



Funções de Bessel

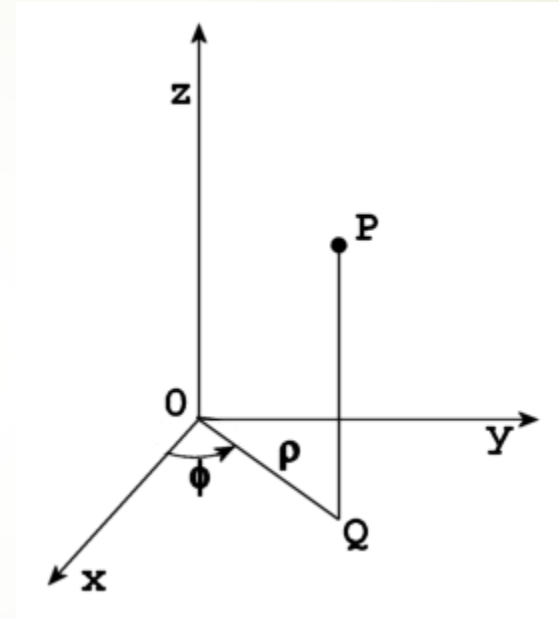
Coordenadas Cilíndricas : $\psi (\rho, \varphi, z)$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0;$$

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 z.$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi$$



$$\rho^2 \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0$$

← Equação de Bessel

Simplificando...

$$\rho^2 \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \rho \frac{dP}{d\rho} + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0$$

$$n\rho = x \quad e \quad y(x) = P\left(\frac{x}{n}\right)$$

Para n real

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

**Equação de Bessel
de ordem m**

Para n = in

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

**Equação de
Bessel Modificada**



Método de Frobenius (série de potências)

Equação de Bessel de ordem m

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

PROCURAR AS DUAS SOLUÇÕES LINEARMENTE
INDEPENDENTES DESTA EQUAÇÃO

$y_1(x)$ e $y_2(x)$



$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

Procurar soluções do tipo Séries de Potências:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$$

Equação indicial

$$k = 0 \rightarrow a_0 [\alpha(\alpha - 1) + \alpha - m^2] = 0$$

$$a_0 \neq 0 \rightarrow \alpha_1 = m \text{ e } \alpha_2 = -m$$

$$k = 1 \rightarrow a_1 [(\alpha + 1)^2 - m^2] = 0$$

$$a_1 \neq 0 \rightarrow \alpha_1 = 1+m \text{ e } \alpha_2 = 1-m \rightarrow \text{Escolhe-se } \alpha_1 = 0$$

Relação de recorrência, $a_0 \neq 0$ e $\alpha = m$

$$a_k = -\frac{1}{(k+\alpha)^2 - m^2} a_{k-2}$$

$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m m!}{2^{2k} k! (k+m)!} a_0 \quad a_0 = (2^m m!)^{-1}$$

