EDP

Equações diferenciais parciais

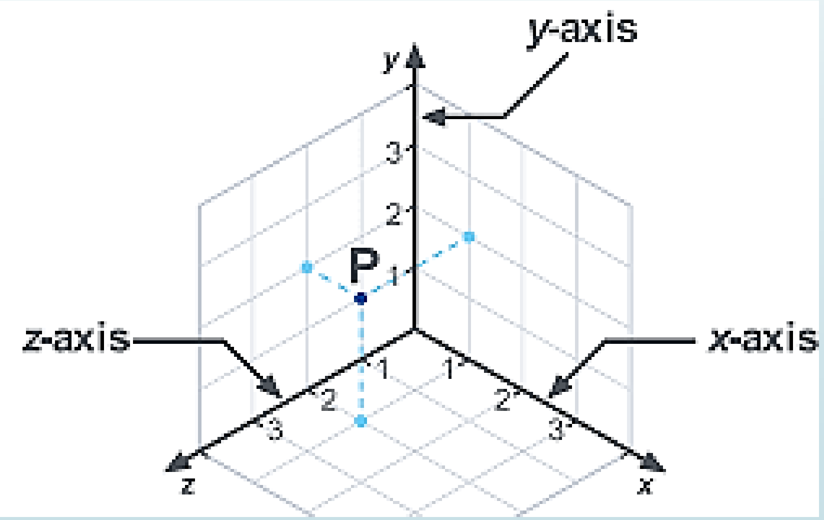
1 – Equação de Laplace

$$\nabla^2\psi = 0$$

- Eletrostática, dielétricos, correntes estáveis e magnetostática,
- Hidrodinâmica,
- Fluxo de calor,
- Gravitação.

Laplaciano
Coordenadas Cartesianas/Retangulares

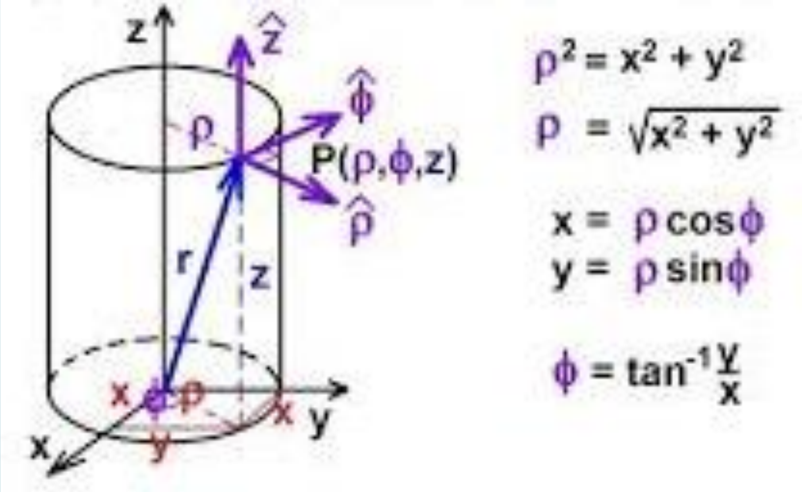
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

