$ . Por conseguinte,  $y = 1$  é um ponto crítico atrator. Como a EDO é separável, sua solução geral é dada por

$$\int \frac{dy}{y(1 - y)} = \int dy \left[ \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y} \right] = \ln \frac{y}{1 - y} = \mu t + \ln c.$$

Por conseguinte,  $y(t) = ce^{\mu t}/(1 + ce^{\mu t})$  porque  $t \rightarrow \infty$  converge para 1, confirmando assim a análise local. Esse exemplo nos motiva a examinar com mais detalhes as propriedades de pontos fixos. Para uma função arbitrária  $f$ , é fácil ver que

<sup>3</sup>Soluções de equações não-autônomas podem ser muito mais complicadas.

- em **uma dimensão**, pontos fixos  $y_i$  com  $f(y_i) = 0$  dividem o eixo  $y$  em intervalos dinamicamente separados porque, dado um valor inicial em um dos intervalos, a trajetória  $y(t)$  permanecerá ali, porque ela não pode passar de qualquer dos pontos fixos em que  $\dot{y} = 0$ .

Se  $f'(y_0) > 0$  no ponto fixo  $y_0$  em que  $f(y_0) = 0$ , então em  $y_0 + \varepsilon$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $\dot{y} = f'(y_0)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) > 0$  em uma vizinhança à direita de  $y_0$ , portanto a trajetória  $y(t)$  continua se movendo para a direita, afastando-se do ponto fixo  $y_0$ . À esquerda de  $y_0$ ,  $\dot{y} = -f'(y_0)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) < 0$ , portanto, aqui, a trajetória também se afasta do ponto fixo. Por conseguinte,

- um ponto fixo [com  $f(y_0) = 0$ ] em  $y_0$  com  $f'(y_0) > 0$ , como mostra a Figura 18.5a, repele trajetórias; isto é, todas as trajetórias se afastam do ponto crítico:  $\dots \leftarrow \cdot \rightarrow \dots$ ; ele é um **repulsor**. De modo semelhante, vemos que
- um ponto fixo em  $y_0$  com  $f'(y_0) < 0$ , como mostra a Figura 18.5b, atrai trajetórias, isto é, todas as trajetórias convergem em direção ao ponto crítico  $y_0$ :  $\dots \rightarrow \cdot \leftarrow \dots$ ; ele é um **sorvedouro ou nó**.

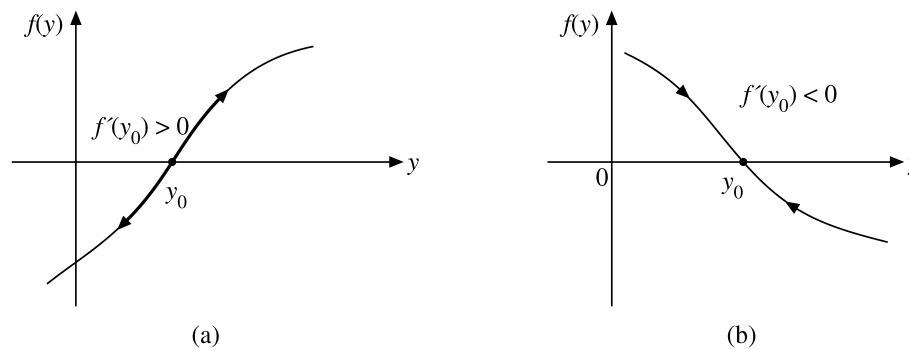


Figura 18.5: Pontos fixos: (a) repulsor, (b) sorvedouro.

Agora vamos considerar o caso restante quando  $f'(y_0) = 0$ .

Vamos admitir que  $f''(y_0) > 0$ . Então, em  $y_0 + \varepsilon$  à direita do ponto fixo  $y_0$ ,  $\dot{y} = f''(y_0)\varepsilon^2/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0$ , portanto, ali, a trajetória se afasta do ponto fixo, ao passo que à esquerda ela se aproxima de  $y_0$ . Em outras palavras, temos um **ponto de sela**. Para  $f''(y_0) < 0$ , o sinal de  $\dot{y}$  é invertido, de modo que, mais uma vez se trata de um ponto de sela que se move à direita de  $y_0$  em direção ao ponto fixo e, à esquerda, se afasta dele. Vamos resumir o comportamento local de trajetórias perto de um tal ponto fixo  $y_0$ : temos

- um ponto de sela em  $y_0$  quando  $f(y_0) = 0$ , e  $f'(y_0) = 0$ , como mostra a Figura 18.6a,b correspondente aos casos em que (a)  $f''(y_0) > 0$  e trajetórias de um lado do ponto crítico convergem em direção a ele e, do outro lado, divergem em relação a ele:  $\dots \rightarrow \cdot \rightarrow \dots$ ; e (b)  $f''(y_0) < 0$ . Aqui, a direção é simplesmente invertida em comparação com (a). A Figura 18.6(c) mostra os casos em que  $f''(y_0) = 0$ .

Até aqui ignoramos a dependência adicional de  $f(y)$  em relação a um ou mais parâmetros, tal como  $\mu$  para o mapa logístico. Quando um ponto crítico mantém suas propriedades em termos qualitativos quando ajustamos ligeiramente um parâmetro, nós o denominamos **estruturalmente estável**. Isso é razoável porque, em termos estruturais, é improvável que ocorram objetos instáveis na realidade, porque ruído e outros graus de liberdade desprezados agem como perturbações sobre o sistema que efetivamente impedem que tais pontos instáveis sejam observados. Agora vamos examinar pontos fixos a partir dessa perspectiva. Variando ligeiramente tal parâmetro de controle, deformamos a função  $f$ , ou podemos apenas deslocar  $f$  um pouco para cima ou para baixo ou para os lados na Figura 18.5. Isso alterará um pouco a localização  $y_0$  do ponto fixo com  $f(y_0) = 0$ , mas manterá o sinal de  $f'(y_0)$ . Assim, **sorvedouros e repulsores são estáveis**, enquanto um ponto de sela, em geral, não é. Por exemplo, deslocar  $f$  na Figura 18.6a um pouco para baixo cria dois pontos fixos: um é um sorvedouro e o outro, um repulsor, e remove o ponto de sela. Uma vez que duas condições devem ser satisfeitas em um ponto de sela, eles são menos comuns e importantes porque são instáveis em relação a variações de parâmetros. Contudo, eles marcam o contorno entre diferentes tipos de dinâmica e são úteis e significativos para a análise global da dinâmica. Agora estamos prontos para considerar os casos de número maior de dimensões, que são mais ricos, porém mais complicados.

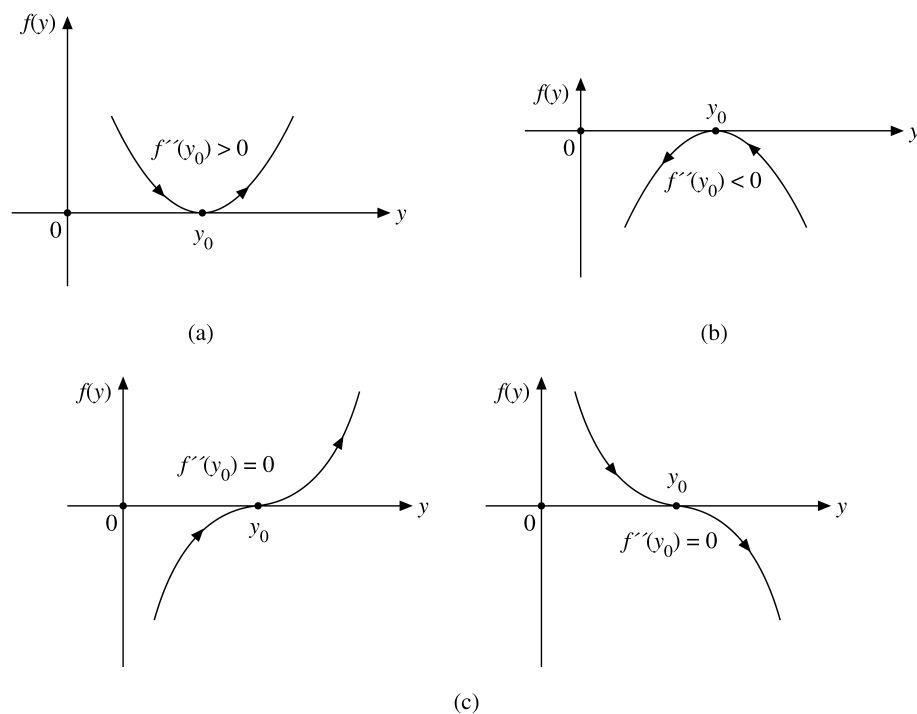


Figura 18.6: Pontos de sela.

### Comportamento Local e Global em Número Maior de Dimensões

Em duas ou mais dimensões começamos a análise local em um ponto fixo  $(y_1^0, y_2^0, \dots)$ , com  $\dot{y}_i = f_i(y_1^0, y_2^0, \dots) = 0$  usando a mesma expansão de Taylor da  $f_i$  na Equação (18.22b) que usamos para o caso unidimensional. Conservando somente as derivadas de primeira ordem, essa abordagem lineariza as EDNs acopladas da Equação (18.22b) e reduz suas soluções à Álgebra Linear da seguinte maneira, abreviamos as derivadas constantes no ponto fixo como uma matriz  $F$  com elementos

$$f_{ij} \equiv \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|_{(y_1^0, y_2^0, \dots)} \quad (18.24)$$

Contudo, comparando com a Álgebra Linear padrão no Capítulo 3,  $F$  em geral não é simétrica nem hermitiana. O resultado é que seus autovalores podem não ser reais. Se deslocarmos o ponto fixo até a origem e denominarmos as coordenadas deslocadas  $x_i = y_i - y_i^0$ , então as EDNs acopladas da Equação (18.22b) se tornam

$$\dot{x}_i = \sum_j f_{ij} x_j, \quad (18.25)$$

isto é, EDOs lineares acopladas com coeficientes constantes. Resolvemos a Equação (18.25) isto é, com o Ansatz padrão de uma exponencial,

$$x_i(t) = \sum_j c_{ij} e^{\lambda_j t}, \quad (18.26)$$

com expoentes constantes  $\lambda_j$  e uma matriz constante  $C$  de coeficientes  $c_{ij}$ , portanto  $\mathbf{c}_j = (c_{ij}, i = 1, 2, \dots)$  forma o  $j$ -ésimo vetor coluna de  $C$ . Substituindo a Equação (18.26) na Equação (18.25), temos como resultado uma combinação linear de funções exponenciais,

$$\sum_j c_{ij} \lambda_j e^{\lambda_j t} = \sum_{j,k} f_{ik} c_{kj} e^{\lambda_j t}, \quad (18.27)$$

que são independentes se  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Esse é o caso geral que focalizaremos, enquanto degenerações em que dois ou mais  $\lambda$  são iguais requerem um tratamento similar ao dos pontos de sela em uma dimensão. Comparando

coeficientes de funções exponenciais com o mesmo expoente, temos como resultado as equações lineares de autovalor

$$\sum_k f_{ik}c_{kj} = \lambda_j c_{ij} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}\mathbf{c}_j = \lambda_j \mathbf{c}_j. \quad (18.28)$$

Uma solução não-trivial abrangendo o autovalor  $\lambda_j$  e o autovetor  $\mathbf{c}_j$  das equações lineares homogêneas (18.28) requer que  $\lambda_j$  seja uma raiz da equação secular (compare com a Seção 3.5):

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \cdot \mathbf{1}) = 0. \quad (18.29)$$

A Equação (18.28) significa que  $\mathbf{C}$  diagonaliza  $\mathbf{F}$ , portanto também podemos escrever a Equação (18.28) como

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{C} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots]. \quad (18.30)$$

Nas novas (porém em geral não-ortogonais) coordenadas  $\xi_j$ , definidas como  $\mathbf{C}\xi = \mathbf{x}$ , temos um ponto fixo para cada direção  $\xi_j$ , porque  $\dot{\xi}_j = \lambda_j \xi_j$ , em que  $\lambda_j$  desempenha o papel de  $f'(y_0)$  no caso unidimensional. Os  $\lambda$  são **expoentes característicos** e, em geral, números complexos. Podemos ver isso substituindo  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\xi$  na Equação (18.25) em conjunção com as Equações (18.28) e (18.30). Assim, essa solução representa a combinação independente de pontos fixos unidimensionais, um para cada componente de  $\xi$  e cada um independente das outras componentes. Então, em duas dimensões, para  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , temos um sorvedouro em todas as direções. Quando ambos os  $\lambda$  forem maiores do que 0, teremos repulsores em todas as direções.

### Exemplo 18.4.1 SORVEDOURO ESTÁVEL

As EDOs acopladas

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -x - 3y$$

têm um ponto de equilíbrio na origem. As soluções têm a forma

$$x(t) = c_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t},$$

portanto, o autovalor  $\lambda_1 = -1$  resulta de  $\lambda_1 c_{11} = -c_{11}$ , e a solução  $x = c_{11}e^{-t}$ . O determinante da Equação (18.29),

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)(3 + \lambda) = 0,$$

fornece como resultado os autovalores  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Como ambos são negativos, temos um sorvedouro estável na origem. A EDO para  $y$  dá as relações lineares

$$\lambda_1 c_{21} = -c_{11} - 3c_{21} = -c_{21}, \quad \lambda_2 c_{22} = -3c_{22},$$

das quais inferimos  $2c_{21} = -c_{11}$  ou  $c_{21} = -c_{11}/2$ . Como a solução geral conterá duas constantes, ela é dada por

$$x(t) = c_{11}e^{-t}, \quad y(t) = -\frac{c_{11}}{2}e^{-t} + c_{22}e^{-3t}.$$

À medida que o tempo  $t \rightarrow \infty$ , temos  $y \sim -x/2$  e  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$ , enquanto para  $t \rightarrow -\infty$ ,  $y \sim x^3$  e  $x, y \rightarrow \pm\infty$ . O movimento em direção ao sorvedouro é indicado por setas na Figura 18.7. Para achar a órbita, eliminamos a variável independente,  $t$ , e achamos as cúbicas:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{c_{22}}{c_{11}^3}x^3. \quad \blacksquare$$

Quando ambos os  $\lambda$  são maiores do que 0, temos um repulsor. Nesse caso, o movimento é distante do ponto fixo. Contudo, quando os  $\lambda$  têm sinais diferentes, temos um ponto de sela, isto é, uma combinação de um sorvedouro em uma dimensão e um repulsor na outra. Esse tipo de comportamento se generaliza para números maiores de dimensões.

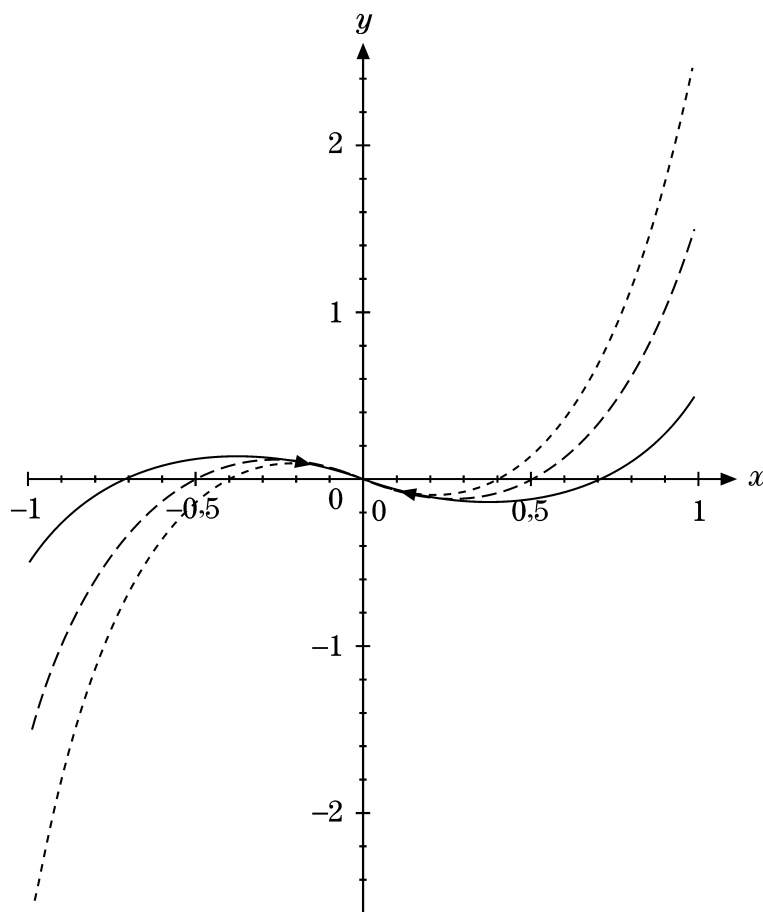


Figura 18.7: Sorvedouro estável.

**Exemplo 18.4.2** PONTO DE SELA

As EDOs acopladas

$$\dot{x} = -2x - y, \quad \dot{y} = -x + 2y$$

têm um ponto fixo na origem. As soluções têm a forma

$$x(t) = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t}.$$

Os autovalores  $\lambda = \pm\sqrt{5}$  são determinados por

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5 = 0.$$

Substituir as soluções gerais nas EDOs resulta nas equações lineares

$$\begin{aligned} \lambda_1 c_{11} &= -2c_{11} - c_{21} = \sqrt{5}c_{11}, & \lambda_1 c_{21} &= -c_{11} + 2c_{21} = \sqrt{5}c_{21}, \\ \lambda_2 c_{12} &= -2c_{12} - c_{22} = -\sqrt{5}c_{12}, & \lambda_2 c_{22} &= -c_{12} + 2c_{22} = -\sqrt{5}c_{22}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} + 2)c_{11} &= -c_{21}, & (\sqrt{5} - 2)c_{12} &= c_{22}, \\ (\sqrt{5} - 2)c_{21} &= -c_{11}, & (\sqrt{5} + 2)c_{22} &= c_{12}, \end{aligned}$$

portanto,  $c_{21} = -(2 + \sqrt{5})c_{11}$ ,  $c_{22} = (\sqrt{5} - 2)c_{12}$ . A família de soluções depende de dois parâmetros,  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ . Para tempo grande  $t \rightarrow \infty$ , o expoente positivo prevalece e  $y \sim -(\sqrt{5} + 2)x$ , enquanto para  $t \rightarrow -\infty$ , temos

$y = (\sqrt{5} - 2)x$ . Essas retas são as assíntotas das órbitas. Como  $-(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = -1$ , elas são ortogonais. Achamos as órbitas eliminando a variável independente,  $t$ , como segue. Substituindo os  $c_{2j}$ , escrevemos

$$y = -2x - \sqrt{5}(c_{11}e^{\sqrt{5}t} - c_{12}e^{-\sqrt{5}t}), \quad \text{portanto} \quad \frac{y + 2x}{\sqrt{5}} = -c_{11}e^{\sqrt{5}t} + c_{12}e^{-\sqrt{5}t}.$$

Agora somamos e subtraímos a solução  $x(t)$  para obter

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(y + 2x) + x = 2c_{12}e^{-\sqrt{5}t}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(y + 2x) - x = -2c_{11}e^{\sqrt{5}t},$$

que multiplicamos para obter

$$\frac{1}{5}(y + 2x)^2 - x^2 = -4c_{12}c_{11} = \text{constante}.$$

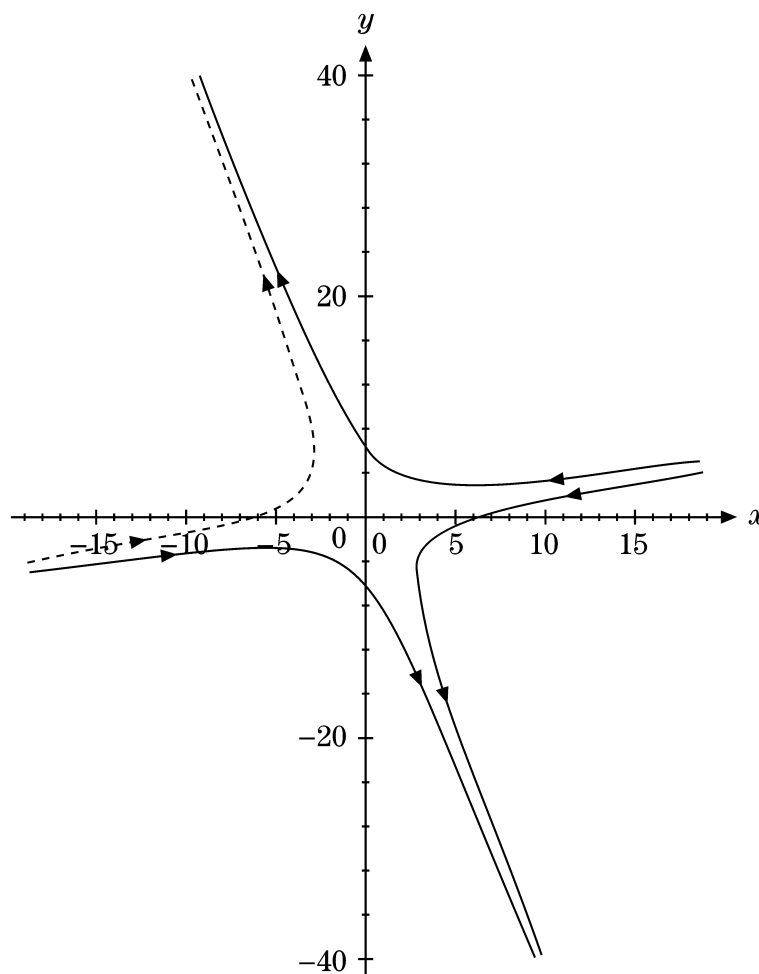


Figura 18.8: Ponto de sela.

A forma quadrática resultante,  $y^2 + 4xy - x^2 = \text{constante}$ , é uma hipérbole por causa do sinal negativo. A hipérbole está rotacionada no sentido de que suas assíntotas não estão alinhadas com os eixos  $x, y$  (Figura 18.8). Sua orientação é dada pela direção das assíntotas que encontramos antes. Como alternativa, poderíamos achar a direção de distância mínima em relação à origem, procedendo da seguinte forma. Igualamos a zero as derivadas de  $x$  e  $y$  de  $f + \Lambda g \equiv x^2 + y^2 + \Lambda(y^2 + 4xy - x^2)$  em que  $\Lambda$  é o multiplicador de Lagrange para a restrição hiperbólica. Os quatro ramos das hipérbolas correspondem aos diferentes sinais dos parâmetros  $c_{11}$  e  $c_{12}$ . O gráfico da Figura 18.8 representa os casos  $c_{11} = \pm 1, c_{12} = \pm 2$ . ■





Contudo, surge um novo tipo de comportamento para um par de autovalores conjugados complexos  $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\kappa$ . Se escrevermos as soluções complexas  $\xi_{1,2} = \exp(\rho t \pm i\kappa t)$  em variáveis reais  $\xi_+ = (\xi_1 + \xi_2)/2$ ,  $\xi_- = (\xi_1 - \xi_2)/2i$  usando a identidade de Euler  $\exp(ix) = \cos x + i\text{sen } x$  (veja a Seção 6.1),

$$\xi_+ = \exp(\rho t) \cos(\kappa t), \quad \xi_- = \exp(\rho t) \text{sen}(\kappa t) \quad (18.31)$$

descreve uma trajetória em espiral para dentro em direção ao ponto fixo na origem para  $\rho < 0$ , um **nó espiral**, e em espiral que se afasta do ponto fixo para  $\rho > 0$ , um **repulsor espiral**.

### Exemplo 18.4.3 PONTO ESPIRAL FIXO

As EDOs acopladas

$$\dot{x} = -x + 3y, \quad \dot{y} = -3x + 2y$$

têm um ponto fixo na origem e soluções da forma

$$x(t) = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t}.$$

Os expoentes  $\lambda_{1,2}$  são soluções de

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)(\lambda - 2) + 9 = 0,$$

ou  $\lambda^2 - \lambda + 7 = 0$ . Os autovalores são conjugados complexos,  $\lambda = 1/2 \pm i\sqrt{27}/2$ , portanto estamos tratando com um ponto espiral fixo na origem (um repulsor porque  $1/2 > 0$ ). Substituir as soluções gerais nas EDOs apresenta como resultado as equações lineares

$$\begin{aligned} \lambda_1 c_{11} &= -c_{11} + 3c_{21}, & \lambda_1 c_{21} &= -3c_{11} + 2c_{21}, \\ \lambda_2 c_{12} &= -c_{12} + 3c_{22}, & \lambda_2 c_{22} &= -3c_{12} + 2c_{22}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 1)c_{11} &= 3c_{21}, & (\lambda_1 - 2)c_{21} &= -3c_{11}, \\ (\lambda_2 + 1)c_{12} &= 3c_{22}, & (\lambda_2 - 2)c_{22} &= -3c_{12}, \end{aligned}$$

as quais, usando os valores de  $\lambda_{1,2}$ , implicam a família de curvas

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{t/2} (c_{11}e^{i\sqrt{27}t/2} + c_{12}e^{-i\sqrt{27}t/2}), \\ y(t) &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{27}}{6} e^{t/2} i (c_{11}e^{i\sqrt{27}t/2} - c_{12}e^{-i\sqrt{27}t/2}), \end{aligned}$$

que depende de dois parâmetros,  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ . Para simplificar, podemos separar as partes real e imaginária de  $x(t)$  e  $y(t)$ , usando a identidade de Euler  $e^{ix} = \cos x + i\text{sen } x$ . É equivalente, porém mais conveniente, escolher  $c_{11} = c_{12} = c/2$  e aumentar  $t \rightarrow 2t$ , portanto, com a identidade de Euler, temos

$$x(t) = ce^t \cos(\sqrt{27}t), \quad y(t) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{27}}{6} ce^t \text{sen}(\sqrt{27}t).$$

Aqui, podemos eliminar  $t$  e achar a órbita

$$x^2 + \frac{4}{3} \left( y - \frac{x}{2} \right)^2 = (ce^t)^2.$$

Para  $t$  fixo, esta é a forma quadrática definida positiva  $x^2 - xy + y^2 = \text{constante}$ , isto é, uma elipse. Mas não há nenhuma elipse nas soluções porque  $t$  não é fixo. Ainda assim, é útil achar sua orientação. Procedemos da seguinte maneira. Tendo  $\Lambda$  o multiplicador de Lagrange como a restrição elíptica, procuramos as direções de distância máxima e mínima em relação à origem, formando

$$f(x, y) + \Lambda g(x, y) \equiv x^2 + y^2 + \Lambda(x^2 - xy + y^2),$$

e fazendo

$$\frac{\partial(f + \Lambda g)}{\partial x} = 2x + 2\Lambda x - \Lambda y = 0, \quad \frac{\partial(f + \Lambda g)}{\partial y} = 2y + 2\Lambda y - \Lambda x = 0.$$

Por

$$2(\Lambda + 1)x = \Lambda y, \quad 2(\Lambda + 1)y = \Lambda x,$$

obtemos as direções

$$\frac{x}{y} = \frac{\Lambda}{2(\Lambda + 1)} = \frac{2(\Lambda + 1)}{\Lambda},$$

ou  $\Lambda^2 + \frac{8}{3}\Lambda + \frac{4}{3} = 0$ . Isso dá como resultado os valores  $\Lambda = -2/3, -2$  e as direções  $y = \pm x$ . Em outras palavras, nossa elipse está centrada na origem e rotacionada  $45^\circ$ . À medida que variamos a variável independente,  $t$ , o tamanho da elipse muda, portanto, obtemos a espiral rotacionada mostrada na Figura 18.9 para  $c = 1$ . ■

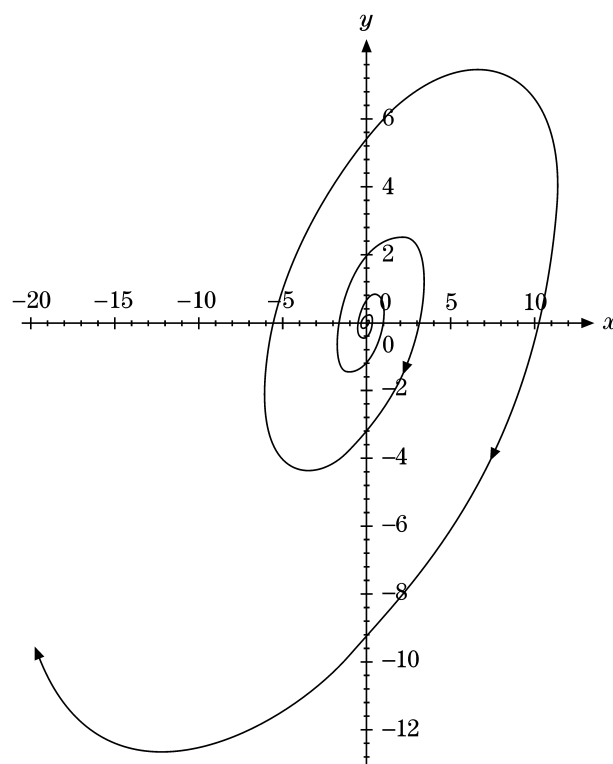


Figura 18.9: Ponto espiral.

No caso especial, quando  $\rho = 0$  na Equação (18.31), a trajetória circular é denominada **ciclo**. Quando trajetórias próximas a ele são atraídas, à medida que o tempo passa, ele é denominado **ciclo limite**, representando movimento periódico para sistemas autônomos.

### Exemplo 18.4.4 CENTRO OU CICLO

A EDO de oscilador harmônico linear atenuado  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  pode ser escrita como duas EDOs acopladas:

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x.$$

Integrar a EDO resultante do  $\dot{x}x + \dot{y}y = 0$  resulta nas órbitas circulares  $x^2 + y^2 = \text{constante}$ , que definem um centro na origem e são mostradas na Figura 18.10. As soluções podem ser parametrizadas como  $x = R \cos t$ ,



$y = R \text{sen } t$ , em que  $R$  é o parâmetro raio. Elas correspondem aos autovalores complexos conjugados  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Podemos verificá-los se escrevermos a solução geral como

$$x(t) = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t}.$$

Então os autovalores resultam de

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 = 0.$$

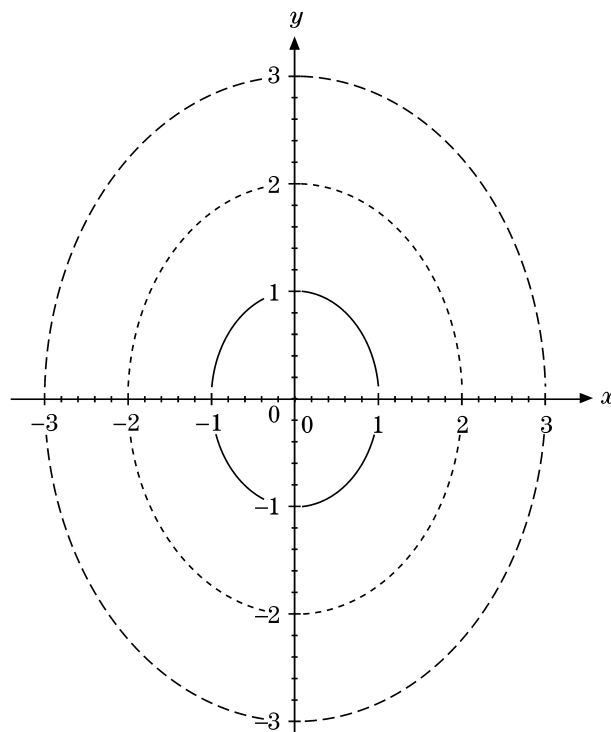


Figura 18.10: Centro.

Outro atrator clássico é o movimento quase-periódico, tal como a trajetória

$$x(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + b_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t + b_2), \tag{18.32}$$

em que a razão  $\omega_1/\omega_2$  é um número irracional. Tais oscilações combinadas ocorrem como soluções de um oscilador anarmônico atenuado (sistema não-autônomo de Van der Pol)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_2^2 x + \beta x^3 = f \cos(\omega_1 t). \tag{18.33}$$

Em três dimensões, quando há um expoente característico positivo e um par conjugado complexo atrator nas outras direções, temos um ponto de sela espiral como uma nova característica. Ao contrário, um expoente característico negativo em conjunção com um par repulsor também dá origem a um ponto de sela espiral, onde as trajetórias são espirais que se dirigem para fora em duas dimensões, mas são atraídas em uma terceira dimensão.

Em geral, quando está presente alguma forma de atenuação (ou dissipação de energia), os transientes se degradam e o sistema se acomoda em equilíbrio, isto é, um único ponto, ou em movimento periódico ou quase-periódico. O movimento caótico em sistemas dissipativos agora é reconhecido como um quarto estado, e seus atratores costumam ser denominados **estranhos**. Em sistemas dissipativos, as condições iniciais não são importantes porque as trajetórias terminam em algum ponto atrator. Elas são cruciais em sistemas hamiltonianos. Também pode ocorrer caos em sistemas hamiltonianos não-integráveis e, então, ele é denominado

caos **conservativo**. Para esse tópico mais complicado damos como referência o Capítulo 8 de Hilborn (1994) nas Leituras Adicionais.

No caso do pêndulo atenuado forçado, quando trajetórias próximas ao centro (órbita fechada) são atraídas para ele, à medida que o tempo passa, essa órbita fechada é definida como um **ciclo limite**, representando movimento periódico para sistemas autônomos. Um pêndulo atenuado usualmente dirige-se à origem (a posição de repouso) seguindo uma trajetória espiral; isto é, a origem é um ponto espiral fixo em seu espaço de fase. Quando ativamos uma força propulsora, então o sistema se torna formalmente não-autônomo por causa de sua dependência explícita em relação ao tempo, mas também fica mais interessante. Nesse caso, podemos denominar o tempo explícito em uma força propulsora senoidal como uma nova variável,  $\varphi$ , em que  $\omega_0$  é uma taxa fixa, na equação de movimento

$$\dot{\omega} + \gamma\omega + \text{sen } \theta = f \text{sen } \varphi, \quad \omega = \dot{\theta}, \quad \varphi = \omega_0 t.$$

Então aumentamos de 1 a dimensão de nosso espaço de fase (adicionando uma variável) porque  $\dot{\varphi} = \omega_0 =$  constante, mas mantemos autônomas as EDOs acopladas. Esse pêndulo atenuado forçado tem trajetórias que cruzam uma órbita fechada em espaço de fase e voltam a ela em trajetória espiral; ela é denominada **ciclo limite**. Isso acontece para uma faixa de intensidade da força de atenuação  $f$ , o parâmetro de controle do sistema. Conforme aumentamos  $f$ , as trajetórias do espaço de fase passam por vários ciclos limites vizinhos e, mais cedo ou mais tarde, se tornam aperiódicas e caóticas. Esses ciclos limites fechados são denominados **bifurcações de Hopf** do pêndulo em sua rota para o caos, nome que se deve ao matemático E. Hopf, que generalizou os resultados de Poincaré para essas bifurcações para um número maior de dimensões do espaço de fase.

Esses sorvedouros ou pontos de sela espirais não podem ocorrer em uma dimensão, mas resta saber se eles são estáveis quando ocorrem em mais dimensões. Uma resposta é dada pelo teorema de Poincaré-Bendixson, que afirma que qualquer das trajetórias (na região finita a ser especificada em um momento) é atraída para um ponto fixo, à medida que o tempo passa, ou se aproxima de um ciclo limite, contanto que o subsistema bidimensional relevante permaneça dentro de uma região finita, isto é, não divirja nessa região, quando  $t \rightarrow \infty$ . Se o leitor quiser uma prova, pode consultar Hirsch e Smale (1974) e Jackson (1989) nas Leituras Adicionais.

Em geral, quando está presente alguma forma de atenuação, os transientes se degradam e o sistema se acomoda em equilíbrio, isto é, um único ponto, ou em movimento periódico ou quase-periódico. Agora o movimento caótico é reconhecido como um quarto estado e seus pontos atratores são freqüentemente **estranhos**.

## Exercício

18.4.2 Mostre que as EDOs acopladas (Rössler)

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2, \quad \dot{x}_3 = a_2 + (x_1 - a_3)x_3$$

- (a) têm dois pontos fixos para  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$ , e  $0 < a_1 < 2$ ,
- (b) têm um repulsor espiral na origem e
- (c) têm um atrator caótico espiral para  $a_1 = 0,398$ .

