TRANSFORMADAS INTEGRAIS

FOURIER

Transformada integral

Em Física Matemática há pares de funções que satisfazem uma expressão na forma:

$$\boxed{F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha,t)dt}$$

$$\boxed{f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha,t)d\alpha}$$

A função *F*(α) é denominada de transformada integral de *f(t)* pelo núcleo *K*(α,*t*), *e vice-versa*.

A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função f(t) no espaço t para uma outra função, F(α), no espaço α.

Transformadas integrais são ferramentas úteis para se resolver equações diferenciais de problemas com valor inicial.

A TF também é usada para decomposição de sinais.

Transformada de Fourier (TF)

TF

Funções periódicas são representadas por séries de Fourier;

Funções oscilantes não-periódicas podem ser representadas por transformadas de Fourier (espectro do sinal);

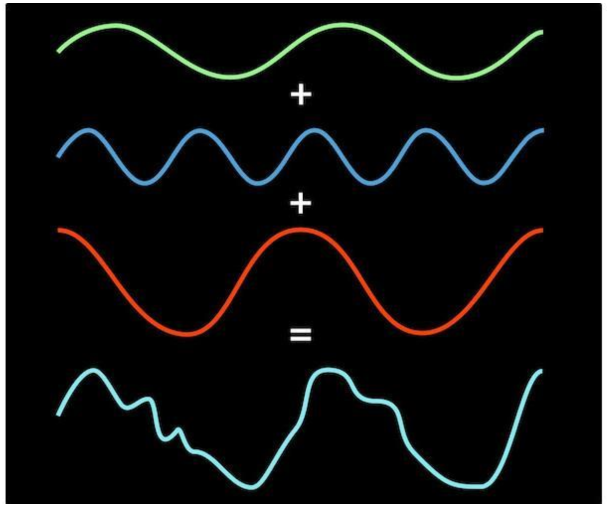
A TF decompõe um sinal em suas componentes elementares

seno e cosseno

TF

A TF decompõe um sinal (elétrico) em suas componentes elementares

seno e cosseno



Aplicações da Transformada de Fourier

- Física
- Química
- Teoria dos números
- Análise combinatória
- **Processamento de sinais**
- Teoria das probabilidades
- Estatística
- Criptografia
- e outras áreas.

Sinal

Fenómeno variável no tempo e/ou espaço.

Descrito quantitativamente.

> *"Os sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes e, tipicamente contêm informação acerca do comportamento ou natureza de um fenómeno físico."*

Exemplos:

F(t) -> Som

F(x,y) -> Imagem

F(x,y,t) -> Vídeo

Joseana Macêdo Fechine
Grupo PET Computação

Sinais ... Ondas...

- **Distribuição de elétrons em átomos pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados.**
- **Na Mecânica Quântica, a origem Física das relações de Fourier é a natureza ondulatória da matéria e a descrição que fazemos em termos de ondas (k, ω).**

Obtenção da Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\, sen\frac{n\pi x}{L} \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,sen\frac{n\pi t}{L}dt$$

Substituindo-se a_n e b_n em (1):

$$f(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \times \cos\frac{n\pi x}{L} + \int_{-L}^{L} f(t)\,sen\frac{n\pi t}{L}dt \times sen\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-L}^{L} f(t)\times \cos\frac{n\pi t}{L}\times \cos\frac{n\pi x}{L}\,dt + \int_{-L}^{L} f(t)\times sen\frac{n\pi t}{L}\times sen\frac{n\pi x}{L}\,dt\right\}$$

Colocando-se f(t) em evidência se obtém o termo:

$$\cos\frac{n\pi t}{L}\times \cos\frac{n\pi x}{L} + sen\frac{n\pi t}{L}\times sen\frac{n\pi x}{L} = \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right)dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right)dt$$

$$\frac{n\pi}{L} = \omega \qquad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega$$

Fazendo: $L \to \infty$ $[-L, L] \to (-\infty, \infty)$

$$f(x) \to \frac{1}{\pi}\lim_{\substack{L\to\infty \\ \Delta\omega\to 0}} \left(\Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\times\cos(\omega\,(t-x))dt\right)$$

$$lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega \to \int_0^{\infty} d\omega$$

Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\times\cos(\omega\,(t-x))dt$$

Integral de Fourier – Forma exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times cos(\omega\,(t-x))dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

Em muitos problemas físicos ω corresponde à frequência angular. A integral de Fourier é uma representação de f(x ou t) em termos de uma distribuição de trens de ondas infinitamente longos (k e ω).

Transformada de Fourier

Integral de Fourier $\rightarrow$ $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

Reescrevendo: $$\boxed{F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\, dt}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x}\boxed{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\, dt}$$

Transformada de Fourier

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega$$

com

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

Trocar x por t, não faz diferença, pois a variável de integração é ω.

