Resolução das equações

- Equação de Difusão (calor) (1D)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
- Equação de Laplace (2D)

- Difusão térmica em estado estacionário (2D e 3 D);
- Função potencial de uma partícula livre no espaço sob ação de forças gravitacionais;
- Etc

Equação de Laplace (2D)

- Eletrostática, dielétricos, correntes estáveis e magnetostática,
- Hidrodinâmica,
- Fluxo de calor,
- Gravitação.

Problema

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta u = 0$$

Independente do tempo $\rightarrow$ não tem condições iniciais!

Em 2D : 4 condições de contorno, uma para cada fronteira (2 para cada dimensão)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Condições de contorno

1) ***Sobre a função u (x,y) $\rightarrow$ Problema de Dirichlet***

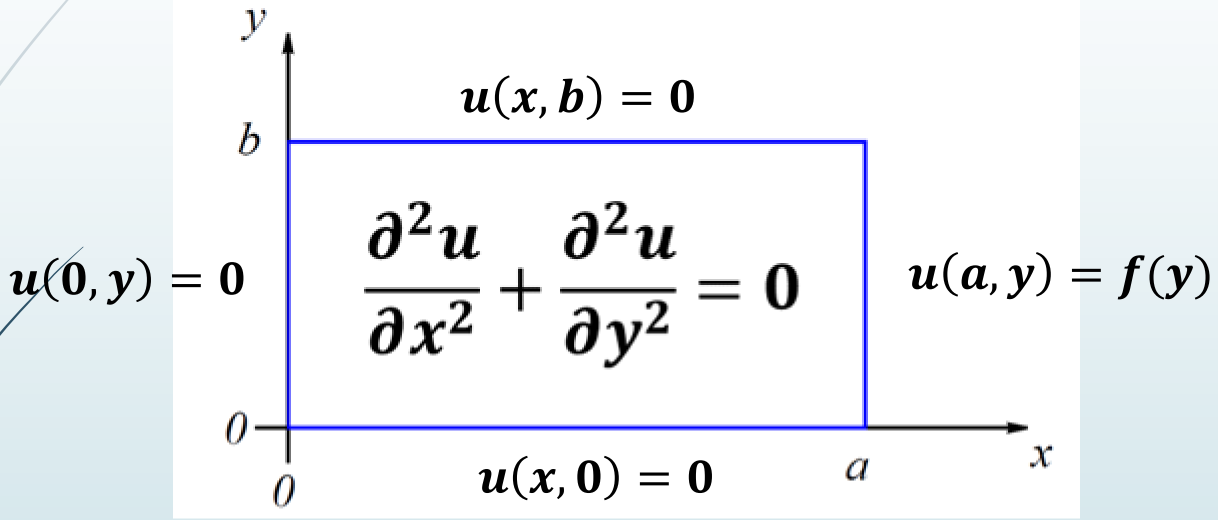
2) *Sobre as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ $\rightarrow$ Problema de Neumann*

Resolução: Problema de Dirichlet em um retângulo

Condições de contorno

Sobre a função u (x,y)

Resolução: Problema de Dirichlet em um retângulo



Condições de contorno para o retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$:

$$u(x,0) = 0 \quad e \quad u(x,b) = 0 \quad para \quad 0 < x < a$$

$$u(0,y) = 0 \quad e \quad u(a,y) = f(y) \quad para \quad 0 \leq y \leq 0$$

Separação de variáveis: u(x,y) = X(x) Y(y)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2$$

λ é a constante de separação, se λ é um número real e chega-se as EDOs:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x \qquad e^{\pm\lambda x}$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y \qquad e^{\pm i\lambda x}$$

