



TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Laplace

Transformada integral


- ▶ Em Física Matemática há pares de funções que satisfazem uma expressão na forma:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt$$

$$f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha, t)d\alpha$$

A função $F(\alpha)$ é denominada de transformada integral de $f(t)$ pelo núcleo $K(\alpha, t)$, e *vice-versa*.

A operação também pode ser descrita como o mapeamento de uma função $f(t)$ no espaço t para uma outra função, $F(\alpha)$, no espaço α .


$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt$$

$$f(t) = \int_a^b F(\alpha)K^*(\alpha, t)d\alpha$$

Laplace : $\alpha = s$



$$K(s, t) = e^{-st}$$

Para $t > 0$


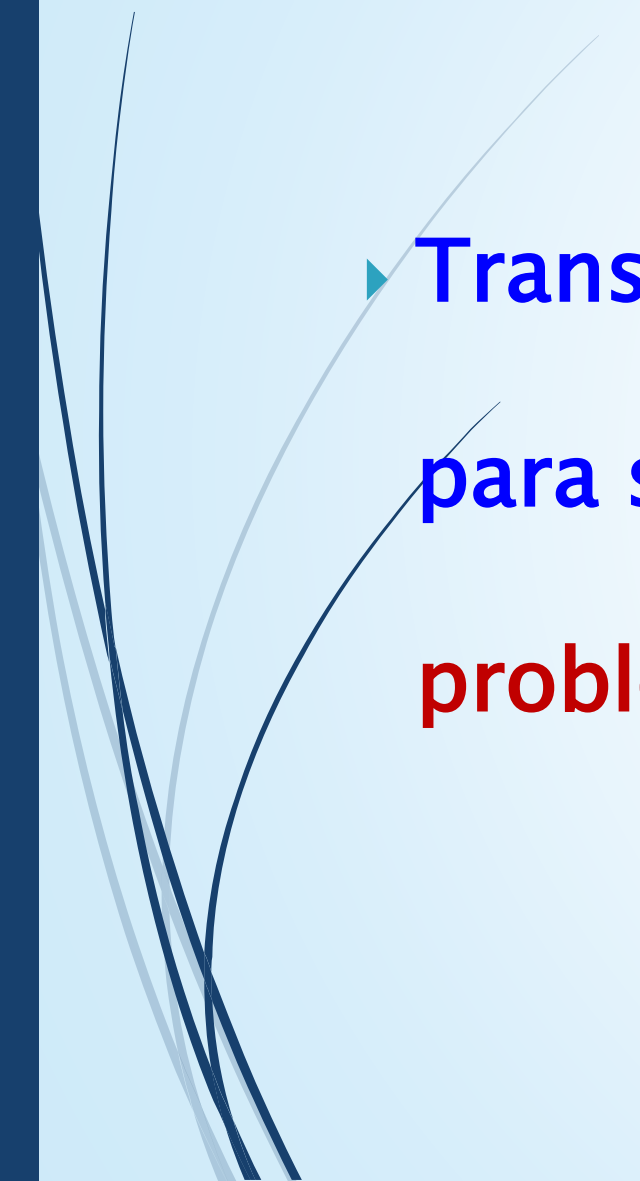
Fourier : $\alpha = \omega$ e $t = t$ OU $\alpha = k$ e $t = x$



$$K(\omega, t) = e^{-i\omega t}$$

OU

$$K(k, x) = e^{-ikx}$$

- 
- 
- ▶ **Transformadas integrais são ferramentas úteis para se resolver equações diferenciais de problemas com valor inicial.**



Transformada de Laplace (TL)

Definição da TL

$F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$
Espaço $t \rightarrow$ para espaço s

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Transformada inversa

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(s)e^{-st} ds$$

$$K(\alpha, t) = K(s, t)$$
$$\alpha = s$$



Núcleo

$$K(s, t) = e^{-st}$$

Para $t > 0$





$F(s)$ é a Transformada de Laplace de $f(t)$ e vice-versa

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$



Transformadas de Laplace de funções elementares

Tabela de TL de funções elementares

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t \sin(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t \cos(kt)$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ (n número inteiro)	$t \cosh(kt)$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	$t \sinh(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	$1 - \cos(kt)$	$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
$\sin^2(kt)$	$\frac{2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$
$\cos^2(kt)$	$\frac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \frac{1}{s - a}$$



Como chegar
nessas relações?