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Transformada de Fourier

Forma exponencial

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk$$

$$F(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

***F(ω)* é a Transformada de Fourier de *f(t)* e vice-versa**

***F(k)* é a Transformada de Fourier de *f(x)* e vice-versa**

Em três dimensões

$$F(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int f(\vec{r})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} d\mathrm{r}$$

$$f(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int F(\vec{k}) e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, d\omega$$

ω *e t* substituídos pelas variáveis tridimensionais *k e r*, que em uma dimensão poderiam ser k *e x.*

Transformadas: Cosseno e Seno

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i\, sen\omega t$$

$$f(-t) = f(t)$$

PAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} f(t)\ \cos\omega t\, dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} F(\omega) \cos\omega t\, d\omega$$

$$f(-t) = -f(t)$$

IMPAR

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, sen\omega t\, dt$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, sen\omega t\, d\omega$$

Transformadas: Cosseno e Seno

$$\boxed{F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt}$$

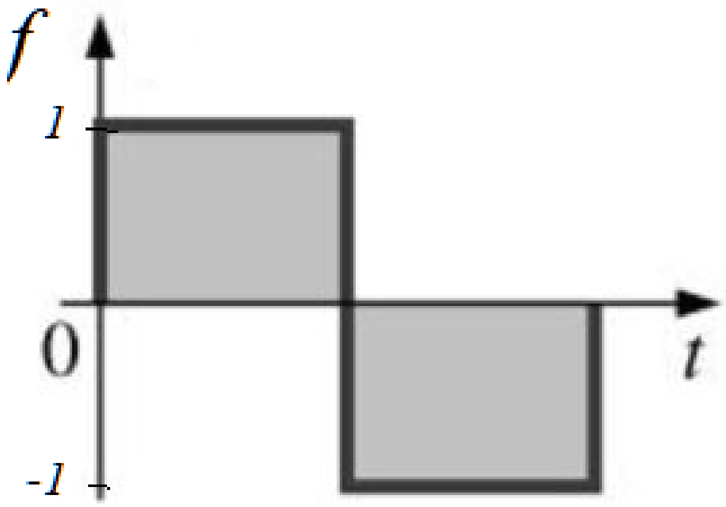
$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i\, sen\omega t$$

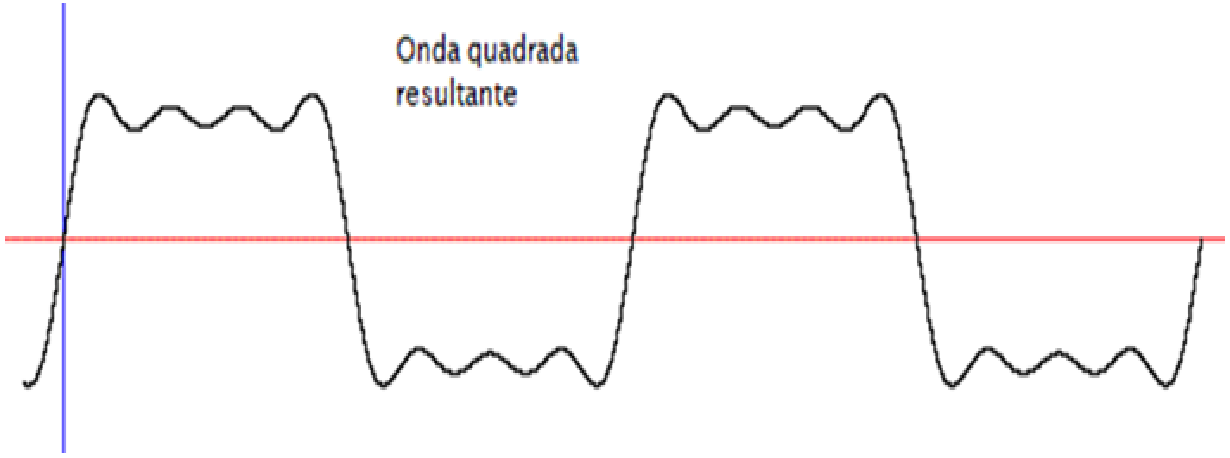
Qual a diferença entre Série e Transformada de Fourier?