$$a_{2k} = -\frac{(-1)^m}{2^{2k+m} k! (k+m)!}$$

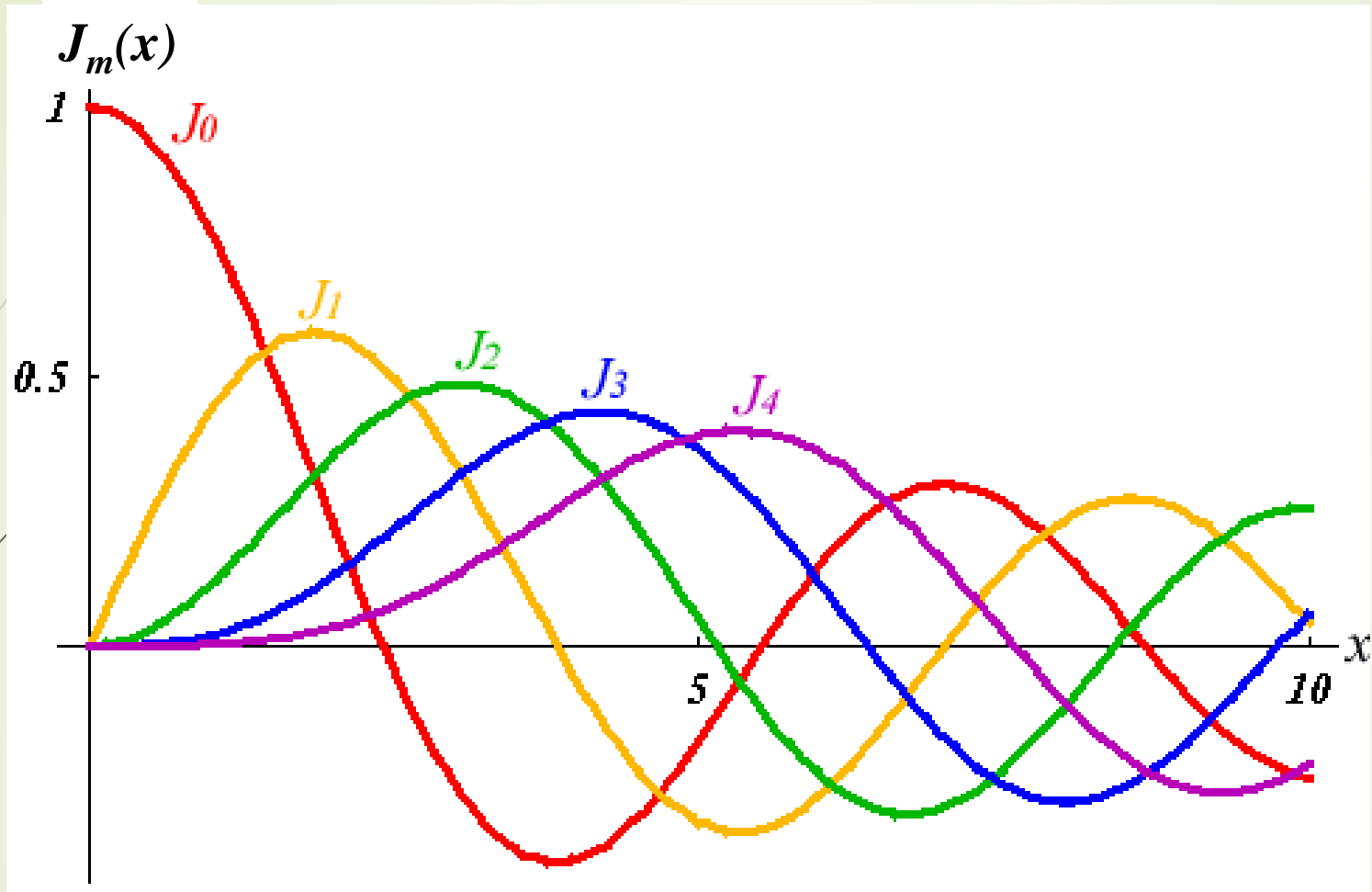
Primeira solução para equação de Bessel (para m inteiro)

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

J_m é a função de Bessel de 1ª espécie e ordem m

Esta série converge para todo intervalo finito;

$J_m(x)$ está definida para todo valor de x real ou complexo



A função não tem problema de convergência para qualquer valor de x .

A outra solução para $\alpha = -m$ é:

$$y_2(x) = J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

Seriam as soluções $J_m(x)$ e $J_{-m}(x)$ soluções *linearmente independentes (LI)*?

Para obter as soluções LI deve-se calcular o wronskiano destas soluções:

Chamamos de funções *linearmente independentes*, duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que satisfazem

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \text{para todo } x, \text{ se e somente se } \underline{C_1 = C_2 = 0}$$

em outras palavras, *não podemos escrever* $y_2(x) = C y_1(x)$, $C \neq 0$.