Cálculo da TL para funções elementares - I

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \longleftrightarrow f(t) = \int_0^{\infty} F(s)e^{-st} ds$$

Exemplos:

$$f(t) = 1 \longleftrightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \cos at \longleftrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Propriedades da TL

Linearidade

Escalamento

Deslocamento na frequência

$f(t)$	$F(s)$
$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
$\alpha f(\alpha t)$	$F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$

Propriedades da TL

Deslocamento no tempo

Transformada de Laplace da derivada

Derivada da transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$u(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$	$e^{-as}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$t^2f(t)$	$F''(s)$

Mais propriedades da TL

$f(t)$	$F(s)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
$\int_0^t \dots \int_0^t f(u)du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)du$	$\frac{F(s)}{s^n}$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)G(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)du$

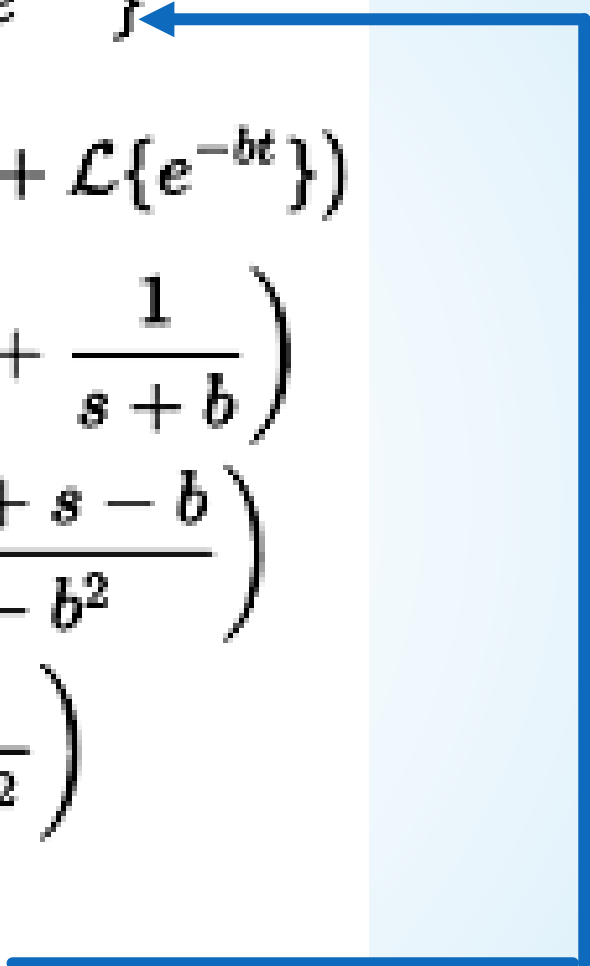

Cálculo da TL para funções elementares - usando a Tabela

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh(bt)\} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{bt} + e^{-bt}\} \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{bt}\} + \mathcal{L}\{e^{-bt}\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s+b+s-b}{s^2-b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2-b^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2-b^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(t) &= e^{at} \\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$



Como calcular a transformada inversa?


$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh(bt)\} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{bt} + e^{-bt}\} \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{bt}\} + \mathcal{L}\{e^{-bt}\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s+b+s-b}{s^2-b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2-b^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2-b^2}.\end{aligned}$$

Transformada inversa :