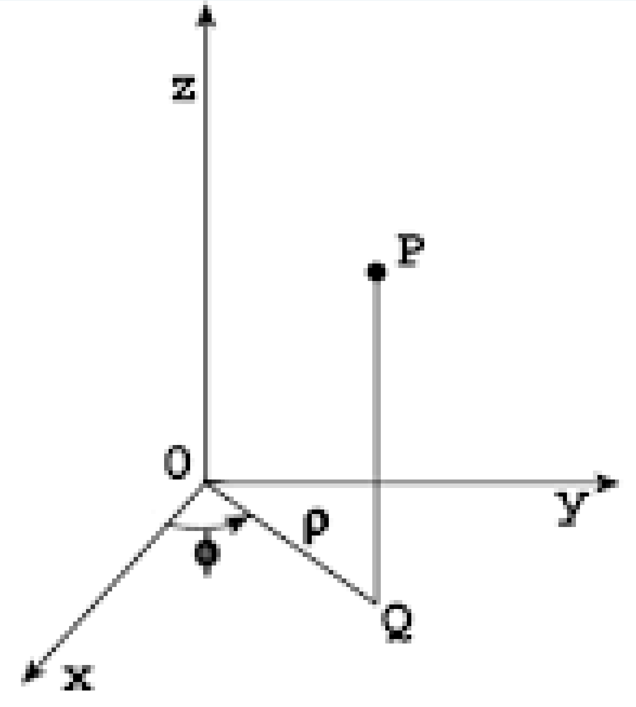


https://skisickness.com/2009/11/20/

Laplaciano
Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

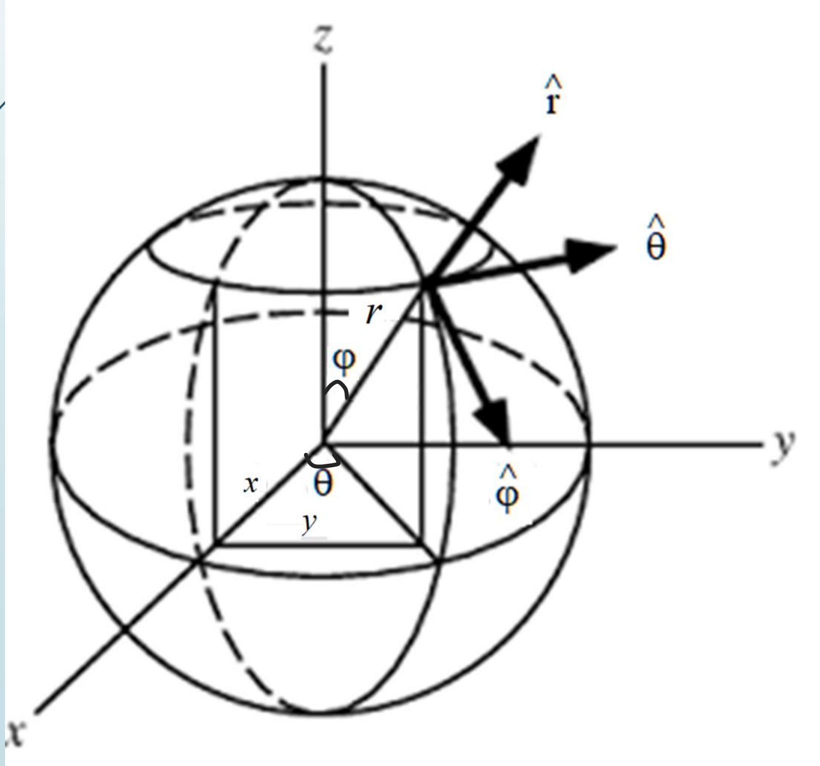


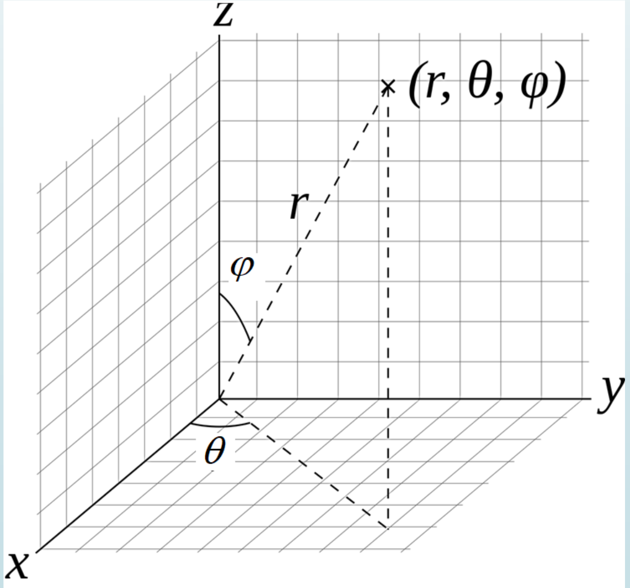


https://skisickness.com/2009/11/20/

Laplaciano
Coordenadas Esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$





- **2 – Equação de Difusão**
  - Dependente do tempo

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla^2\psi$$

  - Independente do tempo (Eq. de Helmholtz)

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$$

3 – Equação de onda

- Dependente do tempo

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

- Independente do tempo (Eq. de Helmholtz)

$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$$

- Ondas elásticas em sólidos: cordas, barras membranas,
- Som ou acústica,
- Ondas eletromagnéticas,
- Reatores nucleares.