Aplicando as CC (y):

$$u(x,y) = X(x)\, Y(y) = (A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x)(C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y)$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = 0 \rightarrow X(x).\, Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{u(x,b) = 0 \quad X(x).\, Y(b) = 0 \quad Y(b) = 0}$$

$$Y(y) = C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y$$

$$\boldsymbol{Y(0) = 0} \Rightarrow Y(0) = C.\cos \lambda 0 + D.\sin \lambda 0 = C = 0$$

$$Y(y) = D.\sin \lambda y$$

$$\boldsymbol{Y(b) = 0} \longrightarrow Y(b) = D.\sin \lambda b = 0 \longrightarrow \lambda b = n\pi$$

$$\boldsymbol{\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{b}} \Rightarrow Y(y) = D.\sin \frac{n\pi y}{b} \Rightarrow \boldsymbol{u(x,y) = (A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x)\, D.\sin \frac{n\pi y}{b}}$$

$$u(x,y) = (A.\cosh\lambda x + B.\sinh\lambda x)\ D.\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Aplicando as CC (x):

$$u(0,y) = 0 \ \rightarrow X(0).\ Y(y) = 0 \ \rightarrow X(0) = 0$$
$$u(a,y) = f(y)$$

$$u(0,y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow \quad X(x) = A.\cosh\lambda x + B.\sinh\lambda x$$

$$X(0) = A.\cosh\lambda 0 + B.\sinh\lambda 0 \ \rightarrow A = 0$$

$$u(x,y) = (B.\sinh\lambda x)\ D.\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$B.D = A_n \quad \Rightarrow \quad u_n(x,y) = A_n \times \sinh\frac{n\pi}{b}x \times \sin\frac{n\pi}{b}y$$

A solução geral é a superposição linear de todas as soluções u_n e agora resta apenas a constante A_n para ser determinada.

$$\boldsymbol{u_n(x,y) = A_n \times \sinh \frac{n\pi}{b} x \times \sin \frac{n\pi}{b} y}$$

$$\boldsymbol{u(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

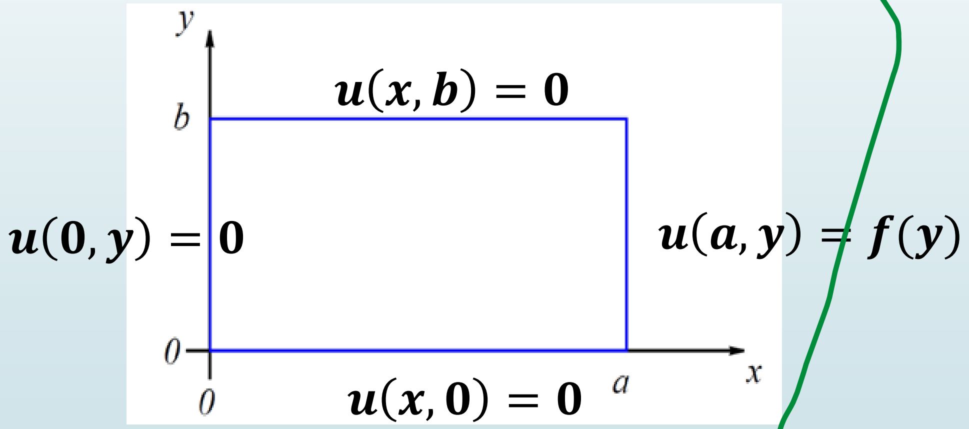
Resta a última condição de contorno a ser aplicada: $\boldsymbol{u(a,y) = f(y)}$

$$u(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi a}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

$$u(a,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi a}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi a}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi y}{b} \Rightarrow B_n = A_n \sinh\frac{n\pi a}{b}$$

Independe de y



$$f(y) = \sum_{n} B_n \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$\Downarrow$

Série de Fourier: $$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

Logo:

$$\boldsymbol{u(x,y)} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Determina-se A_n por:

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

E assim u(x,y) fica determinada, dependendo do que é a função f(y).