A Série de Fourier decompõe uma função periódica em senos e cossenos

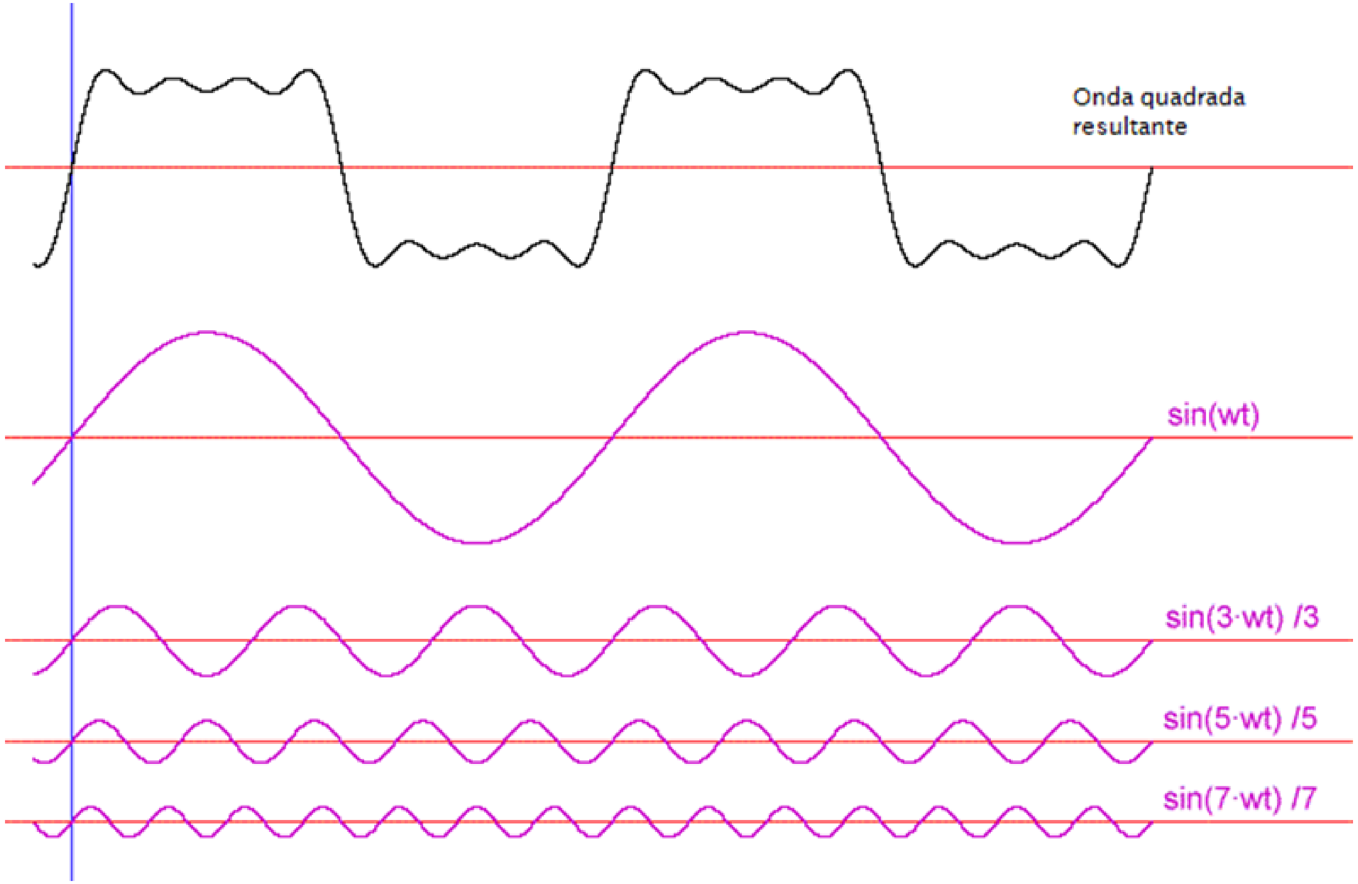
A transformada de Fourier transforma a função do domínio do tempo (t) para a frequência (ω), ou do espaço (x) para o espaço recíproco (k).