4 – Equação de Schrödinger

- Dependente do tempo

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

- Independente do tempo

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

  - etc

Métodos de solução de EDP´s

- **Separação de variáveis (homogêneas)**
  - Série de potências: obtém-se por exemplo as funções especiais referentes a cada equação
  - Série de Fourier, transformadas de Fourier e Laplace
  - Casos especiais: redução à equações conhecidas

- **Funções de Green (não homogêneas)**

Método da Separação de variáveis

Exemplo: Equação de Helmholtz

Método da separação de variáveis

Equação de difusão

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi$$

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) \times T(t)$$

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$; coordenadas cartesianas

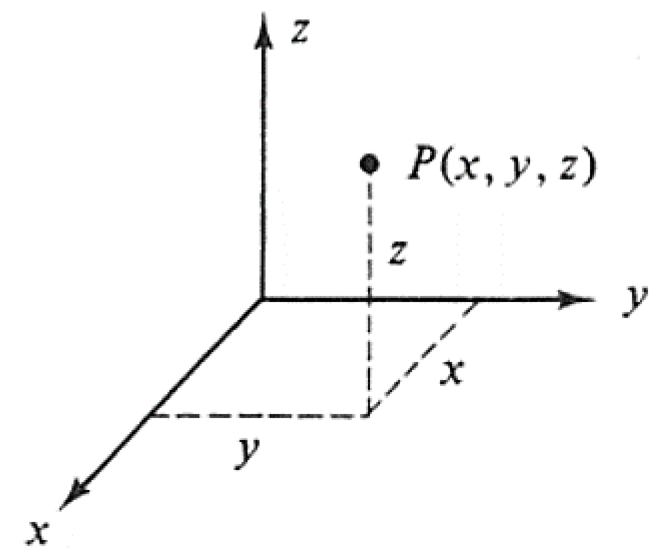
Equação de difusão

$$\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0$$

Coordenadas cartesianas, $\psi(x, y, z)$

Método da separação de variáveis

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$



$$\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0;$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

Lembrando que .... x, y e z são variáveis independentes

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0$$

$\div XYZ$

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2$$

**O comportamento de x não é determinado por z e y e vice-versa.
Para resolver é necessário assumir que cada lado deve ser igual a uma constante, a mesma:**

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = -l^2} \\ -l^2 = -\dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} - \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} - k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = l^2 - k^2 - \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} \\ \boxed{\dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = -m^2} \\ \boxed{l^2 - k^2 - \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} = -m^2} \end{cases}$$

$\rightarrow$

Finalmente a separação de variáveis em coordenadas cartesianas, para a equação de Helmholtz

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -l^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2X}{dx^2} + l^2X = 0}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2Y}{dy^2} + m^2Y = 0}$$

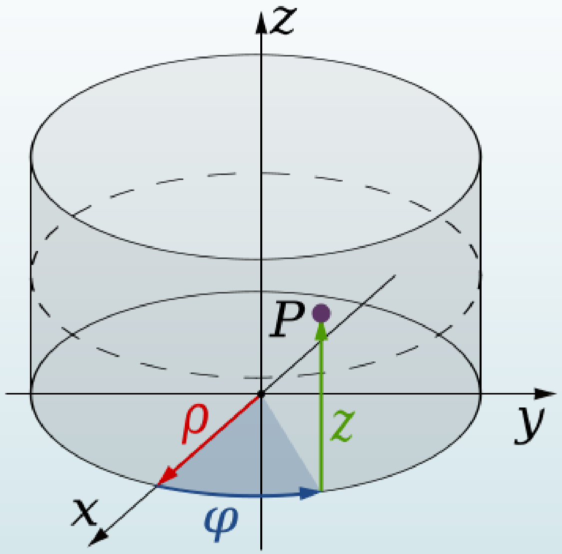
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -\,n^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2Z}{dz^2} + n^2\,Z = 0}$$

$$com\ k^2 = l^2 + m^2 + n^2$$

Coordenadas Cilíndricas circulares: ψ (ρ, φ, z)

Separação de variáveis da equação de Helmholtz: $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$

ψ (ρ, φ, z)



$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

Separação de variáveis

$$\psi(\rho,\varphi,z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\psi(\rho,\varphi,z)=P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{PZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+P\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2P\Phi Z=0$$

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{PZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+P\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2P\Phi Z=0$$

÷ **por** $\psi(\rho,\varphi,z)=P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2=0$$

Isola a parte em z do lado direito

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

Lembrando ... ρ, φ e z são variáveis independentes

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

Como ρ, φ e z são variáveis independentes:
A forma de se resolver é assumir que cada lado deve ser igual a uma constante, a mesma constante – l^2 (arbitrária):

$$\boxed{-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-l^2}$$

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2=-l^2$$

Ainda precisa separar as variáveis ρ e φ.