Se fosse possível escrever $y_2(x) = C y_1(x)$, $C \neq 0$ as 2 soluções seriam *linearmente dependentes* e teríamos o sistema de equações diferenciais


$$\begin{aligned} y_2(x) &= C y_1(x) & (y' = \frac{dy}{dx}) \\ y_2'(x) &= C y_1'(x) \end{aligned}$$

cuja solução é $y_1(x)y_2'(x) = y_1'(x)y_2(x)$

O Wronskiano é dado por:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (5)$$

da equação (5) vemos que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes então, $W(x) \neq 0$


$$W(J_m, J_{-m}) = -2 \frac{\text{sen}(m\pi)}{\pi x}$$

✓ Se $m = n$ é inteiro $\rightarrow J_n(x)$ e $J_{-n}(x) \rightarrow$ não são LI, pois $W = 0$.

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

✓ Se $m = \nu$ não é inteiro $\rightarrow J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ são LI.

Segunda solução para equação de Bessel (para $\nu = m$ inteiro)

Como:

$$W(J_m, J_{-m}) = -2 \frac{\text{sen}(m\pi)}{\pi x} = 0$$

Precisamos procurar uma solução que seja LI de $J_m(x)$



**Funções de Bessel de segunda espécie ou
Funções de Neumann**

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)}$$

$N_\nu(x)$ é solução da equação de Bessel para ν não inteiro, pois é uma combinação linear de J_ν e $J_{-\nu}$ que são soluções LI.

E para $\nu \rightarrow n$ (n inteiro) também é solução.

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

Notação:

$$N_\nu(x) = Y_\nu(x)$$

Pode ser mostrado que para qualquer valor de ν inteiro ou não, que:

$$W(J_n, N_n) = \frac{2}{\pi x}$$

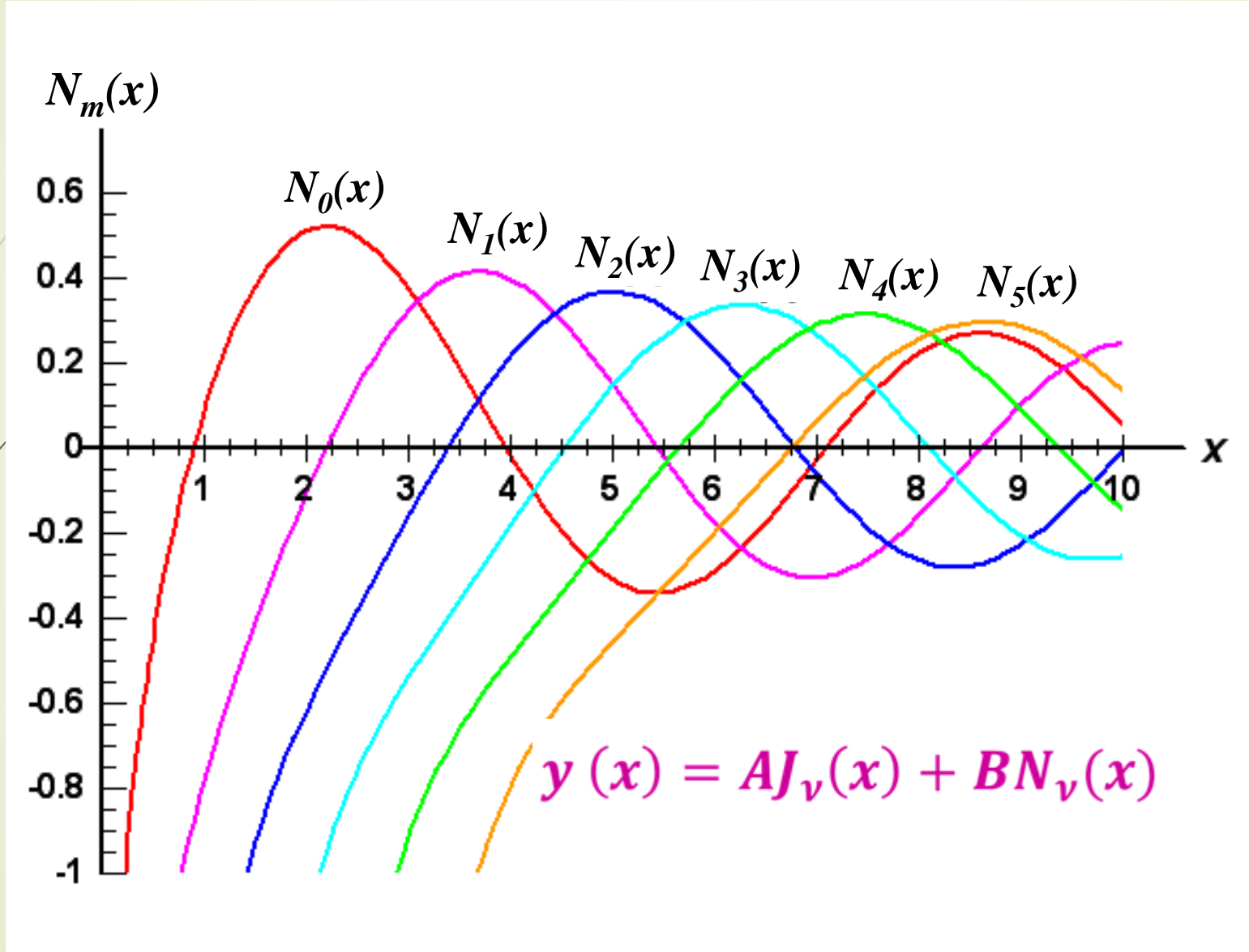
Assim, a solução mais geral da equação de Bessel será:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \longrightarrow \text{Para qualquer valor de } \nu$$