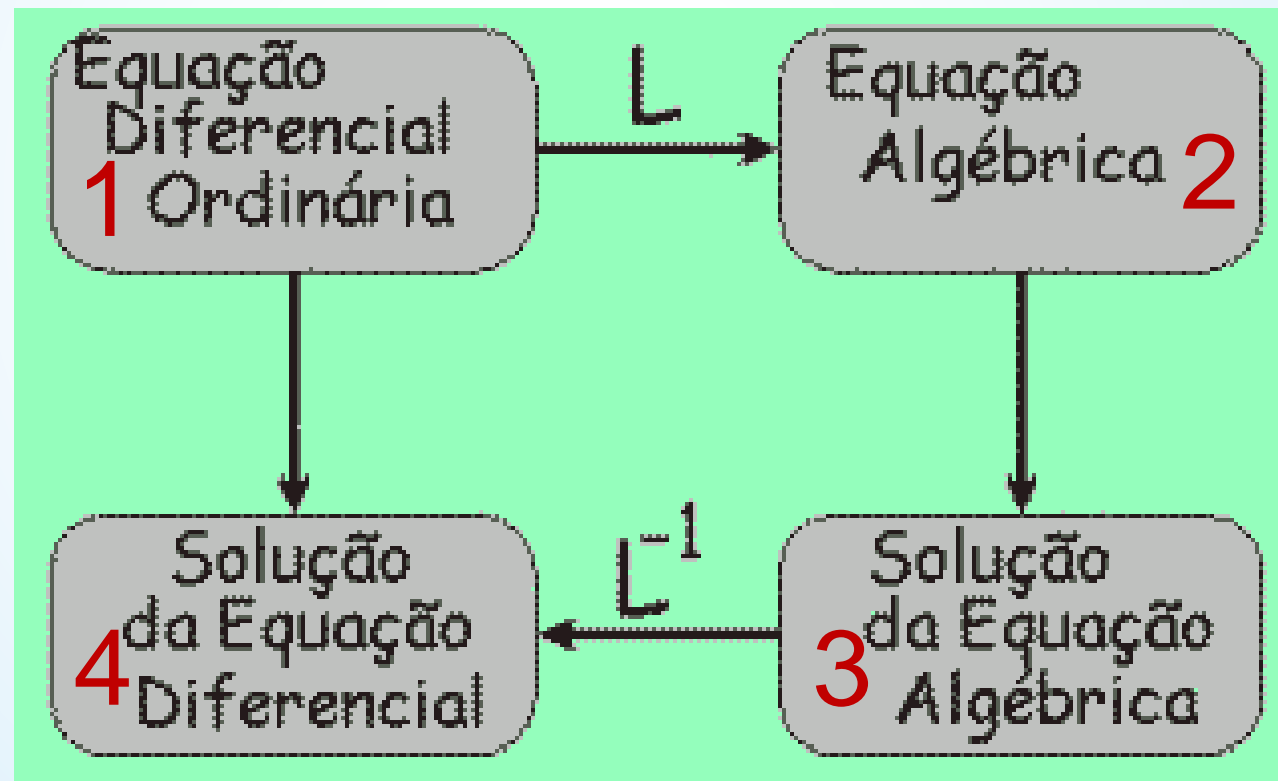
Expansão por Frações Parciais

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \rightarrow \mathcal{L}\{e^{\pm\alpha t}\} = \frac{1}{s \mp \alpha} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s \mp \alpha}\right\} = e^{\pm\alpha t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s^2-6s}\right\} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

Utilização:
resolução de equações diferenciais com condições iniciais.



Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \text{sen}2t \quad \text{Com } y(0) = 2 \text{ e } y'(0)=1$$

Aplica a TL na equação diferencial

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} y e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \text{sen}2t e^{-st} dt \text{ sen}2t$$

Ou

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$

Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \text{sen}2t$$

Com $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) = \int_0^{\infty} y e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$

Da Tabela TL de funções elementares

$f(t) = y(t)$ e $F(s) = Y(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\frac{\text{sen}(at)}{a}$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$

Exemplo: Solução de problemas de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \text{sen}2t$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Substitui-se os valores iniciais: $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Isola-se $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, 0! = 1$	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}, 0! = 1$	$\frac{1}{(s - \alpha)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^n} \quad n > 0$
$\delta(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s}$
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

A ideia é escrever $Y(s)$ em vários termos já conhecidos da Tabela de TL e calcular a transformada inversa para obter $y(t)$:

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Frações parciais

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Devem ser iguais

$$Y(s) = \frac{as + b}{(s^2 + 1)} + \frac{cs + d}{(s^2 + 4)} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{(as + b) \times (s^2 + 4) + (cs + d) \times (s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Expandindo o numerador de Y(s)

$$(as + b) \times (s^2 + 4) + (cs + d) \times (s^2 + 1) = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2s^3 + s^2 + 8s + 6 \\ = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d) \end{aligned}$$

Comparando-se os termos, determina-se a, b, c e d:

$$a + c = 2 \quad b + d = 1$$

$$4a + c = 8 \quad 4b + d = 6$$

$$Y(s) = \frac{as + b}{(s^2 + 1)} + \frac{cs + d}{(s^2 + 4)} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a + c = 2 \\ b + d = 1 \\ 4a + c = 8 \\ 4b + d = 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 5/3 \\ c = 0 \\ d = -2/3 \end{cases}$$

$$Y(s) = 2 \frac{s}{(s^2 + 1)} + \frac{5}{3} \frac{1}{(s^2 + 1)} - \frac{1}{3} \frac{2}{(s^2 + 4)}$$

Aplicando-se a TL inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2 + 4)}\right\}$$

Logo, a solução $y(t)$ para a ED com condições iniciais é:

$$y(t) = 2 \cos t + \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sin 2t \quad \text{Com } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 1$$

$f(t)$	$G(s)$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

Exercícios para TL

1) Mostrar que: $\mathcal{L}\{e^{\beta t} \sin \alpha t\} = \frac{\alpha}{(s-\beta)^2 + \alpha^2}$



1) Mostrar que: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$

1) Usando o método das frações parciais mostre que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{(a-b)} \text{ com } a \neq b$$

1) Encontre a solução da ED do oscilador harmônico simples usando TL, sendo m a massa do oscilador, a mola é ideal e tem constante elástica k , desprezando o atrito. As condições iniciais são: $u(0)=u_0$ e $u'(0)=0$. A função deslocamento da mola é função do tempo t .

$$m \frac{d^2 u}{dx^2} + ku = 0$$

- 
- 
- ▶ **FÍSICA MATEMÁTICA – MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA ENGENHARIA E FÍSICA, GEORGE ARFKEN, Ed. CAMPUS ELSEVIER.**