Resumo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Condições de contorno para o retângulo 0 < x < a e 0 < y < b:

$$u(x,0) = 0 \quad e \quad u(x,b) = 0 \;\; para \quad 0 < x < a$$

$$u(0,y) = 0 \quad e \quad u(a,y) = f(y) \;\; para \quad 0 \le y \le 0$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$A_n \sinh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy \;\Rightarrow\; A_n = \frac{2}{b.\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

Exemplo para $f(y) = y$

Para determinar a solução final da equação de Laplace em 2D em coordenadas cartesianas com as CC apresentadas, é preciso determinar A_n a partir de $f(y) = y$:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$A_n \sinh\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}\frac{2}{b}\int_0^b y.\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi a}{b}} \times \frac{2}{b} \times \int_0^b y.\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

$$\int_0^b y.\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy = -\frac{b^2}{n\pi}(-1)^n = \frac{b^2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$A_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi a}{b}} \times \frac{2}{b} \times \frac{b^2}{n\pi}(-1)^{n+1} \Rightarrow A_n = \frac{2b}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sinh\frac{n\pi a}{b}}$$

Finalmente

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$u(x,y) = \frac{2b}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sinh\frac{n\pi a}{b}} \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Exemplo para:

$$f(y) = \begin{cases} y & para \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y & para \quad 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Com: a=3 e b=2

Neste caso:

$$A_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\,\frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh\frac{3n\pi}{2}}$$

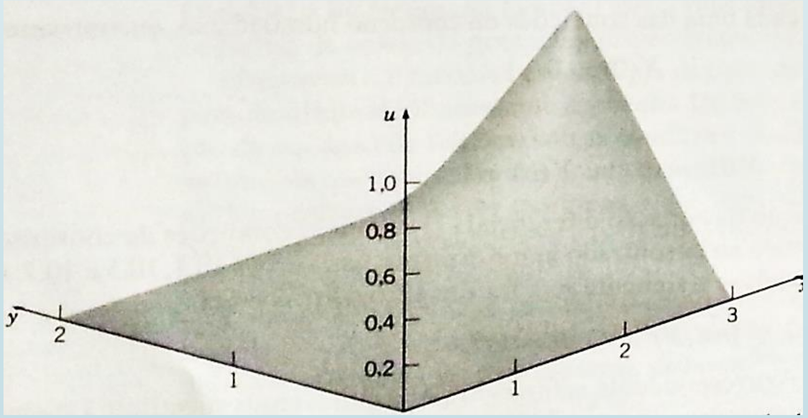
$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh\frac{3n\pi}{2}} \times \sinh\frac{n\pi x}{b} \times \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Exemplo para:

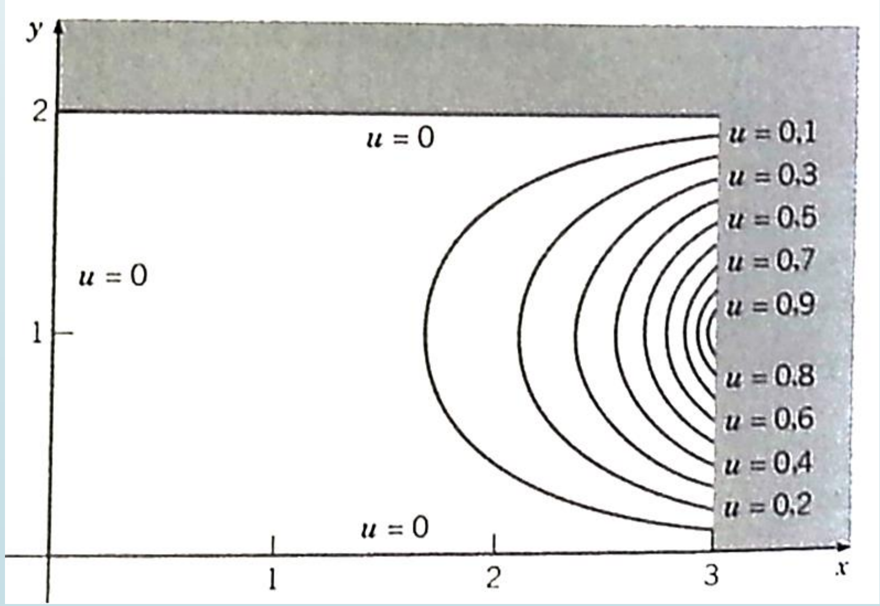
$$f(y) = \begin{cases} y & para \quad 0 \le y \le 1 \\ 2-y & para \quad 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