Particularmente, para ν não inteiro:

$$\checkmark J_\nu(x) \text{ e } J_{-\nu}(x) \text{ são LI.} \longrightarrow y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

A função $N_m(x)$ diverge se x pequeno, para todos os valores de m .



Equação de Bessel Modificada

$$x \rightarrow ix$$

Equação de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$



$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

Primeira solução para equação de Bessel Modificada
(para m inteiro)

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

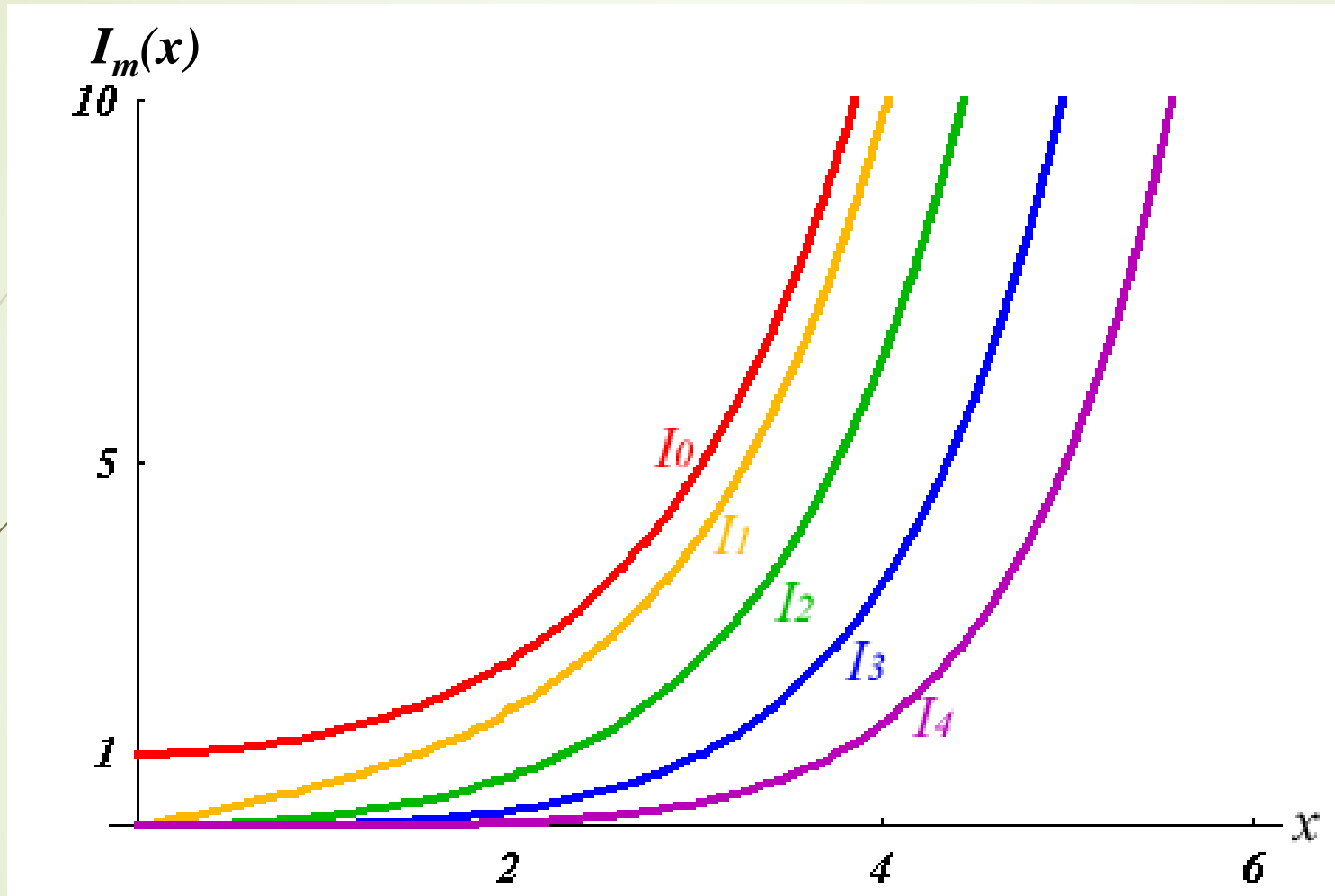


*Função de Bessel
modificada de 1ª. Espécie
e ordem m*

Existe uma relação entre $I_m(x)$ e $J_m(x)$ dada por:

$$I_n(x) = (-i)^n J_n(ix)$$

- ✓ Se $m = n$ é inteiro $\rightarrow J_n(x)$ e $J_{-n}(x) \rightarrow$ não são LI, pois $W = 0$,
portanto $I_n(x)$ e $I_{-n}(x) \rightarrow$ também não são LI, .



A função $I_m(x)$ diverge se x cresce, para todos valores de m .

Função Geratriz para n inteiro

Bessel :

$$G_{Bessel}(x, t) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

Bessel Modificada:

$$G_{Bessel Mod} = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$$

Relações de recorrência para as funções de **Bessel**

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad \left(\frac{dG}{dt}\right)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \quad \left(\frac{dG}{dx}\right)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x)$$
$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

Relações de recorrência para as funções de **Bessel Modificadas**

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = 2I'_{\nu}(x)$$

$$I'_{\nu}(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}I_{\nu}(x)$$

$$I'_{\nu}(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}I_{\nu}(x)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_{\nu}(x)$$

Segunda solução para equação de Bessel Modificada (para $m = \nu$ não - inteiro)

