Resolução das equações

- Equação de Difusão (calor) (1D)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
- Equação de Laplace (2D)

Ondas acústicas: corda (1D) e tambor (2D); ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas (3D).

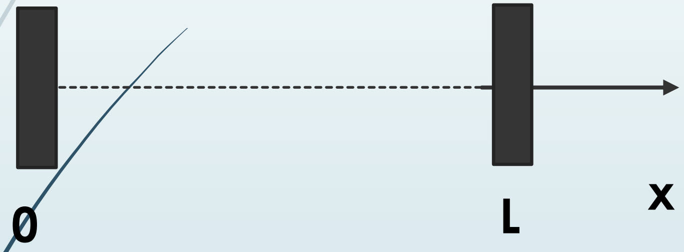
Equação de ondas (corda vibrante) (1D)

Problema específico

Ondas mecânicas em uma corda elástica de comprimento L: Ligeiramente esticada entre dois suportes sendo o eixo x ao longo da corda (violino, ...) >> F

Desprezados os efeitos de amortecimento $\rightarrow$ resistência do ar.

u(x,t) $\rightarrow$ **Deslocamento da corda**



$$\frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- *K é a constante elástica da corda*
- *M é a massa.*

$$KL\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M}{L}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{ma}{L} = \frac{kx}{L}\right) \rightarrow \frac{\left(força\ resultante\ (ma) = força\ elástica\ (\ kx)\right)}{\text{unid. de comprimento}}$$

Onde $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ é a aceleração

$$KL\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M}{L}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{F}{\rho}$$

- *F é a força*
- *ρ é a massa/unid. comp.*

Ondas mecânicas em uma corda elástica de comprimento L

Deslocamento da corda → *u(x,t)*

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$v^2 = \frac{F}{\rho}$$

- *v é a velocidade de propagação da onda*

- ***Condição de contorno***: *u(0,t) = u(L,t) = 0 para t ≥ 0.*
  (parado nas extremidades em qq momento)

- ***Condição inicial*** → *em t = 0*
- → ***u(x,0) = f(x) : posição inicial***
- → ***u'(x,0) = g(x) (u' = du/dt): velocidade inicial***

A equação

Equação de difusão de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Separação de variáveis: u(x,t) = X(x) Y(t)

Fica de exercício para vocês fazerem

$$\boldsymbol{\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2Y}{dt^2} + \lambda^2 v^2 Y = 0}$$

Dois casos

1º) Corda elástica com deslocamento inicial não nulo: $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$

2º) Corda elástica colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio $u(x,0) = 0$, mas com velocidade inicial $u'(x,0) = g(x)$.

1º Caso

Corda elástica com <u>deslocamento inicial não nulo</u>.

Condições iniciais:

<u>u(x,0) = f(x)</u> e u'(x,0) = 0

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$X(x) = (A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x).$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \lambda^2 v^2 Y = 0$$

$$Y(t) = (B_1 \sin \lambda vt + B_2 \cos \lambda vt)$$

$$u(x,t) = X(x)\, Y(t)$$

$$u(x,t) = (A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x).(B_1 \sin \lambda vt + B_2 \cos \lambda vt)$$

- ***Condição de contorno: u(0,t) = 0***

$$A_2 = 0 \rightarrow A_1 \neq 0$$

- ***Condição de contorno u(L,t) = 0***

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$u_n(x,t) = (\sin \lambda_n x).(A_n \sin \lambda_n at + B_n \cos \lambda_n vt)$$

A solução geral é a superposição (combinação linear) de todas as soluções:

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \sin \frac{n\pi}{L} x \times \left(A_n \sin \frac{n\pi v}{L} t + B_n \cos \frac{n\pi v}{L} t\right)$$

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) =$$

$$\sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi v}{L}t + B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

Aplicando-se a condição inicial: u'(x,0)= du/dt/$_0$ = 0; Primeiro calculando a derivada

$$u'(x,t) = \sum_n u_n'(x,t) = \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \frac{n\pi v}{L} \underset{t=0\,\rightarrow\,1}{\cos\frac{n\pi v}{L}t} - B_n \frac{n\pi v}{L} \underset{t=0\,\rightarrow\,0}{\sin\frac{n\pi v}{L}t}\right)$$

$$u'(x,0) = \sum_n u_n'(x,t) \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \frac{n\pi v}{L}\right) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \text{ e } B_n \neq 0$$

A solução geral é:

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t \, \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Só falta aplicar a condição: u(x,0) = f(x)

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_n u_n(x,0) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi v}{L}0 \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$f(x) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Coeficientes B_n são os coeficientes de Fourier e dependem da forma de f(x).

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Análise

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t \, \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Para um valor fixo de n a função é periódica no tempo cujo período é $T_n = 2L/nv$, pois:

$$\cos\frac{n\pi v}{L}t = \cos\omega_n t \qquad \omega_n = \frac{n\pi v}{L} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

São as frequências naturais da corda, ou seja, as frequências no qual a corda vibra livremente.

Análise (cont.)