## Dissipação em Sistemas Dinâmicos

Forças dissipativas freqüentemente envolvem velocidades, isto é, derivadas de primeira ordem de tempo, tal como atrito (por exemplo, para o oscilador atenuado). Vamos procurar uma medida de dissipação, isto é, como uma pequena área  $A = c_{1,2} \Delta \xi_1 \Delta \xi_2$  em um ponto fixo encolhe ou se expande, primeiro em duas dimensões, por simplicidade. Aqui,  $c_{1,2} \equiv \text{sen}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)$ , que envolve o seno das direções características, é um fator angular independente do tempo que leva em conta a não-ortogonalidade das direções características  $\hat{\xi}_1$  e  $\hat{\xi}_2$  da Equação (18.28). Se considerarmos a derivada de tempo de  $A$  e usarmos  $\dot{\xi}_j = \lambda_j \xi_j$ , as coordenadas características, implicando  $\dot{\Delta \xi}_j = \lambda_j \Delta \xi_j$ , obtemos, para a ordem mais baixa nós  $\Delta \xi_j$ ,

$$\dot{A} = c_{1,2} [\Delta \xi_1 \lambda_2 \Delta \xi_2 + \Delta \xi_2 \lambda_1 \Delta \xi_1] = c_{1,2} \Delta \xi_1 \Delta \xi_2 (\lambda_1 + \lambda_2). \tag{18.34}$$

No limite  $\Delta \xi_j \rightarrow 0$ , constatamos pela Equação (18.34) que a taxa

$$\frac{\dot{A}}{A} = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{traço}(F) = \nabla \cdot \mathbf{f}|_{y_0}, \tag{18.35}$$



sendo  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  o vetor de funções de evolução de tempo da Equação (18.22b). Note que o seno independente de tempo do ângulo entre  $\xi_1$  e  $\xi_2$  cai fora da taxa. A generalização para número maior de dimensões é óbvia. Além do mais, em  $n$  dimensões,

$$\text{traço}(\mathbf{F}) = \sum_i \lambda_i. \quad (18.36)$$

Essa fórmula de traço resulta da invariância da polinomial secular na Equação (18.29) sob uma transformação linear  $C\xi = \mathbf{x}$  em particular, e é um resultado de sua forma de determinante usando o teorema do produto para determinantes (veja a Seção 3.2), a saber,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{F} - \lambda \cdot \mathbf{1}) &= [\det(\mathbf{C})]^{-1} \det(\mathbf{F} - \lambda \cdot \mathbf{1}) [\det(\mathbf{C})] = \det(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{F} - \lambda \cdot \mathbf{1})\mathbf{C}) \\ &= \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{C} - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda). \end{aligned} \quad (18.37)$$

Aqui, a forma de produto aparece substituindo a Equação (18.30). Agora,  $\text{traço}(\mathbf{F})$  é o coeficiente de  $(-\lambda)^{n-1}$  pela expansão de  $\det(\mathbf{F} - \lambda \cdot \mathbf{1})$  em potências de  $\lambda$ , enquanto é  $\sum_i \lambda_i$ , pela forma do produto  $\prod_i (\lambda_i - \lambda)$ , o que prova a Equação (18.36). Claramente, de acordo com as Equações (18.35) e (18.36),

- é o sinal (e mais precisamente o traço) dos expoentes característicos da matriz de derivadas no ponto fixo que determina se há uma expansão ou uma redução de áreas e volumes perto de um ponto crítico quando o número de dimensões é maior.

Então, resumindo, a Equação (18.35) afirma que dissipação requer  $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) \neq 0$ , em que  $\dot{y}_j = f_j$ , não ocorre em sistemas hamiltonianos em que  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ .

Além do mais, em duas ou mais dimensões há as seguintes possibilidades globais:

- A trajetória pode descrever uma órbita fechada (ciclo).
- A trajetória pode se aproximar de uma órbita fechada (espiral para dentro ou para fora na direção da órbita), à medida que  $t \rightarrow \infty$ . Nesse caso, temos um ciclo limite.

O comportamento local de uma trajetória perto de um ponto crítico também é mais variado em geral do que em uma dimensão. Em um ponto crítico estável, todas as trajetórias podem se aproximar do ponto crítico ao longo de linhas retas ou de espirais para dentro (em direção ao **nó espiral**) ou podem seguir um caminho mais complicado. Se todas as trajetórias invertidas em relação ao tempo se dirigirem ao ponto crítico em espirais quando  $t \rightarrow -\infty$ , então o ponto crítico é um ponto espiral divergente ou **repulsor espiral**. Quando algumas trajetórias se aproximam do ponto crítico enquanto outras se afastam dele, então ele é denominado **ponto de sela**. Quando todas as trajetórias formam órbitas fechadas em torno do ponto crítico, ele é denominado **centro**.

## Bifurcações em Sistemas Dinâmicos

Uma bifurcação é uma mudança repentina de dinâmica para valores específicos de parâmetros, tal como o nascimento de um par de pontos fixos repulsores ou seu desaparecimento devido ao ajuste de um parâmetro de controle, isto é, os movimentos antes e depois da bifurcação são topologicamente diferentes. Em um ponto de bifurcação, não somente as soluções são instáveis quando um ou mais parâmetros sofrem pequenas alterações, como também o caráter da bifurcação no espaço de fase ou na variedade do parâmetro pode mudar. Assim, estamos tratando com eventos bastante repentinos de dinâmica linear. Alterações repentinas de comportamento de trajetórias de regular para aleatório são características de bifurcações, assim como a dependência sensível de condições: condições iniciais próximas podem levar a comportamentos a longo termo muito diferente. Se uma bifurcação não sofrer mudanças qualitativas quando os parâmetros são ajustados, ela é denominada **estruturalmente estável**. Note que, na realidade, a ocorrência de bifurcações estruturalmente instáveis é improvável, porque ruído e outros graus de liberdade desprezados agem como perturbações sobre o sistema que efetivamente fazem as bifurcações instáveis desaparecerem de vista. Bifurcações (assim como duplicações em mapas) são importantes como uma entre muitas rotas para o caos. Outras são mudanças repentinas em trajetórias associadas a diversos pontos críticos denominadas **bifurcações globais**. Muitas vezes elas envolvem mudanças em bacias de atração e/ou outras estruturas globais. A teoria de bifurcações globais é razoavelmente complicada e hoje ainda está em seus estágios iniciais.

Bifurcações que estão ligadas a mudanças repentinas no comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos em um único ponto fixo são denominadas **bifurcações locais**. Mais especificamente, uma mudança na estabilidade ocorre em espaço de parâmetro em que a parte real de um expoente característico do ponto fixo sofre alteração de sinal, isto é, passa de trajetórias atratoras para repulsores, ou vice-versa. O **teorema da variedade central** diz que

em uma bifurcação local somente interessam os graus de liberdade envolvidos com expoentes característicos que estão indo a zero:  $\Re\lambda_i = 0$ . Localizar o conjunto desses pontos é o primeiro passo em uma análise de bifurcação. Uma outra etapa consiste em catalogar os tipos de bifurcações em sistemas dinâmicos — é o que faremos a seguir.

As **formas normais** convencionais de equações dinâmicas representam um ponto de partida para classificar bifurcações. Para sistemas com um só parâmetro (isto é, um distribuidor central unidimensional), escrevemos o caso geral de EDN, como segue:

$$\dot{x} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(0)} x^j + c \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(1)} x^j + c^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2)} x^j + \dots, \quad (18.38)$$

em que o índice superior nos  $a^{(m)}$  denota a potência do parâmetro  $c$  aos quais eles estão associados. Mapas não-lineares iterados unidimensionais — tais como o mapa logístico da Seção 18.2 (que ocorre em seções de Poincaré) — de sistemas dinâmicos não-lineares podem ser classificados de forma semelhante, a saber,

$$x_{n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(0)} x_n^j + c \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(1)} x_n^j + c^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2)} x_n^j + \dots \quad (18.39)$$

Assim, uma das EDNs mais simples com uma bifurcação é

$$\dot{x} = x^2 - c, \quad (18.40)$$

que corresponde a todos  $a_j^{(m)} = 0$ , exceto para  $a_0^{(1)} = -1$  e  $a_2^{(0)} = 1$ . Para  $c > 0$ , há dois pontos fixos (lembre-se de que  $\dot{x} = 0$ )  $x_{\pm} = \pm\sqrt{c}$  com expoentes característicos  $2x_{\pm}$ , portanto  $x_-$  é um nó e  $x_+$  é um repulsor. Para  $c < 0$  não há pontos fixos. Por conseguinte, à medida que  $c \rightarrow 0$ , o par de pontos fixos desaparece repentinamente, isto é, o valor de parâmetro  $c = 0$  é uma bifurcação de nó repulsor que é estruturalmente instável. Esse mapa complexo (com  $c \rightarrow -c$ ) gera os conjuntos de fractais de Julia e Mandelbrot discutidos na Seção 18.3.

Uma bifurcação em garfo ocorre para o oscilador não-atenuado (caso especial e não-dissipativo do oscilador de Duffing) com uma anarmonia cúbica

$$\ddot{x} + ax + bx^3 = 0, \quad b > 0. \quad (18.41)$$

Ele tem um espectro de frequência contínuo e é, entre outros, um modelo para uma bola que bate entre duas paredes. Quando o parâmetro de controle  $a > 0$ , há somente um ponto fixo, em  $x = 0$ , um nó, enquanto para  $a < 0$  há mais dois nós, em  $x_{\pm} = \pm\sqrt{-a/b}$ . Assim, temos uma bifurcação em garfo de um nó na origem para um ponto de sela na origem e dois nós, em  $x_{\pm} \neq 0$ . Em termos de uma formulação de potencial,  $V(x) = ax^2/2 + bx^4/4$  é um poço único para  $a > 0$ , mas um poço duplo (com um máximo em  $x = 0$ ) para  $a < 0$ .

Quando um par de expoentes característicos complexos conjugados  $\rho \pm i\kappa$  passa de um nó espiral ( $\rho < 0$ ) para um espiral repulsor ( $\rho > 0$ ) e surge, movimento periódico (ciclo limite), então denominamos a mudança qualitativa **bifurcação de Hopf**. Elas ocorrem na rota quase-periódica para o caos, que será discutida na próxima seção, que trata do caos.

Em uma análise global reunimos os movimentos próximos a vários pontos críticos, como nós e bifurcações, em feixes de trajetórias que correm mais ou menos juntas em duas dimensões. (Essa visão geométrica é o modo corrente de analisar soluções de sistemas dinâmicos.) Mas esse fluxo deixa de ser coletivo no caso de três dimensões, em que divergem um do outro, em geral, porque é possível um movimento caótico que normalmente enche de pontos o plano de uma seção de Poincaré.

### Caos em Sistemas Dinâmicos

Nossos resumos anteriores de aspectos intrincados e complicados de sistemas dinâmicos que se devem à não-linearidade em uma e duas dimensões não incluem caos, embora alguns deles, como bifurcações, às vezes são precursores do caos. Em EDNs de três ou mais dimensões pode ocorrer movimento caótico, muitas vezes quando uma constante do movimento (uma integral de energia para EDNs definidas por uma hamiltoniana, por exemplo) restringe as trajetórias a um volume finito em espaço de fase e quando não há nenhum ponto crítico. Outro sinal característico de caos é quando para cada trajetória há trajetórias próximas, algumas das quais se afastam dela, enquanto outras dela se aproximam, à medida que o tempo cresce. A noção de divergência exponencial de trajetórias próximas torna-se quantitativa pelo expoente de Lyapunov  $\lambda$  (veja a Seção 18.3 para mais detalhes) de mapas iterados de seções de Poincaré associados ao sistema dinâmico. Se duas trajetórias próximas estão a uma



distância  $d_0$  no tempo  $t = 0$ , mas divergem por uma distância  $d(t)$  em um tempo posterior  $t$ , então  $d(t) \approx d_0 e^{\lambda t}$  é válido. Assim, analisando a série de pontos, isto é, mapas iterados gerados em seções de Poincaré, podemos estudar rotas para o caos de sistemas dinâmicos tridimensionais. Esse é o método fundamental para estudar caos. À medida que variamos a localização e a orientação do plano de Poincaré, muitas vezes percebemos que um ponto fixo sobre esse plano se origina de um ciclo limite no espaço de fase tridimensional cuja estabilidade estrutural pode ser ali verificada. Por exemplo, ciclos limites atratores aparecem como nós em seções de Poincaré, ciclos limites repulsores aparecem como repulsores de mapas de Poincaré e ciclos de sela aparecem como pontos de sela de mapas de Poincaré associados.

É preciso três ou mais dimensões de espaço de fase para ocorrer caos por causa da influência recíproca das condições necessárias que acabamos de discutir, a saber,

- trajetórias limitadas (são costumeiras em sistemas hamiltonianos),
- divergência exponencial de trajetórias próximas (é garantida por expoentes de Lyapunov positivos de mapas de Poincaré correspondentes),
- nenhuma interseção de trajetórias.

A última condição é obedecida por sistemas determinísticos em particular, como discutimos na Seção 18.1. Um aspecto surpreendente do caos, mencionado na Seção 18.1, é sua predominância e quão universais as rotas para o caos muitas vezes são, a despeito da esmagadora variedade de EDNs.

Um exemplo para padrões espacialmente complexos em Mecânica Clássica é o pêndulo planar, cuja equação unidimensional de movimento

$$I \frac{d\theta}{dt} = L, \quad \frac{dL}{dt} = -lmg \sin \theta \quad (18.42)$$

é não-linear na variável dinâmica  $\theta(t)$ . Aqui,  $I$  é o momento de inércia,  $l$  é a distância até o centro de massa,  $m$  é a massa e  $g$  é a constante de aceleração gravitacional. Quando todos os parâmetros na Equação (18.42) são constantes no tempo e no espaço, então as soluções são dadas em termos de integrais elípticas (veja a Seção 5.8) e não existe caos. Contudo, um pêndulo sob uma força periódica externa pode exibir dinâmica caótica, por exemplo, para o lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - mg(l - z), \quad (x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = l^2, \quad (18.43)$$

$$x_0 = \varepsilon l \cos \omega t. \quad (18.44)$$

em que (Veja Moon (1992) nas Leituras Adicionais.)

Bons candidatos para caos são problemas de potencial de poço múltiplo,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \nabla V(\mathbf{r}) = F\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t\right), \quad (18.45)$$

$F$  representa forças dissipativas e/ou forças propulsoras. Outro exemplo clássico é a rotação de um corpo rígido, cujas equações tridimensionais não-lineares de Euler são familiares, a saber,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1 \omega_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_1, \\ \frac{d}{dt} I_2 \omega_2 &= (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + M_2, \\ \frac{d}{dt} I_3 \omega_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3. \end{aligned} \quad (18.46)$$

Aqui, os  $I_j$  são os principais momentos de inércia e  $\omega$  é a velocidade angular com componentes  $\omega_j$  em torno dos eixos principais do corpo fixo. Até mesmo a rotação de um corpo rígido livre pode ser caótica porque seus acoplamentos não-lineares e forma tridimensional satisfazem todos os requisitos para ocorrência do caos (veja a Seção 18.1). Um exemplo de caos de corpo rígido em nosso sistema solar são as cambalhotas caóticas de Hyperion, uma das luas de Saturno, cuja forma é muito pouco esférica. É um mundo onde o nascer e o pôr de Saturno é tão irregular a ponto de ser imprevisível. Outro exemplo é o cometa de Halley, cuja órbita é perturbada por Júpiter e Saturno. Em geral, quando três ou mais corpos celestiais interagem sob as forças da gravidade, dinâmicas estocásticas são possíveis. Entretanto, note que é preciso simulações por computador em grandes intervalos de

tempo para averiguar a dinâmica caótica no sistema solar. Se quiser mais detalhes sobre caos em tais sistemas hamiltonianos conservativos, consulte o Capítulo 8 de Hilborn (1994) nas Leituras Adicionais.

## Exercício

**18.4.3** Construa um mapa de Poincaré para o oscilador de Duffing na Equação (18.41).

### Rotas para o Caos em Sistemas Dinâmicos

Agora vamos examinar algumas rotas para o caos. A rota para o caos de duplicação de período é exemplificada pelo mapa logístico na Seção 18.2, e os números universais  $\alpha$ ,  $\delta$  de Feigenbaum são seus aspectos quantitativos, juntamente com expoentes de Lyapunov. É comum em sistemas dinâmicos. Pode começar com movimento (periódico) de ciclo limite que aparece como um ponto fixo em uma seção de Poincaré. O ciclo limite pode ter-se originado em uma bifurcação de um nó ou de algum outro ponto fixo. À medida que um parâmetro de controle muda, o ponto fixo do mapa de Poincaré se subdivide em dois pontos, isto é, o ciclo limite tem um expoente característico que passa por zero, de atrator a repulsor, por exemplo. Agora, o movimento periódico tem um período duas vezes mais longo do que antes, etc. Referimo-nos ao Capítulo 11 de Barger e Olsson (1995) nas Leituras Adicionais para gráficos de duplicação de período de seções de Poincaré para a equação de Duffing (18.41) com uma força externa periódica. Outro exemplo para a duplicação de período é um oscilador forçado com atrito (veja Helleman em Cvitanovic (1989) nas Leituras Adicionais).

A rota quase-periódica para o caos também é bastante comum em sistemas dinâmicos, por exemplo, começando em um nó independente, um ponto fixo. Se ajustarmos um parâmetro de controle, o sistema sofre uma bifurcação de Hopf para o movimento periódico correspondente a um ciclo limite em espaço de fase. Continuando a mudança do parâmetro de controle, aparece uma segunda frequência. Se a razão entre as frequências for um número irracional, as trajetórias são quase-periódicas, e mais cedo ou mais tarde cobrirão a superfície de um toro em um espaço de fase, isto é, órbitas quase-periódicas nunca fecham nem se repetem. Mais mudanças no parâmetro de controle podem levar a uma terceira frequência ou diretamente a movimento caótico. Faixas de movimento caótico podem se alternar com movimento quase-periódico em espaço de parâmetro. Um exemplo para tal sistema dinâmico é um pêndulo periodicamente forçado.

Uma terceira rota para o caos passa pela intermitência, na qual o sistema dinâmico se alterna entre dois movimentos qualitativamente diferentes em parâmetros de controle fixos. Por exemplo, no início, o movimento periódico se alterna com uma rajada ocasional de movimento caótico. Com uma mudança no parâmetro de controle as rajadas caóticas se alongam até que, mais cedo ou mais tarde, não resta nenhum movimento periódico. As partes caóticas são irregulares e não se parecem umas com as outras, mas precisamos verificar se há um expoente de Lyapunov positivo para demonstrar caos. Intermitências de vários tipos são aspectos comuns de estados turbulentos em dinâmica dos fluidos. As EDNs acopladas de Lorenz também mostram intermitência.

## Exercício

**18.4.4** Monte um gráfico para a região de intermitência do mapa logístico em  $\mu = 3,8319$ . Qual é o período dos ciclos? O que acontece em  $\mu = 1 + 2\sqrt{2}$ ?

Resposta: Há uma bifurcação tangente para ciclos de período 3.

### Leituras Adicionais

Amann, H., *Ordinary Differential Equations: An Introduction To Nonlinear Analysis*. Nova York: de Gruyter (1990).

Baker, G. L., e J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics: An Introduction*, 2<sup>a</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1996).

Barger, V. D., e M. G. Olsson, *Classical Mechanics*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (1995).

Bender, C. M., e S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods For Scientists e Engineers*. Nova York: McGraw-Hill (1978), em particular o Capítulo 4.

Bergé, P., Y. Pomeau, e C. Vidal, *Order within Chaos*. Nova York: Wiley (1987).

Cvitanovic, P., *Universality in Chaos*, 2<sup>a</sup> ed. Bristol, UK: Adam Hilger (1989).

Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings; 2<sup>a</sup> ed., Perseus (1989).

Earnshaw, J. C., e D. Haughey, Lyapunov exponents for pedestrians. *Am. J. Phys.* 61: 401 (1993).





- Gleick, J., *Chaos*. Nova York: Penguin Books (1987).
- Hilborn, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Nova York: Oxford University Press (1994).
- Hirsch, M. W., e S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Nova York: Academic Press (1974).
- Infeld, E., e G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1990).
- Jackson, E. A., *Perspectives of Nonlinear Dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (1989).
- Jordan, D. W., and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, 2<sup>a</sup> ed. Oxford, UK: Oxford University Press (1987).
- Lyapunov, A. M., *The General Problem of the Stability of Motion*. Bristol, PA: Taylor & Francis (1992).
- Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W. H. Freeman, nova tiragem (1988).
- Moon, F. C., *Chaotic and Fractal Dynamics*. Nova York: Wiley (1992).
- Peitgen, H.-O., e P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*. Nova York: Springer (1986).
- Sachdev, P. L., *Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Nova York: Marcel Dekker (1991).
- Tufillaro, N. B., T. Abbott, e J. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Redwood City, CA: Addison-Wesley (1992).

## 19

# Probabilidade

Probabilidades surgem em muitos problemas que tratam de eventos aleatórios ou grande número de partículas que definem variáveis aleatórias. Um evento é denominado **aleatório** se ele for praticamente impossível de prever a partir do estado inicial. Isso inclui os casos em que temos apenas informações incompletas sobre estados iniciais e/ou dinâmica, como em Mecânica Estatística, quando podemos não saber a energia do sistema que corresponde a muitas configurações microscópicas possíveis, o que nos impede de prever resultados individuais. Muitas vezes, as propriedades médias de muitos eventos similares são previsíveis, como em teoria quântica. É por isso que a teoria da probabilidade pode ser e é desenvolvida.

Variáveis aleatórias estão envolvidas quando dados dependem do acaso, como a previsão do tempo e o preço de ações. A teoria da probabilidade descreve modelos matemáticos de processos fortuitos em termos de distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias que descrevem como alguns “eventos aleatórios” são mais prováveis que outros. Nesse sentido a probabilidade é uma medida de nossa ignorância e dá significado quantitativo a afirmações qualitativas tais como: “É provável que chova amanhã”. “É improvável que eu tire a rainha de copas”. “Probabilidades são de fundamental importância em Mecânica Quântica e Mecânica Estatística e são aplicadas em Meteorologia, Economia, jogos e muitas outras áreas da vida diária.

Para um matemático, probabilidades são baseadas em axiomas, mas aqui discutiremos modos práticos de calcular probabilidades para eventos aleatórios. Como os experimentos em ciências estão sempre sujeitos a erros, as teorias de erros e sua propagação envolvem probabilidades. Em Estatística tratamos com aplicações da teoria da probabilidade a dados experimentais.

### 19.1 Definições, Propriedades Simples

Todos os resultados possíveis **mutuamente exclusivos**<sup>1</sup> de um experimento que está sujeito ao acaso representam eventos (ou pontos) do **espaço amostral**  $S$ . Por exemplo, cada vez que lançamos uma moeda, damos à tentativa um número  $i = 1, 2, \dots$  e observamos os resultados  $x_i$ . Aqui, a amostra consiste em dois eventos: cara ou coroa, e os  $x_i$  representam uma variável aleatória discreta que assume um dos dois valores cara ou coroa. Quando são lançadas duas moedas, a amostra contém os eventos duas caras, uma cara e uma coroa, duas coroas; o número de caras é um bom valor para atribuir à variável aleatória portanto, os valores possíveis são 2, 1 e 0. Há quatro resultados igualmente prováveis, dos quais um tem valor 2, dois têm valor 1, e um tem valor 0. Portanto, as probabilidades dos três valores da variável aleatória são  $1/4$  para duas caras (valor 2),  $1/4$  para nenhuma cara (valor 0) e  $1/2$  para valor 1. Em outras palavras, definimos a probabilidade teórica  $P$  de um evento denotado pelo ponto  $x_i$  da amostra como

$$P(x_i) \equiv \frac{\text{número de resultados do evento } x_i}{\text{número total de todos os eventos}}. \quad (19.1)$$

Uma definição experimental se aplica quando o número total de eventos não é bem definido (ou é difícil de obter) ou nem sempre ocorrem resultados igualmente prováveis. Então,

$$P(x_i) \equiv \frac{\text{número de vezes que o evento } x_i \text{ ocorre}}{\text{número total de tentativas}} \quad (19.2)$$

é mais apropriada. Uma pilha grande, totalmente misturada de grãos de areia brancos e pretos do mesmo tamanho e em iguais proporções, é um exemplo relevante porque não é prático contar todos eles. Mas podemos contar os grãos de um pequeno volume que escolhermos como amostra. Desse modo, podemos verificar que grãos brancos e pretos

<sup>1</sup>Isso significa que, dado que um evento particular ocorreu, os outros não poderiam ter ocorrido.



aparecem com aproximadamente a mesma probabilidade  $1/2$ , contanto que devolvamos cada amostra à pilha e a misturemos novamente. Consta-se que, quanto maior o volume da amostra, menor será o desvio em relação  $1/2$ . Quanto mais tentativas fizermos, mais próxima de  $1/2$  estará a média de ocorrências de todas as contagens obtidas nas tentativas. Poderíamos até pegar grãos individuais e verificar se a probabilidade  $1/4$  de pegar dois grãos pretos em seguida é igual à probabilidade de pegar dois grãos brancos em seguida, etc. Há inúmeras questões estatísticas que podemos estudar. Assim, pilhas de areia colorida nos proporcionaram experimentos instrutivos.

Os seguintes axiomas são evidentes por si sós:

- Probabilidades satisfazem  $0 \leq P \leq 1$ . Probabilidade 1 significa certeza; probabilidade 0 significa impossibilidade.
- A amostra inteira tem probabilidade 1. Por exemplo, tirar uma carta de baralho arbitrária tem probabilidade 1.
- As probabilidades para eventos mutuamente exclusivos se somam. A probabilidade de conseguir uma cara em dois lançamentos de moeda é  $1/4 + 1/4 = 1/2$  porque ela é  $1/4$  para o evento cara primeiro e em seguida coroa, mais  $1/4$  para o evento coroa antes e depois cara.

### Exemplo 19.1.1    PROBABILIDADE PARA $A$ OU $B$

Qual é a probabilidade de tirar<sup>2</sup> uma carta de paus ou um valete de um baralho? Como há 52 cartas em um baralho, cada uma delas é igualmente provável, 13 cartas de cada naipe e 4 valetes, há 13 cartas de paus incluindo o valete de paus e mais 3 outros valetes; isto é, há 16 cartas possíveis em 52, o que dá a probabilidade  $(13 + 3)/52 = 16/52 = 4/13$ . ■

Se representarmos o espaço amostral por um conjunto  $S$  de pontos, então eventos são subconjuntos  $A, B, \dots$  de  $S$ , denotados como  $A \subset S$ , etc. Dois conjuntos  $A, B$  são iguais se  $A$  estiver contido em  $B$ ,  $A \subset B$  e  $B$  estiver contido em  $A$ ,  $B \subset A$ . A **união**  $A \cup B$  consiste em todos os pontos (eventos) que estão em  $A$  ou  $B$  ou ambos (veja a Figura 19.1). A **interseção**  $A \cap B$  consiste em todos os pontos que estão em ambos,  $A$  e  $B$ . Se  $A$  e  $B$  não tiverem pontos comuns, sua interseção é o **conjunto vazio**,  $A \cap B = \emptyset$ , que não tem nenhum elemento (evento). O conjunto de pontos em  $A$  que não estão na interseção de  $A$  e  $B$  é denotado por  $A - A \cap B$ , **definindo uma subtração de conjuntos**. Se considerarmos o naipe de paus no Exemplo 19.1.1 como conjunto  $A$  e os 4 valetes como conjunto  $B$ , então sua união compreende todas as cartas de paus e valetes e sua interseção é somente o valete de paus.

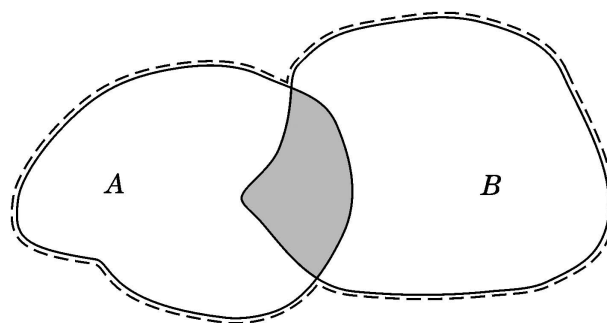


Figura 19.1: A área sombreada dá a interseção  $A \cap B$ , correspondente aos eventos  $A$  e  $B$ ; a linha tracejada encerra  $A \cup B$ , correspondente aos eventos  $A$  ou  $B$ .

Cada subconjunto  $A$  tem sua probabilidade  $P(A) \geq 0$ . Em termos desses conceitos e notações da teoria dos conjuntos, as leis da probabilidade que acabamos de discutir se tornam

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

O espaço amostral inteiro tem  $P(S) = 1$ . A probabilidade da união  $A \cup B$  de eventos mutuamente exclusivos é a soma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

A **regra da adição** para probabilidades de conjuntos arbitrários é dada pelo seguinte teorema:

<sup>2</sup>Esses são exemplos de eventos não-mutuamente exclusivos.

REGRA DA ADIÇÃO:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (19.3)$$

Para provar isso, decompos a união em dois conjuntos mutuamente exclusivos  $A \cup B = A \cup (B - B \cap A)$ , subtraindo a interseção de  $A$  e  $B$  de  $B$  antes de uni-los. Suas probabilidades são  $P(A)$ ,  $P(B) - P(B \cap A)$ , as quais somamos. Também poderíamos ter decomposto  $A \cup B = (A - A \cap B) \cup B$ , da qual resulta nosso teorema, de modo semelhante, somando essas probabilidades,  $P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(B)$ . Note que  $A \cap B = B \cap A$ . (Veja a Figura 19.1.)

Entretanto, às vezes, as regras e definições de probabilidades que discutimos até aqui não são suficientes.

### Exemplo 19.1.2 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Um exemplo simples consiste em uma caixa de 10 canetas idênticas vermelhas e 20 canetas idênticas azuis, arranjadas em ordem aleatória, da qual retiramos canetas sucessivamente, isto é, sem devolvê-las à caixa. Suponha que tiramos primeiro uma caneta vermelha, evento  $A$ . Isso acontecerá com probabilidade  $A$ .  $P(A) = 10/30 = 1/3$  se as canetas estiverem totalmente misturadas. Contudo, a probabilidade condicional  $P(B|A)$  de tirar uma caneta azul na próxima rodada, evento  $B$ , dependerá do fato de termos tirado uma caneta vermelha na primeira rodada. Ela é dada por  $20/29$ . Há  $10 \cdot 20$  possíveis pontos amostrais (eventos vermelhos/azuis) em duas rodadas, e a amostra tem  $30 \cdot 29$  eventos; portanto, a probabilidade combinada é

$$P(A, B) = \frac{10}{30} \frac{20}{29} = \frac{10 \cdot 20}{30 \cdot 29} = \frac{20}{87}.$$

■

Em geral, a probabilidade combinada  $P(A, B)$  de acontecer  $A$  e  $B$  (nessa ordem) é dada pelo produto entre a probabilidade de  $A$  acontecer,  $P(A)$ , e a probabilidade de  $B$  acontecer se  $A$  acontecer,  $P(B|A)$ :

$$P(A, B) = P(A)P(B|A). \quad (19.4)$$

Em outras palavras, a **probabilidade condicional**  $P(B|A)$  é dada pela razão

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)}{P(A)}. \quad (19.5)$$

Se a probabilidade condicional  $P(B|A) = P(B)$  for independente de  $A$ , então os eventos  $A$  e  $B$  são denominados **independentes**, e a probabilidade combinada

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (19.6)$$

é simplesmente o **produto de ambas as probabilidades**.

### Exemplo 19.1.3 TESTES DE APTIDÃO ESCOLAR

Faculdades e universidades confiam nas pontuações alcançadas em habilidades verbais e matemáticas em testes SAT (*Scholastic Aptitude Tests* — Testes de Aptidão Escolar), entre outros, para prever se um aluno passará em seus cursos e se formará. Sabe-se que uma universidade de pesquisa admite principalmente estudantes que alcancem pontuações combinadas em habilidades verbais e matemáticas acima de 1.400 pontos. A taxa de conclusão de cursos é de 95%, isto é, 5% desistem ou se transferem para outra escola. Entre os que se formam, 97% têm uma pontuação SAT maior do que 1.400 pontos, enquanto 80% entre os que desistem têm pontuação SAT abaixo de 1.400. Suponha que um estudante tenha uma nota SAT abaixo de 1.400. Qual é sua possibilidade de concluir o curso?

Seja  $A$  os casos que têm pontuação SAT abaixo de 1.400,  $B$  representa os que têm acima de 1.400, eventos mutuamente exclusivos com  $P(A) + P(B) = 1$ , e  $C$  os estudantes que se formam. Isto é, queremos saber as probabilidades condicionais  $P(C|A)$  e  $P(C|B)$ . Para aplicar a Equação (19.5), precisamos de  $P(A)$  e  $P(B)$ . Há 3% dos estudantes com pontuação abaixo de 1.400 entre os que se formam (95%) e 80% dos 5% que não se formam, portanto,

$$P(A) = 0,03 \cdot 0,95 + \frac{4}{5}0,05 = 0,0685, \quad P(B) = 0,97 \cdot 0,95 + \frac{0,05}{5} = 0,9315,$$



e também

$$P(C \cap A) = 0,03 \cdot 0,95 = 0,0285 \quad \text{e} \quad P(C \cap B) = 0,97 \cdot 0,95 = 0,9215.$$

Aqui, as probabilidades combinadas  $P(C, A) = P(C \cap A)$ ,  $P(C, B) = P(C \cap B)$ , já que  $C$  e  $A$  (e  $C$  e  $B$ ) são partes do mesmo espaço amostral. Por conseguinte,

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0,0285}{0,0685} \sim 41,6\%,$$

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{0,9215}{0,9315} \sim 98,9\%,$$

isto é, a probabilidade de um estudante com menos de 1.400 pontos se formar nessa universidade em particular é um pouco menor que 42%. ■

Como um corolário da definição de uma probabilidade condicional, Equação (19.5), comparamos  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$  e  $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ , que leva ao seguinte teorema.

TEOREMA DE BAYES:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A). \tag{19.7}$$

Essa expressão pode ser generalizada para o seguinte.

TEOREMA: Se os eventos aleatórios  $A_i$  com probabilidades  $P(A_i) > 0$  forem mutuamente exclusivos e sua união representar a amostra inteira  $S$ , então um evento aleatório arbitrário  $B \subset S$  tem a probabilidade

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i). \tag{19.8}$$

Essa lei de decomposição lembra a expansão de um vetor em uma base de vetores unitários que definem as componentes do vetor. Essa relação resulta da óbvia decomposição  $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ , Figura 19.2, que implica  $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$  para as probabilidades porque as componentes  $B \cap A_i$  são mutuamente exclusivas. Para cada  $i$ , sabemos pela Equação (19.5) que  $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$ , o que prova o teorema.

### Contagem de Permutações e Combinações

Contar partículas em amostras pode nos ajudar a achar probabilidades, como na Mecânica Estatística.

Se tivermos  $n$  moléculas diferentes, vamos perguntar de quantos modos podemos arranjá-las em uma fila, isto é, permutá-las. Esse número é definido como o número de suas **permutações**. Assim, por definição, a **ordem importa nas permutações**. Há  $n$  chances de pegar a primeira molécula,  $n - 1$  de pegar a segunda, etc. No total há  $n!$  permutações de  $n$  moléculas ou objetos **diferentes**.

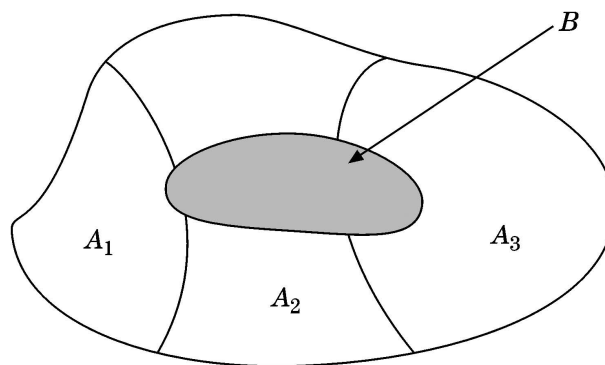


Figura 19.2: A área sombreada  $B$  é composta de subconjuntos mutuamente exclusivos de  $B$  que pertencem também a  $A_1, A_2, A_3$ , em que os  $A_i$  são mutuamente exclusivos.