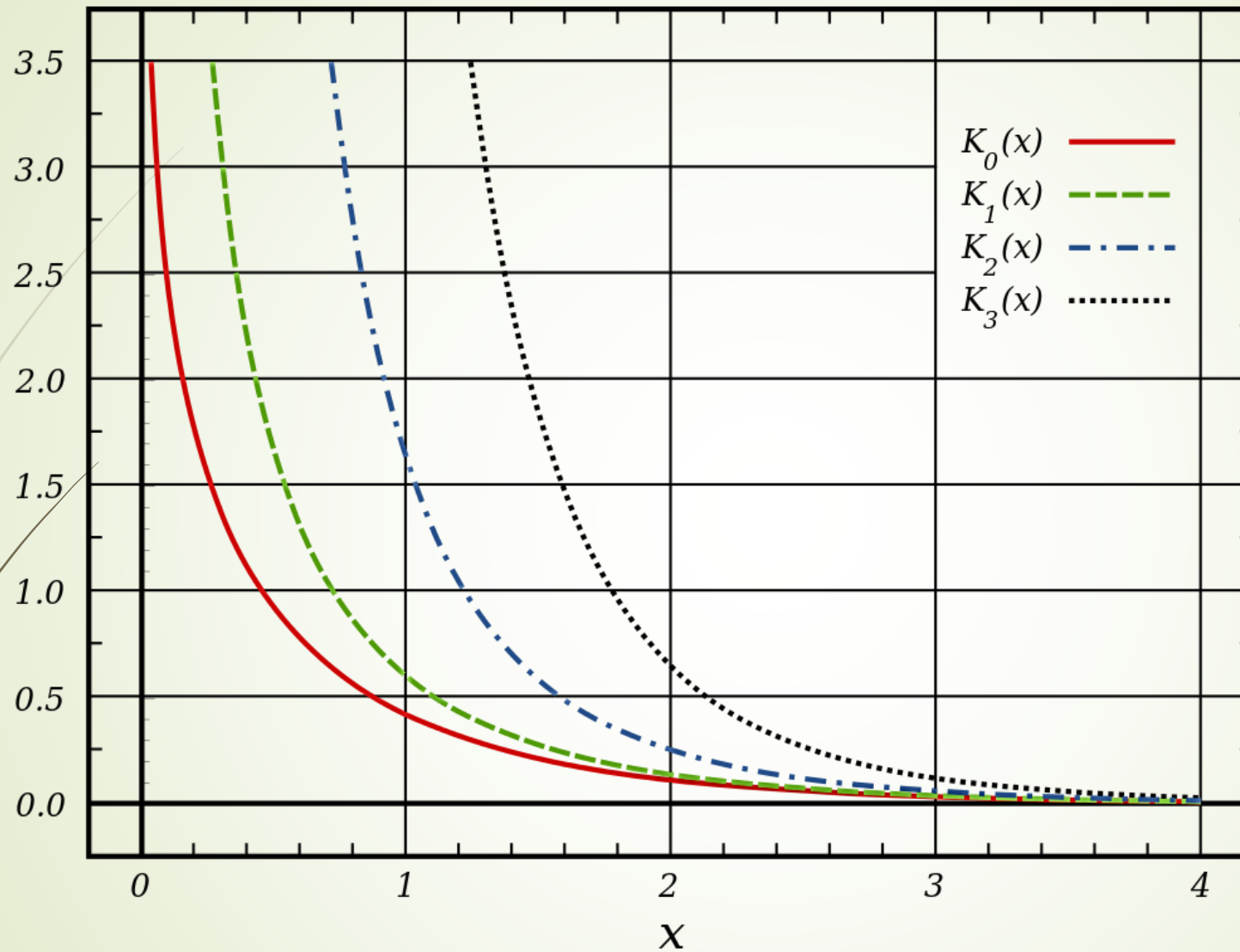
Funções de Bessel Modificada de segunda espécie

$$y_1(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

$$I_\nu(x) = (-i)^\nu J_\nu(ix)$$



$K_\nu(x)$ é solução da equação de Bessel para ν não inteiro, pois é uma combinação linear de J_ν e $J_{-\nu}$ que são soluções LI.



A função $K_m(x)$ diverge se x pequeno, para todos os valores de m .