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t \,\sin\frac{n\pi}{L}x$$

O fator dependente da posição $\boldsymbol{sin\frac{n\pi}{L}x}$ representa o padrão de deslocamento que ocorre na corda ao vibrar em uma dada frequência. $\boldsymbol{\omega_n = \frac{n\pi a}{L}}$

(Vetor de onda: k = 2π/λ)

Cada padrão de deslocamento é chamado de modo natural de vibração e é periódico em x com período → $\boldsymbol{\lambda = \frac{2L}{n}}$ que é o comprimento de onda .

Resumindo: Corda elástica

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Com extremidades presas (u(0,t) = u(L,t) = 0 para t ≥ 0);
- Com deslocamento inicial não nulo u(x,0) = f(x);
- Com velocidade inicial nula u'(x,0) = 0.

Em x: $k_n = \frac{n\pi}{L}$; $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$

Em t: $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$; $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \rightarrow T_n = \frac{2L}{nv}$

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_n B_n \cos \omega_n t \sin k_n x}$$

com

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

2º Caso 2

Corda elástica <u>colocada em movimento a partir da posição de equilíbrio</u>.

Condição inicial:

$u(x,0) = 0$ e <u>$u'(x,0) = g(x)$.</u>

- ***Condição de contorno***: *u(0,t) = u(L,t) = 0 para t ≥ 0.*
  (parado nas extremidades em qq momento)

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \longrightarrow \quad X(x) = A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad \longrightarrow \quad T(t) = B_1 \sin \lambda at + B_2 \cos \cos \lambda at$$

$$\boldsymbol{u(x,t) = (A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x).(B_1 \sin \lambda at + B_2 \cos \lambda at)}$$

Como as equações diferenciais são as mesmas e as <u>condições de contorno são as mesmas.</u>

O resultado antes de aplicar as condições iniciais são as mesmas do caso 1.

Solução geral é a superposição linear de todos $u_n(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi v}{L}t + B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

- ***Aplicando-se a primeira condição inicial***

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi v}{L}t + B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

$$u(x,0) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi v}{L}0 + B_n \cos\frac{n\pi v}{L}0\right) = 0$$

$$u(x,0) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times (B_n \times 1) = 0 \quad \rightarrow \quad B_n = 0$$

- ***$u(x,0) = 0 \rightarrow B_n = 0$***

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \left(A_n \sin\frac{n\pi v}{L}t\right)$$

- ***Aplicando-se a segunda condição inicial:***
  u'(x,0) = g(x).

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi v t}{L}$$

$$u'(x,t) = \sum_n u_n'(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi v}{L} \times \cos\frac{n\pi v t}{L}$$

- ***u'(x,0) = g(x) ou seja para t = 0.***

$$u'(x,0) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi v}{L} = g(x)$$

$$u'(x,0) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \times \frac{n\pi v}{L} = g(x)$$

- ***Reescrevendo como:***

$$g(x)\frac{L}{\pi v} = \sum_n n\, A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

- ***Chamando de:***

$$f(x) = \sum_n B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$g(x)\frac{L}{\pi v} = f(x) \quad \Rightarrow \quad n\, A_n = B_n \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

- ***Ou seja:***

$$n\, A_n = \frac{2}{L}\frac{L}{\pi v}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

Resumindo:

Corda elástica colocada em movimento:

- ***Com extremidades presas ($u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$);***
- ***A partir da posição de equilíbrio: $u(x,0)$;***
- ***Com velocidade inicial: $u'(x,0) = g(x)$;***

$$u(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi v}{L}t$$

com

$$A_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Equação de ondas (corda vibrante) (1D)

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Separação de variáveis

$u(x,t) = X(x)\ T(t)$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0$$

$$X(x)=A_1\sin\lambda x+A_2\cos\lambda x$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\lambda^2a^2T=0$$

$$T(t)=B_1\sin\lambda vt+B_2\cos\cos\lambda vt$$

***MESMAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS DOIS CASOS*:**

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ para $t \geq 0$. (parado nas extremidades em qq momento)

MUDA A CONDIÇÃO INICIAL

- ***Deslocamento inicial não nulo:***
  $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$

$$\boxed{u(x,t)=\sum_n B_n\ cos\frac{n\pi v}{L}t\ sin\frac{n\pi}{L}x}$$

$$\boxed{B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)sin\frac{n\pi}{L}x}$$

- ***Deslocamento inicial nulo →***
  posição de equilíbrio: $u(x,0) = 0$ e $u'(x,0) = g(x)$.

$$\boxed{u(x,t)=\sum_n A_n sin\frac{n\pi}{L}x\ sin\frac{n\pi v}{L}t}$$

$$\boxed{A_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^L g(x)\ sin\frac{n\pi}{L}x}$$

RESULTADO FINAL

- *Deslocamento inicial não nulo: $u(x,0) = f(x)$ e $u'(x,0) = 0$*

$$u(x,t) = \sum_n B_n \cos\frac{n\pi v}{L}t \ \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

- *Deslocamento inicial nulo → posição de equilíbrio: $u(x,0) = 0$ e $u'(x,0) = g(x)$.*

$$u(x,t) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{n\pi v}{L}t$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

O resultado final depende das condições iniciais f(x) e g(x) específicas a partir das quais serão determinados os coeficientes B_n e A_n.