Generalizando isso, suponha que haja  $n$  pessoas mas somente  $k < n$  cadeiras para acomodá-las. De quantas maneiras podemos sentar  $k$  pessoas nas cadeiras? Contando como antes, obtemos

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

para o número de permutações de  $n$  objetos diferentes,  $k$  por vez.

Agora consideramos o número de **combinações** de objetos quando sua **ordem é irrelevante** por definição. Por exemplo, três letras  $a, b, c$  podem ser combinadas duas letras por vez, de  $3 = \frac{3!}{2!}$  modos:  $ab, ac, bc$ . Se as letras puderem ser repetidas, então adicionamos os pares  $aa, bb, cc$  e teremos seis combinações. Assim, uma **combinação** de partículas diferentes é diferente de uma permutação no sentido de que sua **ordem não importa**. Combinações ocorrem com repetição (o modo que o matemático tem para tratar objetos indistinguíveis) e sem repetição, quando não há dois conjuntos que contenham as mesmas partículas.

O número de diferentes combinações de  $n$  partículas,  $n$  partículas,  $k$  por vez e sem repetições é dado pelo coeficiente binomial

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Se for permitida a repetição, o número é

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

No número  $n!/(n-k)!$  de permutações de  $n$  partículas,  $k$  por vez, temos de dividir pelo número  $k!$  de permutações dos grupos de  $k$  partículas porque sua ordem não importa em uma combinação. Isso prova nossa primeira afirmação. A segunda é demonstrada por indução matemática.

Em Mecânica Estatística, perguntamos de quantos modos podemos colocar  $n$  partículas dentro de  $k$  caixas, de modo que haja  $n_i$  partículas (distinguíveis) na  $i$ -ésima caixa, sem considerar a ordem em cada caixa, com  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . Contando como antes, há  $n$  chances de selecionar a primeira partícula,  $n-1$  para pegar a segunda, etc., mas as  $n_1!$  permutações dentro da primeira caixa são descontadas e  $n_2!$  permutações dentro da segunda caixa são desconsideradas, etc. Portanto, o número de combinações é

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Em Mecânica Estatística, partículas que obedecem à estatística de:

- Maxwell-Boltzmann (MB) são distinguíveis, sem restrição a seu número em cada estado;
- Bose-Einstein (BE) são indistinguíveis, sem nenhuma restrição ao número de partículas em cada estado quântico;
- Fermi-Dirac (FD) são indistinguíveis, com no máximo uma partícula por estado.

Por exemplo, colocando essas três partículas em quatro caixas, há  $4^3$  arranjos igualmente possíveis para o caso MB, porque cada partícula pode ser colocada em qualquer caixa de quatro modos, o que dá um total de  $4^3$  chances. Para a estatística BE, o número de combinações com repetições é  $\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$  para o caso Bose-Einstein. Para a estatística FD, é  $\binom{3+1}{3} = \binom{4}{3}$ . De modo mais geral, para estatística MB o número de arranjos distintos de  $n$  partículas entre  $k$  estados (caixas) é  $k^n$ , para estatística BE é  $\binom{n+k-1}{n}$  e para estatística FD é  $\binom{k}{n}$ .

### Exercícios

- 19.1.1 Uma carta é retirada de um baralho embaralhado. (a) Qual é a probabilidade de ela ser preta, (b) um nove vermelho ou (c) uma rainha de espadas?
- 19.1.2 Ache a probabilidade de tirar dois reis de um baralho embaralhado (a) se a primeira carta for devolvida ao baralho antes de tirar a segunda, e (b) se a primeira carta não for devolvida ao baralho após ser tirada.
- 19.1.3 Quando são jogados dois dados, qual é a probabilidade de (a) sair um número menor do que 4 ou (b) um número maior ou igual a 4, porém menor do que 6?
- 19.1.4 Jogando três dados não-viciados, qual é a probabilidade de obter seis pontos?
- 19.1.5 Determine a probabilidade  $P(A \cap B \cap C)$  em termos de  $P(A), P(B), P(C)$  etc.



**19.1.6** Determine diretamente ou por indução matemática a probabilidade de uma distribuição de  $N$  partículas (Maxwell-Boltzmann) em  $k$  caixas com  $N_1$  na caixa 1,  $N_2$  na caixa 2,  $\dots$ ,  $N_k$  na  $k$ -ésima caixa para quaisquer números  $N_j \geq 1$ , com  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ ,  $k < N$ . Repita essa mesma operação para partículas de Fermi-Dirac e de Bose-Einstein.

**19.1.7** Mostre que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

**19.1.8** Determine a probabilidade de um inteiro positivo  $n \leq 100$  ser divisível por um número primo  $p \leq 100$ . Verifique seu resultado para  $p = 3, 5, 7$ .

**19.1.9** Ponha duas partículas que obedecem à estatística de Maxwell-Boltzmann (Fermi-Dirac ou Bose-Einstein) em três caixas. Há quantos modos em cada caso?

## 19.2 Variáveis Aleatórias

Cada vez que lançamos um dado, damos à tentativa um número  $i = 1, 2, \dots$  e observamos o ponto  $x_i = 1$  ou 2, 3, 4, 5, 6, com probabilidade  $1/6$ . Se  $i$  denotar o número da tentativa, então  $x_i$  é uma variável aleatória discreta que assume valores discretos de 1 a 6, com uma probabilidade definida  $P(x_i) = 1/6$ .

### Exemplo 19.2.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Se lançarmos dois dados e registrarmos a soma dos pontos mostrada em cada tentativa, então esta soma também é uma variável aleatória discreta, que assume o valor 2 quando ambos os dados mostram 1 com probabilidade  $(1/6)^2$ ; o valor 3, quando um dado tem 1 e o outro 2, por conseguinte, com probabilidade  $(1/6)^2 + (1/6)^2 = 1/18$ ; o valor 4, quando ambos os dados têm 2 ou um deles tem 1 e o outro 3, portanto, com probabilidade  $(1/6)^2 + (1/6)^2 + (1/6)^2 = 1/12$ ; o valor 5, com probabilidade  $4(1/6)^2 = 1/9$ ; o valor 6, com probabilidade  $5/36$ ; o valor 7, com a probabilidade máxima,  $6(1/6)^2 = 1/6$ ; até o valor 12, quando ambos os dados mostram 6, pontos com probabilidade  $(1/6)^2$ . Essa distribuição de probabilidade é simétrica em torno de 7. Essa simetria é óbvia pela Figura 19.3 e se torna visível em termos algébricos quando escrevemos as partes lineares ascendentes e descendentes como

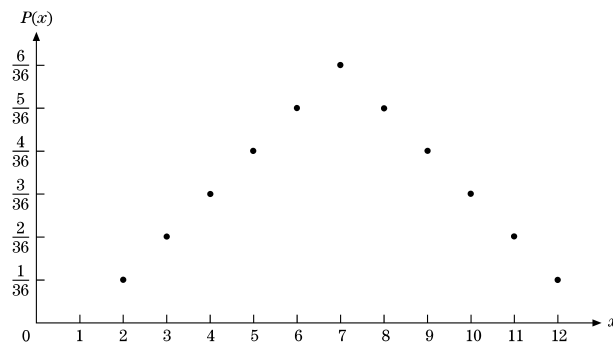


Figura 19.3: Distribuição de probabilidade  $P(x)$  da soma de pontos quando são lançados dois dados.

$$P(x) = \frac{x-1}{36} = \frac{6-(7-x)}{36}, \quad x = 2, 3, \dots, 7,$$

$$P(x) = \frac{13-x}{36} = \frac{6+(7-x)}{36}, \quad x = 7, 8, \dots, 12.$$

Então, resumindo: ■

- Os diferentes valores  $x_i$  que uma variável aleatória  $X$  assume denotam e distinguem os eventos no espaço amostral de um experimento; cada evento ocorre por acaso com a probabilidade  $P(X = x_i) = p_i \geq 0$ , que é uma função da variável aleatória  $X$ . Uma variável aleatória  $X(e_i) = x_i$  é definida no espaço amostral, isto é, para os eventos  $e_i \in S$ .

- Definimos a densidade de probabilidade  $f(x)$  de uma **variável aleatória contínua**  $X$  como

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x) dx, \tag{19.9}$$

isto é,  $f(x) dx$  é a probabilidade de  $X$  se encontrar no intervalo  $x \leq X \leq x + dx$ . Para  $f(x)$  ser uma densidade de probabilidade, ela tem de satisfazer  $f(x) \geq 0$  e  $\int f(x) dx = 1$ . A generalização para distribuições de probabilidade que dependem de diversas variáveis aleatórias é direta. Há inúmeros exemplos na Física Quântica.

**Exemplo 19.2.2** VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA: ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

A Mecânica Quântica dá a probabilidade  $|\psi|^2 d^3r$  de encontrar um elétron  $1s$  em um átomo de hidrogênio em volume  $d^3r$ , em que  $\psi = Ne^{-r/a}$  é a função de onda que é normalizada para

$$1 = \int |\psi|^2 dV = 4\pi N^2 \int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = \pi a^3 N^2, \quad dV = r^2 dr d\cos\theta d\varphi,$$

sendo o elemento de volume e  $a$  o raio de Bohr. Achamos a integral radial por integração repetida por partes ou elevando-a para a função gama

$$\int_0^\infty e^{-2r/a} r^2 dr = \left(\frac{a}{2}\right)^3 \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = \frac{a^3}{8} \Gamma(3) = \frac{a^3}{4}.$$

Aqui, todos os pontos no espaço constituem a amostra e representam três variáveis aleatórias, mas a densidade de probabilidade  $|\psi|^2$  nesse caso depende somente da variável radial por causa da simetria esférica do estado  $1s$ .

Uma medida para o tamanho do átomo H é dada pela distância radial média entre o elétron e o próton no centro, o que em Mecânica Quântica é denominado **valor esperado**:

$$\langle 1s|r|1s \rangle = \int r|\psi|^2 dV = 4\pi N^2 \int_0^\infty r e^{-2r/a} r^2 dr = \frac{3}{2}a.$$

Em breve definiremos esse conceito para distribuições de probabilidade arbitrárias. ■

- Uma variável aleatória que assume somente valores discretos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , respectivamente, é denominada variável aleatória discreta, portanto  $\sum_i p_i = 1$ . Se um “experimento” ou tentativa for realizada, algum resultado deve ocorrer, com probabilidade unitária.
- Se os valores compreenderem uma faixa contínua de valores  $a \leq x \leq b$ , então estamos tratando com uma variável aleatória contínua, cuja distribuição de probabilidade pode ser ou não uma função também contínua.

Quando medimos uma quantidade  $x$   $n$  vezes, obtendo os valores  $x_j$ , definimos o **valor médio**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \tag{19.10}$$

das tentativas, também denominado **média** ou **valor esperado**. Essa fórmula admite que cada valor observado  $x_i$  é igualmente provável e ocorre com probabilidade  $1/n$ . Essa conexão é a ligação fundamental entre dados experimentais e a teoria da probabilidade. Essa observação e a experiência prática sugerem definir o **valor médio para uma variável aleatória discreta**  $X$  como

$$\langle X \rangle \equiv \sum_i x_i p_i, \tag{19.11}$$

e para uma **variável aleatória contínua** caracterizada por densidade de probabilidade  $f(x)$  como

$$\langle X \rangle = \int x f(x) dx. \tag{19.12}$$

Essas médias são lineares. Outras notações existentes na literatura são  $\bar{X}$  e  $E(X)$ .

A utilização da média aritmética  $\bar{x}$  de  $n$  medidas como o valor médio é sugerida pela simplicidade e pura experiência, admitindo, mais uma vez, igual probabilidade para cada  $x_i$ . Mas por que não consideramos a média geométrica

$$x_g = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{1/n} \tag{19.13}$$

<sup>3</sup>Note que  $|\psi|^2 4\pi r^2 dr$  dá a probabilidade para o elétron ser encontrado entre  $r$  e  $r + dr$ , em qualquer ângulo.





ou a média harmônica  $x_h$  determinada pela relação

$$\frac{1}{x_h} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right), \quad (19.14)$$

ou aquele valor  $\tilde{x}$  que minimiza a soma dos desvios absolutos  $|x_i - \tilde{x}|$ ? Aqui, considera-se que os  $x_i$  aumentam monotonicamente. Quando construímos um gráfico de  $O(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} |x_i - x|$ , como na Figura 19.4a, para um número ímpar de pontos, percebemos que ele tem um mínimo em seu valor central,  $i = n$ , enquanto para um número par de pontos  $E(x) = \sum_{i=1}^{2n} |x_i - x|$  é plano em sua região central, como mostra a Figura 19.4b. Essas propriedades tornam essas funções inaceitáveis para determinar valores médios. Em vez disso, minimizamos a soma dos quadrados dos desvios,

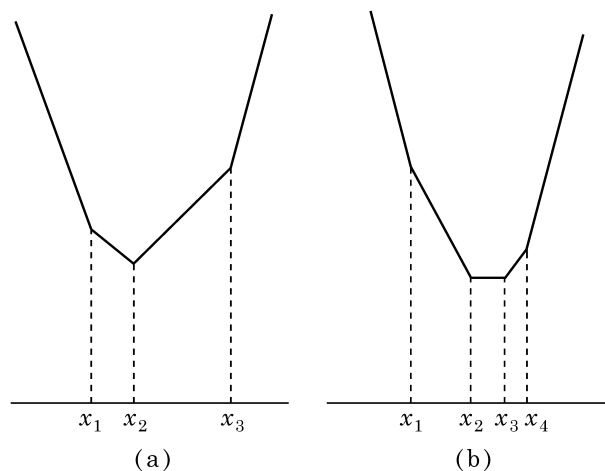


Figura 19.4: (a)  $\sum_{i=1}^3 |x_i - x|$  para um número ímpar de pontos; (b)  $\sum_{i=1}^4 |x_i - x|$  para um número par de pontos.

$$\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 = \text{mínimo}, \quad (19.15)$$

e igualando a derivada a zero temos  $2 \sum_i (x - x_i) = 0$ , ou

$$x = \frac{1}{n} \sum_i x_i \equiv \bar{x},$$

isto é, a média aritmética. Ela tem outra propriedade importante: se denotarmos os desvios por  $v_i = x_i - \bar{x}$ , então,  $\sum_i v_i = 0$ , isto é, a soma dos desvios positivos é igual à soma dos desvios negativos. Esse princípio da minimização da soma dos desvios ao quadrado, denominado **método dos mínimos quadrados**, se deve a C. F. Gauss, entre outros.

O grau de proximidade entre o ajuste de um conjunto de pontos de dados e o valor médio depende da dispersão das medidas individuais em relação a essa média. Novamente, rejeitamos a soma dos desvios  $\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|/n$  como uma medida da dispersão porque ela seleciona a medida central como o melhor valor sem nenhuma boa razão. Uma definição mais apropriada da dispersão é a média dos desvios em relação à média, ao quadrado, ou **desvio padrão**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

em que a raiz quadrada é motivada por análise dimensional.

### Exemplo 19.2.3 DESVIO PADRÃO DE MEDIDAS

Das medidas  $x_1 = 7, x_2 = 9, x_3 = 10, x_4 = 11, x_5 = 13$ , extraímos  $\bar{x} = 10$  para o valor médio e  $\sigma = \sqrt{(9 + 1 + 1 + 9)/4} = 2,2361$  para o desvio padrão, ou dispersão, usando a fórmula experimental (19.2) porque as probabilidades não são conhecidas. ■

Há ainda outra interpretação da variação padrão, em termos da soma dos quadrados das diferenças de medidas

$$\begin{aligned} \sum_{i < k} (x_i - x_k)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (x_i^2 + x_k^2 - 2x_i x_k) \\ &= \frac{1}{2} (2n^2 \langle x^2 \rangle - 2n^2 \langle x \rangle^2) = n^2 \sigma^2, \end{aligned} \tag{19.16}$$

porque multiplicando o quadrado na definição de  $\sigma^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \frac{2\langle x \rangle}{n} \sum_i x_i + \langle x \rangle^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \end{aligned} \tag{19.17}$$

Essa fórmula é freqüentemente usada e amplamente aplicada para  $\sigma^2$ .

Agora estamos prontos para generalizar a dispersão em um conjunto de  $n$  medições com igual probabilidade  $1/n$  para a **variância** de uma distribuição de probabilidade arbitrária. Para uma variável aleatória discreta  $X$  com probabilidades  $p_i$  em  $X = x_i$ , definimos a **variância**

$$\sigma^2 = \sum_j (x_j - \langle X \rangle)^2 p_j, \tag{19.18}$$

e, de modo semelhante, para uma distribuição de probabilidade contínua

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f(x) dx. \tag{19.19}$$

Essas definições implicam o seguinte.

**TEOREMA:** Se uma variável aleatória  $Y = aX + b$  estiver linearmente relacionada com  $X$ , então podemos derivar imediatamente o valor médio  $\langle Y \rangle = a\langle X \rangle + b$  e a variância  $\sigma^2(Y) = a^2\sigma^2(X)$  dessas definições.

Provamos esse teorema somente para uma distribuição contínua e deixamos o caso de uma variável aleatória discreta como exercício para o leitor. Para a probabilidade infinitesimal, sabemos que  $f(x) dx = g(y) dy$  com  $y = ax + b$ , porque a transformação linear tem de preservar a probabilidade, portanto

$$\langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx = a\langle X \rangle + b,$$

uma vez que  $\int f(x) dx = 1$ . De modo semelhante, obtemos para a variância

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle Y \rangle)^2 g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b - a\langle X \rangle - b)^2 f(x) dx \\ &= a^2\sigma^2(X), \end{aligned}$$

após substituir nosso resultado pelo valor médio  $\langle Y \rangle$ .

Finalmente, provamos a **desigualdade geral de Chebychev**

$$P(|x - \langle X \rangle| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \tag{19.20}$$

que demonstra por que o desvio padrão serve como uma medida da dispersão de uma distribuição de probabilidade arbitrária em relação a seu valor médio  $\langle X \rangle$  e mostra por que dados experimentais ou outros dados costumam ser caracterizados conforme sua dispersão por números de desvio padrão. Primeiro mostramos a desigualdade mais simples

$$P(Y \geq K) \leq \frac{\langle Y \rangle}{K}$$



para uma variável aleatória contínua  $Y$  cujos valores  $y \geq 0$ . (A prova para uma variável aleatória discreta segue linhas semelhantes.) Essa desigualdade resulta de

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \int_0^\infty yf(y) dy = \int_0^K yf(y) dy + \int_K^\infty yf(y) dy \\ &\geq \int_K^\infty yf(y) dy \geq K \int_K^\infty f(y) dy = KP(Y \geq K). \end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos o mesmo método à integral positiva de variância

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int (x - \langle X \rangle)^2 f(x) dx \geq \int_{|x - \langle X \rangle| \geq k\sigma} (x - \langle X \rangle)^2 f(x) dx \\ &\geq k^2 \sigma^2 \int_{|x - \langle X \rangle| \geq k\sigma} f(x) dx = k^2 \sigma^2 P(|x - \langle X \rangle| \geq k\sigma), \end{aligned}$$

decrecendo em primeiro lugar o lado direito, omitindo a parte da integral positiva com  $|x - \langle X \rangle| \leq k\sigma$  e então substituindo novamente  $(x - \langle X \rangle)^2$  na integral remanescente por seu limite mais baixo,  $k^2 \sigma^2$ . Isso prova a desigualdade de Chebychev. Para  $k = 3$ , temos a estimativa convencional de três desvios padrão

$$P(|x - \langle X \rangle| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}. \tag{19.21}$$

A generalização do valor médio para momentos mais altos de distribuições de probabilidade em relação ao valor médio  $\langle X \rangle$  é direta:

$$\langle (X - \langle X \rangle)^k \rangle = \sum_j (x_j - \langle X \rangle)^k p_j, \quad \text{distribuição discreta,} \tag{19.22}$$

$$\langle (X - \langle X \rangle)^k \rangle = \int_{-\infty}^\infty (x - \langle X \rangle)^k f(x) dx, \quad \text{distribuição contínua.}$$

**A função geradora de momento**

$$\langle e^{tX} \rangle = \int e^{tx} f(x) dx = 1 + t\langle X \rangle + \frac{t^2}{2!} \langle X^2 \rangle + \dots \tag{19.23}$$

é uma soma ponderada dos momentos da variável aleatória contínua  $X$  com a substituição da expansão de Taylor das funções exponenciais. Assim,  $\langle X \rangle = \frac{d\langle e^{tX} \rangle}{dt} \Big|_{t=0}$ . Note que, aqui, os momentos não são relativos a seu valor esperado; eles são denominados **momentos centrais**. O enésimo momento central,  $\langle X^n \rangle = \frac{d^n \langle e^{tX} \rangle}{dt^n} \Big|_{t=0}$ , é dado pela derivada de enésima ordem da função geradora de momento em  $t = 0$ . Por uma mudança do parâmetro  $t \rightarrow it$ , a função geradora de momento é relacionada com a **função característica**  $\langle e^{itX} \rangle$ , que é a freqüentemente utilizada transformada de Fourier da densidade de probabilidade  $f(x)$ .

Além do mais, valores médios, momentos e variância podem ser definidos de modo semelhante para distribuições de probabilidade que dependem de diversas variáveis aleatórias. Por simplicidade, vamos restringir nossa atenção a duas variáveis contínuas aleatórias  $X, Y$  e apresentar uma lista das quantidades correspondentes:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty x f(x, y) dx dy, \\ \langle Y \rangle &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty y f(x, y) dx dy, \end{aligned} \tag{19.24}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x - \langle X \rangle)^2 f(x, y) dx dy, \\ \sigma^2(Y) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (y - \langle Y \rangle)^2 f(x, y) dx dy. \end{aligned} \tag{19.25}$$

Diz-se que duas variáveis aleatórias são **independentes se a densidade de probabilidade**  $f(x, y)$  **é fatorada** para um produto  $f(x)g(y)$  de distribuições de probabilidade de uma variável aleatória cada.

A covariância, definida como

$$\text{cov}(X, Y) = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle, \tag{19.26}$$

é uma medida do grau de correlação (ou de relação) entre as variáveis aleatórias  $X$ ,  $Y$ : é zero para variáveis aleatórias independentes porque

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \int (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) f(x, y) dx dy \\ &= \int (x - \langle X \rangle) f(x) dx \int (y - \langle Y \rangle) g(y) dy = (\langle X \rangle - \langle X \rangle)(\langle Y \rangle - \langle Y \rangle) = 0. \end{aligned}$$

A covariância normalizada  $\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ , que tem valores entre  $-1$  e  $+1$ , costuma ser denominada **correlação**.

Para demonstrar que a correlação é limitada por

$$-1 \leq \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \leq 1$$

, analisamos o valor médio positivo

$$\begin{aligned} Q &= \langle [u(X - \langle X \rangle) + v(Y - \langle Y \rangle)]^2 \rangle \\ &= u^2 \langle [X - \langle X \rangle]^2 \rangle + 2uv \langle [X - \langle X \rangle][Y - \langle Y \rangle] \rangle + v^2 \langle [Y - \langle Y \rangle]^2 \rangle \\ &= u^2 \sigma(X)^2 + 2uv \text{cov}(X, Y) + v^2 \sigma(Y)^2 \geq 0, \end{aligned} \tag{19.27}$$

em que  $u$ ,  $v$  são números, não funções. Para essa forma quadrática ser não-negativa, seu discriminante deve obedecer a  $\text{cov}(X, Y)^2 - \sigma(X)^2 \sigma(Y)^2 \leq 0$ , que prova a desigualdade desejada.

A utilidade da correlação como uma medida quantitativa é salientada pelo seguinte.

**TEOREMA:**  $P(Y = aX + b) = 1$  é válido se, e somente se, a correlação for igual a  $\pm 1$ .

Esse teorema afirma que uma correlação  $\pm 100\%$  entre  $X$ ,  $Y$  implica não apenas alguma relação funcional entre ambas as variáveis aleatórias, mas também uma **relação linear** entre elas. Denotamos por  $\langle B|A \rangle$  o valor esperado da distribuição de probabilidade condicional  $P(B|A)$ .

Para provar essa forte propriedade de correlação, aplicamos a lei da decomposição de Bayes (Equação (19.8)) ao valor médio e variância da variável aleatória  $Y$ , admitindo primeiro que  $P(Y = aX + b) = 1$ , portanto,  $P(Y \neq aX + b) = 0$ . Isso resulta em

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= P(Y = aX + b) \langle Y|Y = aX + b \rangle \\ &\quad + P(Y \neq aX + b) \langle Y|Y \neq aX + b \rangle \\ &= \langle aX + b \rangle = a \langle X \rangle + b, \\ \sigma(Y)^2 &= P(Y = aX + b) \langle [Y - \langle Y \rangle]^2 | Y = aX + b \rangle \\ &\quad + P(Y \neq aX + b) \langle [Y - \langle Y \rangle]^2 | Y \neq aX + b \rangle \\ &= \langle [aX + b - \langle Y \rangle]^2 \rangle = \langle a^2 [X - \langle X \rangle]^2 \rangle = a^2 \sigma(X)^2, \end{aligned}$$

substituindo  $\langle Y \rangle = a \langle X \rangle + b$ . De modo semelhante, obtemos  $\text{cov}(X, Y) = a^2 \sigma(X)^2$ . Esses resultados mostram que a correlação é  $\pm 1$ .

Ao contrário, começamos de  $\text{cov}(X, Y)^2 = \sigma(X)^2 \sigma(Y)^2$ . Por conseguinte, a forma quadrática na Equação (19.27) deve ser zero para (praticamente) todo  $x$  para algum  $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ :

$$\langle [u_0(X - \langle X \rangle) + v_0(Y - \langle Y \rangle)]^2 \rangle = 0.$$

Como o argumento desse valor médio é definido positivo, essa relação é satisfeita somente se  $P(u_0(X - \langle X \rangle) + v_0(Y - \langle Y \rangle) = 0) = 1$ , o que significa que  $Y$  e  $X$  são linearmente relacionadas.

Quando eliminamos uma variável aleatória por integração, ficamos com a distribuição de probabilidade da outra variável aleatória,

$$F(x) = \int f(x, y) dy \quad \text{ou} \quad G(y) = \int f(x, y) dx, \tag{19.28}$$

e de modo análogo para distribuições de probabilidade discretas. Quando uma ou mais variáveis aleatórias são eliminadas por integração, a distribuição de probabilidade remanescente é denominada **marginal**, motivada pelos aspectos geométricos de projeção. A demonstração de que essas distribuições marginais satisfazem todos os requisitos de distribuições de probabilidade adequadamente normalizadas é direta.

Se estivermos interessados na distribuição da variável aleatória  $X$  para um valor definido  $y = y_0$  da outra variável aleatória, então estamos tratando com uma **distribuição de probabilidade condicional**  $P(X = x|Y = y_0)$ . A densidade de probabilidade contínua correspondente é  $f(x, y_0)$ .



### Exemplo 19.2.4 RETIRADAS REPETIDAS DE CARTAS

Quando tiramos cartas repetidas vezes, embaralhamos o baralho porque queremos ter certeza de que esses eventos sejam sempre independentes. Portanto, tiramos a primeira carta aleatoriamente de um baralho de *bridge* contendo 52 cartas e então a devolvemos a um lugar aleatório. Agora repetimos o processo para uma segunda carta. Então, embaralhamos novamente as cartas, etc. Agora definimos as variáveis aleatórias

- $X$  = número de cartas denominadas honras, isto é, as cartas 10, valetes, rainhas, reis ou ases;
- $Y$  = número de cartas 2 ou 3.

Em uma única retirada a probabilidade de tirar uma carta entre o 10 e o ás é  $a = 5 \cdot 4/52 = 5/13$  e  $b = 2 \cdot 4/52 = 2/13$ , para a retirada de cartas 2 ou 3 e  $c = (13 - 5 - 2)/13 = 6/13$ , para qualquer outra carta, com  $a + b + c = 1$ .

Em duas retiradas  $X$  e  $Y$  podem ser  $x = 0 = y$ , quando não aparecer nenhuma carta entre o 10 e o ás ou nenhuma carta 2 ou 3. Esse caso tem probabilidade  $c^2$ . Em geral,  $X, Y$  têm os valores 0, 1 e 2, portanto,  $0 \leq x + y \leq 2$ , porque teremos retirado duas cartas. A função probabilidade de  $(X = x, Y = y)$  é dada pelo produto das probabilidades das três possibilidades  $a^x, b^y, c^{2-x-y}$  vezes o número de distribuições (ou permutações) de duas cartas sobre os três casos com probabilidades  $a, b, c$ , que é  $2!/[x!y!(2-x-y)!]$ . Esse número é o coeficiente da potência  $a^x b^y c^{2-x-y}$  na expansão binomial generalizada de todas as possibilidades em duas retiradas com probabilidade 1:

$$1 = (a + b + c)^2 = \sum_{0 \leq x+y \leq 2} \frac{2!}{x!y!(2-x-y)!} a^x b^y c^{2-x-y} = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc). \quad (19.29)$$

Por conseguinte, a distribuição de probabilidade de nossas variáveis aleatórias discretas é dada por

$$f(X = x, Y = y) = \frac{2!}{x!y!(2-x-y)!} \left(\frac{5}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{6}{13}\right)^{2-x-y}, \quad x, y = 0, 1, 2; \quad 0 \leq x + y \leq 2, \quad (19.30)$$

ou, mais explicitamente, como

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \left(\frac{6}{13}\right)^2, & f(1, 0) &= 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{13} = \frac{60}{13^2}, \\ f(2, 0) &= \left(\frac{5}{13}\right)^2, & f(0, 1) &= 2 \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{6}{13} = \frac{24}{13^2}, \\ f(0, 2) &= \left(\frac{2}{13}\right)^2, & f(1, 1) &= 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{13} = \frac{20}{13^2}. \end{aligned}$$

A distribuição de probabilidade é adequadamente normalizada conforme a Equação (19.29). Seus valores esperados são dados por

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \sum_{0 \leq x+y \leq 2} x f(x, y) = f(1, 0) + f(1, 1) + 2f(2, 0) \\ &= \frac{60}{13^2} + \frac{20}{13^2} + 2 \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{130}{13^2} = \frac{10}{13} = 2a, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \sum_{0 \leq x+y \leq 2} y f(x, y) = f(0, 1) + f(1, 1) + 2f(0, 2) \\ &= \frac{24}{13^2} + \frac{20}{13^2} + 2 \left(\frac{2}{13}\right)^2 = \frac{52}{13^2} = \frac{4}{13} = 2b, \end{aligned}$$

como esperado, porque estamos retirando uma carta duas vezes. As variâncias são

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \sum_{0 \leq x+y \leq 2} \left(x - \frac{10}{13}\right)^2 f(x, y) \\ &= \left(\frac{10}{13}\right)^2 [f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2)] \\ &\quad + \left(\frac{3}{13}\right)^2 [f(1, 0) + f(1, 1)] + \left(\frac{16}{13}\right)^2 f(2, 0) \\ &= \frac{10^2 \cdot 64 + 3^2 \cdot 80 + 16^2 \cdot 5^2}{13^4} = \frac{4^2 \cdot 5 \cdot 169}{13^4} = \frac{80}{13^2}, \\ \sigma^2(Y) &= \sum_{0 \leq x+y \leq 2} \left(y - \frac{4}{13}\right)^2 f(x, y) \\ &= \left(\frac{4}{13}\right)^2 [f(0, 0) + f(1, 0) + f(2, 0)] \\ &\quad + \left(\frac{9}{13}\right)^2 [f(0, 1) + f(1, 1)] + \left(\frac{22}{13}\right)^2 f(0, 2) \\ &= \frac{4^2 \cdot 11^2 + 9^2 \cdot 44 + 22^2 \cdot 2^2}{13^4} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 169}{13^4} = \frac{44}{13^2}. \end{aligned}$$

É razoável que  $\sigma^2(Y) < \sigma^2(X)$ , porque  $Y$  assume somente dois valores, enquanto  $X$  varia sobre as quatro honras. A covariância é dada por

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \sum_{0 \leq x+y \leq 2} \left(x - \frac{10}{13}\right) \left(y - \frac{4}{13}\right) f(x, y) \\ &= \frac{10 \cdot 4}{13^2} \cdot \frac{6^2}{13^2} - \frac{10 \cdot 9}{13^2} \cdot \frac{24}{13^2} - \frac{10 \cdot 22}{13^2} \cdot \frac{4}{13^2} - \frac{3 \cdot 4}{13^2} \cdot \frac{60}{13^2} \\ &\quad + \frac{3 \cdot 9}{13^2} \cdot \frac{20}{13^2} - \frac{16 \cdot 4}{13^2} \cdot \frac{5^2}{13^2} = -\frac{20}{13^4} = -\frac{20}{13^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a correlação das variáveis aleatórias  $X, Y$  é dada por

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\frac{20}{8\sqrt{5} \cdot 11} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{11}} = -0,3371,$$

o que significa que há uma pequena correlação (negativa) entre essas variáveis aleatórias porque, se uma carta for uma honra, não pode ser um 2 ou um 3, e vice-versa.

Por fim, vamos determinar a distribuição marginal:

$$F(X = x) = \sum_{y=0}^2 f(x, y), \tag{19.31}$$

ou, explicitamente,

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) = \left(\frac{6}{13}\right)^2 + \frac{24}{13^2} + \left(\frac{2}{13}\right)^2 = \left(\frac{8}{13}\right)^2, \\ F(1) &= f(1, 0) + f(1, 1) = \frac{60}{13^2} + \frac{20}{13^2} = \frac{80}{13^2}, \\ F(2) &= f(2, 0) = \left(\frac{5}{13}\right)^2, \end{aligned}$$

que é adequadamente normalizada porque

$$F(0) + F(1) + F(2) = \frac{64 + 80 + 25}{13^2} = \frac{169}{13^2} = 1.$$



Seu valor médio é dado por

$$\langle X \rangle_F = \sum_{x=0}^2 xF(x) = F(1) + 2F(2) = \frac{80 + 2 \cdot 25}{13^2} = \frac{130}{13^2} = \frac{10}{13} = \langle X \rangle,$$

e sua variância

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \sum_{x=0}^2 \left(x - \frac{10}{13}\right)^2 F(x) = \left(\frac{10}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2 \frac{80}{13^2} + \left(\frac{16}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 \\ &= \frac{80 \cdot 169}{13^4} = \frac{80}{13^2} = \sigma^2(X). \end{aligned}$$

Pela definições, vemos que esses resultados em geral são válidos. ■

Por fim, abordamos a transformação de duas variáveis aleatórias  $X, Y$  em  $U(X, Y), V(X, Y)$ . Tratamos o caso contínuo e deixamos o caso discreto como um exercício. Se

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y); \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{19.32}$$

descreve a transformação e sua inversa, então a probabilidade permanece invariante e a integral da densidade se transforma de acordo com as regras de jacobianos, Capítulo 2, portanto, a densidade de probabilidade transformada se torna

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))|J|, \tag{19.33}$$

com o jacobiano

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{19.34}$$

### Exemplo 19.2.5 SOMA, PRODUTO E RAZÃO DE VARIÁVEIS

Vamos considerar três exemplos.