Cálculo da Série de Fourier decompõe uma função periódica em senos e cossenos



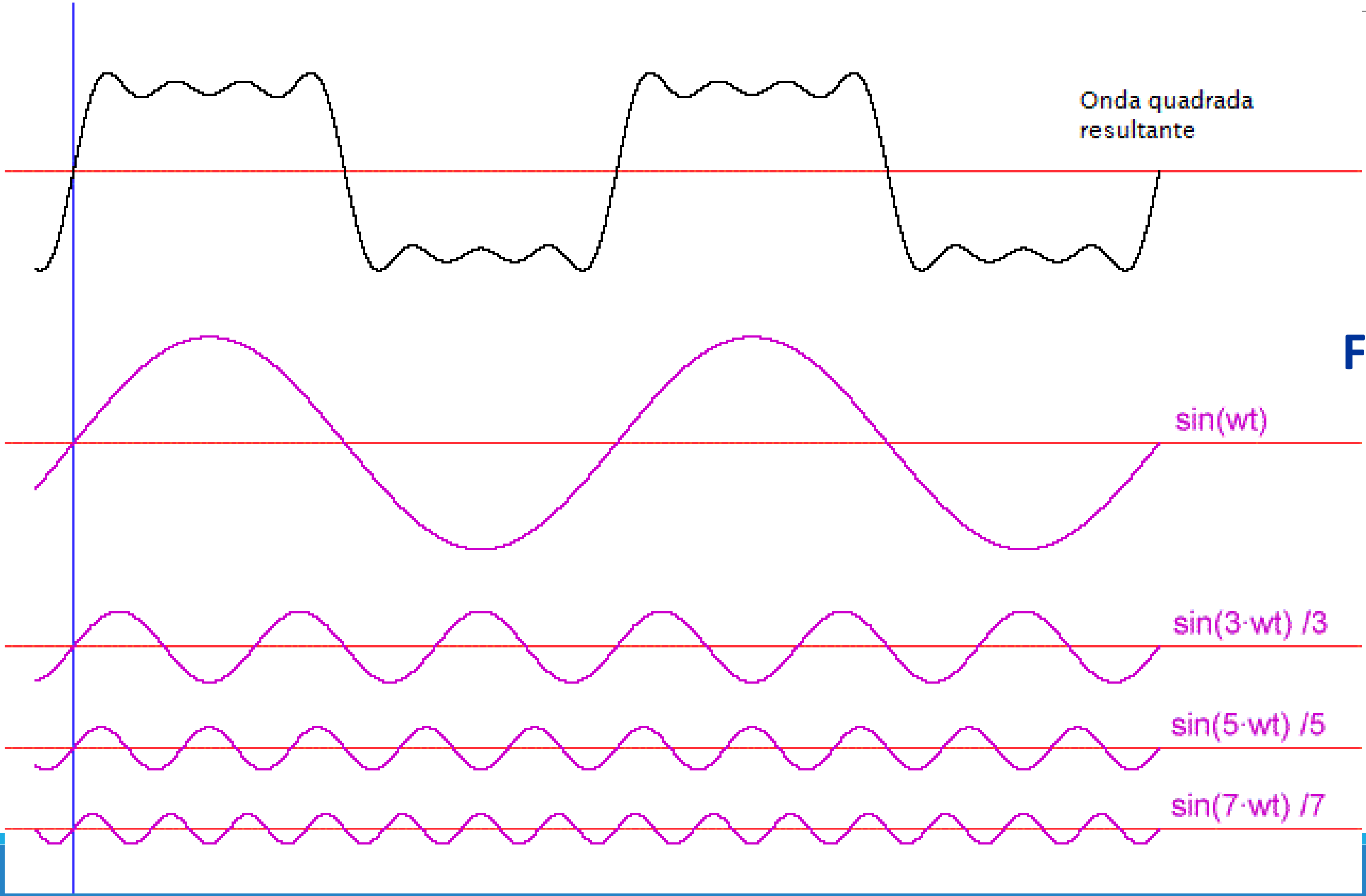


$$f(t) = 1\ \sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + + \frac{1}{7}\sin 7\omega t$$



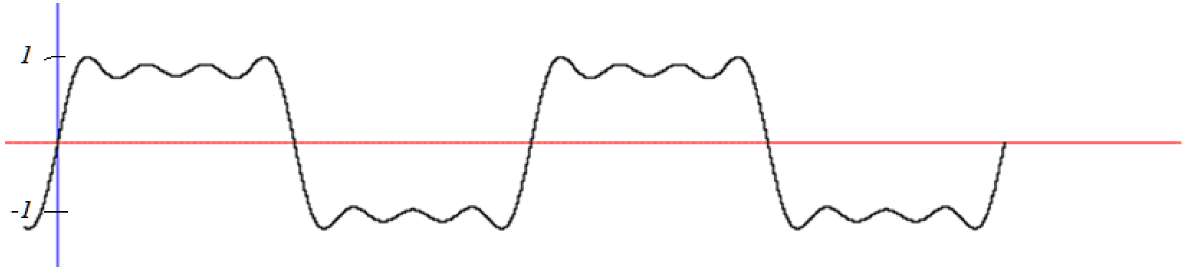
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin(2n-1)\omega t$$