Com: a=3 e b=2

Gráfico de u(x,y) para n = 20



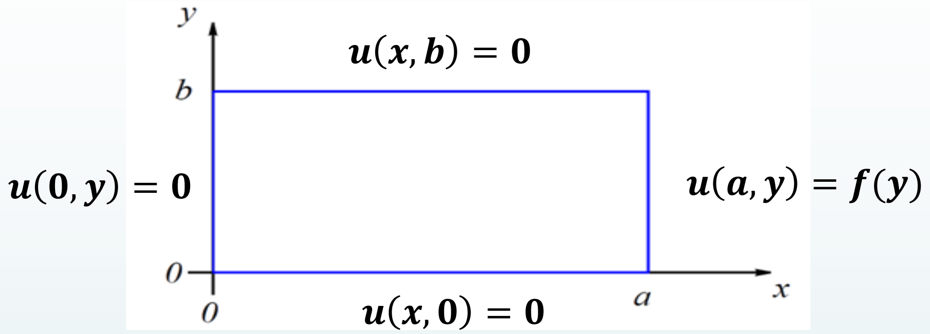
Curvas de nível de u(x,y)



Resumo: Laplace coordenadas retangulares em 2D

Problema de Dirichlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



u(x,y) = X(x) Y(y)

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y$$

CC

$$X(x) = B.\sinh \frac{n\pi x}{b}$$

$$Y(y) = D.\sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{b}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi x}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b} \Rightarrow u(a,y) = f(y)$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times \sinh \frac{n\pi a}{b} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$$

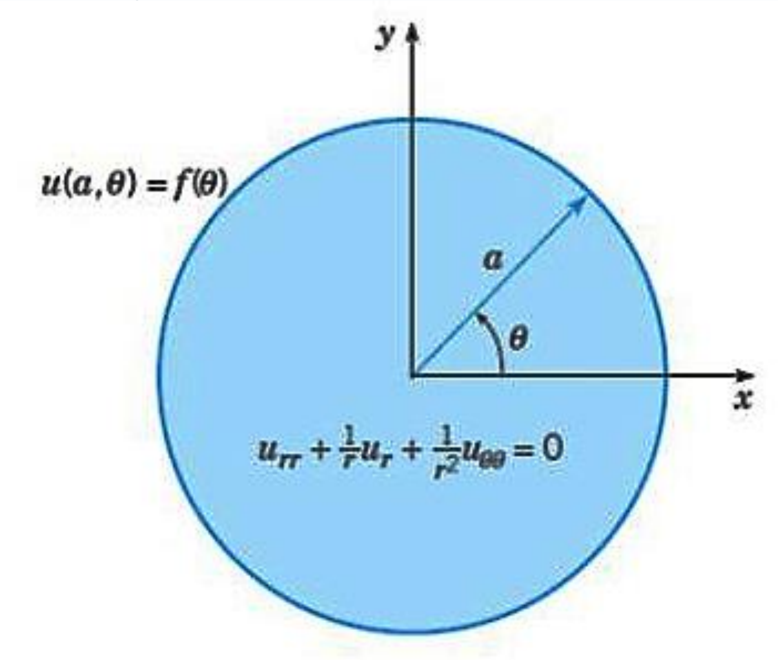
com

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

Resolução da Equação de Laplace em um círculo.