(1) A soma  $Z = X + Y$ , em que a transformação pode ser considerada

$$x = x, \quad z = x + y, \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

usando

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial(z - y)}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(z - x)}{\partial z} = 1,$$

portanto, a probabilidade é dada por

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx dz. \tag{19.35}$$

Se as variáveis aleatórias  $X, Y$  forem independentes com densidades  $f_1, f_2$ , então

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z - x) dx dz. \tag{19.36}$$

(2) O produto  $Z = XY$ , considerando  $X, Z$  as novas variáveis, leva ao jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x},$$

usando

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial(\frac{z}{y})}{\partial z} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\frac{z}{x})}{\partial z} = \frac{1}{x},$$

portanto, a probabilidade é dada por

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|} dz. \quad (19.37)$$

Se as variáveis aleatórias  $X, Y$  forem independentes com densidades  $f_1, f_2$ , então

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|} dz. \quad (19.38)$$

**(3) A razão**  $Z = \frac{X}{Y}$ , considerando  $Y, Z$  as novas variáveis, tem o jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} z & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -y,$$

usando

$$\frac{\partial(yz)}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial(yz)}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

portanto, a probabilidade é dada por

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f(yz, y) |y| dy dz. \quad (19.39)$$

Se as variáveis aleatórias  $X, Y$  forem independentes com densidades  $f_1, f_2$ , então,

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f_1(yz) f_2(y) |y| dy dz. \quad (19.40)$$

■

## Exercícios

- 19.2.1** Mostre que somar uma constante  $c$  a uma variável aleatória  $X$  altera o valor esperado  $\langle X \rangle$  por essa mesma constante, mas não altera a variância. Mostre também que multiplicar uma variável aleatória por uma constante multiplica ambas a média e a variância – por essa constante. Mostre que a variável aleatória  $X - \langle X \rangle$  tem valor médio zero.
- 19.2.2** Se  $\langle X \rangle, \langle Y \rangle$  são os valores médios de duas variáveis aleatórias independentes  $X, Y$ , qual é o valor esperado do produto  $X \cdot Y$ ?





- 19.2.3** Uma velocidade  $v_j = x_j/t_j$  é medida registrando as distâncias  $x_j$  nos tempos correspondentes  $t_j$ . Mostre que  $\bar{x}/\bar{t}$  é uma boa aproximação para a velocidade média  $v$ , contanto que todos os erros  $|x_j - \bar{x}| \ll |\bar{x}|$  e  $|t_j - \bar{t}| \ll |\bar{t}|$  sejam pequenos.
- 19.2.4** Defina a variável aleatória  $Y$  no Exemplo 19.2.4 como o número de 4s, 5s, 6s, 7s, 8s ou 9s. Então determine a correlação das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ .
- 19.2.5** Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias independentes com diferentes densidades de probabilidade e a função  $f(x, y)$  tem derivadas de qualquer ordem, expresse  $\langle f(X, Y) \rangle$  em termos de  $\langle X \rangle$  e  $\langle Y \rangle$ . Desenvolva a covariância e a correlação de modo semelhante.
- 19.2.6** Seja  $f(x, y)$  a densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias  $X, Y$ . Ache a variância  $\sigma^2(aX + bY)$ , em que  $a, b$  são constantes. O que acontece quando  $X, Y$  são independentes?
- 19.2.7** A probabilidade de uma partícula de um gás ideal percorrer uma pequena distância  $dx$  entre colisões é  $\sim e^{-x/f} dx$ , em que  $f$  é o caminho livre médio constante. Verifique que  $f$  é a distância média entre colisões e determine a probabilidade de um caminho livre de comprimento  $l \geq 3f$ .
- 19.2.8** Determine a densidade de probabilidade para uma partícula em movimento harmônico simples no intervalo  $-A \leq x \leq A$ .  
*Sugestão:* A probabilidade de a partícula estar entre  $x$  e  $x + dx$  é proporcional ao tempo que ela leva para atravessar o intervalo.

### 19.3 Distribuição Binomial

#### Exemplo 19.3.1 REPETIDOS LANÇAMENTOS DE DADOS

Qual é a probabilidade de sair três 6 em quatro lançamentos, sendo todas as tentativas independentes? Tirar um 6 em um único lançamento de um dado não-viciado tem probabilidade  $a = 1/6$ , e qualquer outra coisa tem probabilidade  $b = 5/6$  com  $a + b = 1$ . Seja a variável aleatória  $X = x$  o número de 6. Em quatro lançamentos,  $0 \leq x \leq 4$ . A distribuição de probabilidade  $f(X)$  é dada pelo produto das duas possibilidades,  $a^x$  e  $b^{4-x}$ , vezes o número de combinações de quatro lançamentos sobre os dois casos com probabilidades  $a, b$ . Esse número é o coeficiente da potência  $a^x b^{4-x}$  na expansão binomial de todas as possibilidades em quatro lançamentos com probabilidade 1:

$$1 = (a + b)^4 = \sum_{x=0}^4 \frac{4!}{x!(4-x)!} a^x b^{4-x} = a^4 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2. \quad (19.41)$$

Por conseguinte, a distribuição de probabilidade de nossa variável aleatória discreta é dada por

$$f(X = x) = \frac{4!}{x!(4-x)!} a^x b^{4-x}, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

ou, mais explicitamente, por

$$f(0) = b^4, \quad f(1) = 4ab^3, \quad f(2) = 6a^2b^2, \quad f(3) = 4a^3b, \quad f(4) = a^4.$$

A distribuição de probabilidade é adequadamente normalizada conforme a Equação (19.41). A probabilidade de tirar três 6 em quatro lançamentos é

$$4a^3b = 4 \frac{5/6}{6^3} = \frac{5}{4 \cdot 3^4},$$

razoavelmente pequena. ■

Esse caso tratou com tentativas repetidas independentes, cada uma com dois resultados possíveis de probabilidade constante  $p$  para um sucesso e  $q = 1 - p$  para um fracasso, e é típico de muitas aplicações, tais como produtos defeituosos, acertar ou errar um alvo e degradação de átomos radioativos. A generalização para  $X = x$  sucessos em  $n$  tentativas é dada pela **distribuição binomial de probabilidade**

$$f(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad (19.42)$$

usando os coeficientes binomiais (veja o Capítulo 5). Essa distribuição é normalizada para a probabilidade 1 de todas as possibilidades em  $n$  tentativas, como se pode ver pela expansão binomial

$$1 = (p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + \dots + npq^{n-1} + q^n. \quad (19.43)$$

A Figura 19.5 mostra histogramas típicos. A variável aleatória  $X$  assume os valores  $0, 1, 2, \dots, n$  em etapas discretas e também pode ser vista como uma composição  $\sum_i X_i$  de  $n$  variáveis aleatórias independentes  $X_i$ , uma para cada tentativa, que tem o valor 0 para um fracasso e 1 para um sucesso. Essa observação nos permite empregar funções geradoras de momento

$$\langle e^{tX_i} \rangle = P(X_i = 0) + e^t P(X_i = 1) = q + pe^t \quad (19.44)$$

e

$$\langle e^{tX} \rangle = \prod_i \langle e^{tX_i} \rangle = (pe^t + q)^n, \quad (19.45)$$

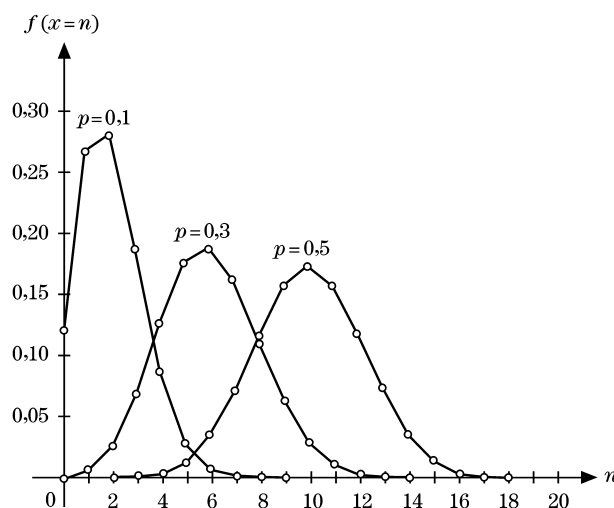


Figura 19.5: Distribuições binomiais de probabilidade para  $n = 20$  e  $p = 0, 1; 0, 3; 0, 5$ .

das quais podemos ler os valores médios e momentos mais altos diferenciando e fazendo  $t = 0$ . Usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle e^{tX} \rangle}{\partial t} &= npe^t (pe^t + q)^{n-1}, \\ \frac{\partial \langle e^{tX} \rangle}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \langle X \rangle = \sum_i x_i f(x_i) = np, \\ \frac{\partial^2 \langle e^{tX} \rangle}{\partial t^2} &= npe^t (pe^t + q)^{n-1} + n(n-1)p^2 e^{2t} (pe^t + q)^{n-2}, \\ \langle X^2 \rangle &= \frac{\partial^2 \langle e^{tX} \rangle}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \sum_i x_i^2 f(x_i) = np + n(n-1)p^2, \end{aligned}$$

obtemos, com a Equação (19.19),

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 \\ &= np(1-p) = npq. \end{aligned} \quad (19.46)$$

A Figura 19.5 ilustra esses resultados com picos em  $x = np = 2, 6, 10$ , que ficam mais largos à medida que  $p$  cresce.



### Exercícios

- 19.3.1 Mostre que a variável  $X = x$  número de caras em  $n$  lançamentos de uma moeda é uma variável aleatória e determine sua distribuição de probabilidade. Descreva o espaço amostral. Qual é seu valor médio, a variância e o desvio padrão? Construa um gráfico da função probabilidade  $f(x) = n!/(x!(n-x)!2^n)$  para  $n = 10, 20, 30$ , usando *software* gráfico.
- 19.3.2 Construa o gráfico para a função probabilidade binomial para as probabilidades  $p = 1/6, q = 5/6$  e  $n = 6$  lançamentos de um dado.
- 19.3.3 Um fabricante de ferragens sabe que a probabilidade de produzir pregos em massa inclui uma pequena probabilidade  $p = 0,03$  de pregos defeituosos (o defeito mais comum são pregos sem ponta). Qual é a probabilidade de achar mais do que dois pregos defeituosos em uma caixa de 100 pregos vendida ao mercado?
- 19.3.4 Quatro cartas são retiradas de um baralho de *bridge* embaralhado. Qual é a probabilidade de que todas sejam vermelhas? Todas sejam de copas? Todas sejam honras? Compare as probabilidades quando as cartas são ou não devolvidas ao baralho em lugares aleatórios.
- 19.3.5 Mostre que para a distribuição binomial da Equação (19.42) o valor mais provável de  $x$  é  $np$ .

### 19.4 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson ocorre tipicamente em situações que envolvem um evento repetido a uma taxa constante de probabilidade e, por isso, esgota a população. A degradação de uma amostra radioativa é um caso em questão porque, uma vez degradada a partícula, ela não se degradará novamente. Se o tempo de observação  $dt$  for suficientemente pequeno de modo que a emissão de duas ou mais partículas seja desprezível, então a probabilidade de uma partícula ( $\text{He}^4$  em degradação  $\alpha$  ou um elétron em degradação  $\beta$ ) ser emitida é  $\mu dt$ , com  $\mu$  constante e  $\mu dt \ll 1$ . Podemos estabelecer uma relação de recursão para a probabilidade  $P_n(t)$  de observar  $n$  contagens durante um intervalo de tempo  $t$ . Para  $n > 0$ , a probabilidade  $P_n(t + dt)$  é composta de dois eventos mutuamente exclusivos, ou seja,  $n$  partículas são emitidas no tempo  $t$ , nenhuma em  $dt$  e (ii)  $n - 1$  partículas são emitidas no tempo  $t$ , uma em  $dt$ . Por conseguinte,

$$P_n(t + dt) = P_n(t)P_0(dt) + P_{n-1}(t)P_1(dt).$$

Aqui, substituímos a probabilidade de observar uma partícula,  $P_1(dt) = \mu dt$ , e nenhuma partícula,  $P_0(dt) = 1 - P_1(dt)$ , no tempo  $dt$ , o que resulta em

$$P_n(t + dt) = P_n(t)(1 - \mu dt) + P_{n-1}(t)\mu dt.$$

Assim, após rearranjar e dividir por  $dt$ , obtemos

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{P_n(t + dt) - P_n(t)}{dt} = \mu P_{n-1}(t) - \mu P_n(t). \tag{19.47}$$

Para  $n = 0$ , essa relação de recursão diferencial simplifica, porque não há nenhuma partícula nos tempos  $t$  e  $dt$  resultando em

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\mu P_0(t). \tag{19.48}$$

A EDO diz que partículas têm uma probabilidade de degradação constante e a degradação as remove da distribuição. Essa EDO integra para  $P_0(t) = e^{-\mu t}$ , se for usada a probabilidade de nenhuma partícula ser emitida durante um intervalo de tempo  $P_0(0) = 1$ . Aqui,  $P_0(0) = 1$  significa que não ocorre nenhuma degradação em  $t \leq 0$ .

Agora, voltamos à Equação (19.47), para  $n = 1$ ,

$$\dot{P}_1 = \mu(e^{-\mu t} - P_1), \quad P_1(0) = 0, \tag{19.49}$$

e resolvemos a equação homogênea, que é a mesma para  $P_1$ , como na Equação (19.48). Isso resulta em  $P_1(t) = \mu_1 e^{-\mu t}$ . Então resolvemos a EDO não-homogênea (Equação (19.49)) variando a constante  $\mu_1$  para achar  $\dot{\mu}_1 = \mu$ , portanto,  $P_1(t) = \mu t e^{-\mu t}$ . A solução geral é

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}, \tag{19.50}$$

como pode ser confirmado por substituição na Equação (19.47) e verificando as condições iniciais,  $P_n(0) = 0$ ,  $n > 0$ . Esse é um exemplo da distribuição de Poisson.

A distribuição de Poisson é definida com as probabilidades

$$p(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}, \quad X = n = 0, 1, 2, \dots, \tag{19.51}$$

e é exibida na Figura 19.6. A variável aleatória  $X$  é discreta. As probabilidades são adequadamente normalizadas porque  $e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = 1$ . O valor médio e a variância,

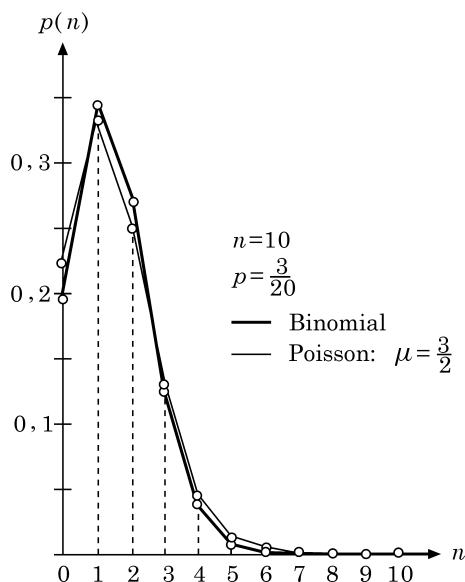


Figura 19.6: Distribuição de Poisson comparada com distribuição binomial.

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= e^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\mu^n}{n!} = \mu e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = \mu, \\ \sigma^2 &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \mu(\mu + 1) - \mu^2 = \mu, \end{aligned} \tag{19.52}$$

resultam da função característica

$$\langle e^{itX} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{\mu^n}{n!} = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{it})^n}{n!} = e^{\mu(e^{it} - 1)}$$

por diferenciação e fazendo  $t = 0$ , usando a Equação (19.19).

Uma distribuição de Poisson se torna uma boa aproximação da distribuição binomial para um número grande  $n$  de tentativas e pequena probabilidade  $p \sim \mu/n$ ,  $\mu$  uma constante.

**TEOREMA:** No limite  $n \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0$  permanece finito, a distribuição binomial  $np \rightarrow \mu$  se torna uma distribuição de Poisson.

Para provar esse teorema, aplicamos a fórmula de Stirling (Capítulo 8)  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$  para  $n$  grande aos fatoriais na Equação (19.42), mantendo  $x$  finito, enquanto  $n \rightarrow \infty$ . Para  $n \rightarrow \infty$ , isso resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-x)!} &\sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n-x}\right)^{n-x} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^x \left(\frac{n}{n-x}\right)^{n-x} \\ &\sim \left(\frac{n}{e}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n-x}\right)^{n-x} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^x e^x \sim n^x, \end{aligned}$$

e para  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , com  $np \rightarrow \mu$ :

$$(1-p)^{n-x} \sim \left(1 - \frac{pn}{n}\right)^n \sim \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \sim e^{-\mu}.$$



Por fim,  $p^x n^x \rightarrow \mu^x$ , portanto, no geral,

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \rightarrow \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (19.53)$$

que é uma distribuição de Poisson para a variável aleatória  $X = x$ , com  $0 \leq x < \infty$ . Esse teorema de limite é um exemplo particular das **leis dos grande números**.

### Exercícios

**19.4.1** Degradações radioativas são governadas pela distribuição de Poisson. Em um experimento de Rutherford-Geiger o número  $n_i$  de partículas  $\alpha$  emitidas é contado em  $n = 2,608$  intervalos de tempo de 7,5 segundos cada. Na Tabela 19.1  $n_i$  é o número de intervalos de tempo nos quais  $i$  partículas foram emitidas. Determine o número médio  $\lambda$  de partículas emitidas e compare os  $n_i$  da Tabela 19.1 com os  $np_i$  calculados pela distribuição de Poisson com valor médio  $\lambda$ .

**Tabela 19.1**

$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_i \rightarrow$	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

**19.4.2** Derive o desvio padrão de uma distribuição de Poisson de valor médio  $\mu$ .

**19.4.3** O número de partículas  $\alpha$  que decorrem de uma amostra de rádio é contado por minuto durante 40 horas. O número total é 5.000. Quantos intervalos de 1 minuto são esperados com (a) 2, (b) 5 partículas  $\alpha$ ?

**19.4.4** Para uma amostra radioativa são contados 10 decaimentos em média em 100 segundos. Use a distribuição de Poisson para estimar a probabilidade de contar 3 decaimentos em 10 segundos.

**19.4.5** O  $^{238}\text{U}$  tem uma meia-vida de  $4,51 \times 10^9$  anos. Sua série de decaimento termina com o isótopo de chumbo estável  $^{206}\text{Pb}$ . A razão entre o número de átomos de  $^{206}\text{Pb}$  e de  $^{238}\text{U}$  em uma amostra de rocha é medida como 0,0058. Estime a idade da rocha admitindo que todo o chumbo presente nela vem do decaimento inicial do  $^{238}\text{U}$ , o que determina a taxa de todo o processo de decaimento, porque as etapas subseqüentes ocorrem com rapidez muito maior.

*Sugestão:* A relação entre a decaimento constante  $\lambda$  na lei de decaimento  $N(t) = Ne^{-\lambda t}$  e o tempo de meia-vida  $T$  é  $T = \ln 2/\lambda$ .

Resposta:  $3,8 \times 10^7$  anos.

**19.4.6** Sabe-se que a probabilidade de acertar um alvo com um único tiro é de 20%. Se cinco tiros forem disparados independentemente, qual é a probabilidade de acertar o alvo ao menos uma vez?

**19.4.7** Sabe-se que um pedaço de urânio contém os isótopos  $^{235}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$  bem como 0,80 g de  $^{206}\text{Pb}$  por grama de urânio. Estime a idade do pedaço (portanto, Terra) em anos.

*Sugestão:* Admita que o chumbo vem somente do  $^{238}\text{U}$ . Use a constante de degradação do Exercício 19.4.5.

## 19.5 Distribuição Normal de Gauss

A distribuição de Gauss em forma de sino é definida pela densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad (19.54)$$

com valor médio  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Ela é, de longe, a mais importante distribuição de probabilidade contínua e é apresentada na Figura 19.7.

Ela é adequadamente normalizada porque, substituindo  $y = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ , obtemos

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$

De modo semelhante, substituindo  $y = x - \mu$ , vemos que

$$\langle X \rangle - \mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 0,$$

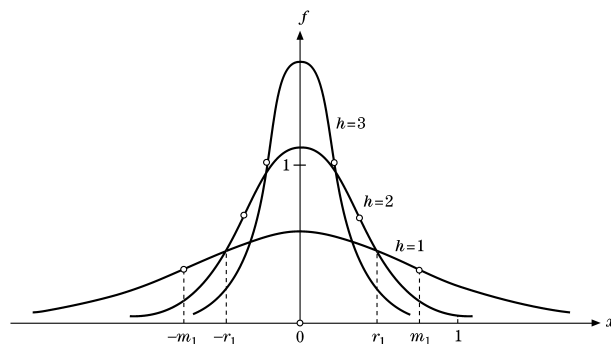


Figura 19.7: Distribuição normal de Gauss para valor médio zero e vários desvios padrão  $h = 1/\sigma\sqrt{2}$ .

sendo a integranda ímpar em  $y$ , de modo que a integral sobre  $y > 0$  cancela a integral sobre  $y < 0$ . De modo semelhante, verificamos que o desvio padrão é  $\sigma$ .

Pela distribuição normal (pela substituição  $y = \frac{x-\langle X \rangle}{\sigma}$ ),

$$\begin{aligned} P(|X - \langle X \rangle| > k\sigma) &= P\left(\frac{|X - \langle X \rangle|}{\sigma} > k\right) = P(|Y| > k) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_k^\infty e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \int_{k/\sqrt{2}}^\infty e^{-z^2} dz = \operatorname{erfc} \frac{k}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

podemos avaliar a integral para  $k = 1, 2, 3$  e assim extrair as seguintes relações numéricas para uma variável aleatória normalmente distribuída:

$$\begin{aligned} P(|X - \langle X \rangle| \geq \sigma) &\sim 0,3173, & P(|X - \langle X \rangle| \geq 2\sigma) &\sim 0,0455, \\ P(|X - \langle X \rangle| \geq 3\sigma) &\sim 0,0027, \end{aligned} \tag{19.55}$$

dentre as quais a última é interessante para comparar com a desigualdade de Chebychev (veja a Equação (19.21)) dando  $\leq 1/9$  para uma distribuição de probabilidade **arbitrária** em vez de  $\sim 0,0027$  para a regra dos  $3\sigma$  de distribuição **normal**.

**TEOREMA DA ADIÇÃO:** *Se as variáveis aleatórias  $X, Y$  têm as mesmas distribuições normais, isto é, o mesmo valor médio e a mesma variância, então  $Z = X + Y$  tem distribuição normal com duas vezes o valor médio e duas vezes a variância de  $X$  e  $Y$ .*

Para provar esse teorema, consideramos a densidade de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \text{com } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = 1,$$

sem perda de generalidade. Então, a densidade de probabilidade de  $(X, Y)$  é o produto

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Além disso, a Equação (19.36) dá a densidade para  $Z = X + Y$  como

$$g(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-z)^2/2} dx.$$

Completando o quadrado no expoente,

$$2x^2 - 2xz + z^2 = \left(x\sqrt{2} - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{z^2}{2},$$

obtemos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/4} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{2} - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dx.$$



Usando a substituição  $u = x - \frac{z}{\sqrt{2}}$ , constatamos que a integral se transforma em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{2} - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

portanto, a densidade para  $Z = X + Y$  é

$$g(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4}, \quad (19.56)$$

o que significa que tem valor médio zero e variância 2, duas vezes a de  $X$  e  $Y$ .

Em um limite especial, a distribuição de probabilidade discreta de Poisson guarda estreita relação com a distribuição contínua de Gauss. Esse teorema do limite é outro exemplo das **leis dos grandes números**, que muitas vezes são dominadas pela distribuição normal em forma de sino.

**TEOREMA:** Para  $n$  grande e valor médio  $\mu$ , a distribuição de Poisson se aproxima de uma distribuição de Gauss.

Para provar esse teorema para  $n \rightarrow \infty$ , aproximamos o fatorial na probabilidade de Poisson  $p(n)$  da Equação (19.51) pela fórmula assintótica de Stirling (veja o Capítulo 8),

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

e escolhemos o desvio  $v = n - \mu$  em relação ao valor médio como a nova variável. Deixamos o valor médio  $\mu \rightarrow \infty$  e tratamos  $v/\mu$  como pequeno, mas  $v^2/\mu$  como finito. Substituindo  $n = \mu + v$  e expandindo o logaritmo em uma série de Maclaurin, mantendo dois termos, obtemos

$$\begin{aligned} \ln p(n) &= -\mu + n \ln \mu - n \ln n + n - \ln \sqrt{2n\pi} \\ &= (\mu + v) \ln \mu - (\mu + v) \ln(\mu + v) + v - \ln \sqrt{2\pi(\mu + v)} \\ &= (\mu + v) \ln\left(1 - \frac{v}{\mu + v}\right) + v - \ln \sqrt{2\pi\mu} \\ &= (\mu + v) \left(-\frac{v}{\mu + v} - \frac{v^2}{2(\mu + v)^2}\right) + v - \ln \sqrt{2\pi\mu} \\ &\sim -\frac{v^2}{2\mu} - \ln \sqrt{2\pi\mu}, \end{aligned}$$

substituindo  $\mu + v \rightarrow \mu$ , porque  $|v| \ll \mu$ . Exponenciando esse resultado, constatamos que, para  $n$  e  $\mu$  com,

$$p(n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-v^2/2\mu}, \quad (19.57)$$

que é a distribuição de Gauss da variável contínua  $v$  com valor médio 0 e desvio padrão  $\sigma = \sqrt{\mu}$ .

Em um limite especial, a distribuição de probabilidade binomial discreta também guarda estreita relação com a distribuição contínua de Gauss. Esse teorema de limite é outro exemplo das **leis dos grandes números**.

**TEOREMA:** No limite  $n \rightarrow \infty$ , de modo que o valor médio  $np \rightarrow \infty$ , a distribuição binomial se torna uma distribuição normal de Gauss. Lembre-se, da Seção 19.4, que, quando  $np \rightarrow \mu < \infty$ , a distribuição binomial se torna uma distribuição de Poisson.

Em vez do grande número  $x$  de sucessos em  $n$  tentativas, usamos desvio  $v = x - pn$  em relação ao (grande) valor médio  $pn$  como nossa nova variável aleatória contínua, sob a condição de que  $|v| \ll pn$ , mas  $v^2/n$  é finito quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, substituímos  $x$  por  $v + pn$  e  $n - x$  por  $qn - v$  nos fatoriais da Equação (19.42),  $f(x) \rightarrow W(v)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , e então aplicamos a fórmula de Stirling, o que resulta em

$$W(v) = \frac{p^x q^{n-x} n^{n+1/2} e^{-n+x+(n-x)}}{\sqrt{2\pi}(v+pn)^{x+1/2}(qn-v)^{n-x+1/2}}.$$

Aqui excluímos as potências dominantes de  $n$  por fatoração e cancelamos potências de  $p$  e  $q$  para achar

$$W(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q n}} \left(1 + \frac{v}{pn}\right)^{-(v+pn+1/2)} \left(1 - \frac{v}{qn}\right)^{-(qn-v+1/2)}.$$

Em termos do logaritmo, temos

$$\begin{aligned} \ln W(v) &= \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} - (v + pn + 1/2) \ln \left(1 + \frac{v}{pn}\right) \\ &\quad - (qn - v + 1/2) \ln \left(1 - \frac{v}{qn}\right) \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} - (v + pn + 1/2) \left(\frac{v}{pn} - \frac{v^2}{2p^2n^2} + \dots\right) \\ &\quad - (qn - v + 1/2) \left(-\frac{v}{qn} - \frac{v^2}{2q^2n^2} + \dots\right) \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} - \left[\frac{v}{n} \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}\right) + \frac{v^2}{n} \left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right) + \dots\right], \end{aligned}$$

em que

$$\frac{v}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{v^2}{n}$$

é finito e

$$\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right) = \frac{p+q}{2pq} = \frac{1}{2pq}.$$

Desprezando ordens mais altas em  $v/n$ , tais como  $v^2/p^2n^2$  e  $v^2/q^2n^2$ , achamos o limite de  $n$  grande

$$W(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} e^{-v^2/2pqn}, \tag{19.58}$$

que é uma distribuição gaussiana nos desvios  $x - pn$ , com valor médio 0 e desvio padrão  $\sigma = \sqrt{npq}$ . O valor médio grande  $pn$  (e os termos descartados) restringe a validade do teorema à parte

### Exercícios

- 19.5.1** Qual é a probabilidade de uma variável aleatória normalmente distribuída ter mais do que  $4\sigma$  de diferença em relação a seu valor médio? Compare seu resultado com um resultado correspondente da desigualdade de Chebychev. Explique a diferença com suas próprias palavras.
- 19.5.2** Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias normais independentes com a mesma média  $\bar{x}$  e variância  $\sigma^2$ . Mostre que  $\frac{\sum_i X_i/n - \bar{x}}{\sqrt{n}\sigma}$  é normal com média 0 e variância 1.
- 19.5.3** Um professor dá notas a um exame final de uma turma com grande número de alunos obtendo o valor médio de pontos  $M$  e a variância  $\sigma^2$ . Admitindo uma distribuição normal para o número  $M$  de pontos, ele define uma nota F quando  $M < m - 3\sigma/2$  D, quando  $m - 3\sigma/2 < M < m - \sigma/2$ ; C, quando  $m - \sigma/2 < M < m + \sigma/2$ , B quando  $m + \sigma/2 < M < m + 3\sigma/2$  A, quando  $M > m + 3\sigma/2$ . Qual é a percentagem de As, Fs; Bs, Ds; Cs? Proponha novos cortes de modo a haver percentagens iguais de As e Fs (5%), 25% Bs e Ds, e de 40% Cs.
- 19.5.4** Se a variável aleatória  $X$  é normal com valor médio 29 e desvio padrão 3, quais são as distribuições de  $2X - 1$  e  $3X + 2$ ?
- 19.5.5** Para uma distribuição normal de valor médio  $m$  e variância  $\sigma^2$ , ache a distância  $r$ , tal que metade da área sob a curva em forma de sino esteja entre  $m - r$  e  $m + r$ .

## 19.6 Estatística

Em Estatística, a teoria da probabilidade é aplicada à avaliação de dados de experimentos aleatórios ou a amostras para testar alguma hipótese porque os dados têm flutuações aleatórias por falta de controle total das condições experimentais. Normalmente, tentamos estimar o valor médio e a variância das distribuições, das quais as amostras derivam, e generalizar propriedades válidas para uma amostra para o restante dos eventos com um nível de confiança prescrito. Qualquer suposição sobre uma distribuição de probabilidade desconhecida é denominada **hipótese estatística**. Os conceitos de testes e intervalos de confiança estão entre os mais importantes desenvolvimentos da Estatística.





### Propagação de Erro

Quando medimos uma quantidade  $x$  repetidas vezes, obtendo os valores  $x_j$  ao acaso, ou selecionamos uma amostra para teste, determinamos o valor médio (veja a Equação (19.10)) e a variância,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2,$$

como uma medida do erro ou dispersão em relação ao valor médio  $\bar{x}$ . Podemos escrever  $x_j = \bar{x} + e_j$ , em que o erro  $e_j$  é o desvio em relação ao valor médio, e sabemos que  $\sum_j e_j = 0$ . (Veja a discussão após a Equação (19.15).)

Agora, suponha que queremos determinar uma função conhecida  $f(x)$  a partir dessas medições, isto é, temos um conjunto  $f_j = f(x_j)$  das medições de  $x$ . Substituindo  $x_j = \bar{x} + e_j$  e formando o valor médio por

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{n} \sum_j f(x_j) = \frac{1}{n} \sum_j f(\bar{x} + e_j) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{1}{n} f'(\bar{x}) \sum_j e_j + \frac{1}{2n} f''(\bar{x}) \sum_j e_j^2 + \dots \\ &= f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(\bar{x}) + \dots, \end{aligned} \tag{19.59}$$

obtemos o valor médio  $\bar{f}$  como  $f(\bar{x})$  em ordem mais baixa, como esperado. Mas em segunda ordem há uma correção dada por metade da variância com um fator de escala  $f''(\bar{x})$ . É interessante comparar essa correção do valor médio com a dispersão média de  $f_j$  individuais em relação ao valor médio  $\bar{f}$ , a variância de  $f$ . Para ordem mais baixa, isso é dado pela média da soma dos quadrados dos desvios no qual aproximamos  $f_j \approx \bar{f} + f'(\bar{x})e_j$ , resultando em

$$\sigma^2(f) \equiv \frac{1}{n} \sum_j (f_j - \bar{f})^2 = (f'(\bar{x}))^2 \frac{1}{n} \sum_j e_j^2 = (f'(\bar{x}))^2 \sigma^2. \tag{19.60}$$

Resumindo, podemos formular, até certo ponto simbolicamente,

$$f(\bar{x} \pm \sigma) = f(\bar{x}) \pm f'(\bar{x})\sigma$$

como a forma mais simples de propagação de erro por uma função de uma variável medida.

Para uma função  $f(x_j, y_k)$  de duas quantidades medidas  $x_j = \bar{x} + u_j, y_k = \bar{y} + v_k$ , obtemos, de modo semelhante,

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{rs} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f_{jk} = \frac{1}{rs} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(\bar{x} + u_j, \bar{y} + v_k) \\ &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{1}{r} f_x \sum_j u_j + \frac{1}{s} f_y \sum_k v_k + \dots, \end{aligned}$$

em que  $\sum_j u_j = 0 = \sum_k v_k$ , portanto, novamente,  $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$  em ordem mais baixa. Aqui,

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \tag{19.61}$$

denota derivadas parciais. A soma dos quadrados dos desvios em relação ao valor médio é dada por

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s (f_{jk} - \bar{f})^2 = \sum_{j,k} (u_j f_x + v_k f_y)^2 = s f_x^2 \sum_j u_j^2 + r f_y^2 \sum_k v_k^2,$$

porque  $\sum_{j,k} u_j v_k = \sum_j u_j \sum_k v_k = 0$ . Por conseguinte, a variância é

$$\sigma^2(f) = \frac{1}{rs} \sum_{j,k} (f_{jk} - \bar{f})^2 = f_x^2 \sigma_x^2 + f_y^2 \sigma_y^2, \tag{19.62}$$

com  $f_x, f_y$  pela Equação (19.61), e

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{r} \sum_j u_j^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{s} \sum_k v_k^2$$

são as variâncias dos pontos de dados  $x$  e  $y$ . Simbolicamente, a propagação de erro para uma função de duas variáveis medidas pode ser resumida como

$$f(\bar{x} \pm \sigma_x, \bar{y} \pm \sigma_y) = f(\bar{x}, \bar{y}) \pm \sqrt{f_x^2 \sigma_x^2 + f_y^2 \sigma_y^2}.$$

Como aplicação e generalização do último resultado, agora calculamos o erro do valor médio  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$  de uma amostra de  $n$  medições individuais  $x_j$ , cada uma com dispersão  $\sigma$ . Nesse caso, as derivadas parciais são dadas por  $f_x = \frac{1}{n} = f_y = \dots$  e  $\sigma_x = \sigma = \sigma_y = \dots$ . Assim, nossa última regra da propagação de erro nos diz que erros de uma soma de variáveis somam-se quadraticamente, de modo que a incerteza da média aritmética é dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{n} \sqrt{n\sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{19.63}$$

decrecendo com o número de medições  $n$ .

À medida que o número  $n$  de medições aumenta, esperamos que a média aritmética  $\bar{x}$  convirja para algum valor verdadeiro  $x$ . Admitindo que a diferença entre  $\bar{x}$  e  $x$  é  $\alpha$  e  $v_j = x_j - x$  são os desvios verdadeiros, então,

$$\sum_j (x_j - \bar{x})^2 = \sum_j e_j^2 = \sum_j v_j^2 + n\alpha^2.$$

Levando em conta o erro da média aritmética, determinamos a dispersão dos pontos individuais em torno do valor médio verdadeiro desconhecido como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_j e_j^2 = \frac{1}{n} \sum_j v_j^2 + \alpha^2.$$

De acordo com nossa discussão anterior que resultou na Equação (19.63),  $\alpha^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$ , o que dá como resultado

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_j v_j^2 + \frac{\sigma^2}{n},$$

do qual resulta o **desvio padrão de uma amostra em estatística**, como segue,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_j v_j^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}{n-1}}, \tag{19.64}$$

sendo  $n - 1$  o número de medições de controle da amostra. Esse erro médio modificado inclui o erro esperado na média aritmética.

Como a dispersão não é bem definida quando não há nenhuma medição de comparação, isto é, quando  $n = 1$ , a variância às vezes é definida pela Equação (19.64), na qual substituímos o número  $n$  de medições pelo número  $n - 1$  de medições de controle em Estatística.

### Ajuste de Curvas a Dados

Suponha que temos uma amostra de medições  $y_j$  (por exemplo, uma partícula em movimento livre, isto é, sob nenhuma força) tomadas em tempos conhecidos  $t_j$  (que consideramos praticamente livres de erros; isto é, o tempo  $t$  é uma variável independente ordinária) que esperamos estejam linearmente relacionadas como  $y = at$ , nossa hipótese. Queremos ajustar essa reta aos dados.