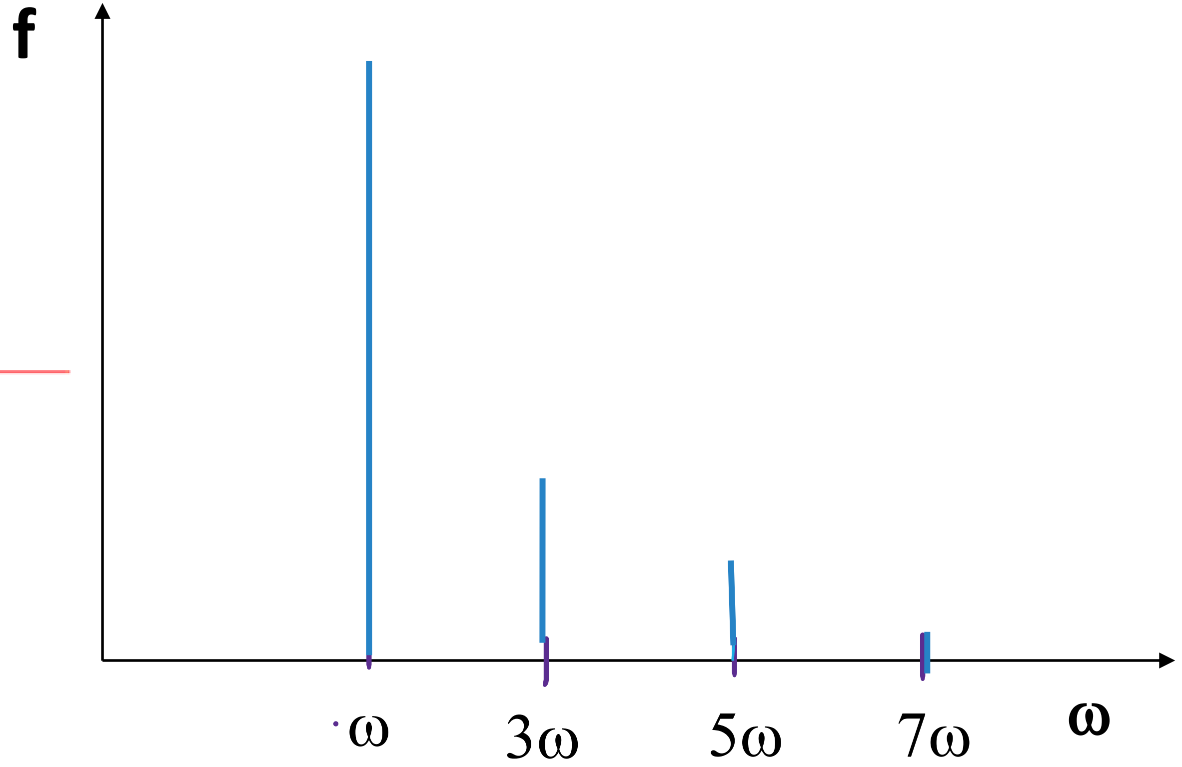
A transformada de Fourier transforma a função do domínio do tempo (t) para a frequência (ω)



Frequência	Amplitude
ω	1
3ω	1/3
5ω	1/5
7ω	1/7

A transformada de Fourier transforma a função do domínio do tempo (t) para a frequência (ω)





Transformadas de Fourier de algumas funções

	$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\omega)$
1.	$\begin{cases} 1 & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}$
2.	$\begin{cases} 1 & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$	$\frac{i(e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega})}{\sqrt{2\pi}\omega}$
3.	$\begin{cases} 1 - \frac{\lvert x\rvert}{a} & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a, \end{cases} \quad , \quad a > 0.$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{a\omega}{2}}{a\omega^2}$
4.	$\begin{cases} x & \text{se } \lvert x\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > a, \end{cases} \quad , \quad a > 0.$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\omega\cos(a\omega) - \operatorname{sen}(a\omega)}{\omega^2}$
5.	$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \lvert x\rvert < \pi, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > \pi, \end{cases}$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$

6.	$\begin{cases} \operatorname{sen}(ax) & \text{se } \lvert x\rvert < b, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > b, \end{cases} \quad a, b > 0.$	$\dfrac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\operatorname{sen}[(\omega-a)b]}{\omega-a} - \dfrac{\operatorname{sen}[(\omega+a)b]}{\omega+a}\right)$
7.	$\begin{cases} \cos(ax) & \text{se } \lvert x\rvert < b, \\ 0 & \text{se } \lvert x\rvert > b, \end{cases} \quad a, b > 0.$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\operatorname{sen}[(\omega-a)b]}{\omega-a} + \dfrac{\operatorname{sen}[(\omega+a)b]}{\omega+a}\right)$
8.	$\dfrac{1}{x^2+a^2}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{a}$
9.	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{1+a^2x^2}, \quad a > 0.$	$e^{-\frac{\lvert\omega\rvert}{a}}$
10.	$\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\operatorname{sen}^2\dfrac{ax}{2}}{ax^2}, \quad a > 0.$	$\begin{cases} 1 - \dfrac{\lvert\omega\rvert}{a} & \text{se } \lvert\omega\rvert < a, \\ 0 & \text{se } \lvert\omega\rvert > a. \end{cases}$
11.	$e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$
12.	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad a > 0.$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{a+i\omega}$