Resumo

Equação de Bessel de ordem m

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

1ª. espécie

$$y_1(x) = J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

2ª. espécie

$$y_2(x) = N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

Solução Geral

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$$

→ Para qualquer valor de ν

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

→ Somente para ν não-inteiro

Resumo

Equação de Bessel Modificada de ordem m

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

1ª. espécie

$$y_1(x) = I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

2ª. espécie

$$y_2(x) = K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)}$$

Solução Geral

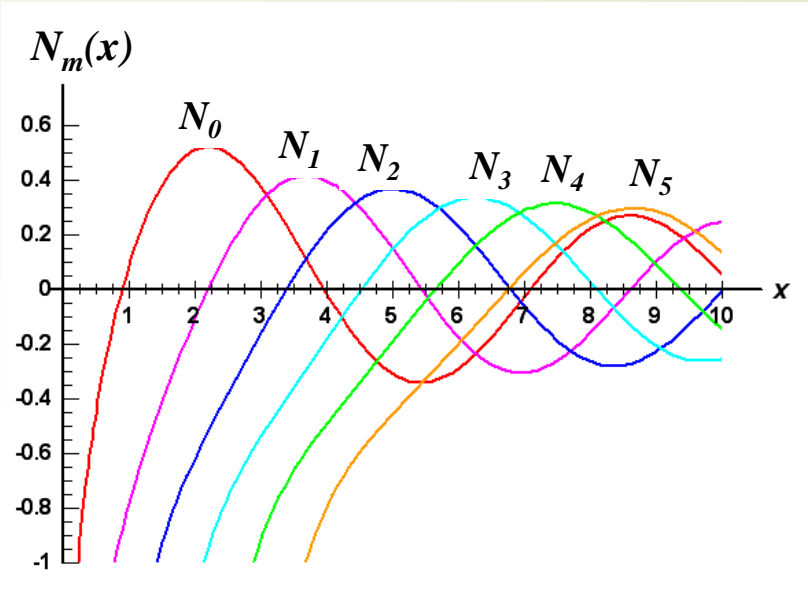
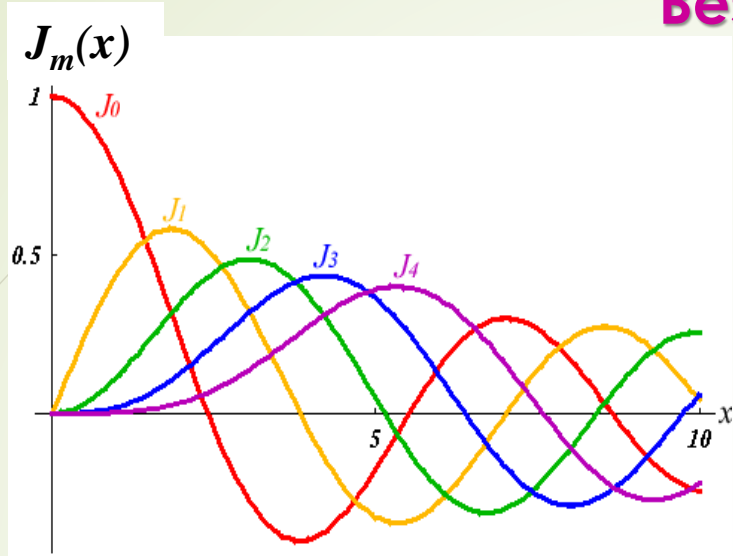
$$y(x) = CI_\nu(x) + DK_\nu(x)$$