Primeiro minimizamos a soma dos desvios  $\sum_j (at_j - y_j)^2$  para determinar o parâmetro de inclinação  $a$ , também denominado **coeficiente de regressão**, usando o método dos mínimos quadrados. Diferenciando em relação a  $a$ , obtemos

$$2 \sum_j (at_j - y_j)t_j = 0,$$



da qual resulta

$$a = \frac{\sum_j t_j y_j}{\sum_j t_j^2}. \quad (19.65)$$

Note que o numerador é construído como uma covariância de amostra, o produto escalar das variáveis  $t, y$  da amostra. Como mostra a Figura 19.8, como regra geral, os valores medidos  $y_j$  não se encontram sobre a reta. Eles têm a dispersão (ou raiz quadrada dos desvios médios ao quadrado em relação à reta ajustada)

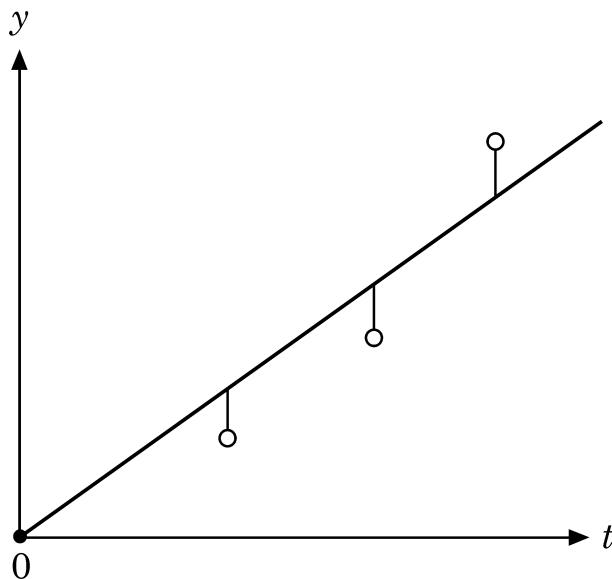


Figura 19.8: Linha reta ajustada aos pontos de dados  $(t_j, y_j)$ , sendo  $t_j$  conhecidos,  $y_j$  medidos.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_j (y_j - at_j)^2}{n - 1}}.$$

Como alternativa, sejam os valores  $y_j$  conhecidos (sem erro), enquanto  $t_j$  são medições. Como sugerido pela Figura 19.9, nesse caso precisamos permutar o papel de  $t$  e  $y$  e ajustar a reta  $t = by$  aos pontos de dados. Minimizamos  $\sum_j (by_j - t_j)^2$ , igualamos as derivadas em relação a  $b$  a zero, e achamos, de modo semelhante, o parâmetro de inclinação

$$b = \frac{\sum_j t_j y_j}{\sum_j y_j^2}. \quad (19.66)$$

Caso  $t_j$  e  $y_j$  tenham erros (consideramos que  $t$  e  $y$  têm as mesmas unidades), temos de minimizar a soma dos quadrados dos desvios de ambas as variáveis e ajustar a uma parametrização  $t \text{ sen } \alpha - y \text{ cos } \alpha = 0$ , em que  $t$  e  $y$  ocorrem em igualdade de condições. Como mostrado na Figura 19.10a, em termos geométricos isso significa que a reta tem de ser traçada de modo que a soma dos quadrados das distâncias  $d_j$  entre os pontos  $(t_j, y_j)$  e a reta se torne um mínimo (veja a Figura 19.10b e o Capítulo 1). Aqui,  $d_j = t_j \text{ sen } \alpha - y_j \text{ cos } \alpha$ , portanto,  $\sum_j d_j^2 = \text{mínimo}$  deve ser resolvida para o ângulo  $\alpha$ . Igualando a derivada em relação ao ângulo a zero,

$$\sum_j (t_j \text{ sen } \alpha - y_j \text{ cos } \alpha)(t_j \text{ cos } \alpha + y_j \text{ sen } \alpha) = 0,$$

temos como resultado

$$\text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha \sum_j (t_j^2 - y_j^2) - (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) \sum_j t_j y_j = 0.$$

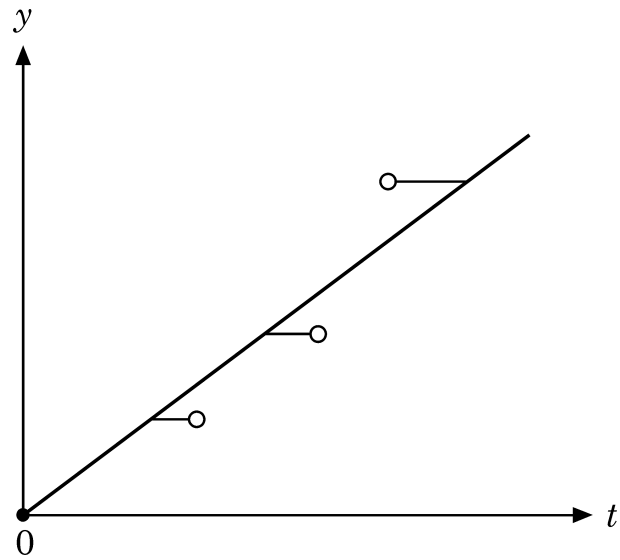


Figura 19.9: Linha reta ajustada aos pontos de dados  $(t_j, y_j)$ , com  $y_j$  conhecidos,  $t_j$  medidas.

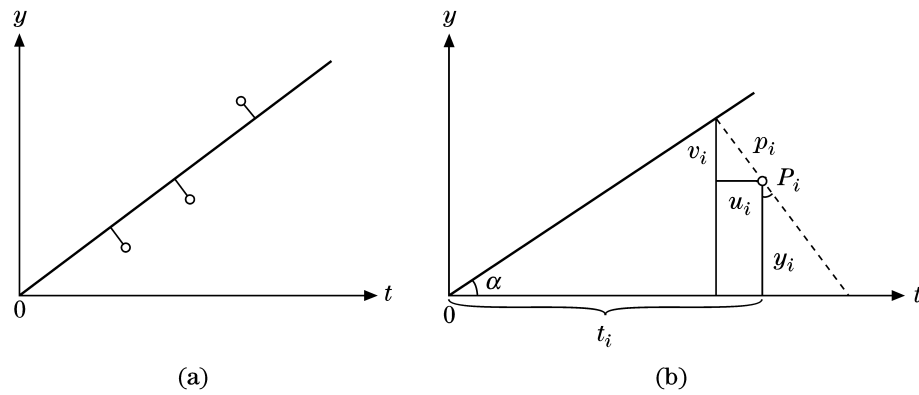


Figura 19.10: (a) Linha reta ajustada aos pontos de dados  $(t_j, y_j)$ . (b) Geometria dos desvios  $u_j, v_j, d_j$ .



Portanto, o ângulo do ajuste da linha reta é dado por

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sum_j t_j y_j}{\sum_j (t_j^2 - y_j^2)}. \quad (19.67)$$

Esse ajuste de mínimos quadrados se aplica quando os erros de medição são desconhecidos. Ele permite atribuir no mínimo algum tipo de barra de erro aos pontos medidos. Lembre-se de que não usamos erros para os pontos. É muito provável que nosso parâmetro  $a$  (ou  $\alpha$ ) reproduzirá os dados sob essas circunstâncias. Mais precisamente, o método dos mínimos quadrados é uma estimativa de máxima probabilidade dos parâmetros ajustados quando é razoável admitir que os erros são independentes e normalmente distribuídos com **o mesmo desvio para todos os pontos**. Essa suposição razoavelmente forte pode ser relaxada em ajustes por mínimos quadrados “ponderados” denominados **ajustes de qui quadrado**.<sup>4</sup>

### A Distribuição $\chi^2$

Essa distribuição é normalmente aplicada a ajustes de uma curva  $y(t, a, \dots)$  com parâmetros  $a, \dots$  a dados  $t_j$ , usando o método dos mínimos quadrados envolvendo a soma **ponderada** dos quadrados dos desvios, isto é,

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^N \left( \frac{y_j - y(t_j, a, \dots)}{\Delta y_j} \right)^2$$

é minimizado, em que  $N$  é o número de pontos e  $r$  é o número de parâmetros ajustados  $a, \dots$ . Essa função de mérito quadrática dá mais peso a pontos com pequenas incertezas de medição  $\Delta y_j$ .

Representamos cada ponto por uma variável aleatória  $X$  normalmente distribuída com valor médio zero e variância  $\sigma^2 = 1$ , esta última em vista dos pesos na função  $\chi^2$ . Como primeira etapa, determinamos a densidade de probabilidade para a variável aleatória  $Y = X^2$  de um único ponto que assume somente valores positivos. Admitir um valor médio zero não prejudica a generalidade porque, se  $\langle X \rangle = m \neq 0$ , consideraríamos a variável deslocada  $Y = X - m$ , cujo valor médio é zero. Mostramos que, se  $X$  tiver uma densidade normal de Gauss,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

então a probabilidade de a variável aleatória  $Y$  ser zero se  $y \leq 0$ , e

$$P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) \quad \text{se } y > 0.$$

Pela distribuição normal contínua  $P(y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx$ , obtemos a densidade de probabilidade  $g(y)$  diferenciação:

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{d}{dy} [P(\sqrt{y}) - P(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2\sigma^2}, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (19.68)$$

Essa densidade,  $\sim e^{-y/2\sigma^2}/\sqrt{y}$ , corresponde ao integrando da integral de Euler da função gama. Tal distribuição de probabilidade

$$g(y) = \frac{y^{p-1}}{\Gamma(p)(2\sigma^2)^p} e^{-y/2\sigma^2}$$

é denominada **distribuição gama** com parâmetros  $p$  e  $\sigma$ . Sua função característica, para nosso caso,  $p = 1/2$ , é proporcional à transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \langle e^{itY} \rangle &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-y(1/2\sigma^2 - it)} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(\frac{1}{2\sigma^2} - it)^{1/2}} \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= (1 - 2it\sigma^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Se quiser mais detalhes, veja o Capítulo 14 de Press et al. em Leituras Adicionais do Capítulo 9.

Uma vez que a função amostra  $\chi^2$  contém uma soma de quadrados, precisamos do teorema a seguir.

**TEOREMA DA ADIÇÃO para as distribuições gama:** Se as variáveis aleatórias independentes  $Y_1$  e  $Y_2$  tiverem uma distribuição gama com  $p = 1/2$  e o mesmo  $\sigma$ , então  $Y_1 + Y_2$  tem uma distribuição gama com  $p = 1$ .

Visto que  $Y_1$  e  $Y_2$  são independentes, o produto de suas densidades (Equação (19.36)) gera a função característica

$$\langle e^{it(Y_1+Y_2)} \rangle = \langle e^{itY_1} e^{itY_2} \rangle = \langle e^{itY_1} \rangle \langle e^{itY_2} \rangle = (1 - 2it\sigma^2)^{-1}. \tag{19.69}$$

Agora chegamos à segunda etapa. Avaliamos a qualidade do ajuste pela variável aleatória  $Y = \sum_{j=1}^n X_j^2$ , onde  $n = N - r$  é o número de graus de liberdade para  $N$  pontos de dados e  $r$  parâmetros ajustados. As variáveis aleatórias independentes  $X_j$  são consideradas normalmente distribuídas com a variância (da amostra)  $\sigma^2$ . (Em nosso caso,  $r = 1$  e  $\sigma = 1$ .) Na verdade, a análise de  $\chi^2$  não testa as suposições de normalidade e independência, mas se elas não forem aproximadamente válidas, haverá muitos pontos fora da curva de ajuste. O teorema da adição dá a densidade de probabilidade (Figura 19.11) para  $Y$ ,

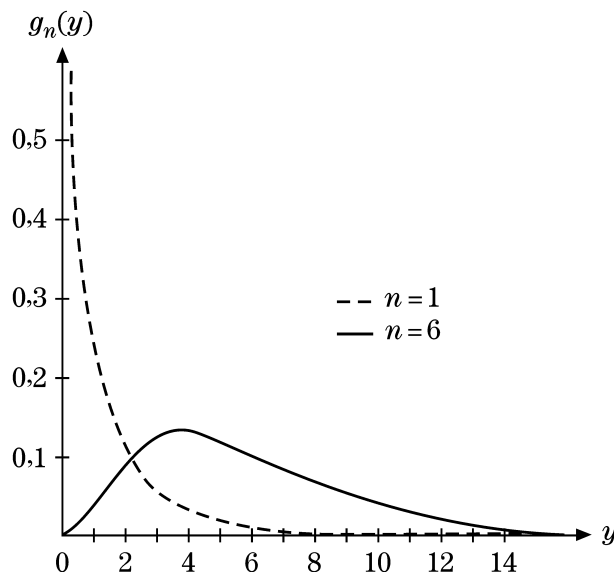


Figura 19.11: Densidade de probabilidade  $\chi^2$  de  $g_n(y)$ .

$$g_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-y/2\sigma^2}, \quad y > 0,$$

e  $g_n(y) = 0$  se  $y < 0$ , que é a distribuição  $\chi^2$  correspondente a  $n$  graus de liberdade. Sua função característica é

$$\langle e^{itY} \rangle = (1 - 2it\sigma^2)^{-n/2}.$$

Diferenciando e fazendo  $t = 0$  obtemos seu valor médio e variância

$$\langle Y \rangle = n\sigma^2, \quad \sigma^2(Y) = 2n\sigma^4. \tag{19.70}$$

Tabelas dão valores para a probabilidade  $\chi^2$  para  $n$  graus de liberdade,

$$P(\chi^2 \geq y_0) = \frac{1}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{y_0}^{\infty} y^{n/2-1} e^{-y/2\sigma^2} dy,$$

para  $\sigma = 1$  e  $y_0 > 0$ . Para usar a Tabela 19.2 para  $\sigma \neq 1$ , aumente  $y_0 = v_0\sigma^2$ , de modo que  $P(\chi^2 \geq v_0\sigma^2)$  corresponda a  $P(\chi^2 \geq v_0)$  da Tabela 19.2. O exemplo a seguir ilustrará todo o processo.



**Tabela 19.2** Distribuição  $\chi^2$

$n$	$v = 0,8$	$v = 0,7$	$v = 0,5$	$v = 0,3$	$v = 0,2$	$v = 0,1$
1	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706
2	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605
3	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251
4	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779
5	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236
6	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645

Entradas são  $\chi_v$  para as probabilidades  $v = P(\chi^2 \geq \chi_v^2) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_{\chi_v^2}^{\infty} e^{-y/2} y^{(n/2)-1} dy$ , para  $\sigma = 1$ .

### Exemplo 19.6.1

Vamos aplicar a função  $\chi^2$  ao ajuste na Figura 19.8. Os pontos medidos  $(t_j, y_j \pm \Delta y_j)$  com erros  $\Delta y_j$  são

$$(1 : 0,8 \pm 0,1), \quad (2 : 1,5 \pm 0,05), \quad (3 : 3 \pm 0,2).$$

Para comparação, o ajuste de máxima probabilidade, Equação (19.65), resulta em

$$a = \frac{1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 3}{1 + 4 + 9} = \frac{12,8}{14} = 0,914.$$

Por sua vez, minimizar

$$\chi^2 = \sum_j \left( \frac{y_j - at_j}{\Delta y_j} \right)^2,$$

resulta em

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_j \frac{t_j (y_j - at_j)}{(\Delta y_j)^2},$$

ou

$$a = \frac{\sum_j \frac{t_j y_j}{(\Delta y_j)^2}}{\sum_j \frac{t_j^2}{(\Delta y_j)^2}}.$$

Em nosso caso,

$$a = \frac{\frac{1 \cdot 0,8}{0,1^2} + \frac{2 \cdot 1,5}{0,05^2} + \frac{3 \cdot 3}{0,2^2}}{\frac{1^2}{0,1^2} + \frac{2^2}{0,05^2} + \frac{3^2}{0,2^2}} = \frac{1,505}{1,925} = 0,782$$

é dominado pelo ponto do meio com o menor erro,  $\Delta y_2 = 0,05$ . A fórmula de propagação de erro (Equação (19.62)) nos dá a variância  $\sigma_a^2$  da estimativa de  $a$ ,

$$\sigma_a^2 = \sum_j (\Delta y_j)^2 \left( \frac{\partial a}{\partial y_j} \right)^2 = \sum_j \frac{\frac{t_j^2}{(\Delta y_j)^2}}{\left( \sum_k \frac{t_k^2}{(\Delta y_k)^2} \right)^2} = \frac{1}{\sum_j \frac{t_j^2}{(\Delta y_j)^2}}$$

usando

$$\frac{\partial a}{\partial y_j} = \frac{\frac{t_j}{(\Delta y_j)^2}}{\sum_k \frac{t_k^2}{(\Delta y_k)^2}}.$$

Para nosso caso,  $\sigma_a = 1/\sqrt{1,925} = 0,023$ , isto é, nosso parâmetro de inclinação é  $a = 0,782 \pm 0,023$ .

Para estimar a qualidade desse ajuste de  $a$ , calculamos a probabilidade  $\chi^2$  de que os dois pontos (de controle) independentes caiam fora da curva de ajuste por dois desvios padrão, isto é, na média cada ponto cairia fora por

um desvio padrão. Aplicamos a distribuição  $\chi^2$  ao ajuste envolvendo  $N = 3$  pontos de dados e parâmetro  $r = 1$ , isto é, para  $n = 3 - 1 = 2$  graus de liberdade. Pela Equação (19.70) a distribuição  $\chi^2$  tem um valor médio 2 e uma variância 4. Uma regra prática é que  $\chi^2 \approx n$  para um ajuste razoavelmente bom. Então,  $P(\chi^2 \geq 2) \sim 0,496$  é lido na Tabela 19.2, em que o interpolamos entre  $P(\chi^2 \geq 1,386^2) = 0,50$  e  $P(\chi^2 \geq 2,408^2) = 0,30$ , como segue:

$$P(\chi^2 \geq 2) = P(\chi^2 \geq 1,386^2) - \frac{2 - 1,386^2}{2,408^2 - 1,386^2} [P(\chi^2 \geq 1,386^2) - P(\chi^2 \geq 2,408^2)]$$

$$= 0,5 - 0,02 \cdot 0,2 = 0,496.$$

Assim, a probabilidade  $\chi^2$  de que, na média, cada ponto caia fora da curva por um desvio padrão é quase 50% e razoavelmente grande. ■

Nosso próximo objetivo é calcular um **intervalo de confiança** para o parâmetro de inclinação de nosso ajuste. Um intervalo de confiança para um parâmetro de alguma distribuição desconhecido *a priori* (por exemplo, um parâmetro determinado por nosso ajuste) é um intervalo que contém *a* não com certeza, mas com uma alta probabilidade *p*, o nível de confiança, que podemos escolher. Esse intervalo é calculado para uma amostra dada. Tal análise envolve a distribuição *t*.

### A Distribuição *t* de Student

Como sempre calculamos a média aritmética de pontos medidos, consideramos agora a função amostra

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j,$$

em que admitimos que as variáveis aleatórias  $X_j$  são independentes com uma distribuição normal com o mesmo valor médio *m* e a mesma variância  $\sigma^2$ . O teorema da adição para a distribuição de Gauss afirma que  $X_1 + \dots + X_n$  tem valor médio  $nm$  e variância  $n\sigma^2$ . Por conseguinte,  $(X_1 + \dots + X_n)/n$  é normal com valor médio *m* e variância  $n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$ . A densidade de probabilidade da variável  $\bar{X} - m$  é a distribuição de Gauss

$$\bar{f}(\bar{x} - m) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n(\bar{x} - m)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{19.71}$$

O problema fundamental resolvido pela distribuição *t* de Student é fornecer estimativas para o valor médio *m*, quando  $\sigma$  **não é conhecido**, em termos de uma função amostra cuja distribuição é **independente** de  $\sigma$ . Com essa finalidade, definimos uma função amostra aumentada (denominada tradicionalmente) *t*:

$$t = \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n-1}, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2. \tag{19.72}$$

Pode-se mostrar que *t* e *S* são variáveis aleatórias independentes. Seguindo os argumentos que levam à distribuição  $\chi^2$ , a densidade da variável *S* no denominador é dada pela distribuição gama

$$d(s) = \frac{n^{(n-1)/2} s^{n-2} e^{-ns^2/2\sigma^2}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2}) \sigma^{n-1}}. \tag{19.73}$$

A probabilidade para a razão  $Z = X/Y$  de duas variáveis aleatórias independentes *X, Y* com densidade normal para  $\bar{f}$  e *d*, como dada pelas Equações (19.71) e (19.73), é (Equação (19.40))

$$R(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f(yz)d(y)|y| dy dz; \tag{19.74}$$

portanto, a variável  $V = (\bar{X} - m)/S$  tem a densidade

$$r(v) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{nv^2s^2}{2\sigma^2}\right) \frac{n^{(n-1)/2} s^{n-2} e^{-ns^2/2\sigma^2}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2}) \sigma^{n-1}} s ds$$

$$= \frac{n^{n/2}}{\sigma^n \sqrt{\pi} 2^{(n-2)/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-ns^2(v^2+1)/2\sigma^2} s^{n-1} ds.$$





Aqui, substituímos  $z = s^2$  e obtemos

$$r(v) = \frac{n^{n/2}}{\sigma^n \sqrt{\pi} 2^{n/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty e^{-nz(v^2+1)/2\sigma^2} z^{(n-2)/2} dz.$$

Agora substituímos  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , definimos o parâmetro

$$a = \frac{n(v^2 + 1)}{2\sigma^2},$$

e transformamos a integral em  $\Gamma(n/2)/a^{n/2}$  para achar

$$r(v) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2}) (v^2 + 1)^{n/2}}, \quad -\infty < v < \infty.$$

Finalmente, aumentamos essa expressão para a variável  $t$  na Equação (19.72) com a densidade (Figura 19.12)

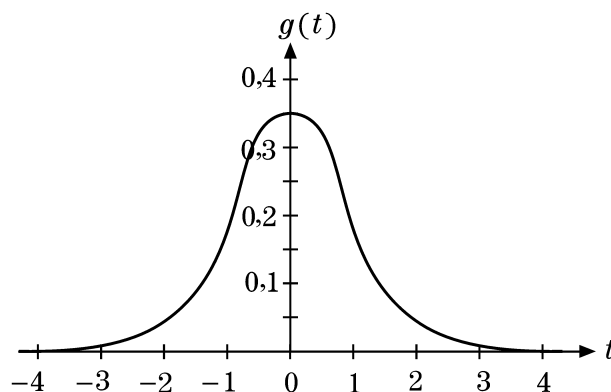


Figura 19.12: Densidade de probabilidade  $t$  de Student  $g_n(y)$ , para  $n = 3$ .

$$g(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma(\frac{n-1}{2}) (1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{19.75}$$

para a distribuição  $t$  de Student, que obviamente não depende de  $m$  ou  $\sigma$ . A probabilidade para  $t_1 < t < t_2$  é dada pela integral

$$P(t_1, t_2) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}}, \tag{19.76}$$

**Tabela 19.3** Distribuição  $t$  de Student

$p$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0,8	1,38	1,06	0,98	0,94	0,92
0,9	3,08	1,89	1,64	1,53	1,48
0,95	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02
0,975	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57
0,99	31,8	6,96	4,54	3,75	3,36
0,999	318,3	22,3	10,2	7,17	5,89

Entradas são valores  $C$  em  $P(C) = K_n \int_{-\infty}^C (1 + \frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2} dt = p$ ,  $n$  é o número de graus de liberdade.

e  $P(z) \equiv P(-\infty, z)$  é tabulada (veja a Tabela 19.3 para um exemplo). Além disso,  $P(\infty, -\infty) = 1$  e  $P(-z) = 1 - P(z)$ , porque o integrando na Equação (19.76) é par em  $t$ , portanto

$$\int_{-\infty}^{-z} \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}} = \int_z^{\infty} \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}}$$

e

$$\int_z^\infty \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}} - \int_{-\infty}^z \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n-1})^{n/2}}.$$

Multiplicando essa expressão pelo fator que precede a integral na Equação (19.76), temos  $P(-z) = 1 - P(z)$ . No exemplo a seguir, mostramos como aplicar a distribuição  $t$  de Student ao nosso ajuste do Exemplo 19.6.1.

### Exemplo 19.6.2 INTERVALO DE CONFIANÇA

Aqui queremos determinar um intervalo de confiança para a curva  $a$  no ajuste linear  $y = at$  da Figura 19.8. Admitimos:

- primeiro, que os pontos da amostra  $(t_j, y_j)$  são aleatórios e independentes; e
- segundo, que, para cada valor fixo  $t$ , a variável aleatória  $Y$  é normal com média  $\mu(t) = at$  e variância  $\sigma^2$  independente de  $t$ .

Esses valores  $y_j$  são medições da variável aleatória  $Y$ , mas nós os consideraremos medições únicas das variáveis aleatórias independentes  $Y_j$  com a mesma distribuição normal de  $Y$  (cuja variância não conhecemos).

Escolhemos um nível de confiança, por exemplo,  $p = 95\%$ . Então, a probabilidade de Student é

$$P(-C, C) = P(C) - P(-C) = p = -1 + 2P(C),$$

por conseguinte,

$$P(C) = \frac{1}{2}(1 + p),$$

usando  $P(-C) = 1 - P(C)$  e

$$P(C) = \frac{1}{2}(1 + p) = 0.975 = K_n \int_{-\infty}^C \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt,$$

em que  $K_{n-1}$  é o fator que precede a integral na Equação (19.76). Agora determinamos uma solução  $C = 4,3$  da Tabela 19.3 da distribuição  $t$  de Student, sendo  $n = N - r = 3 - 1 = 2$  o número de graus de liberdade, observando que  $(1 + p)/2$  corresponde a  $p$  na Tabela 19.3.

Então, calculamos  $A = C\sigma_a/\sqrt{N}$  para tamanho de amostra  $N = 3$ . O intervalo de confiança é dado por

$$a - A \leq a \leq a + A, \quad \text{em } p = 95\% \text{ no intervalo de confiança.}$$

Pela análise  $\chi^2$  do Exemplo 17.6.1, usamos a inclinação  $a = 0,782$  e variância  $\sigma_a^2 = 0,023^2$ , portanto  $A = 4,3 \frac{0,023}{\sqrt{3}} = 0,057$ , e o intervalo de confiança é determinado por  $a - A = 0,782 - 0,057 = 0,725$ ,  $a + A = 0,839$ , ou

$$0,725 < a < 0,839 \quad \text{em } 95\% \text{ no intervalo de confiança.}$$

Comparando com  $\sigma_a$ , a incerteza de  $a$  aumentou devido ao alto nível de confiança. Um exame da Tabela 19.3 mostra que um decréscimo no nível de confiança,  $p$ , reduz o intervalo de incerteza e que aumentar o número de graus de liberdade,  $n$ , também reduzirá a faixa de incerteza. ■

### Exercícios

**19.6.1** Seja  $\Delta A$  o erro de uma medição de  $A$  etc. Use propagação de erro para mostrar que

$$\left(\frac{\sigma(C)}{C}\right)^2 = \left(\frac{\sigma(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(B)}{B}\right)^2$$

vale para o produto  $C = AB$  e a razão  $C = A/B$ .

**19.6.2** Ache o valor médio e o desvio padrão da amostra de medições  $x_1 = 6,0, x_2 = 6,5, x_3 = 5,9, x_5 = 6,2$ . Se o ponto  $x_6 = 6,1$  for adicionado à amostra, como essa mudança afeta o valor médio e o desvio padrão?



- 19.6.3** (a) Efetue uma análise  $\chi^2$  do ajuste do caso  $b$  na Figura 19.9 admitindo os mesmos erros para os  $t_i$ ,  $\Delta t_i = \Delta y_i$ , que os  $y_i$  usados na análise de  $\chi^2$  do ajuste na Figura 19.8. (b) Determine o intervalo de confiança no nível de confiança 95%.
- 19.6.4** Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são uma amostra de medições com valor médio dado pela média aritmética  $\bar{x}$  e as correspondentes variáveis aleatórias  $X_j$  que assumem os valores  $x_j$  com a mesma probabilidade são independentes e têm valor médio  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então mostre que  $\langle \bar{x} \rangle = \mu$  e  $\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2/n$ . Se  $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_j (x_j - \bar{x})^2$  é a variância da amostra, mostre que  $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ .

### Leituras Adicionais

- Bevington, P. R., e D. K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, 3<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (2003).
- Chung, K. L., *A Course in Probability Theory Revised*, 3<sup>a</sup> ed. Nova York: Academic Press (2000).
- Devore, J. L., *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, 5<sup>a</sup> ed. Nova York: Duxbury Pr. (1999).
- Degroot, M. H., *Probability and Statistics*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Addison-Wesley (1986).
- Kreyszig, E., *Introductory Mathematical Statistics: Principles and Methods*. Nova York: Wiley (1970).
- Montgomery, D. C., e G. C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Wiley (1998).
- Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3<sup>a</sup> ed. Nova York: McGraw-Hill (1991).
- Ross, S. M., *First Course in Probability*, 5<sup>a</sup> ed., vol. A. Nova York: Prentice-Hall (1997).
- Ross, S. M., *Introduction to Probability Models*, 7<sup>a</sup> ed. Nova York: Academic Press (2000).
- Ross, S. M., *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 2<sup>a</sup> ed. Nova York: Academic Press (1999).
- Suhir, E., *Applied Probability for Engineers and Scientists*. Nova York: McGraw-Hill (1997).

## Referências Gerais

Referências adicionais, mais especializadas, estão relacionadas no final de cada capítulo.

1. E. T. Whittaker e G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4<sup>a</sup> ed., brochura. Embora essa seja a mais antiga das referências (edição original 1902), ainda é a referência clássica. Apresenta uma forte tendência à Matemática Pura, desde 1902, com total rigor matemático.
2. P. M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, 2 volumes. Nova York: McGraw-Hill (1953). Essa obra apresenta a Matemática de grande parte da Física Teórica com detalhes, mas em um nível bastante avançado. É recomendada como uma notável fonte de informação para leitura suplementar e estudo avançado.
3. H. S. Jeffreys e B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3<sup>a</sup> ed. UK: Cambridge University Press (1972). Tratamento erudito de uma ampla faixa de Análise Matemática, no qual é dada especial atenção ao rigor matemático.
4. R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1 (1<sup>a</sup> ed. em inglês). Nova York: Wiley (Interscience) (1953). Como um livro de referência para Física Matemática, é particularmente valioso para teoremas de existência e discussões de áreas como problemas de autovalor, equações integrais e cálculo de variações.
5. F. W. Byron Jr., e R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Reading, MA: Addison-Wesley, nova tiragem, Dover (1992). Texto avançado que pressupõe um conhecimento moderado da Física Matemática.
6. C. M. Bender e S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Nova York: McGraw-Hill (1978).
7. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Applied Mathematics Series-55 (AMS-55). Washington, DC: National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce; nova tiragem, Dover (1974). Por ser uma formidável compilação exatamente daquilo que diz o título, é uma referência extremamente útil.