13.	$\begin{cases} 0 & \text{se } x > 0, \\ e^{ax} & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad , \quad a > 0.$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{a - i\omega}$
14.	$\lvert x\rvert^n \, e^{-a\lvert x\rvert}, \quad a > 0, n > 0.$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{1}{(a-i\omega)^{n+1}} + \dfrac{1}{(a+i\omega)^{n+1}} \right)$
15.	$e^{-\frac{a}{2}x^2}, \quad a > 0.$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

Propriedades de Transformadas de Fourier

- **Linearidade**

$$\mathcal{F}\{c1\, g(t) + c2\, h(t)\} = c1\mathcal{F}\{\, g(t)\} + \; c2\mathcal{F}\{h(t)\} = \; c1\, G(\omega) + c2\, H(\omega)$$

- **Derivada** $F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)$

- **Convolução** $\rightarrow$ $g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau$

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)]\, e^{i\omega t}\, dt$$

Outras propriedades de Transformadas de Fourier

- **Translação**

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(\omega)$$

- **Escalonamento**

$$\mathcal{F}\{g(ct)\} = \frac{G(\omega)}{|c|}$$

TF de Derivadas

$$F(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

Integrando por partes:

$$F_1(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dt}\, e^{i\omega t} dt$$

$$F_1(\omega) = -\,i\omega \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt = -i\omega F(\omega)$$

Se a função for função de x, ao invés de t:

$t \rightarrow x$

$\omega \rightarrow k$

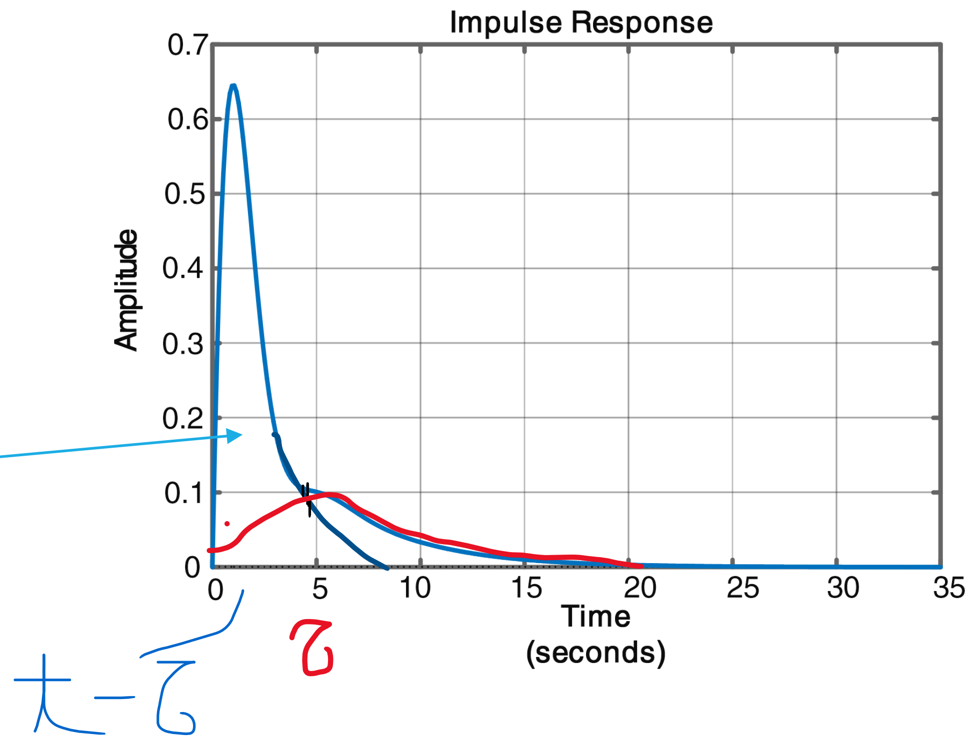
$$\boxed{F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)}$$

n é a ordem da derivada

O que é convolução?

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Área sobre a curva



Convolução

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) * h(t)]\, e^{i\omega t}\, dt$$

Onde: $$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau\ e^{i\omega t}\, dt$$

Portanto, ao fazer a transformada de Fourier da curva com convolução, podemos determinar as funções h(t) e g(t) fazendo a transformada inversa de G(ω) e H(ω).

Demonstração da propriedade

$$G(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau\ e^{i\omega t}\,dt$$

$$G(\omega)\,H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\ e^{i\omega t}\,dt}$$

Mas da propriedade
de translação em t:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(\omega)$$

Logo:

$$\mathcal{F}\{\,h(t-\tau)\,\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,e^{i\omega t}dt = \underbrace{e^{-i\omega\tau}\ H(\omega)}$$

$$G(\omega)\,H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\ e^{-i\omega\tau}\ H(\omega)\ d\tau$$

$$= H(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\ e^{-i\omega\tau}\ d\tau$$

$$= H(\omega)\ G(\omega)$$

Uma representação para a Função Delta

Da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt$$

Rearranjando:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-x)}$$

$\delta(t\text{-}x)$

A função $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-x)}$ é uma das formas de se representar a função

delta de Dirac, pois: $x = t_0$

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t)\, dt$$

Em termos de outras variáveis

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x_0)}d\omega$$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\omega-\omega_0)}dx$$

Matematicamente, a função delta não é uma função, porque é muito singular.
De fato é uma "distribuição".
É uma ideia generalizada de função, mas esta função só pode ser usada dentro de integrais.