No círculo

Coordenadas cilíndricas com $z = 0$



r < a

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Singularidade para r=0

$$u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2};\ u_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ u_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\boldsymbol{Para \quad r < a \quad e \quad u(a,\theta) = f(\theta)}$$

$f(\theta)$ é uma função dada em $0 \le \theta \le 2\pi$

$u(r,\theta)$ é periódica de período 2π e finita em r=0

Separação de variáveis: u(r,θ) = R(r) Θ(θ);

Substitui as derivadas parciais de u(r,θ) na equação de Laplace abaixo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2}\Theta + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Theta + \frac{1}{r^2}R\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

Multiplica por r^2 e divide por R Θ

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \lambda$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda$$

Separando as equações em R e Θ:

$$\boxed{r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-\lambda R=0}$$

$$\boxed{\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\lambda\Theta=0}$$

É possível mostrar que $u(r,\theta)$ é periódica de período 2π, somente se λ for um número real.

Estudaremos os casos: $\lambda < 0$ e $\lambda \geq 0$

Quais as condições que permitem resolver este problema ?

1) A função $\Theta(\theta)$ deve ser periódica no círculo,

ou seja: $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$;

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$$

2) A função R(r) deve ser finita para $r \to 0$;

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

3) Além de : $\boldsymbol{u(a,\theta) = f(\theta)}$

Equação de Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\, x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

α=1 e β = -λ

Procurar soluções do tipo: R = r^k;

$r^k[k^2 - \lambda]=0$ ⇒ $r^k \neq 0$

Equação de Euler

Soluções do tipo: $R(r) = r^k$

$$[k^2 - \lambda] = 0$$

As raízes para k são:

$$k_i = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda} \qquad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Lembrando ... λ é um número real

Estudo dos valores de λ

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

Soluções do tipo: R(r) = r^k

$$k_1 = +\sqrt{\lambda} \qquad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$R = Ar^{k1} + Br^{k2} \Rightarrow R = Ar^{+\sqrt{\lambda}} + Br^{-\sqrt{\lambda}}$$

1) Se $\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\mu^2$, sendo μ um nº real.

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \mu^2\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta(\theta) = c_3 e^{\mu\theta} + c_4 e^{-\mu\theta}$$

Aplicando as condição de periodicidade $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$

$$c_3 + c_4 = c_3 e^{2\pi\mu} + c_4 e^{-2\pi\mu} \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Theta(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(r,\theta) = 0$$

Solução trivial

Portanto , $\lambda < 0$ não é solução

2) Se λ = 0

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$$

$\Rightarrow$ $c_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\Theta(\theta) = c_1$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = 0$$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda}$$

$$k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = 0$$

$\Rightarrow$ **Eq. De Euler para k1=k2=0**

$a_2 = 0$

$\Rightarrow$ $R(r) = (a_1 + a_2 \ln r).\, r^{k2} = (a_1 + a_2 \ln r).$

$$u_\lambda(r,\theta) = u_0(r,\theta) = a_1.$$

3) Se $\lambda > 0 \rightarrow \lambda = \mu^2$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \mu^2\Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta(\theta) = c_1 \cos\mu\theta + c_2 \sin\mu\theta$$

$$\Rightarrow \quad \Theta(0) = \Theta(2\pi) \quad \Rightarrow \quad c_1 \underbrace{\cos\mu 0}_{1} + c_2 \underbrace{\sin\mu 0}_{0} = c_1 \cos\mu 2\pi + c_2 \sin\mu 2\pi$$

$$\cos\mu 2\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \mathrm{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta}$$

n=0, 1,2,3...

Continuando ... Se $\lambda > 0 \rightarrow \mu^2 = \lambda = n^2$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2 R = 0$$

$$R(r) = r^k$$

$$k_1 = +\sqrt{\lambda} \qquad k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$k_1 \neq k_2$, $k_1 = n$ e $k_2 = -n$

$$R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$$

Para $r \rightarrow 0$ escolhe-se $c_4 = 0$, função não diverge em $r \rightarrow 0$

$$\boxed{R(r) = c_3 r^n}$$

Finalmente: $u(r,\theta) = R(r)\ \Theta(\theta)$

λ > 0 e λ = n²

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

$$R(r) = c_3\, r^n$$

$$\boldsymbol{u_n(r,\theta)} = \Theta_n(\theta) * R_n(r) = r^n(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \sum \boldsymbol{u_n(r,\theta)}$$