# Índice Remissivo

## Números

- 1-formas constantes, 232
- 1-formas, 232
- 2-formas, 232-233
- 3-formas, 233

## A

- abordagem de série, 430-431
- beta incompleta, 395
- Chebyshev, 257, 430
- deslocados polinômios, 632
  - Chebyshev, 643
  - Legendre, 475
- equação de Bessel, limitações de, 430-431
- Hermite, 428
- hipergeométrica, 430, 650, 652
- Laguerre, 430
- Legendre, 253, 383, 430, 572-576
  - ultra-esférica, 257
- acoplamento, momento angular, *veja* momento angular
- adição
  - de matrizes, 135-136
  - de séries, 247
  - de tensores, 105
- álgebra de Clifford, 160
- análise tensorial
  - componentes esféricos, 206
  - definição, 103-105
  - deslocamento, 121
  - operador de tensor esférico, 206
  - quantidade escalar, 6, 11, 44, 104, 115, 136
  - simetria – assimetria, 106
  - tensor contravariante, 105, 118
  - tensor covariante, 105, 121
  - tensor isotrópico, 106
  - tensores não-cartesianos, 108
  - transporte paralelo, 121
  - vetor contravariante, 104, 108, 117-118, 121
  - vetor covariante, 104, 108, 117-118, 120, 121
- análise vetorial
  - lei da adição do paralelogramo, 2
  - lei da transformação, 104
  - reticulado recíproca, 21
  - rotação de coordenadas, 155
- analogia com RLC, 742-743
- ângulos de Euler, 153
- anti-simetria
  - de tensores, 106, 113
  - e determinantes, 128-131
    - eliminação de Gauss, 129-131
    - visão geral, 128-129
  - matrizes anti-simétricas, 155
- aproximação de Born, 455
- aproximação de soma parcial, 295-296
- aproximações racionais, 262
- associativa, 2
- átomo de hidrogênio, 638-639, 725
  - equação de onda de Schrödinger, 638
- atrator, 819
- atrator caótico, 823

- atrator estranho, 823
- aumento momentâneo (*overshoot*), cálculo do, 691-692
- autofunção de estado fundamental, 814
- autofunções, 471, 472-473
  - cálculo variacional, 814-187
  - coeficientes de expansão, 497
  - completude de, 490-499
    - de Hilbert-Schmidt: de equações integrais, 782-784
    - de série de Fourier: de autofunções de Sturm-Liouville, 490-491
  - desigualdade de Bessel, 491-492
  - desigualdade de Schwarz, 492-494
  - equação de autovalor, 504
  - expansão, função de Green, 500-509
    - de função delta de Dirac, 69-70
    - de onda quadrada, 481
    - de operadores diferenciais hermitianos, 479, 490-491
  - ortogonal, 480-481, 781-783
  - resumo — espaço de vetoriais, completeza, 494-497
- autofunções degeneradas, 481
- autofunções ortogonais, 480-481, 781-783
- autovalores, 165, 169, 471-473, 479
  - de equação integral de Hilbert-Schmidt, 781-786
  - de matrizes hermitianas, 166-169
  - de matrizes normais, 175-176
  - de matrizes simétricas reais, 163-166
  - de operador diferencial hermitiano, 479
  - princípio variacional para, 814
- autovalores degenerados, 169, 481
- autovetores, 164-166, 168

## B

- bacia de atração, 819
- Baker-Hausdorff, fórmula de 171
- Bernoulli e Riccati, equações de, 826
- Bernoulli, números de, 286-295, 358-359
  - exercícios, 292-295
  - fórmula de integração de Euler-Maclaurin, 288-289
  - função zeta de Riemann, 290-292
  - melhoria de convergência, 292
  - polinômios, 288
  - visão geral, 286-288
- Bessel, Funções de, 510-559
  - da primeira espécie, 510-524
    - abordagens alternativas, 518
    - cavidade ressonante cilíndrica, 515-518
    - difração de Fraunhofer, abertura circular, 514-515
    - equação diferencial de Bessel, 512-513
    - equação diferencial de Bessel: forma auto-adjunta, 524
    - esféricas, 548-549
    - exercícios, 518-524
    - função geradora para ordem de integral, 510-511
    - funções de Bessel de ordem não-inteira, 518
    - guia de onda cilíndrico, 533
    - ortogonalidade, 524-525
    - relações de recorrência, 511-512
    - representação hipergeométrica confluyente, 654-655
    - representação integral, 513-514
    - segunda espécie, 529-534
    - singularidades, 426
    - solução de série, 430-432, 510-513

- solução de transformada de Laplace, 745-746  
 transformada de Fourier, 706  
 wronskiano, 531-533  
 de ordem não-inteira, 518  
 difração de Fraunhofer, 514-515  
 em guias de onda, 532  
 equação de fechamento, 526  
 equação de Helmholtz, 516-517, 548  
 equação de Laplace, 526  
 esféricas, 548-559  
   definições, 548-551  
   exercícios, 554-559  
   ortogonalidade, 553  
   partícula dentro de uma esfera, 553  
   relações de recorrência, 552  
   valores assintóticos, 551  
   valores limitadores, 551-552  
 expansões assintóticas, 544-548  
   exercícios, 546-548  
   expansão de uma representação integral, 544-546  
 funções de Hankel, 534-538  
   definições, 534-535  
   exercícios, 537-538  
   ondas progressivas cilíndricas, 535  
   representação de integral de contorno de, 536-537  
 funções de Neumann, funções de Bessel da segunda espécie, 529-534  
   definição e forma de série, 529  
   exercícios, 532-534  
   fórmulas wronskianas, 531  
   guias de onda coaxiais, 532  
   outras formas, 530  
   relações de recorrência, 531  
 modificada, 539-544  
   exercícios, 541-544  
   expansão assintótica, 537, 544  
   forma de série, 540  
   função geradora, 536  
   relações de recorrência, 540-541  
   representação integral, 544-546  
   transformada de Fourier, 541  
   transformada de Laplace, 706  
 ondas esféricas, 552  
 ortogonalidade, 524-529  
   exercícios, 527-529  
   forma de contínuo, 526-527  
   normalização, 525  
   potencial eletrostático em um cilindro oco, 526  
   séries de Bessel, 525  
 relações de recorrência, 511  
 valores assintóticos, 546  
 zeros, 515  
 bifurcações em sistemas dinâmicos, 837-838  
   em garfo, 821, 823, 836, 840  
   Hopf, 836, 837-838, 840  
 bifurcadas, 821  
 buraco negro, caminho ótico perto de horizonte de evento de, 790-791
- C**
- cálculo de resíduos, 345-365, *veja também* integrais definidas  
   exercícios, 359-365  
   expansão de pólo de funções meromórficas, 349  
   expansão de produto de funções inteiras, 350-351  
   lema de Jordan, 353-355  
   teorema do resíduo, 345  
   valor principal de Cauchy, 346-349  
   visão geral, 345  
 cálculo de variações, 787-817  
   aplicações da equação de Euler, 792-798  
     exercícios, 796-798  
     linha reta, 792-794  
     película de sabão, 793-794  
     película de sabão — área mínima, 794-796  
   dependente e uma variável independente, 787-792  
     caminho ótico perto do horizonte de eventos de um buraco negro, 790-791  
     conceito de variação, 787-790  
     exercícios, 792  
     formas alternativas de equações de Euler, 791  
     variáveis dependentes omitidas, 791-792  
   diversas variáveis dependentes e independentes, 803-804  
     exercícios, 804  
     relação com a física, 804  
   diversas variáveis dependentes, 798-803  
     equação de Laplace, 803  
     exercícios, 800-801  
     partícula em movimento — coordenadas cartesianas, 800  
     partícula em movimento — coordenadas cilíndricas circulares, 800  
     princípio de Hamilton, 799-800  
   diversas variáveis independentes, exercícios, 803  
   multiplicadores lagrangianos, 804-808  
     exercícios, 806-808  
     partícula dentro de uma caixa, 805-806  
     reator nuclear cilíndrico, 806  
     restrições, 804-813  
   superfície de revolução, 794  
 técnica variacional de Rayleigh-Ritz, 814-817  
   autofunção de estado fundamental, 814  
   corda vibratória, 815  
   equação de Sturm-Liouville, 814  
   exercícios, 815-817  
 utilizações de, 787  
 variação com restrições, 808-813  
   desprendendo-se da superfície de um tronco, 810-811  
   equação de onda de Schrödinger, 811-812  
   equações lagrangianas, 809  
   exercícios, 812-813  
   pêndulo simples, 809-810  
 calibre de Lorentz, 40  
 caminho ótico perto do horizonte de evento de um buraco negro, 790-791  
 campo constante **B** potenciais vetoriais de, 34  
 campo de força central, 31, 34-36  
 campo de indução magnética de circuito de corrente, 588-592  
 campo gravitacional da Terra, 573  
 campo vetorial, 6  
 caos em sistemas dinâmicos, 838-840  
 características, 406-408  
 caráter, 140, 222-223  
 carga total dentro de esfera, 308-312  
 cargas elétricas dentro de esferas, 69  
 catenóide, catenária de revolução, 794  
 causalidade, 368  
 cavidade ressonante, 516-518  
 cavidades, cilíndricas, 516-518  
 CDQ (cromodinâmica quântica), 197  
 centro ou ciclo, 834-836



- cinemática e dinâmica em espaço-tempo de Minkowski, 213-215  
 circuito RL, 414-415  
 classes e caráter, 222-223  
 coeficiente binomial, 270  
 coeficiente de regressão, 789-790  
 coeficientes de Clebsch-Gordan, 202-205, 607  
 coeficientes de expansão, 497  
 coeficientes principais de  $se_1$ , 698-701  
 coeficientes principais para  $ce_0$ , 701-703  
 completude de autofunções  
   de Hilbert-Schmidt: de equações integrais, 782-784  
   de séries de série de Fourier: de autofunções de Sturm-Liouville, 490-491  
 componentes cartesianas, 4  
 componentes esféricas, 205-206  
 comportamento global, 829-836  
 comutador, 137, 171, 175, 189, 192, 199, 200  
 comutativa, 1  
 condição de ortogonalidade, 8, 151  
 condições bidimensionais para matrizes ortogonais, 151-152  
 condições de Cauchy-Riemann, 312-316  
   exercícios, 314-316  
   funções analíticas, 314-316  
      $z^*$ , 314  
      $z^2$ , 314  
   visão geral, 312-314  
 condições de cruzamento, 366  
 condições de Dirichlet, 409, 667  
   núcleo, 689  
 condições de fronteira, 409  
   anel de carga, 575  
   campo magnético de circuito de corrente, 588-592  
   Cauchy, 409  
   cilindro oco, 526  
   Dirichlet, 409  
   esfera em campo elétrico uniforme, 574  
   guia de onda, cabo coaxial, 532  
   Neumann, 409  
   teoria de Sturm-Liouville, 473-474  
 conectada, simplesmente ou multiplamente, 46, 74, 317, 320, 322, 329  
 conjugação, complexa, 308-309  
 conjunto de Julia, 824  
 conjunto de Mandelbrot, 824  
 conjunto vazio, 843  
 constante de campo magnético  $\mathbf{B}$  (campo), 34  
 constante de Catalan, 292, 387  
 constante de Euler-Mascheroni, 251  
 constante de Madelung, 264  
 constantes de estrutura, 188, 190, 196-197  
 continuação analítica, 327-330  
 continuidade de séries de potências, 276  
 contorno de integração, pólo simples sobre, 354-355  
 contração de Lorentz-Fitzgerald, 114  
 contração, 107-108  
 convenção da soma de Einstein, 106  
   lei da adição da velocidade, 215, 220  
 convenção do somatório, 105-106, 107  
 convenções de fase de Condon-Shortley, 205  
 convergência absoluta, 259-260, 265, 275  
 convergência condicional, 259  
 convergência de série infinita, 245, 684  
   absoluta, 259-260, 265, 684  
   de produto infinito, 301  
   de séries de potências, 275  
   e aproximações racionais, 262  
   melhoria de, e números de Bernoulli, 292  
   taxa, 254, 262  
   testes, 248-258, *veja também* teste da integral de Cauchy (Maclaurin)  
     aproximação de soma parcial, 296  
     comparação, 248  
     de Gauss, 253, 271  
     de Kummer, 251-252  
     de Raabe, 253  
     exercícios, 255-258  
     melhoria de, 254-258  
     visão geral, 248  
   uniforme e não-uniforme, 265  
 convergência não-uniforme, 265  
 convergência uniforme, 265, 275  
 convergência, taxa de, 254, 262  
 coordenadas cartesianas, 418-419  
   vetores unitários, 4  
 coordenadas cilíndricas circulares, 89-95  
   exercícios, 93-95  
   lei da área para movimento planetário, 90-92  
   termo de Navier-Stokes, 92  
   visão geral, 89-90  
 coordenadas cilíndricas circulares, 419-420  
   expansão, 454  
 coordenadas cilíndricas, 80  
 coordenadas cilíndricas, circulares, *veja* coordenadas cilíndricas circulares  
 coordenadas curvas e vetores, 80-103, *veja também* coordenadas cilíndricas circulares; coordenadas ortogonais; coordenadas polares esféricas  
   operadores diferenciais, 85-88  
     divergência, 86-87  
     rotacional, 87  
     exercícios, 88  
     gradiente, 85  
     visão geral, 85  
   sistemas de coordenadas especiais, 88-103  
   visão geral 80  
 coordenadas curvilíneas, 80-82, 83, 86, 87  
 coordenadas esféricas, equação de Helmholtz, 548  
 coordenadas ortogonais  
   em  $\mathbb{R}^3$ , 80-85  
     exercícios, 84-85  
     jacobianos para coordenadas polares, 84  
     visão geral, 80-83  
   laplaciano em, 240-241  
 coordenadas polares esféricas, 96-103, 420-423  
   exercícios, 99-103  
   expansão, 452-453  
    $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  para força central, 99  
   potencial vetorial magnético, 99  
   vetores unitários, 96  
   visão geral, 96-98  
 coordenadas polares, jacobianos para, 84-85, *veja também* coordenadas polares esféricas  
 coordenadas, *veja também* coordenadas cilíndricas circulares; coordenadas curvas e vetores; coordenadas ortogonais; coordenadas polares esféricas  
 curvilíneas, 81, 85, 86, 87  
 divergência de vetor coordenado, 31

- eixos, rotação de, veja rotações
  - laplaciano em ortogonal, 240-241
  - rotação de, 151
  - corda vibratória, 815
  - corda vibratória, lagrangiano de uma, 803, 813
  - correlação, 851
  - corte de ramo (linha de corte), 309
  - co-senos
    - co-senos direcionais (matrizes ortogonais), 4, 148-149, 152-153
    - direção, 148-149
    - expansão assintótica, 297-298
    - funções de produtos infinitos, 301-302
    - integrais em séries assintóticas, 297-298
    - integral de, no denominador, 352
    - integral, 297
    - lei de, 13, 91, 563
    - lei de, teorema, 13
    - produto infinito, 302, 350
    - representação hipergeométrica confluyente, 656
    - teorema, 13
    - transformada de co-seno, 710-711
  - covariância, 852
  - covariância de equações de Maxwell, de Lorentz, *veja* covariância de Lorentz de equações de Maxwell
  - covariância de Lorentz de equações de Maxwell, 215-221
    - exercícios, 219-221
    - invariante eletromagnético, 219
    - transformação de  $E$  e  $B$ , 218
    - visão geral, 215-217
  - critério de Cauchy, 245
  - critério de Leibniz, 258
    - fórmula para diferenciar um produto, 583
    - fórmula para diferenciar uma integral, 445, 587
  - critério, Leibniz, 258
  - cromodinâmica quântica (QCD), 197
  - curvas, ajuste a dados, 866-869
- D**
- d'alembertiano, 109
  - decomposição espectral, 166, 170, 479
  - definição de vetor, 6
    - representação de, 6-7
  - definições integrais de gradiente, divergência e espiral, 44-45
  - degeneração, de equação de onda de Schrödinger, 481
  - degradação káon, 214-215
  - degradação radioativa, 740-741, 858, 859, 861
  - degradação, káon, 214-215
  - Del ( $\nabla$ ), 33, 34
    - aplicações sucessivas de, 38-42
      - equação de onda eletromagnética, 40-41
      - exercícios, 41-42
      - laplaciano de potencial, 39
      - visão geral, 38-39
    - para força central, 98
  - delta de Kronecker, 8, 106
  - densidade tensorial, veja pseudotensores
  - dependência azimutal — ortogonalidade, 595
  - dependência de ângulo polar, 596
  - derivada covariante, 116, 120
  - derivada exterior, 234-235
  - derivada invariante de calibre, 59
    - teoria, 196
    - transformação, 59
  - derivadas, 322-323, *veja* derivada exterior
  - covariante, 120
    - covariante de calibre, 59
  - descontinuidades, comportamento de, 671
  - desigualdade de Bessel, 491-492
  - desigualdade de Cauchy, 324
  - desigualdade de Schwarz, 492-494
    - generalizada, 499
  - desigualdades de triângulo, 307
  - deslocamento Doppler, 273
  - deslocamento, 121
  - desvio padrão de medidas, 850-852
  - desvio padrão, 849, 866
  - determinante de Slater, 208
  - determinante wronskiano, 438
  - determinantes, 126-182
    - anti-simetria, 128-131
      - eliminação de Gauss, 129-131
      - eliminação de Gauss-Jordan, inversão, 140-141
      - visão geral, 128-129
    - dependência linear de vetores, 131-132
    - desenvolvimento laplaciano por menores, 127-128
    - equações lineares homogêneas, 126
    - equações lineares não-homogêneas, 126-127
    - exercícios, 132-134
    - procedimento de Gram-Schmidt, 132
      - vetores por ortogonalização, 132
      - visão geral, 132
    - teorema do produto, 137
      - equação secular, 165
      - representação de um produto vetorial, 16
      - solução de um conjunto de equações homogêneas, 126
      - solução de um conjunto de equações não-homogêneas, 126-127
      - visão geral, 126
  - dêuteron, 472-473
  - diagrama de Argand, 307
  - diagrama de peso, 194-196, 197, 201
  - diagrama de raiz, 200
  - diferenciação de séries de potências, 276
  - diferenciação, 684-685
  - diferenciais, exatas, *veja* termodinâmica
  - difração de Fraunhofer, função de Bessel, 514-515
  - difração, 514-515, 772
  - dimensão
    - contagem de caixas, 823
    - Hausdorff, 823
    - Kolmogorov, 823
  - dipólos, energia de interação, dipólo magnético, campos de radiação, dispersão anômala, 757
  - dispersão da mecânica quântica, 355-356
  - dispersão óptica, 367
  - dissipação, 836-837
  - distribuição  $t$  de Student, 872-874
  - distribuição ( $\chi^2$ ) quadrado, 869-871
  - distribuição binomial de probabilidade, 857
  - distribuição binomial, 857-859
  - distribuição de Poisson, 859-861
  - distribuição gama, 869
  - distribuição normal de Gauss, 784-786
  - distributiva, 10
  - divergência,  $\nabla$ , 30-33
    - como operador derivado de tensor, 123-124
    - como operador vetorial diferencial, 86-87
    - coordenadas cilíndricas, 89-95





- coordenadas curvilíneas, 86
  - coordenadas, cartesianas, 4-6
  - de vetores de coordenadas, 31
  - definições integrais de gradiente, espiral, e, 44-45
  - do campo de força central, 31
  - exercícios, 33
  - integração por partes de, 31
  - interpretação física, 32-33
  - polar esférica, 96-103
  - solenoidal, 33
  - visão geral, 30-31
- E**
- EDOs auto-adjuntas, 469-478
    - autofunções, autovalores, 471-472
    - condições de fronteira, 473-474
    - déuteron, 472-473
    - equação de Legendre, 472
    - intervalo de integração  $[a, b]$ , 474
    - operadores Hermitianos em mecânica quântica, 475
    - operadores Hermitianos, 475
  - EDPs elípticas, 406
  - EDPs hiperbólicas, 406
  - EDPs parabólicas, 406
  - efeito borboleta, 818
  - efeito de Stark, 435, 641
  - eixo de simetria duplo, 223-225
  - eixo de simetria triplo, 225-227
  - eixo principal, 164
  - eixo, coordenadas, 4, 6-9, 148-151
  - eixos, *veja* rotações; simetria
  - eletromagnéticas, 219
  - eletrostática, base física, 560
  - eliminação de Gauss, 129-131
    - equação diferencial de Gauss, 237-238, 242, 464-465, 467
    - equação diferencial hipergeométrica, 435, 650-652, 660
  - eliminação, *veja* determinantes
  - energia
    - potencial, 235
    - relativista, 270-271
  - energia de ponto zero, 553, 625
  - EPD de fluxo de calor, 718
  - equação angular de Mathieu, 660
  - equação da fonte pontual, 500
  - equação da idade de Fermi, 719
  - Equação de Abel, 771
  - equação de Bessel, 745-746
  - equação de continuidade, 32-33
  - equação de difusão de Helmholtz, 405
  - equação de difusão de onda (equação de difusão de Helmholtz), 405
  - equação de difusão dependente do tempo, 406
  - equação de difusão independente do tempo, 406
  - equação de difusão, *veja* equações diferenciais, EDP de fluxo de calor
  - equação de Euler, 789
    - aplicações de, 792-798
      - linha reta, 792-793
      - película de sabão, 793-794
      - película de sabão — área mínima, 794-796
    - formas alternativas de, 791
  - equação de Fredholm, 763-764
  - equação de Hamilton-Jacobi, 407
  - equação de Helmholtz, 420, 421, 463
    - coordenadas esféricas, 548
    - função de Bessel, 516-517, 548
    - função de Green, 500
  - equação de Klein-Gordon, 405
  - equação de Korteweg-deVries, 409
  - equação de Kummer, *veja* equação hipergeométrica confluyente, teste de Kummer
  - equação de Laplace, 404, 803
    - funções de Bessel, 525
    - polinômios de Legendre, 574, 575
    - soluções, 39, 75, 335, 342, 407, 423
  - equação de Legendre, 472
    - forma diferencial, 568
  - equação de Legendre, equação de Maxwell, 589
    - forma auto-adjunta, 470, 472
  - equação de Legendre
    - forma auto-adjunta, 470, 583
  - equação de Legendre
    - soluções de série de, 610-611
  - equação de Mathieu
    - angular, 660
    - modificada, 660
    - radial, 660
  - equação de onda de Schrödinger, 471
    - átomo de hidrogênio, 638
    - degeneração de, 482
  - equação de onda de Schrödinger, 59, 405, 811-812
    - derivações variacionais, 811-812
    - representação de espaço de momento, 725
  - equação de onda eletromagnética, 40-41
  - equação de onda, 717
    - derivação da equação de Maxwell, 40
    - dispersão anômala, 757
    - solução da transformada de Fourier, 717
    - solução da transformada de Laplace, 717
  - equação de onda, eletromagnética, 40-41
  - equação de Poisson, 405
    - e lei de Gauss, 63-65
    - função de Green, 505-506
  - equação de Riccati, 826
  - equação de Volterra, 763
  - equação diferencial de Bessel, 512-513, 517
    - forma auto-adjunta, 524
  - equação diferencial de Chebyshev, 422
  - equação diferencial não-homogênea ordinária (EDO), de Green
    - soluções de função, 501
  - equação do oscilador linear, 766-767
  - equação geodésica, 121
  - equação hipergeométrica
    - formas alternativas, 651, 654
    - segunda solução independente, 651
    - singularidades, 426, 650, 654, 655, 660
  - equação indicial, 428
  - equação integral não-homogênea, 783-784
  - equação modificada de Mathieu, 660
  - equação não-homogênea - função de Green, 447-461
    - expansão de coordenadas cilíndricas circulares, 454-455
    - expansão de coordenadas polares esféricas, 452-453
    - forma de funções de Green, 450-452
    - simetria de função de Green, 449-450
    - teorema da adição de polinômios de Legendre, 453-454
  - equação radial de Mathieu, 660
  - equações secular, 165
  - equações de autovalor auto-adjuntas, 449
  - equações de campo, 110

- equações de Lagrange, 809
- equações de Maxwell, 40, 215, 241-244
  - co-variância de Lorentz de, 215-221
    - exercícios, 219-221
    - invariantes eletromagnéticas, 219
    - transformação de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , visão geral, 215-218
  - da lei de Gauss, 41
  - derivação de equação de ondas, 40-41
  - equação de Legendre, 589
  - lei de Oersted, 40-41
  - transformação dual, 220
- equações de Navier-Stokes, 92
- equações diferenciais autônomas, 827-829
- equações diferenciais de primeira ordem, 410-418
  - EDOs lineares de primeira ordem, 413-415
    - equações diferenciais exatas, 412-413
    - variáveis separáveis, 411
- equações diferenciais exatas, 412-413
- equações diferenciais lineares não-homogêneas, 126-127
- equações diferenciais não-lineares (EDNs), 825
  - bifurcações em sistemas dinâmicos, 837-838
  - caos em sistemas dinâmicos, 838-840
  - centro ou ciclo, 834-835
  - comportamento local e global em número maior de dimensões, 829
  - dissipação em sistemas dinâmicos, 836-837
  - equações de Bernoulli e Riccati, 826
  - equações diferenciais autônomas, 827-829
  - ponto de sela, 830-832
  - ponto fixo espiral, 833-834
  - rotas para o caos em sistemas dinâmicos, 840
  - singularidades fixas e móveis, soluções especiais, 826
  - sorvedouro estável, 830
- equações diferenciais ordinárias (EDOs), lineares de primeira ordem, 413-415
- equações diferenciais parciais (EDPs), 404-410
  - bicaracterísticas de, 406
  - características de, 406-408
  - classes de, 406-408
  - condições de fronteira, 409-410
  - elíptica, 406
  - exemplos de, 404-406
  - funções harmônicas, 406
  - hiperbólicas, 406
  - introdução, 404
  - inversão de, 718-719
  - não-linear, 409
  - parabólica, 406
- equações diferenciais, *veja* termodinâmica
- equações diferenciais, 404-468, 567-568
  - EDP de fluxo de calor ou difusão, 462-468
    - condição de fronteira especial, novamente, 465-466
    - condição de fronteira específica, 462-463
    - fluxo de calor esfericamente simétrico, 466-467
    - soluções alternativas, 464-465
  - equação não-homogênea — função de Green, 447-461
    - dispersão da mecânica quântica — função de Green, 456-458
    - dispersão da mecânica quântica — solução de série de Neumann, 455
    - exercícios, 458-461
    - expansão de coordenadas cilíndricas circulares, 21, 454
    - expansão de coordenadas polares esféricas, 452-453
    - forma de funções de Green, 450-452
    - simetria da função de Green, 449-450
    - teorema da adição de polinômio de Legendre, 453-454
- equações diferenciais de primeira ordem, 410-418
  - circuito RL, 415
  - EDOs lineares de primeira ordem, 413-415
  - equações diferenciais exatas, 412-413
  - exercícios, 415-418
  - não-lineares, 825-836
    - pára-queda, 411-414
    - variáveis separáveis, 411
- equações diferenciais parciais, 404-410
  - classes de EDPs e características, 406-408
  - condições de fronteira, 409-410
  - EDPs não-lineares, 409
  - exemplos de, 404-405
  - introdução, 404
- homogênea, 404, 414-415, 427
- independência linear de soluções
  - forma de série da segunda solução, 440-442
  - segunda solução, 439-440
- pontos singulares, 425-426
- segunda solução, 433-437
  - dependência linear, 438-439
  - exercícios, 443-447
  - independência linear de soluções, 437-438
  - independência linear, 438
  - segunda solução da equação de Bessel, 442-443
  - segunda solução para a equação do oscilador linear, 440
- separação de variáveis, 418-425
  - coordenadas cartesianas, 418-419
  - coordenadas cilíndricas circulares, 419-420
  - coordenadas polares esféricas, 420-423
  - exercícios, 423-425
- solução particular, 414, 427
- soluções de série — método de Frobenius, 427-437
  - exercícios, 433-437
  - expansão em torno de  $x_0$ , 430
  - limitações da abordagem de série — equação de Bessel, 430-431
  - simetria de soluções, 430
  - singularidades regulares e irregulares, 432
  - teorema de Fuchs, 433
- teorema de Fuchs, 433
- termo logarítmico da segunda solução, 441, 529
- equações homogêneas, 126, 427
- equações integrais, 763-786
  - e série de Fourier para funções de Mathieu, 695-698
  - equações de Fredholm, 763, 764, 767, 769, 772, 775-777, 781-783
  - equações de Volterra, 751, 763, 766-767, 774
  - introdução, 763-768
    - definições, 763
    - equação do oscilador linear, 766-767
    - exercícios, 767
    - representação de momento em mecânica quântica, 764
    - transformação de uma equação diferencial em uma equação integral, 765-766
- série de Neumann, núcleos separáveis (degenerados), 772-781
  - exercícios, 778-781
  - núcleo separável, 775
  - série de Neumann, 772-773
  - solução de série de Neumann, 774
  - solução numérica, 776-777
- teoria de Hilbert-Schmidt, 781-786
  - autofunções ortogonais, 781-783



- equação integral não-homogênea, 783-784
  - exercícios, 784-786
  - simetriação de núcleos, 781
  - transformadas integrais, função geradoras, 768-772
    - equação generalizada de Abel, teorema da convolução, 769
    - exercícios, 770-772
    - funções geratrizes, 770
    - solução de transformada de Fourier, 769
  - equações lagrangianas, 809
  - equações lineares
    - homogêneas, 126
    - não-homogêneas, 126
  - equações, *veja também* equações lineares; equações de Maxwell; equação de Poisson
    - de movimento e campo, 110
  - escalares, 6, 103
    - multiplicação de matrizes por, 136
  - potenciais, 53-56
    - centrífuga, 56
    - gravitacional, 56
    - visão geral, 53-56
  - produtos, 10-14
    - exercícios, 13-14
    - invariância sob rotações, 12-14
    - tripla, 20-21
    - visão geral, 10-12
  - esfera em campo elétrico uniforme, 574-575
  - esferas, carga total dentro de, 69
  - espacial, vetor, *veja* vetores
  - espaço amostral, 842
  - espaço de fase, 69, 818, 827
  - espaço de Hilbert, 6, 404, 475, 482, 497, 670
  - espaço de Minkowski, 105, 211-212
  - espaço e grupos de pontos, cristalográfico, 227-228
  - espaço vetorial, espaço linear, 6, 9, 131-132, 134, 158, 166, 187-188, 239, 481-482, 486, 490-491, 494, 496-497, 669
  - espaços vetoriais, completude, 494-497
  - espaço-tempo de Minkowski, *veja* cinemática e dinâmica em espaço-tempo de Minkowski
  - espinores, 107
    - exercícios, 107
    - visão geral, 107
  - espiral,  $\nabla \times$ , 34-38
    - campo de força central, 34-36
    - como operador vetorial diferencial, 87
    - definições integrais de gradiente, divergência e, 44-45
    - exercícios, 37-38
    - gradiente de produto vetorial, 36
    - integração por partes de, 36-37
    - operador derivado como tensor, 124-125
    - potencial vetorial de campo **B** constante, 34
    - visão geral, 34
  - espiral,  $\nabla \times$ 
    - campo de força central
      - em coordenadas cilíndricas circulares, 91
      - em coordenadas curvilíneas, 87-88
      - em coordenadas polares esféricas, 98
    - irrotacional, 36
  - estado ligado, 473
  - estatística de Bose-Einstein, 808, 846
  - estatística de Fermi-Dirac, 808, 846
  - estatística, 864
    - ajustando curvas a dados, 866-869
    - distribuição  $\chi^2$ , 869, 871
  - distribuição  $t$  de Student, 872-874
  - intervalo de confiança, 874
  - propagação de erro, 865-866
  - expansão binomial, 858
  - expansão de funções, série de Legendre, 572-573
  - expansão de Jacobi-Anger, 519
  - expansão de Laurent, 325-332, 353
    - continuação analítica, 327-328
    - exercícios, 331
    - expansão de Taylor, 325-326
    - princípio de reflexão de Schwarz, 326-327
  - expansão de Maclaurin, cálculo de série, 387
  - expansão de pólo de funções meromórficas, 349
  - expansão de Stirling, 375
  - expansão de Taylor, 267-275, 325-326
    - exercícios, 271-275
    - teorema binomial, 270-271
      - energia relativista, 270-271
    - teorema de Maclaurin, 269-270
      - função exponencial, 269
      - logaritmo, 269
      - visão geral, 269
    - variáveis múltiplas, 271
    - visão geral, 267-268
  - expansão multipolar eletrostática, 333
  - expansão por frações parciais, 733-734
  - expansão vetorial, 563-564
  - expansão WKB, 299
  - expansão, *veja também* expansão de Laurent; expansão de Taylor
    - de série, 282-283
    - pólo, de funções meromórficas, 349
    - produto, de função inteira, 350-351
  - expansões assintóticas, 544-548
  - expansões de Fourier das funções de Mathieu, 695-703
    - coeficientes principais de conjunto  $se_1$ , 698-701
    - coeficientes principais para  $ce_0$ , 701-703
    - equações integrais e séries de Fourier para funções de Mathieu, 695-698
  - expoentes de Lyapunov, 822-823
  - exponencial de matriz diagonal, 170-171
- F**
- faixa crítica, 679
  - fase de um número complexo, 309
  - fase de uma função complexa, 309
  - fechamento de função de Bessel, 187, 526
  - fechamento de harmônicos esféricos, 597, 599
  - fenômeno de Gibbs, 671, 688-691
    - cálculo do aumento momentâneo, 690-691
    - onda quadrada, 689-690
    - somatório de série, 689
  - fluxo magnético através de uma superfície orientada, 233
  - força central, 90
  - força como gradiente de um potencial, 29
  - força conservativa, 27, 53
  - força impulsiva, 739
  - forma algébrica, 306
  - forma de contínuo, 526-527
  - forma de série, 540
    - de segunda solução, 440-441
  - forma do produto infinito de Weierstrass  $de\Gamma(z)$ , 377
  - forma integral, funções de Neumann, 530
  - forma trigonométrica, 646
  - formas assintóticas

- da função de Hankel, 373-374
- da função fatorial  $\Gamma(1 + s)$ , 374
- formas diferenciais, 231-243, *veja também* retornos
  - 1- formas, 232
  - 2- formas, 232-233
  - 3- formas, 233
- derivada exterior, 234-235
- equação de Legendre, 568
- exercícios, 242-244
- operador \* de Hodge, 239-243
  - equações de Maxwell, 241-244
  - laplaciano em coordenadas ortogonais, 240-241
  - produto cruzado de vetores, 240
  - visão geral, 239-240
- teorema de Stokes sobre, 239
- visão geral, 231-232
- formas exponenciais, 357-365
  - função fatorial, 357-358
  - números de Bernoulli, 358-359
- fórmula de De Moivre, 352
- fórmula de duplicação de Legendre, 380
- fórmula de duplicação de Legendre, derivação de, 395
- fórmula de duplicação para funções fatoriais, *veja* fórmula de duplicação de Legendre
- fórmula de integração de Euler-Maclaurin, 288-289
- fórmula de Rodrigues, 580
  - polinômios de Laguerre, 635
    - associada, 580, 637
- fórmula de Wallis, 302
- fórmula do traço, 170
  - de Gutzwiller, 680
- fórmula tripla de Hermite, 626
- fórmulas de Rayleigh 552
- fórmulas wronskianas, 531
  - ausência de terceira solução, 443, 445
  - função de Green, construção de, 447, 531
  - funções de Bessel, 531-532
  - funções de Bessel, esféricas, 454, 546
  - funções de Chebyshev, 439-440, 446
  - funções hipergeométricas confluentes, 657
  - independência linear de funções, 437-438, 502, 531
  - segunda solução de equações diferenciais, 440-443
  - soluções de equação diferencial auto-adjunta, 531
- fractais, 823-824
- função beta, 393-398
  - convolução de Laplace, 752
  - derivação da forma de duplicação de Legendre, 394-395
  - incompleta, 395
  - integrais definidas, forma alternativa, 394
  - verificação da relação  $\pi\alpha/\text{sen } \pi\alpha$ , 394
- função de Green, 499-509
  - análogo eletrostático, 447, 502
  - autofunção, equação de autovalor, 503-504
  - construção de, duas dimensões, 451
  - construção de, tres dimensões, 451
  - construção de, uma dimensão, 452, 501-502, 506
  - e função delta de Dirac, 505-506
  - equação de Helmholtz, 500
  - equação de Poisson, 505-506
  - equação não-homogênea, 447-461
  - expansão de autofunção, 499-509
  - forma de, 450-452
  - Helmholtz, 451
  - Helmholtz modificada, 451
  - integral — equação diferencial, 502-503
  - operador de Laplace, 451
    - expansão cilíndrica circular, 454-458
    - expansão polar esférica, 451-452
  - oscilador linear, 505
  - simetria de, 449-450
  - unidimensional, 500-502
- função de Laplace, 451
- função de transferência, 729
- função delta de Dirac, *veja* função delta, Dirac
- função delta, Dirac, 64-67, 505-506, 738-739
  - carga total dentro da esfera, 69
  - derivação, 709-710
  - em coordenadas cilíndricas circulares, 454
  - em coordenadas polares esféricas, 64, 452
  - espaço de fase, 69
  - exercícios, 71-74
  - expansão de autofunção, 69-70, 491
  - fonte pontual, 69, 448
  - força impulsiva, 739
  - função de Green e, 448-461
  - integral de Fourier, 70
  - representação de Bessel, 708
  - representação de Fourier, 70
  - representação por funções ortogonais, 69-70
  - representações de seno, co-seno, 714
  - representações integrais para, 70
  - seqüências, 65, 67
  - teoria de distribuições, 67
  - teoria quântica, 723-728
  - transformada de Laplace, 739
  - visão geral, 64-68
- função escalonada unitária de Heaviside, 72, 755
- função escalonada, 734
- função exponencial, do teorema de Maclaurin, 269
- Função fatorial  $\Gamma(1 + s)$ 
  - argumento complexo, 377-383
  - expansão de Maclaurin, 387
  - forma assintótica de, 374
  - fórmula assintótica de inclinações acentuadas, 374-375
  - fórmula de duplicação de Legendre, 380
  - função digama, 386
  - funções poligama, 386-387
  - integrais de contorno, 381
  - notação de fatorial duplo, 381
  - produto infinito, 378
  - relação funcional gama, 380
  - representação integral Euler, 377-378
  - série (fórmula) de Stirling, 390-391
- função gama incompleta, 295-297
  - relações de recorrência, 302, 387
  - representação hipergeométrica confluyente, 377, 654
- função gama, *veja também* função fatorial, 377-403
  - de produto infinito, 301-302
  - definições, propriedades simples, 377-386
    - exercícios, 383-386
    - integral definida (Euler), 377-378
    - limite infinito (Euler), 377
    - notação de fatorial duplo, 381
    - notação fatorial, 380-381
    - produto infinito (Weierstrass), 378-380
    - representação integral, 381-382