→ Para qualquer valor de ν

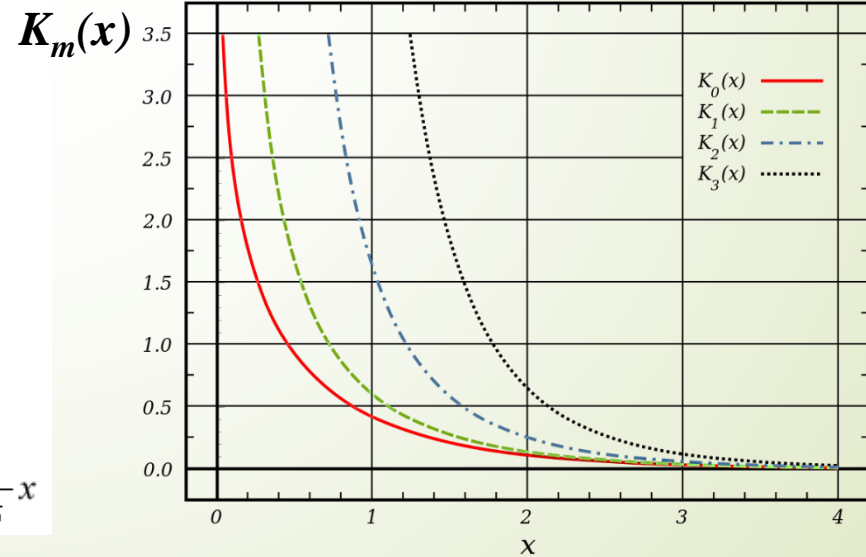
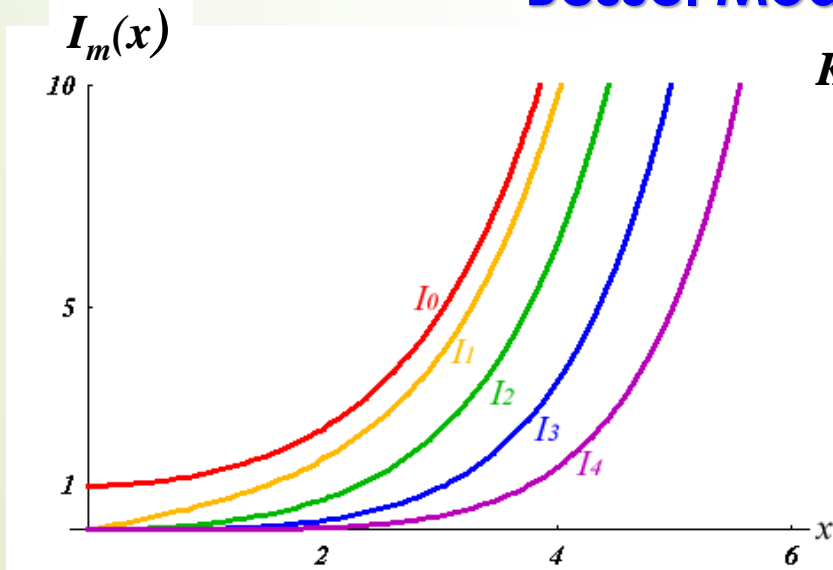
$$y(x) = A I_{\nu}(x) + B I_{-\nu}(x)$$

→ Somente para ν não-inteiro

Bessel



Bessel Modificada



- Mostre que a solução da equação (1) é dada pela equação (2).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3}xy = 0 \quad (1)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

$$y(x) = x^{1/2} \left\{ A J_{\frac{1}{3}}(t) + B J_{-\frac{1}{3}}(t) \right\} \quad (1)$$

- Com $t^2 = 4x^3/27$ e A e B são constantes arbitrárias.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0$$

$$x^2 y'' + xy' + (K^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad t = Kx$$

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(8 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

*Multiplica por x^2
e chama $8x^2 = t^2$*

$$x^2 y'' - xy' + 4x^2 y = 0$$

$$y(x) = x^{\frac{m}{n}} u(x)$$

Determina m/n por comparação com a equação de Bessel

Soluções

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - n^2) y = 0$$

$$y(x) = AJ_n(Kx) + BJ_{-n}(Kx)$$

para n não inteiro

$$y(x) = AJ_n(Kx) + BN_n(Kx)$$

para qq. n

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(8 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0$$

$$y(x) = AJ_1(2\sqrt{2}x) + BN_1(2\sqrt{2}x)$$

$$x^2 y'' - xy' + 4x^2 y = 0$$

$$y(x) = x\{AJ_1(2x) + BN_1(2x)\}$$