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

λ = 0

$$\Theta(\theta) = c_1$$

$$R(r) = c_1$$

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

$\boldsymbol{Mas:}$ $\boldsymbol{u(a,\theta) = f(\theta)}$

$$\boldsymbol{f(\theta)} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Onde

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

Exemplo: f(θ) =θ(π–θ)

$$\boldsymbol{u(r,\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta)$$

Com:

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta \qquad a^n k_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

Substituindo-se f(θ):

$$c_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \theta(\pi-\theta)\cos n\theta \, d\theta$$

$$k_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} \theta(\pi-\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

Para calcular as integrais a tabela de integrais pode ser útil:

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$

Resolução: Problema de Neumann em um retângulo

Condições de contorno

Sobre as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$

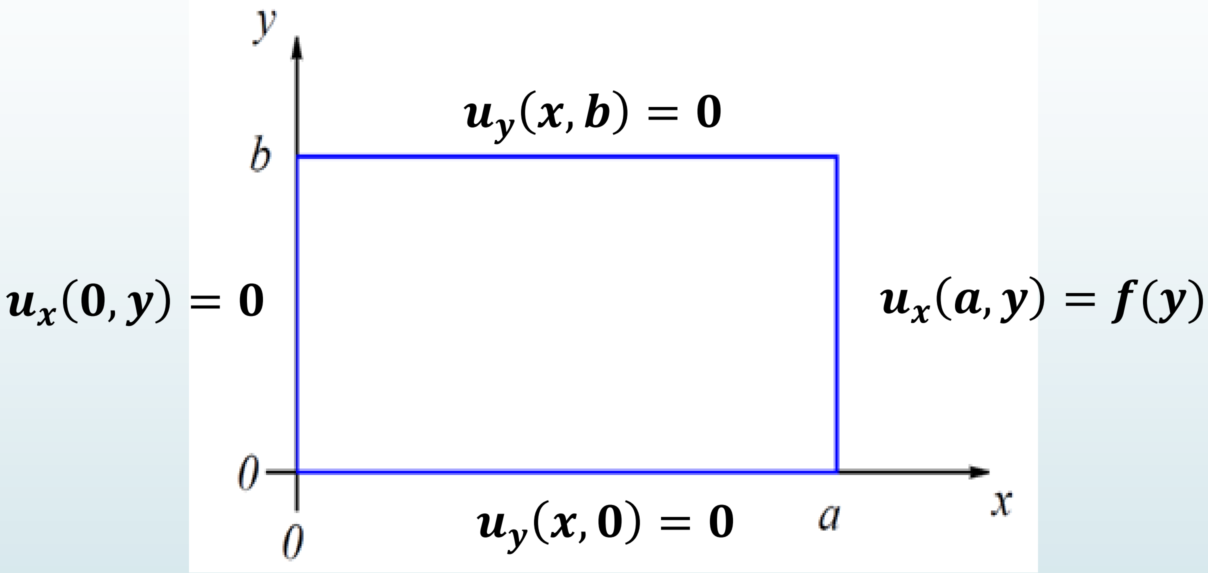
A equação a ser resolvida é exatamente a mesma e o método da separação de variáveis e resulta na mesma solução anterior feita para Dirichlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = X(x)\, Y(y)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y$$

Condições de Contorno de Neumann



$$u_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = f(y), \quad 0 < y < b.$$
$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,b) = 0, \quad 0 < x < a,$$

$$u(x,y) = X(x)\, Y(y)$$

$$X(x) = A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x; \quad Y(y) = C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y$$

$$u(x,y) = (A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x).(C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y)$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = f(y), \quad 0 < y < b.$$
$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,b) = 0, \quad 0 < x < a,$$