Propriedade:

$$\int dt\, f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)$$

De fato, $\int dt\, \delta(t - t_0)$ pode ser considerado como um “operador” que puxa o valor de uma função para t_0.

Desta forma, soa perfeitamente legítimo e bem definido.
Mas já que a função delta é eventualmente integrável, podemos usá-la como se fosse uma função.

Problemas, exemplos, exercícios

1) Difusão de neutrons

φ é o fluxo

taxa de produção

variação de densidade de nêutrons no tempo

$$\frac{\partial n}{\partial t} = s - \Sigma_a \varphi - \nabla . J$$

taxa de vazamento

taxa de absorção

No estado estacionário: $\frac{\partial n}{\partial t} = s - \Sigma_a \varphi - \nabla . J$

$$s = Q\delta(x)$$

$$\Sigma_a \varphi = K^2 D$$

Equação de difusão de Fick: $J = -D\nabla\varphi$ $\nabla . J = -D\ \nabla . (\nabla\varphi) = -D\nabla^2\varphi$

φ(x) é **o fluxo de nêutrons em 1D**

$$-D\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2 D\varphi(x) = Q\delta(x)$$

taxa de absorção   taxa de produção

Problemas usando TF

1) A equação de difusão de nêutrons em uma dimensão é dada por:

$$-D\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2 D\varphi(x) = Q\delta(x)$$

Sendo $\varphi(x)$ o fluxo de nêutrons, $Q\delta(x)$ é uma fonte plana em $x = 0$; D, K^2 e Q não dependem de x.

Encontre a solução $\varphi(x)$ para a equação (1), usando transformada de Fourier.

Não há condições de contorno. Escolha as constantes indeterminadas que aparecem no desenvolvimento como constantes em x.

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\delta(z-a)dz$$

11.	$e^{-a\|x\|}, \quad a > 0.$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$

$$-D\frac{d^2\varphi}{dx^2} + K^2 D\varphi(x) = Q\delta(x)$$

2) Resolução de equações diferenciais

Exemplo: Fluxo de Calor

A transformação atua somente na variável x

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi \rightarrow \psi(x,t) \rightarrow \Psi(k,t)$$

$$\boldsymbol{F(k)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\, e^{ikx} dx}$$

A parte em *t* fica imutável

$$\boldsymbol{\Psi(k,t)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\psi(x,t)\, e^{ikx} dx}$$

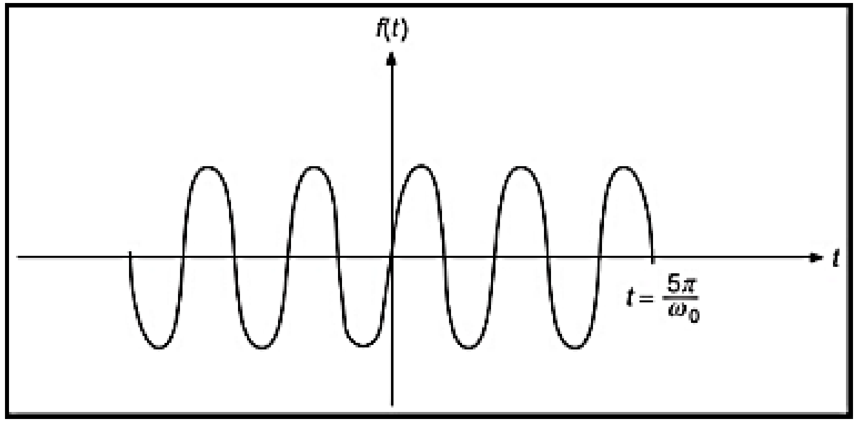
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

3) Cálculo da transformada de Fourier

Imagine um trem de ondas $sen\,\omega_0 t$ que seja limitado por um filtro de abertura finita.

$$f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t & para \quad |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & para \quad |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

Isto corresponde a N ciclos do trem de ondas original.



