Problemas sobre Polinômios de Legendre.

1) Escreva x^2 como uma combinação linear de $P_0(x)$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$. Isto é, encontre as constantes A, B e C de modo que:

$$x^2 = AP_0(x) + BP_1(x) + CP_2(x)$$

2) Use o polinômio de Legendre na forma de série de potências para mostrar que:

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

3) Use $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e a relação de recorrência: $(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$, para encontrar P2(x), P3(x) e P4(x).

Respostas:

1) *Usando:* $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \quad e \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$

$$\begin{aligned} x^2 &= AP_0(x) + BP_1(x) + CP_2(x) \\ &= A + Bx + C\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(A - \frac{C}{2}\right) + Bx + \frac{3C}{2}x^2 \end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes temos que: $C = \frac{2}{3},\ B = 0,\ A = \frac{1}{3}$.

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + 0P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x)\ .$$

2) $$P_l(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{m=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \frac{(-1)^m(2l-2m)!}{m!\,(l-m)!\,(l-2m)!}x^{l-2m}$$

$l = 2n$ *e* $m = k \rightarrow$ $$P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(4n-2k)!}{k!\,(2n-k)!\,(2n-2k)!}x^{2n-2k}$$

$x = 0 \rightarrow$ $$P_{2n}(0) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(4n-2k)!}{k!\,(2n-k)!\,(2n-2k)!}0^{2n-2k} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

3) $$P_2(x) = \frac{3}{2}xP_1(x) - \frac{1}{2}xP_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}xP_1(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{7}{4}xP_3(x) - \frac{3}{4}xP_2(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$