Somente para a equação em P(ρ) e Φ(φ) :

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+k^2=-l^2$$

Multiplica a equação por ρ^2:

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\rho^2k^2=-\rho^2l^2$$

Isola a dependência de ρ e φ :

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\rho^2k^2+\rho^2l^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{P}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)+\rho^2k^2+\rho^2l^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Novamente, as variáveis ρ e φ são independentes e igualamos cada parte a uma constante – l²:

$$\boxed{-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=m^2}$$

$$\frac{1}{P}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+(\boldsymbol{k^2+l^2})\rho^2=m^2$$

$$(\boldsymbol{k^2+l^2})=\boldsymbol{n^2}$$

$$\frac{1}{P}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+(n^2\rho^2-m^2)=0 \xrightarrow{\times \boldsymbol{P}} \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+(n^2\rho^2-m^2)P=0$$

Finalmente a separação de variáveis em coordenadas cilíndricas resulta nas 3 equações:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = l^2$$

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = m^2$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

$$Com\ (k^2+l^2) = n^2$$

Equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

↓

Equação de Bessel

↓

Solução por série de potência

↓

Geram as funções de Bessel

Funções Especiais

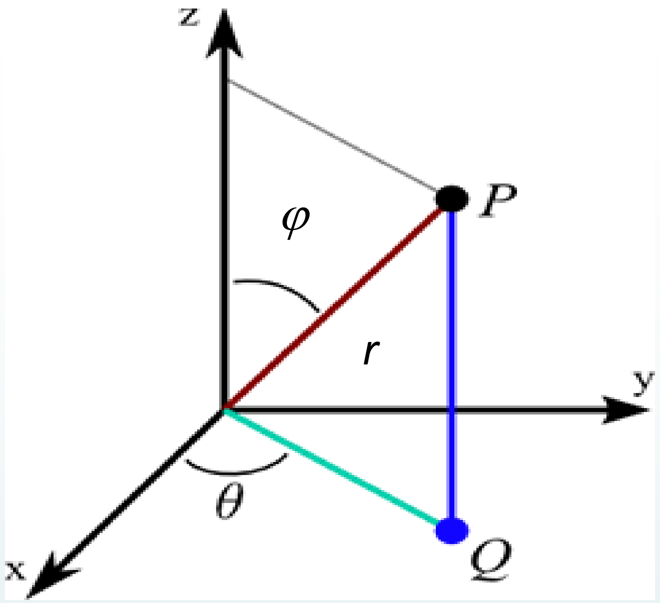
Coordenadas Polares Esféricas: ψ (r, θ, φ)

Separação de variáveis da equação de Helmholtz:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

$\psi\,(r,\ \theta,\ \varphi)$

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0;$$



$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2 sen\theta}\left[sen\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Separação de variáveis: $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi)$

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi^2}{d\varphi^2} = -k^2$$

Finalmente a separação de variáveis em coordenadas esféricas resulta nas 3 equações:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(Q - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

Equação Associada de Legendre

Solução por série de potência

↓

Geram os Polinômios de Legendre

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{Q}{r^2}\right)R = 0$$

Equação de Bessel Esférica

Solução por série de potência

↓

Geram ad Funções de Bessel Esféricas

$k^2 > 0$, $Q = l(l+1)$

l inteiro e positivo

Resolução das equações
(Próxima aula)

- Equação de Difusão (calor) (1D)
  - (2 variáveis: espaço x e tempo t)
- Equação de ondas (corda vibrante) (1D)
  - (2 variáveis: espaço x e tempo t)
- Equação de Laplace (2D)
  - (2 variáveis: espaço x e y)