- função beta, 393-398
  - derivação da fórmula de duplicação de Legendre, 394-395
  - exercícios, 395-398
  - função beta incompleta, 395
  - integrais definidas, formas alternativas, 394
  - verificação da razão  $\pi\alpha/\text{sen } \pi\alpha$ , 394
- funções digama e poligama, 386-390
  - constante de Catalan, 387
  - exercícios, 388-390
  - expansão de Maclaurin, cálculo, 387
  - função poligama, 386-387
  - funções digama, 387
  - somatório de série, 387
- funções gama incompletas e funções relacionadas, 398-403
  - exercícios, 400-403
  - integrais de erro, 400
  - integral exponencial, 398-400
- série de Stirling, 390-393
  - derivação da fórmula de integração de Euler-Maclaurin, 390
  - exercícios, 391-393
  - série de Stirling, 391
- função geradora, 560-566, 641-642, 769-770
  - base física — eletrostática, 560
  - expansão vetorial, 563-564
  - extensão para polinômios ultra-esféricos, 564
  - funções associadas de Legendre, 582-592, 596
  - funções de Bessel, modificadas, 537, 539-542, 546-547, 655
  - múltiplos elétricos lineares, 562-563
  - números de Bernoulli, 286-295, 358-359, 391
  - para ordem inteira, 510-511
  - polinômiais associadas de Laguerre, 471, 636-639
  - polinômios associados de Legendre, 584
  - Polinômios de Chebyshev, 642-650
  - polinômios de Hermite, 618-628
  - polinômios de Laguerre, 488, 633-636, 638-639
  - polinômios de Legendre, 560-562
  - polinômios ultra-esféricos, 564
  - polinômios, Bernoulli, 288
- função zeta de Riemann, 251, 254-258
  - avaliação da série de Fourier, 251
  - tabela de valores, 290
  - e números de Bernoulli, 290-292
  - séries infinitas, 677-680
- função zeta, *veja* função zeta de Riemann
- funções, 618-666, *veja também* funções analíticas
  - de matrizes, 169-171
  - de variável complexa, 309-312
  - exponencial, de teorema de Maclaurin, 269
  - fatorial, 357-358
  - funções de Hermite, 618-633
    - aplicações das fórmulas de produto, 628-629
    - exercícios, 629-633
    - expansão direta de produtos de polinômios de Hermite, 627-628
    - fórmula tripla de Hermite, 626
    - funções geradoras — polinômiais de Hermite, 618-619
    - ortogonalidade, 621
    - oscilador harmônico simples da mecânica quântica, 622-625
    - relações de recorrência, 619
    - representação de Rodrigues, 620-621
    - representações alternativas, 620
  - funções de Laguerre, 633-642
    - átomo de hidrogênio, 638-639
    - equação diferencial — polinômiais de Laguerre, 633-636
    - exercícios, 639-642
    - polinômiais associadas de Laguerre, 636-638
  - funções de Mathieu, 658-665
    - exercícios, 665
    - funções radiais de Mathieu, 661-665
    - pêndulo quântico, 661
    - propriedades gerais de funções de Mathieu, 661
    - separação de variáveis em coordenadas elípticas, 658-659
    - tambor elíptico, 660
  - funções hipergeométricas confluentes, 653-658
    - casos diversos, 655
    - exercícios, 656-658
    - funções de Bessel e funções modificadas de Bessel, 655
    - funções de Hermite, 655
    - representações integrais, 654-655
  - funções hipergeométricas, 650-653
    - exercícios, 652-653
    - funções contíguas relações, 651
    - representações hipergeométricas, 652
  - inteiro, 314, 350-351
  - meromórfica, 349-350, 362
  - multivalente e pontos de ramificação, 338-340
  - polinômiais de Chebyshev, 642-650
    - exercícios, 647-650
    - forma trigonométrica, 645
    - funções geradoras, 642
    - ortogonalidade, 647
    - relações de recorrência — derivadas, 645
    - tipo I, 642-645
    - tipo II, 642
  - rotação de, 190
  - série de, 264-267
    - exercícios, 267
    - teste  $M$  de Weierstrass, 265
    - teste de Abel, 266
    - uniforme e não-uniforme convergência, 265
    - visão geral, 265
  - funções  $Q_n(x)$  da segunda espécie, 611-612
  - funções analíticas, 314-316
    - $z^*$ , 314
    - $z^2$ , 314
  - funções de Clausen, 688
  - funções de equação associada de Legendre, *veja* equação de Legendre, funções polinômiais
  - funções de Hankel e equações de movimento de Lagrange, 373-374, 534-538
    - definição, pela função de Neumann, 534-535
    - definições, 534-535
    - esféricas, 550-551
    - expansão de série, 534, 540
    - formas assintóticas, 373-374, 546
    - fórmulas wronskianas, 535
    - ondas progressivas cilíndricas, 535
    - representação de integral de contorno das funções de Hankel, 536-537
  - funções de Hermite, 618-633, 655
    - aplicações das fórmulas de produto, 628-629
    - construção de Gram-Schmidt, 484-485
    - expansão direta de produtos de polinômios de Hermite, 627-628
    - fórmula tripla de Hermite, 626
    - funções geradoras — polinômiais de Hermite, 618
    - ortogonalidade, 621
    - oscilador harmônico simples da mecânica quântica, 622-625
    - relações de recorrência, 619

- representação de Rodrigues, 620-621
- representação hipergeométrica confluyente, 655
- representações alternativas, 620
- funções de Laguerre, 633-642
  - átomo de hidrogênio, 638-639
  - equação diferencial - polinômios de Laguerre, 633-636
  - polinômios associados de Laguerre, 636-638
- funções de Legendre, 560-616
  - associada, 584
  - definições alternativas de polinômios de Legendre, 580-582
    - exercícios, 581-582
    - fórmula de Rodrigues, 580
    - integral de Schlaefli, 580-581
  - função geradora, 560-566
    - base física — eletrostática, 560
    - exercícios, 564-566
    - expansão vetorial, 563-564
    - extensão para polinômios ultra-esféricos, 564
    - multipolos elétricos lineares, 562-563
    - polinômios de Legendre, 560-561
  - funções associadas de Legendre, 583-595
    - campo de indução magnética de um circuito de corrente, 588-592
    - construção de Gram-Schmidt, 597
    - equação, 421, 583, 588-592, 596
    - forma auto-adjunta, 583
    - fórmula de Rodrigues, 584
    - integral de Schlaefli, 580
    - ortogonalidade, 587-588
    - paridade, 587
    - polinômios associados de Legendre, 584-585
    - polinômios de Legendre associados mais baixos, 585
    - pólos, 574, 592
    - relações de recorrência, 586
    - representação hipergeométrica, 652
    - segunda espécie, 610-614
    - transformada de Fourier, 582
    - valores especiais, 586
- harmônicos esféricos vetoriais, 615-617
- harmônicos esféricos, 595-600
  - dependência azimutal — ortogonalidade, 595
  - dependência de ângulo polar, 596
  - exercícios, 598-600
  - harmônicos esféricos, 596-598
  - série de Laplace, teorema da expansão, 598
  - série de Laplace — campos de gravidade, 598
- integrais de produto de três harmônicos esféricos, 607-609
  - aplicações de relações de recorrência, 608
  - exercícios, 609
- operadores de momento angular orbital, 600-603
- ortogonalidade, 571-572
  - anel de carga elétrica, 575-576
  - campo gravitacional da Terra, 573
  - esfera em campo elétrico uniforme, 574-575
  - exercícios, 576-579
  - expansão de funções, série de Legendre, 572-573
  - polarização de dielétrico, 578
  - potencial eletrostático de um anel de carga, 575-576
- relações de recorrência e propriedades especiais, 566-571
  - da segunda espécie, 610-615
  - equações diferenciais, 567-568
  - esfera em campo elétrico uniforme, 574-575
  - exercícios, 570-571
  - exercícios, 614-615
  - funções  $Q_n(x)$  da segunda espécie, 611-612
  - limites superiores e inferiores para  $P_n(\cos \theta)$ , 569-570
  - paridade, 569
  - relações de recorrência, 566-567
  - solução de série da equação de Legendre, 610-611
  - soluções de forma fechada, 612-614
  - valores especiais, 568
- teorema da adição para harmônicos esféricos, 602-607
  - derivação do teorema da adição, 603-605
  - exercícios, 605-607
  - identidade trigonométrica, 603
  - teorema da adição, 603
- funções de Mathieu, 658-665, 697
  - expansões de Fourier de, 695-703
    - coeficientes principais de  $se_1$ , 698-701
    - coeficientes principais para  $ce_0$ , 701-703
  - equações integrais e série de Fourier para funções de Mathieu, 695-698
- funções radiais de Mathieu, 661-665
- pêndulo quântico, 661
- propriedades gerais de funções de Mathieu, 661
- separação de variáveis em coordenadas elípticas, 658-659
- tambor elíptico, 659-660
- funções de múltiplos valores, 309
- funções de Neumann, 386
  - definição de função de Hankel, 534-535
  - esférica, 383, 549
  - forma assintótica, 455
  - forma integral, 530
  - fórmulas wronskianas, 531
- funções de Bessel da segunda espécie, 529-534
  - definição e forma de série, 529
  - fórmulas wronskianas, 531
  - guias de onda coaxiais, 532
  - outras formas, 530
  - relações de recorrência, 531
- relações de recorrência, 531
- transformada de Fourier, 455
- funções de Neumann, forma integral, 530
- funções de onda de espinor, 161
- funções de onda, 471
  - espinor, 161
- funções de transferência, 728-731
  - significância de  $\Phi(t)$ , 729-730
- funções de Whittaker, 656, 696
- funções descontínuas, 672
- funções digama e poligama, 386-390
  - expansão de Maclaurin, cálculo, 387
  - função poligama, 386-387
  - funções digama, 386
  - somatório de série, 387
- funções esféricas de Bessel, 548-559
  - definições, 548-551
  - relações de recorrência, 552
  - valores assintóticos, 551
  - valores limitadores, 551-552
- funções hipergeométricas confluentes, 653-658
  - casos diversos, 655
  - expansões assintóticas, 655
  - funções de Bessel e funções modificadas de Bessel, 655
  - funções de Hermite, 655
  - funções de Laguerre, 633-634



funções de Whittaker, 656  
 representações integrais, 655  
 wronskiano, 657

funções hipergeométricas, 650-653  
 relações de funções contíguas, 651  
 representações hipergeométricas, 652

funções holomórficas (funções analíticas ou regulares), 314

funções meromórficas, 332, 349-350  
 expansão de pólo de, 349-350  
 integral de, 353

funções modificadas de Bessel, 539-544  
 expansão assintótica, 537, 544  
 forma de série, 540  
 função geradora, 536  
 relações de recorrência, 540-541  
 representação integral, 544-546  
 transformada de Fourier, 541  
 transformada de Laplace, 706

funções multivalentes, 338-340

funções ortogonais, representação da função delta de Dirac por, 69

funções ortonormais, 484-486  
 polinômios, 488  
 vetores, 132

funções periódicas, 672-674  
 condições de fronteira, 480, 669-670

funções poligama, 386-387  
 constante de Catalan, 387

funções radiais de Mathieu, 661-665

funções regulares (funções holomórficas ou funções analíticas), 314

**G**

ganchos, 209

geodésica, 120-123

geradores de grupos contínuos, 187-198, *veja também* rotações;  
 SU(2)  
 exercícios, 197-198  
 visão geral, 187-190

gradiente, coordenadas curvilíneas, 85

gradiente,  $\nabla$ , 26-30  
 como operador vetorial diferencial, 85  
 de potencial, 27  
 de produto escalar, 36  
 definições integrais de divergência, espiral, e, 44-45  
 exercícios, 30  
 interpretação geométrica, 28-30  
 de potencial, força como, 29  
 integração por partes de, 29  
 visão geral, 26-27

gradiente  
 em coordenadas cartesianas, 29, 39, 88, 104  
 em coordenadas cilíndricas circulares, 91  
 em coordenadas curvilíneas, 85  
 em coordenadas polares esféricas, 98

grande círculo, 789

Grupo abeliano, 184

grupo de Lorentz, *veja* grupo homogêneo de Lorentz

grupo fiel, 184

grupo homogêneo de Lorentz, 211-215  
 cinemática e dinâmica em espaço-tempo de Minkowski, 213-215  
 exercícios, 215  
 visão geral, 211-213

grupo homomórfico, 184

grupo isomórfico, 184

grupo ortogonal SO(3), 192-193, 194

grupo unitário especial SU(2), 191

grupos diédricos,  $D_n$ , 227

grupos discretos, 221-231  
 classes e caráter, 222-223  
 eixo de simetria duplo, 223-225  
 eixo de simetria triplo, 225-227  
 exercícios, 228-231  
 grupos diédricos,  $D_n$ , 227  
 ponto cristalográfico e grupos espaciais, 227  
 subgrupos e grupos laterais, 223

grupos e álgebras de Lie, 184, 188, 200-202

grupos e classes laterais, 223

grupos laterais e subgrupos, 223

grupos ortogonais, 184

grupos unitários especiais  
 SU(2), matrizes de spin de Pauli, 143, 154-155, 189-202, 203-205, 208-210  
 SU( $n$ ), tableaux de Young, 208-209  
 SU(3), matrizes de Gell-Mann, 194-107, 201-202, 208-210

grupos unitários, 184

guias de onda coaxiais, 532

guias de onda, coaxial, funções de Bessel, 532

**H**

harmônicos esféricos, 200, 595-600  
 convenções de fase de Condon-Shortley, 205  
 integrais de, 608  
 operadores escalonados, 602-603

dependência azimutal — ortogonalidade, 595

dependência de ângulo polar, 596

harmônicos esféricos vetoriais, 615-617

harmônicos esféricos, 596-598

integral de ortogonalidade, 596

operadores de momento angular, 600

relações de ortogonalidade, 615

série de Laplace, teorema da expansão, 598

teorema da adição para, 603-607  
 derivação do teorema da adição, 603-605  
 identidade trigonométrica, 603

harmônicos vetoriais esféricos, 615-617

harmônicos, *veja também* harmônicos esféricos, harmônicos vetoriais esféricos

Hausdorff, 171, 188, 823

hipercarga, 195

hipótese estatística, 864

homomorfismo, 184-185  
 SU(2) e SO(3), 191-194  
 rotações, 185  
 visão geral, 184

horizonte de evento, 790

**I**

identidade de Euler, 170  
 fórmula de produto, 290-292

identidade de Jacobi, 188

identidade trigonométrica, 603

igualdade de matrizes, 135

inclinação mais acentuada, método da, 370-375  
 função fatorial, 374  
 funções de Hankel, 373-374  
 funções modificadas de Bessel, 544

inclinação, mais acentuada, *veja* pontos de sela (método da inclinação mais acentuada)

independência linear de soluções, 439-440

- independência, linear, 132, 437-439, 485, 502, 531
  - de soluções de equações diferenciais ordinárias, 437-439
  - de vetores, 132, 437
- infinitude, *veja* pólo, singularidade, essencial
- integração, 684, *veja também* trabalho dependente de trajetória
  - de série de potências, 276
  - de transformadas, 746
  - de vetores, 42-46
    - exercícios, 46
    - visão geral, 42-43
  - desenvolvimento da integral de Fourier, 708-710
    - derivação da função delta de Dirac, 709-710
    - integral de Fourier — forma exponencial, 709
  - fórmula de Euler-Maclaurin, 288-290
  - função geradora, 768-772
    - equação generalizada de Abel, teorema da convolução, 769
    - função geratrizes, 770
    - solução de transformada de Fourier, 769
  - funções de transferência, 728-730
    - exercícios, 731
    - significância de  $\Phi(t)$ , 729-730
  - linearidade, 706-707
  - outras propriedades, 742-750
    - analogia com *RLC*, 742-743
    - derivada de uma transformada, 744-745
    - equação de Bessel, 745-746
    - exercícios, 746-750
    - integração de transformadas, 746
    - limites de integração — função escalonada unitária, 746
    - ondas eletromagnéticas, 744
    - oscilador atenuado, 742
    - substituição, 741-742
    - translação, 743
  - pólo simples sobre contorno de, 354-355
  - por partes de divergência, 31
  - por partes de espiral, 36
  - por partes de gradiente, 29
  - representação de momento, 723-728
    - átomo de hidrogênio, 725
    - exercícios, 726-728
    - oscilador harmônico, 726
  - teorema da convolução (obraduras), 750-753
    - exercícios, 753
    - oscilador forçado com atenuação, 751-753
  - teorema da convolução, 720-723
    - exercícios, 722-723
    - relação de Parseval, 721
  - transformada de Fourier da gaussiana, 705-706
  - transformada de Fourier de derivadas, 716-720
    - EDP de fluxo de calor, 718
    - equação de onda, 717
    - inversão de EDP, 718-719
  - transformada de Fourier, 705
  - transformada de Laplace de derivadas, 736-741
    - exercícios, 740-741
    - força impulsiva, 739
    - função delta de Dirac, 738-739
    - natação da Terra, 737-738
    - oscilador harmônico simples, 737
  - transformada inversa de Laplace, 753-761
    - exercícios, 759-761
    - integral de Bromwich, 753-754
    - inversão via cálculo de resíduos, 755
  - resumo — inversão de transformada de Laplace, 758
  - velocidade de ondas eletromagnéticas em um meio dispersivo, 756-757
  - transformadas de Fourier de derivadas, 719-720
  - transformadas de Fourier — teorema da inversão, 710-716
    - exercícios, 713-716
    - princípio da incerteza, 712
    - transformada de co-seno, 710
    - transformada de seno, 711
    - transformada exponencial, 710
    - trem de ondas finito, 711-712
  - transformadas de Laplace, 731-736
    - definição, 731
    - exercícios, 735-736
    - expansão por frações parciais, 733-734
    - função escalonada, 734-735
    - funções elementares, 731-732
    - transformada inversa, 732-733
  - transformadas de Laplace, Mellin e Hankel, 706
  - transformadas integrais, 705-708
    - exercícios, 707-708
    - linearidade, 706-707
    - transformada de Fourier da gaussiana, 705-706
    - transformada de Fourier, 705
    - transformadas de Laplace, Mellin e Hankel, 706
  - integrais de erro, 400
    - expansão assintótica, 298
    - representação hipergeométrica confluyente, 654
  - integrais de Euler, 379
  - integrais de linha, 42-43
  - integrais de Lommel, 527
  - integrais de superfície, 44
  - integrais de volume, 44-45
  - integrais definidas
    - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ , 352-353
    - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$ , 353-357
      - dispersão da mecânica quântica, 355-357
      - pólo simples em integração de contorno, 354-355
    - $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ , 352
    - avaliação de, 351
    - formas exponenciais, 357-365
      - função fatorial, 357-358
      - números de Bernoulli, 358-359
  - integrais elípticas, 281-285
    - da primeira espécie, 282
    - da segunda espécie, 282
    - definições de, 282
    - exercícios, 283-285
    - expansão de série, 282-283
    - período de pêndulo simples, 281
    - representações hipergeométricas, 283, 651
    - valores limitativos, 283
    - visão geral, 281
  - integrais vetoriais
    - integrais de linha, 42
    - integrais de superfície, 44
    - integrais de volume, 44
  - integrais, *veja também* teste da integral de Cauchy (Maclaurin) ;
    - integrais definidas; integrais elípticas
    - avaliação de, 612
    - diferenciação de, 445
    - em produtos de três harmônicos esféricos, 607-610
    - integração de contorno, 351, 357, 380, 394, 455





Lebesgue, 490, 496  
 linha, 43, 50-51, 333  
 Riemann, 43, 46-47, 457, 480  
 Stieltjes, 67, 660  
 superfície, 44  
 volume, 44  
 integral de Bromwich, 753-754  
 integral de erro de Gauss, 378  
     expansão assintótica, 400  
 integral de Fourier-Mellin, 754  
 integral de ortogonalidade  
     harmônicos esféricos, 596  
     polinômios de Hermite, 621  
     polinômios de Legendre, 588  
 integral de Riemann, 46-47  
 integral de Schlaefli, 536, 580-581  
     polinômios de Legendre, 580-581  
 integral definida (Euler), 377-378  
 integral exponencial, 398-400  
 integral — equação diferencial, 502-503  
 integráveis ao quadrado, 367, 368 493, 497, 667  
 interitem, 843  
 interpretação física da divergência, 32-33  
 interpretação geométrica de gradiente, 27-29  
     de potencial, força como, 29  
     integração por partes de, 29  
 interpretação, *veja* interpretação geométrica de gradiente;  
     interpretação física de divergência  
 intervalo de confiança, 872, 874  
 intervalo de integração  $[a, b]$ , 474-475  
 invariância de produto escalar sob rotações invariantes, 12-13  
 invariantes eletromagnéticas, 219  
 inversão, 337-338  
     de EDP, 718-719  
     de série de potências, 277  
 matriz, 140-142  
     Gauss-Jordan, 140-142  
     visão geral, 140  
     via cálculo de resíduos, 755  
 irrotacional, 36  
 isomorfismo, 184-185  
     rotações, 185  
     visão geral, 184  
 isospin **I**, 194-195  
 isospin,  $SU(2)$ , 194-197  
*aliasing*, 693-694

**J**

jacobiano, 83  
     transformação de paridade, 112  
 jacobianos para coordenadas e polares, 84-85

**L**

lagrangiana, 799-800  
 laplaciano  
     com operador derivada tensorial, 123-124  
     coordenadas polares esféricas, 98  
     de potenciais, 39  
     desenvolvimento por menores, 127-128  
     em coordenadas cartesianas, 40, 418-419  
     em coordenadas cilíndricas circulares, 92  
     em coordenadas ortogonais, 240-241  
 lei da área para movimento planetário, 90-92  
 lei da transformação linear, 117

lei da transformação vetorial, 17  
 lei da transformação, 104  
 lei de adição do paralelogramo, 2  
 lei de Biot e Savart, 590-592  
 lei de Faraday, 51-53  
 lei de Gauss, 41, 61-65, 448  
 lei de Hubble, 6  
 lei dos co-senos, 13, 91, 563  
 leis de Kepler do movimento planetário, 90-91  
 lema de Jordan, 354  
 lema de Schur, 201  
 limite infinito (Euler), 377  
 limites de integração — função escalonada unitária, 746  
 limites para valores de integrais elípticas, 283-284  
 limites superiores e inferiores para  $P_n(\cos \theta)$ , 569-570  
 linearidade, 706-707  
 linha de corte (corte de ramo), 309  
 linha reta, 792-793

**M**

magnético, 15, 36, 39-40, 51, 53, 58-59, 75, 78, 99, 111-112, 215,  
 219, 233, 236-237, 241, 339, 405, 481-482, 518, 532-533,  
 564, 588-592, 738  
 mapa logístico, 819-821  
 mapeamento  
     conformal, 342-344  
     exercícios, 343  
     variáveis complexas, 335-342  
     exercícios, 340-341  
     inversão, 337-338  
     pontos de ramo e funções multivalentes, 338-340  
     rotação, 336  
     translação, 336  
     visão geral, 335  
 $\mathbb{R}^3$ , coordenadas ortogonais em, *veja* coordenadas ortogonais  
 $SO(3)$   
     coeficientes de Clebsch-Gordan, 202-205  
     grupos de rotação, 189  
     homomorfismo, 191-194  
 $SU(2)$   
     coeficientes de Clebsch-Gordan, 202-205  
     e homomorfismo  $SO(3)$ , 191-194  
     isospin e simetria de sabor  $SU(3)$ , 194-197  
 $SU(3)$  simetria de sabor, 194-197  
 $SU(n)$ , tableaux de Young para, 208-211  
 matriz de Hilbert, determinante, 178  
 matriz de inércia, momento de, 163  
 matriz de momento de inércia, 163  
 matriz inversa, 152  
 matriz nula, 135  
 matriz transposta,  $\tilde{A}$ , 152-153  
 matrizes anti-hermitianas, 168-169  
     autovalores  
         degenerados, 169  
         e autovetores de matrizes simétricas reais, 168  
         visão geral, 168  
     matrizes antissimétricas, 155  
     matrizes auto-adjuntas, 158  
     matrizes de Dirac, 159-161  
     matrizes de Pauli, 159-161  
     matrizes diagonais, 138-139, 163-175, *veja também* matrizes  
         anti-hermitianas  
     autovetores e autovalores, 164-166  
     exercícios, 171-175

- funções de, 169-171
- hermitiana, 166-167
- momento de inércia, 163
- matrizes hermitianas, 140, 158
  - e diagonalização de matriz, 166-167
  - unitárias e, 158-163
    - exercícios, 161-163
    - Pauli e Dirac, 159-161
    - visão geral, 158
- matrizes hermitianas, anti-, 168-169
  - autovalores
    - degenerados, 169
    - e autovetores ode matrizes simétricas reais, 168
    - visão geral, 168
- matrizes malcondicionadas, 178
- matrizes normais, 175-181
  - exercícios, 179-181
  - mal condicionada, 178
  - modos normais de vibração, 176-177
  - visão geral, 175-176
- matrizes ortogonais, 148-158
  - ângulos de Euler, 153-154
  - aplicações a vetores, 150
  - condições multidimensionais para, 151-152
  - co-senos direcionais, 148-149
  - exercícios, 156-158
  - inversa, 152
  - matriz transposta,  $\tilde{A}$ , 152-153
  - propriedades de simetria, 154-156
  - relação com tensores, 156
  - visão geral, 148-149
- matrizes simétricas, 154
- matrizes unitárias, *veja também* matrizes hermitianas
  - álgebra, 159-161
  - anel, 137, 142
  - elemento unitário de grupo, 222-223
  - espaço vetorial, 158
  - função degrau unitária, 145
  - Heaviside, 73, 743, 746, 755
- matrizes, 126-182, *veja também* determinantes; matrizes diagonais; matrizes ortogonais
  - adição e subtração, 135-136
  - adjuntas, 158
  - ângulo de rotação de Euler, 153
  - anti-hermitiano, 168-169, 175
  - anti-simétrico, 155
  - auto-adjunta, 158
  - conjuntos anticomutativos, 179
  - definição, 134
  - diagonalização, 163-164
  - exercícios, 142-148
  - hermitiano e unitário, 158-163
    - exercícios, 161-163
    - Pauli e Dirac, 158-161
    - visão geral, 158
  - igualdade, 135
  - inversão de, 140-142
    - Gauss-Jordan, 140-142
    - visão geral, 140
  - lei da transformação vetorial, 150
  - matriz nula, 135
  - matriz ortogonal, 152-153, 156, 158
  - matrizes de momento angular, 192, 207
  - modos normais de vibração, 176-177
  - momento de inércia, 163-164, 167
  - multiplicação de matrizes, 134, 136-137
  - multiplicação, 136-137
    - por escalar, 136
    - produto direto, 138
    - produto interno, 136-137
  - normal, 175-182
    - exercícios, 179-182
  - operador levantamento, 199
  - ordem, 135
  - produto direto, 138
  - quatérnion, 155, 160
  - relação a tensor, 156
  - representação, 134, 140, 156, 158, 160-161
  - simétrico, 154
  - sistemas mal condicionados, 178
  - técnica da inversão de matriz de Gauss-Jordan, 140
  - teorema do produto, 137
  - traços, 108, 139-140
  - transformação de similaridade, 156
  - transposição, 134
  - unitária, 158
  - visão geral, 134-135, 175-176
- sen  $x$ 
  - representação de produto infinito, 187, 297-298, 302, 332, 354-355, 440, 513-514, 550-551, 552, 670, 673, 675, 689, 719, 775, 832-833
  - séries de potências, 271, 307, 310
- mecânica quântica, regras da soma, 366
  - átomo de hidrogênio, 186
  - momento angular, 143-146, 190-194, 198-200, 202-205
  - representação de espaço de configuração, 725
  - representação de momentum, 764
  - representação de Schrödinger, 764
  - valores esperados, 199
- membrana circular, funções de Bessel, 524, 535
- menor, 128
- menores, desenvolvimento laplaciano por, 127-128
- método de Frobenius, solução de série, 427-437
- método de Gauss-Seidel, 171
- métodos não-lineares e caos, 818-841
  - equações diferenciais não-lineares (EDNs), 825
  - bifurcações em sistemas dinâmicos, 837-838
  - caos em sistemas dinâmicos, 838-839
  - centro ou ciclo, 834-835
  - comportamento local e global em número maior de dimensões, 829
  - dissipação em sistemas dinâmicos, 836-837
  - equações de Bernoulli e Riccati, 826
  - equações diferenciais autônomas, 827-829
  - exercícios, 826, 836, 840
  - ponto de sela, 830-832
  - ponto fixo espiral, 833-835
  - rotas para o caos em sistemas dinâmicos, 840
  - singularidades fixas e móveis, soluções especiais, 826-827
  - sorvedouro estável, 830
- introdução, 818-819
- mapa logístico, 819-822
  - exercícios, 822
- sensibilidade a condições iniciais e parâmetros, 822-825
  - exercícios, 825
  - expoentes de Lyapunov, 822-823
  - fractais, 823-824



métricas, coordenadas curvilíneas, 81-82  
 mínimos quadrados, método dos, 849  
 modelo da gotas de líquido, 594  
 modo de oito vezes (diagrama de peso), 195  
 modos de vibração, normal, 176-177  
 módulo, 307  
 momento angular orbital, 190, 198-202  
     abordagem de operador levantamento, 198-200  
     exercícios, 202  
     grupos e álgebras de Lie, 200-202  
     grupos e operadores de Lie, ordem de, 200-201  
     operadores, 600-603  
     rotação de, 190  
     visão geral, 198  
 momento angular, 14-15, 163, 203, *veja também* acoplamento de momento  
     angular orbital, 202-211  
         coeficientes de Clebsch-Gordan SU(2) e SO(3), 203-205  
         exercícios, 210-211  
         visão geral, 202  
         tensores esféricos, 206-208  
 momento, *veja* momento angular; momento angular orbital  
 momentos magnéticos, 112  
 monopolo, 563-564  
 movimento de partícula  
     coordenadas cartesianas, 800  
     coordenadas cilíndricas circulares, 800-801  
     dentro de um cilindro circular reto, 806  
     dentro de uma caixa retangular, 805-806  
     dentro de uma esfera, 553  
     mecânica quântica, 626  
 movimento planetário, lei da área para, 90-92  
 movimento  
     equações de, 110  
     lei da área para, planetário, 90-92  
 mudanças de sinal, séries com, irregulares, 259-260  
 mudanças irregulares de sinais, séries com, 259-260  
 múltiplo, 186  
 multiplicação  
     de matrizes  
         por escalar, 136  
         produto direto, 138  
         de vetores, 138  
         produto interno, 136-137  
 multiplicadores lagrangianos, 804-808  
     partícula dentro de uma caixa, 805-806  
     reator nuclear cilíndrico, 806  
 multipolos elétricos lineares, 562-563  
 mutuamente exclusivo, 842-843

**N**

nó, espiral, 832, 837-838  
 normalização, 525  
 notação bra-ket de Dirac, 134  
 notação de Gauss, 380  
 notação fatorial, 380-381  
 núcleo separável, 775  
 número de condição, de sistemas mal condicionados, 178  
 número de Feigenbaum, 821  
 números primos, 287, 290-291, 679  
 números, de Bernoulli, *veja* Números de Bernoulli  
 notação, 737-738  
 notação da Terra, 737-738

**O**

Oersted, lei de, 41, 51-53  
 Olbers, paradoxo de, 256  
 onda em dente de serra, 670  
 onda quadrada - altas frequências, 675-676  
 onda quadrada, 689-690  
 ondas eletromagnéticas, 744  
 ondas esféricas, funções de Bessel, 552  
 ondas progressivas cilíndricas, 535  
 operador \* de Hodge, 239-243  
     equações de Maxwell, 241-244  
     laplaciano em coordenadas ortogonais, 241  
     produto cruzado de vetores, 240  
     visão geral, 239-240  
 operador auto-adjunto, 470, 475  
     teoria de Sturm-Liouville, equações diferenciais, 469-475  
 operador de aniquilação, 623  
 operador de criação, 623  
 operador de elevação, 199  
 operador de número, 622  
 operador de redução, 199  
 operador de tensor esférico, 205  
 operador inverso, 707, 733  
 operador linear, 68, 134, 158, 404, 469, 490  
     operador diferencial, 33-34, 189, 198, 216, 231, 234, 418, 430, 475, 478, 501  
     operador integral, 580, 773  
 operador modificado de Helmholtz, 451  
 operador(es) de momento angular, 198  
     coeficientes de Clebsch-Gordan, 607  
     harmônicos esféricos, 600  
         harmônicos esféricos vetoriais, 615-617  
     orbital, 600-602  
 operadores de Casimir, 201  
 operadores de Helmholtz, 451  
 operadores de projeção, 486  
 operadores derivados, tensor  
     divergência, 123-124  
     rotacional, 124-125  
     exercícios, 125  
     laplaciano, 124  
     visão geral, 123  
 operadores escalonados, abordagem do momento angular orbital, 199-200  
 operadores hermitianos, 475, 479-484  
     autofunções ortogonais, 480  
     autovalores reais, 479  
     compleude de autofunções, 490-497  
     degeneração, 481  
     em Mecânica Quântica, 475  
     expansão em autofunções ortogonais - onda quadrada, 481  
     intervalo de integração, 474  
     propriedades de, 479-481  
     série de Fourier, ortogonalidade, 480  
 operadores tensoriais derivada  
     divergência, 123-124  
     rotacional, 124-125  
     exercícios, 125  
     laplaciano, 124  
     visão geral, 123  
 operadores vetoriais diferenciais, 85-88  
     adjunta, 469, 470, 479  
     divergência, 86-87

rotacional, 87-88  
 exercícios, 88  
 gradiente, 85  
 nabla, 26  
 visão geral, 85  
 operadores, vetorial diferencial, *veja* diferenciais operadores  
 vetoriais  
 ordem, 200  
 de matrizes, 135  
 de tensor, 103  
 ordem fracionária, 323  
 ortogonalidade, 525-529, 552-553, 587-588, 621, 647  
 campo gravitacional da Terra, 573  
 coordenadas curvilíneas, 80-81  
 de vetores, 11  
 equações diferenciais, Sturm-Liouville, 782  
 esfera em campo elétrico uniforme, 574-575  
 expansão de funções, série de Legendre, 572-573  
 forma de contínuo, 526  
 normalização, 525  
 potencial eletrostático de um anel de carga, 575-576  
 potencial eletrostático em um cilindro oco, 526  
 série de Fourier, 480-481  
 série de Fourier: equações integrais de Hilbert-Schmidt, 695-703  
 séries de Bessel, 525  
 sobre pontos discretos, 692  
 ortogonalização de Gram-Schmidt, 484-490  
 ortogonalização de Schmidt, *veja* Gram-Schmidt  
 ortogonalização, Gram-Schmidt, 132, 484-488  
 oscilação harmônica simples atenuada, 742  
 oscilador atenuado, 742  
 oscilador clássico forçado, 346-349  
 oscilador forçado com atenuação, 751-752  
 oscilador harmônico simples da mecânica quântica, 622-625  
 oscilador harmônico simples, 737  
 oscilador harmônico, 407, 622-625, 726  
 oscilador linear  
 função de Green, 505  
 oscilador  
 atenuação, 742, 751-752  
 equação auto-adjunta, 513  
 equação integral para, 751-752  
 forçado clássico, 346-349  
 forçado, 346, 427, 751-752  
 função de onda no espaço de momentum, 430  
 harmônico, 622-625  
 linear, 505  
 singularidades na equação diferencial de oscilador harmônico, 426  
 solução de série de equação diferencial, 429  
 solução de transformada de Laplace, 751-752

**P**

panorama analítico, 370-371  
 parâmetro de ordem, 823  
 parâmetros de Cayley-Klein, 191  
 paridade, 569, 587, 711  
 funções de Bessel, 520, 556  
 funções de Chebyshev, 430  
 funções de Hermite, 430  
 funções de Legendre, 430  
 funções de Legendre, associadas, 587  
 funções de Legendre, segunda espécie, 614  
 harmônicos esféricos vetoriais, 615  
 harmônicos esféricos, 587, 598

operador diferencial, 430  
 transformadas de Fourier de co-seno, seno, 711  
 parte imaginária, 308  
 parte real, 308  
 partícula em movimento  
 coordenadas cartesianas, 800  
 coordenadas cilíndricas circulares, 800-801  
 partícula  
 dentro de uma caixa, 805-806  
 dentro de uma esfera, 553  
 patamar de produção de píons, 214-215  
 película de sabão, 793-794  
 película de sabão — área mínima, 794-796  
 pêndulo quântico, 661  
 pêndulo simples, 809-810  
 pêndulos, período de, simples, 281  
 pequenas oscilações, 281  
 permutações e combinações, contagem de, 845-846  
 pi,  $\pi$ , 166, 287, 300-303, 442  
 fórmula de Leibniz, 445, 587, 671  
 fórmula de Wallis, 302  
 polinômiais de Chebyshev, 642-650  
 construção de Gram-Schmidt, 488  
 deslocada, 488, 643  
 forma trigonométrica, 646  
 função geradoras, 642  
 ortogonalidade, 647  
 relação de recorrência, 643  
 relações de recorrência — derivadas, 645  
 representações hipergeométricas, 652  
 tipo I, 642-645  
 tipo II, 642  
 polinômios associados de Legendre mais baixos, 585  
 polinômios de Gegenbauer, *veja* polinômios ultra-esféricos  
 polinômios de Hermite  
 polinômios de Laguerre, 471  
 associados, 471-472  
 função geradora, 636-637  
 ortogonalidade, 637-638  
 relações de recorrência, 637  
 representação de Rodrigues, 580, 637  
 representação hipergeométrica confluyente, 655  
 representação integral, 637  
 construção de Gram-Schmidt, 488  
 equação de onda de Schrödinger, 638  
 equação diferencial, 633-636  
 forma auto-adjunta, 471, 635  
 fórmula de Rodrigues, 635  
 função geradora, 633-635  
 ortogonalidade, 471, 488  
 relações de recorrência, 635, 637  
 representação hipergeométrica confluyente, 655  
 singularidades, 426  
 polinômios de Legendre, 487-488, 560-562  
 associados  
 função geradora, 584  
 relações de recorrência, 586  
 equação de Laplace, 574, 575  
 fórmula de Rodrigues, 575  
 função geradora, 561  
 integral de ortogonalidade, 588  
 integral de Schlaefli, 580  
 por ortogonalização de Gram-Schmidt, 487



