Resolução das equações EDP

- Equação de Difusão (calor) (1D)
  - (2 variáveis: espaço x e tempo t)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
  - (2 variáveis: espaço x e tempo t)
- Equação de Laplace (2D)
  - (2 variáveis: espaço x e y)

Equação de Difusão de Calor – 1 D

A equação mais geral unidimensional é dada:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}_g=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = T(x,t)$$

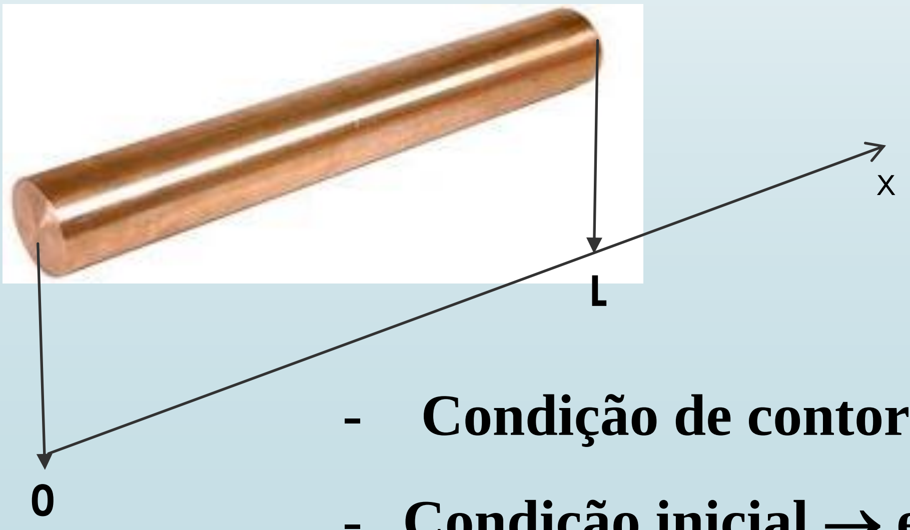
T é a temperatura;
c_p é o calor específico;
ρ é a densidade de massa;
k é a condutividade térmica;
$\dot{q}_g$ é a taxa de geração de calor.

Problema específico

Barra longa de secção reta uniforme feita de uma material homogêneo de comprimento L.

- **Material homogêneo $\rightarrow$ k é constante em x**
- **Extremidades isoladas: $\dot{q}_g = 0$;**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q}_g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



- **Condição de contorno: T(0,t) = T(L,t) = 0**
- **Condição inicial $\rightarrow$ em t = 0 $\rightarrow$ T(x,0) = f(x)**

- *Material homogêneo $\rightarrow$ k é constante em x*
- ***Extremidades isoladas:*** $\dot{q}_g = 0$;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}_g=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Difusividade (m^2/s)

$$a^2=\frac{k}{\rho c_p}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$\psi = T$

1D

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Resolução

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Método da Separação de variáveis

$T(x,t) = X(x)\ \tau(t)$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda^2 a^2 \tau = 0$$

Resolvendo as equações diferenciais

Em x:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

Em t:

$$\frac{d\tau}{dt} + \lambda^2 a^2 \tau = 0 \Rightarrow \tau(t) = Cexp(-\lambda^2 a^2 t)$$

Mas: $T(x,t) = X(x)\ \tau(t)$

$$\boldsymbol{T(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)[Cexp(-\lambda^2 a^2 t)]}$$

$$T(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)[C\exp(-\lambda^2 a^2 t)]$$

- **Condição de contorno: T(0,t) = T(L,t) = 0 (somente em x!)**

$$T(0,t) = (A \times \cos 0 + B\sin 0)[C\exp(-\lambda^2 a^2 t)] = 0$$

$$A = 0,\ B \neq 0$$

$$T(L,t) = (B\sin\lambda L)\left[C\exp(-\lambda^2 a^2 t)\right] = 0$$

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

- **Depois de aplicadas as condições de contorno**

$$T_n(x,t) = B\sin\frac{n\pi}{L}x \times \left[C\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 t\right)\right]$$

Para cada valor de n eu tenho uma solução diferente

$$T_n(x,t) = B \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\left[C\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2t\right)\right]$$

- **Portanto, a solução geral é a superposição (combinação linear) de todas as soluções:**

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\left[C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2t\right)\right]\right)$$

$$D_n = B_n \,.\, C_n$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2t\right)$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\, exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 t\right)$$

- **Finalmente aplicando a:**

Condição inicial → em t = 0 → T(x,0) = f(x)

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\, exp(0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Condição inicial para determinar as constantes D_ns

Logo:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\, exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 t\right)$$

com

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x}$$

Série de Fourier em senos!

$$\boldsymbol{D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx}$$

Portanto, para a determinação da distribuição de temperatura em uma barra longa de secção reta uniforme, feita de uma material homogêneo de comprimento L, é necessário resolver a eq. diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Resolvendo por separação de variáveis resulta que a distribuição de temperatura é dada por:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\, exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 t\right)$$

$$com \quad D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Algumas possibilidades de distribuição de temperatura inicial:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \frac{600}{L}x & para \quad 0 \le x < L/2 \\ 600 - \frac{600}{L}x & para \quad \frac{L}{2} < x \le L \end{cases}$$

Fisicamente significa que a temperatura inicial da barra cresce linearmente de 0 a 300 graus até o centro da barra (L/2) e diminui de 300 a zero do centro até o final da barra (L).

$$2)\ f(x) = 300$$

Fisicamente significa que a temperatura inicial da barra é constante e igual a 300 graus.

etc

Dependendo de f(x), encontra-se D_n e a solução da equação diferencial é:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{L}x \,.\, exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 t\right)$$