Calculando as derivadas, para depois aplicar as condições de Neumann, iniciando com a derivada em y:

$$u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = X(x).(-\lambda C.\sin \lambda y + \lambda D.\cos \lambda y)$$

$$u(x,y) = (A.\cosh \lambda x + B.\sinh \lambda x).(C.\cos \lambda y + D.\sin \lambda y)$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = X(x).(-\lambda C.\sin \lambda y + \lambda D.\cos \lambda y)$$

Condições de contorno: $\boxed{u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,b) = 0, \quad 0 < x < a,}$

$$u_y(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y} = X(x).(-\lambda C.\cancelto{0}{sin\,\lambda 0} + \lambda D.\cancelto{1}{cos\,\lambda 0}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{D = 0 \text{ ou } \lambda = 0}$$

$$u_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = X(x).(-\lambda C.\sin \lambda y)$$

$$u_y(x,b) = \frac{\partial u}{\partial y} = X(x).(-\lambda C.\sin \lambda b) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda b = n\pi \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$u_n(x,y) = \left(A.\cosh\frac{n\pi x}{b} + B.\sinh\frac{n\pi x}{b}\right).\left(C.\cos\frac{n\pi y}{b}\right)$$ São várias soluções que dependem de

Falta aplicar as condições de contorno para a derivada em x:

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = f(y), \quad 0 < y < b.$$

Aplicar as condições de contorno para a derivada em x:

$$\boxed{u_x(0,y)=0,}\quad u_x(a,y)=f(y),\quad 0<y<b.$$

$$u(x,y)=\sum_n u_n(x,y)=\sum_n \left(An.\cosh\frac{n\pi x}{b}+Bn.\sinh\frac{n\pi x}{b}\right).\left(Cn.\cos\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_n \left(An.\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}x-Bn.\frac{n\pi}{b}\cosh\frac{n\pi x}{b}x\right).\left(Cn.\cos\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\sum_n \left(An.-\frac{n\pi}{b}\underbrace{\sinh\frac{n\pi 0}{b}}_{0}Bn.\frac{n\pi}{b}\underbrace{\cosh\frac{n\pi 0}{b}}_{1}\right).\left(Cn.\cos\frac{n\pi y}{b}\right)=0$$

Bn= 0 ou
n= 0;
Cn=0 não é opção

$$u(x,y)=\sum_n \left(An.\cosh\frac{n\pi x}{b}\right).\left(Cn.\cos\frac{n\pi y}{b}\right)\quad\Rightarrow\quad An.Cn=D_n$$

$$u(x,y)=\sum_n D_n.\cosh\frac{n\pi x}{b}.\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$u(x,y) = \sum_n D_n . \cosh\frac{n\pi x}{b} . \cos\frac{n\pi y}{b}$$

Falta aplicar a condição de contorno para a derivada em x a seguir:

$$u_x(0,y) = 0, \quad \boxed{u_x(a,y) = f(y),} \quad 0 < y < b.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = \sum_n D_n . \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} . \cos\frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

Série de Fourier da função f (y):

$$f(y) = \sum_n F_n . \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$F_n = D_n . \frac{n\pi}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \cos\frac{n\pi y}{b} dy$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi} \frac{1}{\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \cos\frac{n\pi y}{b} dy$$

As condições de contorno de Dirichlet indicam o valor que a função solução u (x,y) para a equação diferencial deve ter na fronteira do domínio C.

As condições de contorno de Neumann indicam o valor que a derivada função solução u(x,y) para a equação diferencial deve ter na fronteira do domínio C. (ideia de fluxo)

Condições de contorno de Dirichlet

$$\boldsymbol{u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \times sinh \frac{n\pi x}{b} \times sin \frac{n\pi y}{b}}$$

$$A_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

Condições de contorno de Neumann

$$\boldsymbol{u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \times cosh \frac{n\pi x}{b} \times cos \frac{n\pi y}{b}}$$

$$D_n . \frac{n\pi}{b} cosh \frac{n\pi a}{b} \quad = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$