- relações de recorrência, 566-567
- polinômios interpoladores, 147
- polinômios ultra-esféricos, extensão para, 564
  - equação, 645, 652
  - forma auto-adjunta, 646
- polinômios, Bernoulli, 288
- pólo simples sobre contorno de integração, 354-355
- pólos, 332
  - simples, sobre contorno de integração, 354-355
- ponto cristalográfico e grupos espaciais, 227-228
- ponto crítico, 827-829
- ponto fixo espiral, 833-835
- ponto(s) singular(es), 425-426
  - essencial (irregular), 425
  - irregular (essencial), 425
  - não-essencial (regular), 425
  - regular (não-essencial), 425
- pontos de ramo, 333-334
  - de ordem 2, 333-334
- e funções multivalentes, 338-340
- pontos de sela (método do declínio mais acentuado), 370-376, 828, 830-832, 837
  - exercícios, 375-376
  - formas assintóticas
    - da função de Hankel  $H_\nu^{(1)}(s)$ , 373-374
    - de função fatorial  $\Gamma$ , 374
  - função de Hankel  $H_\nu^{(1)}$ , 373-374
  - função fatorial  $\Gamma(z)$ , 374
  - panorama analítico, 370-371
  - visão geral, 370
- pontos e grupos espaciais, cristalográficos, 227-228
- potenciais, 53-61, *veja também* termodinâmica
  - escalar, 53-56
    - centrífuga, 56
    - gravitacional, 56
    - visão geral, 53-54
  - gradiente de, 27
    - força como, 29
  - laplaciano de, 39
  - vetor, 57-61
    - de campo  $\mathbf{B}$  constante, 34
    - exercícios, 59-61
    - magnético, 58-59
  - visão geral, 53
- potencial dipolar elétrico, expansão de polinômio de Legendre, 563
- potencial eletrostático, 448
  - de um anel de carga, 575-576
  - em cilindro oco, 526
- potencial escalar, 26-27, 54, 404
- potencial vetorial, 57, 237
- precessão de Thomas, 212
- primitiva, 680
- princípio da incerteza de Heisenberg, 553, 712
- princípio da incerteza na teoria quântica, 712
- princípio da reflexão de Schwarz, 326-327
- princípio de Fermat, 120, 790, 797
- princípio de Hamilton, 799-800
- princípio de reciprocidade, 502
- princípio de superposição para EDOs, EDPs homogêneas, 404-405
- probabilidade, 842-875
  - definições, propriedades simples, 842-875
    - contagem de permutações e combinações, 845-846
    - exercícios, 846-847
  - probabilidade condicional, 844
  - probabilidade para  $A$  ou  $B$ , 843
  - testes de aptidão escolar, 844-845
- distribuição binomial, 857-859
  - exercícios, 859
  - repetidos lançamentos de dados, 857-858
- distribuição de Poisson, 859-561
  - exercícios, 861
- distribuição normal de Gauss, 861-864
  - exercícios, 864
- estatística, 864
  - ajustar curvas a dados, 866-869
  - distribuição  $\chi^2$ , 869-871
  - distribuição  $t$  de Student, 872-874
  - exercícios, 874-875
  - intervalo de confiança, 874
  - propagação de erro, 865-866
- variáveis aleatórias, 847-857
  - exercícios, 856-857
  - medições de desvio padrão, 850-852
  - retiradas repetidas de cartas, 853-855
  - soma, produto e razão de variáveis aleatórias, 855-856
  - variável aleatória contínua: átomo de hidrogênio, 848-849
  - variável aleatória discreta, 847-848
- probabilidade condicional, 844
- probabilidade para  $A$  ou  $B$ , 843
- problema de Dirichlet, 467
- problema de Neumann, 467
- procedimento de Gram-Schmidt, 132
  - vetores por ortogonalização, 132
- visão geral, 132
- produto cruzado, 14-17, *veja* produtos vetoriais triplos
  - de vetores, 240
  - exercícios, 17-20
  - visão geral, 14-17
- produto de Euler para função zeta de Riemann, 290-292
- produto de Hadamard, 157
- produto de Kronecker, 138
- produto de tensor direto, 107-108
- produto direto, 107-109
  - de tensores, 108
  - e multiplicação de matrizes, 138
  - exercícios, 108-109
  - visão geral, 108
- produto infinito (Weierstrass), 377, 379-380
- produto interno e multiplicação de matrizes, 136-137
- produto vetorial, 4, 9, 14-17, 20-23, 34, 36, 113, 206
- produtos escalares triplos, 20-21, 126
- produtos escalares, 10-13
  - exercícios, 13
  - gradiente de, 36
  - invariância de produto escalar sob rotações, 11-13
  - visão geral, 10-12
- produtos infinitos, 287, 291, 300-302, 377, 379-380
  - convergência, 301
  - co-seno, 301-302
  - função gama, 301-302
  - funções inteiras, 350
  - seno, 301-302
- produtos vetoriais triplos, 22-23, 36
  - exercícios, 22-25
  - regra **BAC-CAB**, 22, 36, 39
  - visão geral, 21

produtos, *veja também* roduto cruzado, produto direto, produtos escalares  
 de séries infinitas, 300-304  
     convergência de, infinita, 301  
     exercícios, 303-304  
     funções seno, co-seno e gama, 301-302  
     visão geral, 300-301  
 expansão de funções inteiras, 350-351  
 projeções, de vetores, 4, 9  
 propriedade de operador adjunto, 158  
 propriedades gerais, 667-672  
     completude, 669  
     comportamento de descontinuidades, 671  
     de funções de Mathieu, 661  
     onda em dente de serra, 670  
     somatório de uma série de Fourier, 668  
     teoria de Sturm-Liouville, 670  
     variáveis complexas — teorema de Abel, 668  
 prova de Goursat do teorema integral de Cauchy, 318-320  
 pseudo-escalares, 112  
 pseudotensores, 110-116  
     exercícios, 115-116  
     símbolo de Levi-Civita, 113  
     tensores duais, 113-114  
     tensores irredutíveis, 115-116  
     visão geral, 110-113  
 pseudovetores, 112

**Q**

quadrados de séries, divergentes, 261  
 quadripolo, 114-115, 563-564, 609  
 quantidades escalares, 1  
 quantidades vetoriais, 1  
 quantização, 471-472, 800  
 quase-periódico, 834-836, 840  
 quatérnions, 143, 155, 160

**R**

raio de Bohr, 638  
 rapidez, 212  
 rearranjo de série dupla, 262-264  
 recíproca, 693  
 regiões múltiplamente conexos, 320  
 regra da adição, 843  
 regra da cadeia, 27  
 regra de Cramer, 126  
 regra de l'Hôpital, 277  
 regra do quociente, 109-110  
     equações de movimento e equações de campo, 110  
     exercícios, 110  
     visão geral, 109-110  
 regra do triângulo, 204  
 regras da soma, 366  
 regras de seleção, 201  
 relação de anticomutação, 15  
 relação de energia de Einstein, 213  
 relação de Parseval, 367-368, 721  
 relações de dispersão óptica de Kronig-Kramers, 366, 367  
 relações de dispersão, 365-370  
     causalidade, 368  
     dispersão óptica, 367  
     exercícios, 369  
     regras da soma, 366  
     relação de Parseval, 367-368

relações de cruzamento, 366  
 relações de simetria, 366  
 transformada de Hilbert, 367  
 visão geral, 365-366  
 relações de funções contíguas, 651  
 relações de ortogonalidade, harmônicos esféricos, 615  
 relações de recorrência, 428, 540-541, 566-567, 586, 618-619  
     aplicação de, 608-609  
     derivadas, 645  
     e propriedades especiais, 566-571  
         equações diferenciais, 567-568  
         limites superiores e inferiores para  $P_n(\cos \theta)$ , 569-570  
         paridade, 569  
         relações de recorrência, 566  
         valores especiais, 568  
 função fatorial, gama, 380, 382, 400, 754  
 funções de Bessel, 511  
 Funções de Bessel, esféricas, 552  
 funções de Hankel, 535  
 funções de Laguerre, associadas, 637  
 funções de Neumann, 531  
 funções esféricas de Bessel, 552  
 funções hipergeométricas confluentes, 655  
 funções hipergeométricas, 652  
 funções modificadas de Bessel, 566-567  
 funções poligama, 387  
 integral exponencial, 400  
 números de Bernoulli, 286  
 polinômios associados de Legendre, 586  
 Polinômios de Chebyshev, 643  
 polinômios de Hermite, 618-619  
 polinômios de Legendre, 566-567  
     séries de Legendre, 610-611  
 relações, *veja* relações de dispersão  
 repelente, 820  
 representação  
     fundamental, 197, 208-209  
     irredutível, 186, 199, 201, 204, 208, 209, 227  
     reduzível, 186  
 representação de Fourier, da função delta de Dirac, 70  
 representação de integral de contorno, funções de Hankel, integrais de contorno, 536-537  
 representação de momentum em mecânica quântica, 764  
 representação de momento, 723-728  
     átomo de hidrogênio, 725  
     equação de onda de Schrödinger, 725  
     oscilador harmônico, 726  
 representação de Rodrigues, 620-621  
     polinômios de Hermite, 620-621  
 representações integrais, 381, 513-514  
     expansão de, 544-546  
     para função delta de Dirac, 70  
 representações irredutíveis, 185-186  
 representações reduzíveis, 185-186  
 repulsivo espiral, 832, 837  
 repulsor, 828  
 reticulado recíproco, 21  
 retificador de onda completa, 676-677  
     equação funcional, função zeta de Riemann, 678  
     função gama, 377  
 retificador, de onda completa, 676-677  
 retiradas repetidas de cartas, 853-855  
 retornos, 235-238



teorema de Gauss, forma diferencial, 237-238  
 teorema de Stokes, 236  
     forma diferencial, 236-237  
 visão geral, 235-236  
 rotações, 134, 336  
     de coordenadas, 151  
     de eixos coordenados, 6-9  
         exercícios, 9-10  
         vetores e espaço vetorial, 9  
     de funções e momento angular orbital, 190  
     grupos  $SO(2)$  e  $SO(3)$ , 189  
     invariância de produto escalar sob, 12-13  
     isomórfica e homomórfica, 184-185  
 rotas para o caos em sistemas dinâmicos, 764

**S**

seção de Poincaré, 838-840  
 seção, *veja* seção de Poincaré  
 segunda lei de Newton, 101, 176, 281, 737, 800  
 seno  
     funções de produto infinitos, 301-302  
     integrais em séries assintóticas, 297-298  
     representação hipergeométrica confluyente, 298  
 sensibilidade a condições iniciais e parâmetros, 822-825  
     expoentes de Lyapunov, 822-823  
     fractais, 823-824  
 separação de variáveis em coordenadas elípticas, 658-659  
 série de Bessel, 525  
 série de Dirichlet, 248  
 série de Gregory, 274, 279  
 série de Laplace  
     campos gravitacionais, 598  
     teorema da expansão, 598  
 série de Legendre, 253-254, 610-611  
     relações de recorrência, 610-611  
 série de Neumann, 772-773  
 série de Neumann, núcleos separáveis (degenerados), 772-781  
     núcleo separável, 775  
     solução numérica, 776-777  
 série de Stirling, 390-393  
     derivação da fórmula de integração de Euler-Maclaurin, 390  
 série divergente, 248  
 série dupla, rearranjo de, 262-264  
 série harmônica, 246-247  
 séries alternantes, 258-260  
     convergência absoluta, 259-260  
     critério de Leibniz, 258  
     exercícios, 260  
     visão geral, 258  
 séries assintóticas, 295-300  
     definição de, 298  
     exercícios, 299-300  
     função gama incompleta, 295-297  
     funções de Bessel, 545  
     funções hipergeométricas confluentes, 298  
     inclinação mais acentuada, 370-375  
     integrais de co-seno e seno, 297-298  
     método de Stokes, 544, 547  
     visão geral, 295  
     visão geral: expansão de representação integral, 544-546  
 séries de Bessel de Fourier, 525  
 séries de Fourier, 667-704  
     aplicações de, 675-683  
     exercícios, 680-683

onda quadrada — alta frequência, 675-676  
 retificador de onda completa, 676-677  
 séries infinitas, função zeta de Riemann, 677-680  
 expansões de Fourier de funções de Mathieu, 695-703  
     coeficientes principais de  $se_1$ , 698-701  
     coeficientes principais para  $ce_0$ , 701-703  
     equações integrais, e séries de Fourier para funções de Mathieu, 695-698  
     exercícios, 703  
 fenômeno de Gibbs, 688-691  
     cálculo do aumento momentâneo (*overshoot*), 690-691  
     exercícios, 691  
     onda quadrada, 689-690  
     somatório de séries, 689  
 ortogonalidade, 480  
 propriedades de, 684-688  
     convergência, 684  
     diferenciação, 684-685  
     exercícios, 685-688  
     integração, 684  
 propriedades gerais, 667-672  
     completude, 669  
     comportamento de descontinuidades, 671  
     exercícios, 671-672  
     onda em dente de serra, 670  
     onda quadrada, 675  
     somatório de uma série de Fourier, 668  
     teoria de Sturm-Liouville, 670  
     variáveis complexas — teorema de Abel, 668  
 somatório de, 668  
 transformada discreta de Fourier, 692-695  
     exercícios, 694-695  
     limitações, 693  
     ortogonalidade sobre pontos discretos, 692  
     transformada discreta de Fourier, 692-693  
     transformada discreta de Fourier — *aliasing*, 693-694  
     transformada rápida de Fourier, 694  
 vantagens, usos de, 672-675  
     completude, *veja* propriedades gerais da série de Fourier  
     convergência, 676, 684-688  
     diferenciação, *veja* propriedades gerais da série de Fourier  
     funções descontínuas  
     exercícios, 674-675  
     funções descontínuas, 672  
     funções periódicas, 672  
     integração, *veja* propriedades gerais da série de Fourier  
     mudança de intervalo, 674  
 séries de potências, 275-280  
     continuidade, 276  
     convergência, 275  
         uniforme e absoluta, 275  
     diferenciação e integração, 276  
     exercícios, 278-280  
     inversão de, 277  
     teorema da unicidade, 276-277  
         regra de L'Hôpital, 277  
     visão geral, 276  
 séries geométricas, 246  
 séries infinitas, 245-304, *veja também* séries alternantes; séries de potências; expansão de Taylor  
 álgebra de, 260-264  
     convergência de Raabe, 253  
     convergência uniforme, 264-267, 276

- convergência, 260-262
  - convergência: absoluta, 260-261
  - convergência: comparação, 248
  - convergência: condicional, critério de Leibniz, 261
  - convergência: de Gauss, 253
  - convergência: de Kummer, 251-252
  - convergência: integral de Cauchy, 249-251
  - convergência: integral de Maclaurin, 249-251
  - convergência: melhoria da, 262
  - convergência: raiz de Cauchy, 248
  - convergência: razão de D'Alembert, 249
  - convergência: testes de, 248-254
  - divergência de quadrados, 261-262
  - exercícios, 264
  - rearrançamento de dupla, 262-264
  - séries alternantes, 260-261
  - séries duplas, 262-263
  - visão geral, 260-261
  - conceitos fundamentais, 245-247
    - adição e subtração de, 247
    - exercícios, 247-248
    - geométrico, 246
    - harmônico, 246-247
    - visão geral, 245
  - de funções, 264-267
    - convergência uniforme e não-uniforme, 265
    - exercícios, 267
    - teste  $M$  de Weierstrass, 265
    - teste de Abel, 266
    - visão geral, 264
  - integrais elípticas, 281-285
    - definições de, 282
    - exercícios, 284-285
    - expansão de série, 282-283
    - período de pêndulo simples, 281
    - valores limitativos, 283
    - visão geral, 281
  - números de Bernoulli, 286-295
    - exercícios, 292-295
    - fórmula de integração de Euler-Maclaurin, 288-289
    - função zeta de Riemann, 290-291
    - melhoria de convergência, 292
    - polinômios, 288
    - visão geral, 286-288
  - produtos de, 300-304
    - convergência de, 301
    - exercícios, 303-304
    - funções seno, co-seno e gama, 301-302
    - visão geral, 300-301
  - séries assintóticas, 295-300
    - definição de, 298-299
    - exercícios, 299-300
    - função gama incompleta, 295-297
    - integral de co-seno e seno, 297-298
    - visão geral, 295
  - séries de potências, 275-277, 437
  - teorema de Riemann, 677-680
  - séries oscilantes, 245
  - séries semiconvergentes, 296
  - séries, *veja* séries infinitas
  - símbolo de Levi-Civita, 113
  - símbolo de Pochhammer, 650-61, 654
  - símbolos de Christoffel, 118-119
  - simetria, 673
    - cilíndrica, 467
    - de soluções, 430
    - de tensores, 106
    - eixos de, tripla
      - duas vezes, 223-225
      - três vezes, 225-228
    - esférica, 466
    - propriedades de matrizes ortogonais, 154-156
    - relações, 366
    - sabor  $SU(3)$ , 194-197
  - simetrização de núcleos, 781
  - singularidade irregulares, 432
  - singularidade(s), 332-335
    - exercícios, 334-335
    - fixas, 826
    - móveis, 826
    - pólos, 332
    - pontos de ramo, 333-334
      - de ordem 2, 333-334
    - série de Laurent, 332
    - visão geral, 331
  - singularidades fixas e móveis, soluções especiais, 826
  - singularidades regulares, 432
  - sistemas dinâmicos, dissipação em, 836-837
  - solenoidal, 33
  - solução de série de Neumann, 774
  - solução de transformada de Fourier, 769
  - solução numérica, 776-778
  - solução parabólica geral, 408
  - soluções de forma fechada, 612-614
  - soluções de série — método de Frobenius, 427-437
    - expansão em, torno de  $x_0$ , 430
    - limitações da abordagem de série — equação de Bessel, 430-431
    - simetria de soluções, 430
    - singularidades regulares e irregulares, 432
    - teorema de Fuchs, 433
  - soluções de séries descendentes de potências, 279, 590
  - soluções linearmente dependentes, 415
  - soluções linearmente independentes, 415
  - soluções sóliton, 409
  - soma, produto e razão de variáveis aleatórias, 855-856
  - somatório de série, 689
  - sorvedouro estável, 830
  - sorvedouro, 828-831, 836
  - substituição mínima, 59
  - substituição, 741-742
  - subtração
    - de conjuntos, 843
    - de matrizes, 135-136
    - de séries, 247-248
    - de tensores, 105-106
  - superfície de Riemann, 339-340
  - superfície orientada, fluxo magnético através de, 233
- T**
- tableaux de Young para  $SU(n)$ , 208-210
  - tableaux para  $SU(n)$ , Young, 208-211
  - tambor elíptico, 659-660
  - técnica de iteração de Gauss-Seidel, 131
  - técnica de Jacobi, 171
  - técnica variacional de Rayleigh-Ritz, 814-817
    - autofunção de estado fundamental, 814
    - corda vibratória, 815





- temperatura crítica, 823
  - tensor contravariante, 105, 120-121, 123, 124
  - tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, 107
  - tensor direto, 137
  - tensor métrico, 116-118
    - símbolos de Christoffel como derivadas de, 119
  - tensor misto, 105, 108, 118
  - tensor simétrico, 106
  - tensores de segunda ordem, 105
  - tensores duais, 113-114
  - tensores esféricos, 205-208
  - tensores gerais, 116-123, *veja também* símbolos de Christoffel
    - derivada covariante, 120
    - exercícios, 122-123
    - geodésica e transporte paralelo, 120-123
    - tensor métrico, 116-118
    - visão geral, 116
  - tensores irredutíveis, 114-116
  - tensores não-cartesianos, 108
  - tensores, *veja também* derivada operadores, tensor; produto direto; tensores gerais; pseudotensores; regra do quociente, espinores
    - análise vetorial em, 103-125
      - adição e subtração de, 105-106
      - contração, 107-108
      - convenção de soma, 105-106
      - segunda ordem, 105
      - simetria – anti-simetria, 106
      - visão geral, 103-104
    - esférico, 205-208
    - relação com matrizes ortogonais, 156
  - tensores gerais, 116-123, *veja também* símbolos de Christoffel
    - derivada covariante, 120
    - exercícios, 122-123
    - geodésica e transporte paralelo, 120-123
    - tensor métrico, 116-118
    - visão geral, 116
  - teorema binomial, 270-271
  - teorema da adição para harmônicos esféricos, 603-607
    - derivação do teorema da adição, 603-604
    - identidade trigonométrica, 603
    - polinômios de Legendre, 603
  - teorema da conservação, 235
  - teorema da convergência do produto, 261
  - teorema da convolução (dobraduras), 720-723, 750-753
    - oscilador forçado com atenuação, 751-753
    - relação de Parseval, 721
    - transformada de Fourier, 705-706, 708-716
    - transformada de Laplace, 731-761
  - teorema da dimensionalidade, 227
  - teorema da unicidade, 276-277
    - de séries de potências, 276-277
    - expansão de Laurent, 327
    - operador inverso, 137
    - séries de potências descendentes, 591
  - Teorema de Abel, 668
  - teorema de expansão de Heaviside, 335, 761
  - teorema de Floquet, 663
  - teorema de Fuchs, 433
  - teorema de Gauss, 46-49
    - formas alternativas de, 48-49
      - exercícios, 48-49
      - visão geral, 48
    - retornos, 237-238
    - visão geral, 46-47
  - teorema de Green, 47, 448
  - teorema de Helmholtz, 74-78
    - exercícios, 78
    - visão geral, 74-75
  - teorema de Lerch, 733
  - teorema de Liouville, 428324
  - teorema de Maclaurin, 269
    - função exponencial, 269
    - logaritmo, 269
    - visão geral, 269
  - teorema de Mittag-Leffler, 349
  - teorema de Morera, 323-324
  - teorema de Riemann, 261
  - teorema de Riesz, 135
  - teorema de Rouché, 351
  - teorema de Stokes, 50-53
    - em formas diferenciais, 239
    - variedade de Riemann, 239
  - exercícios, 52
  - formas alternativas de, 51-53
    - leis de Oersted e Faraday, 51-53
    - visão geral, 51
  - prova, 317-318
  - retornos, 236
  - visão geral, 50
- teorema de Titchmarsh, 368
- teorema de von Staudt-Clausen, 287
- teorema de Wigner-Eckart, 207
- teorema do deslocamento de Heaviside, 743
- teorema do produto, 137
- teorema do resíduo, 345-346, 357; *veja também* cálculo de resíduos
- teorema do valor médio, 268
- teorema dos números primos, assintótico, 679-680
- teorema fundamental da álgebra de Gauss, 324, 351
- teorema integral de Fourier, 709
  - desenvolvimento de, 708-710
  - forma exponencial, 709
- teoria de calibre, 59, 183
- teoria de difusão de nêutrons, 279, 720
- teoria de grupo, 183-244, *veja também* momento angular; formas diferenciais ; geradores de grupos contínuos; grupo homogêneo de Lorentz
  - Viererguppe*, 222, 225
  - caráter, 140
  - covariância de Lorentz de equações de Maxwell, 215-221
    - exercícios, 219-221
    - invariante eletromagnéticas, 219
    - transformação de **E** e **B**, 218-219
    - visão geral, 215-217
  - cromodinâmica quântica (QCD), 197
  - definição de, 184
  - discreta, 221-223
    - classes e caráter, 222-223
    - diédrico,  $D_n$ , 227
    - eixo de simetria duplo, 223-225
    - eixo de simetria triplo, 225-227
    - exercícios, 227-231
    - grupos e classes laterais, 223
    - ponto e espaço cristalográfico, 227-228
  - fidelidade, 184
  - grupo unitário especial  $SU(2)$ , 190
  - grupos de permutação, 229-231

- homomórfico, 184
- homomorfismo  $SU(2)$ - $SO(3)$ , 191-194
- homomorfismo e isomorfismo, 184-185
- isomórfico, 184
- representações redutíveis e irredutíveis, 185-186
- visão geral, 183-184
- teoria de Hilbert-Schmidt, 781-786
- autofunções ortogonais, 781-783
- equação integral não-homogênea, 783-785
- simetrização de núcleos, 781
- teoria de Sturm-Liouville, 670
- teoria de Sturm-Liouville — funções ortogonais, 469-509
  - completude de autofunções, 490-499
  - coeficientes de expansão, 497
  - desigualdade de Bessel, 491-492
  - desigualdade de Schwarz, 492-494
  - resumo — espaços vetoriais, completude, 494-497
- teoria de Sturm-Liouville — funções ortogonais
  - completude de autofunção, 497-499
  - EDOs auto-adjuntas, 469-478
    - autofunções, autovalores, 471
    - condições de contorno, 473-474
    - déuteron, 472-473
    - equação de Legendre, 472
    - exercícios, 476-478
    - intervalo de integração  $[a, b]$ , 474
    - operadores hermitianos em mecânica quântica, 475
    - operadores hermitianos, 475
  - função de Green — expansão de autofunção, 499-509
    - autofunção, equação de autorvalor, 503-504
    - exercícios, 506-509
    - função de Green e a função delta de Dirac, 505-506
    - funções de Green — unidimensionais, 500-502
    - integral da função de Green — equação diferencial, 502-503
    - oscilador linear, 505
  - operadores hermitianos, 479-484
    - autofunções ortogonais, 480
    - autovalores reais, 479
    - degenerescência, 481
    - exercícios, 482-484
    - expansão em autofunções ortogonais — onda quadrada, 481
    - série de Fourier — ortogonalidade, 480-481
  - ortogonalização de Gram-Schmidt, 484-490
    - exercícios, 488-490
    - polinômios de Legendre por ortogonalização de Gram-Schmidt, 487
- teoria do potencial
  - força conservativa, 53
  - potencial eletrostático, 447
  - potencial escalar, 54
  - potencial vetorial, 57, 237
- terema da unicidade, regra de L'Hôpital, 277
- termodinâmica, 56-61
  - diferenciais exatas, 56-59
  - potencial vetorial, 57-61
    - exercícios, 59-61
    - magnético, 58
  - visão geral, 56-57
- teoria da difração de Kirchhoff, 322
- teste  $M$  de Weierstrass, 265-266
- teste da integral de Cauchy (Maclaurin), 249-251, 316-325
  - derivadas, 322-323
  - exercícios, 321, 324-325
  - integrals de contorno, 316-317
    - prova de Goursat, 318-320
    - prova do teorema de Stokes, 317-318
  - regiões multiplamente conectadas, 320-321
  - teorema de Morera, 323-324
  - visão geral, 316, 321-322
- teste da integral de Maclaurin, 249-251
  - função zeta de Riemann, 251
- teste da integral, Cauchy, *veja* teste da integral de Cauchy (Maclaurin)
- teste da raiz, Cauchy, 249
- teste da razão de d'Alembert, 249
- teste da razão, Cauchy, d'Alembert, 249
- Teste de Abel, 266, 502
- teste de Gauss, 253, 271
  - série de Legendre, 253-254
- teste de Kummer, 251-252
- teste de Raabe, 253
- testes de aptidão escolar, 844-845
- testes de comparação, 248
- E**, transformação de Lorentz do campo elétrico, 218-219
- trabalho dependente da trajetória, 44-46
  - definições integrais de gradiente, divergência e espiral, 44-45
  - integrals de superfície, 44
  - integrals de volume, 44
  - visão geral, 43
- trabalho, potencial, 27, 54-56
- traço, 108
- traços de matrizes, 139-140
- trajetória, 30, 825-826, 827-828, 832, 834, 835, 837, 838
- transformadas de Laplace, 731-736
  - de derivadas, 736-741
    - força impulsiva, 739
    - função delta de Dirac, 738-739
    - nutação da Terra, 737-738
    - oscilador harmônico simples, 737
  - definição, 731
  - expansão por frações parciais, 733-734
  - função escalonada, 734
  - funções elementares, 731
  - tabela de transformadas, 732-733, 742
  - teorema da convolução, 393, 758, 761, 769
  - transformada inversa, 732-733
  - translação, 758
- transformação de **E** e **B**, Lorentz, 218-219
- transformação de equação diferencial em equação integral, 765
- transformação de paridade, 111
- transformação de similaridade, 156
- transformada de Fourier de derivadas, 716-720
  - EDP de fluxo de calor, 718
  - equação de onda, 717
  - inversão de EDP, 718-719
- transformada de Fourier, da gaussiana, 705-706
- transformada de seno, 711
- transformada discreta de Fourier, 692-695
  - aliasing*, 693-694
  - limitações, 693
  - ortogonalidade sobre pontos discretos, 692
  - transformada rápida de Fourier, 694
- transformada exponencial, 710
- transformada inversa de Laplace, 753-761
  - integral de Bromwich, 753-754
  - inversão via cálculo de resíduos, 755



resumo — inversão de transformada de Laplace, 758  
 velocidade de ondas eletromagnéticas em um meio dispersivo, 756-757  
 transformada inversa, 732-733  
 transformada rápida de Fourier, 694  
 transformada, derivada de, 744-745; *veja também* co-senos; exponencial; Fourier; Fourier-Bessel; Hankel; Laplace; Mellin; seno  
 transformadas de Fourier, 368, 705  
     *aliasing*, 693  
     derivação da função delta, 709  
     funções de transferência, 728  
     teorema da convolução, 720  
 transformadas de Fourier — teorema da inversão, 710-716  
     integral de Fourier, 705, 708-711  
     princípio da incerteza, 712  
     representação de momentum espacial, 723  
     transformada de co-seno, 710-711  
     transformada de seno, 711  
     transformada exponencial, 710  
     transformada rápida de Fourier, 694  
     trem de ondas finito, 711-712  
 transformadas de Hankel, 706  
 transformadas de Hilbert, 366  
 transformadas de Laplace, Mellin e Hankel, 706  
 transformadas de Mellin, 679, 706  
 transformadas integrais, 705-762  
 translação, 336, 743  
 transporte paralelo, 120-123  
 transposição, 134  
 trem de ondas finito, 711-712  
 Tschebyscheff, *veja* Chebyshev

**U**

união de conjuntos, 843

**V**

valor esperado, 475, 723-724, 848  
 valor extremo ou estacionário, 29, 667, 787-789  
 valor médio, 848  
 valor principal, 309  
 valor principal de Cauchy, 346-349, 357  
 valores assintóticos, funções de Bessel, 546, 551  
 valores especiais, 586  
 valores, limites, de integrais elípticas, 283-284  
 variação da constante, 414  
 variação com restrições, 808-813  
     desprendendo-se de um tronco, 810-811  
     equação de onda de Schrödinger, 811-812  
     equações lagrangianas, 809  
     pêndulo simples, 809-810  
 variação, conceito de, 787-790  
 variações, *veja também* cálculo de variações  
 variância, 774  
 variáveis aleatórias, 847-858  
     medições de desvio-padrão, 850-852  
     soma, produto e razão de variáveis aleatórias, 855-856  
     variável aleatória contínua: átomo de hidrogênio, 848-849  
     variável aleatória discreta, 847-848  
 variáveis complexas, 305-344, 346-376, *veja também* cálculo de resíduos; condições de Cauchy-Riemann; funções; mapeamento; pontos de sela (método da inclinação mais acentuada); singularidades  
     expansão de Laurent, 325-332

continuação analítica, 327-328  
 exercícios, 331-332  
 expansão de Taylor, 325-326  
     princípio da reflexão de Schwarz, 326-327  
 fórmula integral de Cauchy, 321-325  
     derivadas, 322-323  
     exercícios, 324-325  
     teorema de Morera, 323-324  
     visão geral, 321-322  
 relações de dispersão, 365-370  
     causalidade, 368  
     dispersão óptica, 367  
     exercícios, 369-370  
     relação de Parseval, 367-368  
     relações de simetria, 366  
     visão geral, 365-366  
 Teorema integral de Cauchy, 316-321  
     exercícios, 321  
     integrais de contorno, 316-317  
     prova de Cauchy-Goursat, 318-320  
     prova do teorema de Stokes, 317-318  
     regiões multiplamente conectadas, 320-321  
     visão geral, 316  
 utilizando álgebra, 306-312  
     cálculo de resíduos, 345-365  
     conjugação complexa, 308-309  
     exercícios, 309-312  
     permanência da forma algébrica, 306-308  
     visão geral, 306  
     visão geral, 305, 345  
 variáveis dependentes e independentes, 787-792  
     caminho óptico perto do horizonte de evento de um buraco negro, 790-791  
     conceito de variação, 787-790  
     formas alternativas de equações de Euler, 791  
     variáveis dependentes omitidas, 791  
 variáveis dependentes faltantes, 791  
 variáveis separáveis, 411  
 variáveis, *veja também* variáveis complexas  
     dependentes e independentes, 787-792, 803-804  
     caminho óptico perto do horizonte de evento de um buraco negro, 790-791  
     conceito de variação, 787-790  
     formas alternativas de equações de Euler, 791  
     variáveis dependentes faltantes, 791  
     dependentes, 798-803  
     equação de Laplace, 803  
     partícula em movimento — coordenadas cilíndricas circulares, 800  
     partícula em movimento — coordenadas cartesianas, 800  
     princípio de Hamilton, 799-800  
     múltipla, de expansão de Taylor, 271  
     separação de, 418-425  
 variável aleatória contínua, 848-849  
 variável aleatória discreta, 847-848  
 variedade de Riemann manifold, 239  
 velocidade de ondas eletromagnéticas em um meio dispersivo, 756-757  
 verificação da relação pi-seno, 394  
 vetor axial, 111  
 vetor contravariante, 104  
 vetores covariantes, 104, 117  
     tensor, 105, 120-122, 123, 124  
 vetores de peso, 201

- vetores polares, 111
- vetores unitários, 96
  - cilíndricas circulares, 90
  - coordenadas cartesianas, 4
  - coordenadas polares esféricas, 98
  - polar esférica, 153
  - relação de ortogonalidade, 491
- vetores, 1-79, *veja também* coordenadas curvas e vetores;
  - divergência,  $\nabla$ ; gradiente,  $\nabla$ ; integração; potenciais; rotações; teorema de Stokes; tensores
  - abordagem elementar a, 1-6
  - abordagem elementar de, exercícios, 5-6
  - aplicações de matrizes ortogonais a, 149-150
  - aplicações sucessivas de  $\nabla$ , 380-42
    - equação de onda eletromagnética, 40-41
    - exercícios, 41-42
    - laplaciano de potencial, 39
    - visão geral, 38-39
  - componentes, 6, 9, 117-118, 494
  - contravariante, 104-105, 108, 117-118, 121-122
  - co-variantes, 104-105, 108, 117-118, 120, 121-122
  - definições e abordagem elementar, 1-6
    - exercícios, 5-6
  - direção, 4
  - espaço, 9
    - exercícios, 9-10
  - espiral,  $\nabla \times$ , 34-38
    - de campo de força central, 34-36
    - exercícios, 36-38
    - gradiente de produto escalar, 36
    - integração por partes de, 36-37
    - potencial de campo **B** constante, 34
    - visão geral, 34
  - função delta de Dirac, 64-74
    - carga total dentro de uma esfera, 69
    - espaço de fase, 69
    - exercícios, 71-74
    - representação por funções ortogonais, 69-70
    - representações integrais para, 70-74
    - visão geral, 64-68
  - independência linear de, 131
  - irrotacional, 35-36
  - lei de Gauss, 61-64
    - equação de Poisson, 61-64
    - exercícios, 64
  - lei triangular da adição, 1
    - normal, 12, 43
  - operadores vetoriais diferenciais, 85-88
    - divergência, 86-87
    - rotacional, 87
    - exercícios, 88
    - gradiente, 85
    - visão geral, 85
  - ortogonal, 84, 131-132
  - ou produto externo, 14-17
    - exercícios, 17-20
  - por ortogonalização de Gram-Schmidt, 132-134
  - potenciais, magnético, 99
  - produto cruzado de, 240
  - produto direto de, 138
  - produto escalar triplo, 20-21
  - produto escalar, ou interno, 10-14
    - exercícios, 13-14
    - invariância sob rotações, 12-13
  - produto triplo de, 22-23
    - exercícios, 22-25
  - serve como uma base, 4
  - teorema de Gauss, 46-49
    - exercícios, 48-49
    - formas alternativas de, 48
    - teorema de Green, 47
    - visão geral, 46-47
  - teorema de Helmholtz, 74-78
    - exercícios, 78
    - visão geral, 74-75
    - visão geral, 1
  - vibração, modos normais de, 177
  - Vierergruppe, 222, 225
- W**
- wronskiano, 415
- Z**
- zeros, função de Bessel, 515