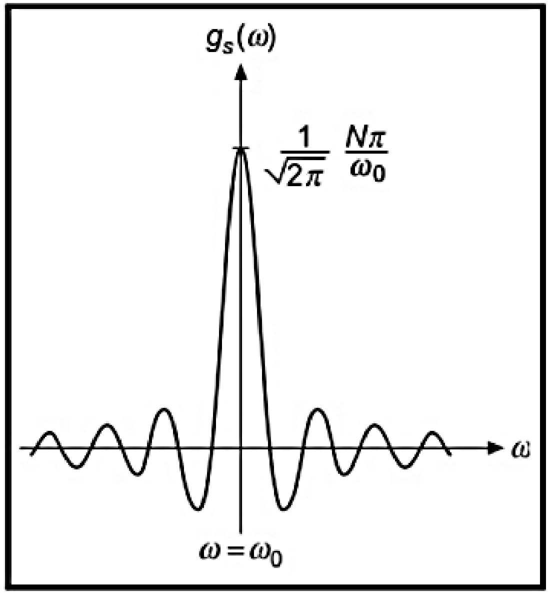
Exemplo $f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t \;\; para \;\; |t| < \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 \qquad para \;\; |t| > \frac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$

Usando a tabela, onde a = ω_0 e t = x, b = $N\pi/\omega_0$

6.	$\begin{cases} \text{sen}(ax) & \text{se } \|x\| < b, \\ 0 & \text{se } \|x\| > b, \end{cases} \quad , \quad a, b > 0.$	$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\text{sen}[(\omega - a)b]}{\omega - a} - \frac{\text{sen}[(\omega + a)b]}{\omega + a}\right)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)}\right]$$

Para $\omega \approx \omega_0 \rightarrow$ máximo



Função sinc (x)
sinus cardinalis (seno cardinal)

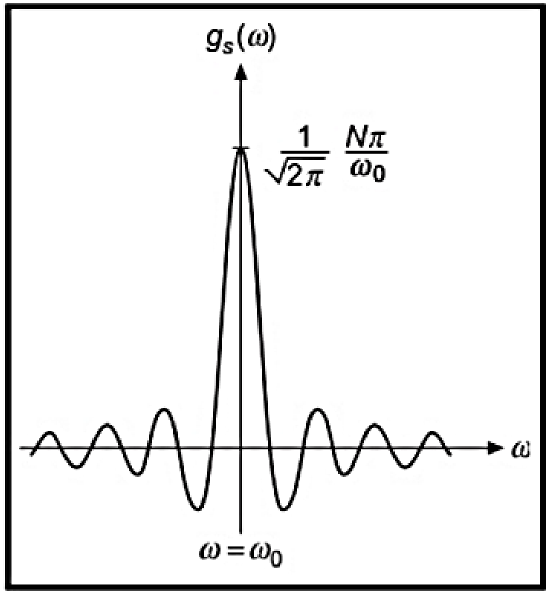
$$\boxed{\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}}$$

Propriedades da função sinc(x):

1. sinc (x) é uma função par de x
2. sinc (x) = 0 nos pontos em que sin (x) = 0, isto é,

   sinc (x) = 0 quando x = nπ, sendo n um número inteiro
3. Usando a regra de L'Hôpital, pode ser mostrado que sinc (0) = 1
4. sinc (x) oscila quando sin (x) oscila e monotonicamente

   diminui à medida que 1 / x diminui com o aumento | x |



Exemplo $f(t) = \begin{cases} sen\omega_0 t \quad para \quad |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 \qquad para \quad |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$

pulso $\boldsymbol{f(-t) = -f(t)}$
$\boldsymbol{IMPAR}$

$$F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}} sen\omega_0 t \, \boldsymbol{sen\omega t \, dt}$$

Fica de exercício calcular pela integral, ou seja, demostrar a propriedade no. 6

2) Usando a definição, mostre que as transformadas de Fourier em seno e cosseno da função e^{-at} são dadas por:

$$\boldsymbol{F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t)\, sen\omega t\, dt}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega)\, sen\omega t\, d\omega}$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} f(t)\, cos\omega t\, dt}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} F(\omega)\, cos\omega t\, d\omega}$$

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$$

3) Encontre a transformada de Fourier de um pulso triangular dado pela função a seguir, onde h é a altura do pulso:

$$f(x-a) = \begin{cases} h(1-a|x|) & para \quad |x| < \dfrac{1}{a} \\ 0 & para \quad |x| > \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Pode ser resolvido usando a definição (integral) ou pela tabela de propriedades

http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/ciclo_seminarios/tecnicos/2010/TransformadaDeFourier.pdf

FÍSICA MATEMÁTICA - MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ENGENHARIA E FÍSICA, **GEORGE ARFKEN,** Ed. **CAMPUS ELSEVIER.**

Respostas

1) $\varphi(x) = \frac{Q}{2KD} e^{-K|x|}$

3) $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h}{k^2} \left\{ -a + ik \left[\cos\frac{k}{2} - \left(1 + \frac{a}{2}\right) \sin\frac{k}{2} \right] \right\}$

Resolução da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

O seu valor pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi.\end{aligned}$$