Instituto de Física da Universidade de São Paulo

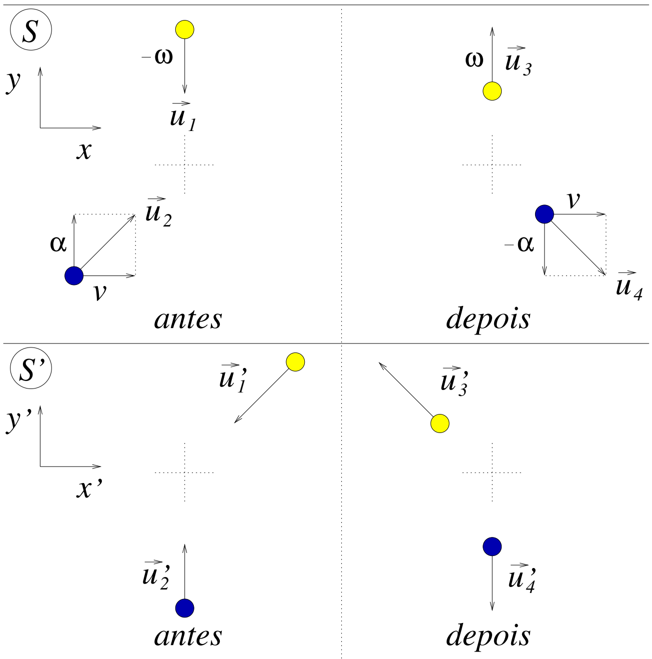
Física II - 4300112
13ª Lista de exercícios - Relatividade Restrita - 2013

1. Considere duas velocidades relativísticas u_a, u_b, e uma terceira velocidade u_d que se relaciona com as duas anteriores através de

$$u_d = \sqrt{u_a^2 + \left(\frac{u_b}{\gamma_a}\right)^2}, \quad \text{onde} \quad \gamma_a = \gamma(u_a) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_a^2}{c^2}}}.$$

Mostre que $\gamma(u_a)\gamma(u_b) = \gamma(u_d)$.

2. Lewis e Tolman. Considere duas partículas A e B, com a mesma massa de repouso m_0, participando de uma colisão elástica conforme a figura abaixo.



(a) Obtenha as componentes das velocidades $\vec{u}'_1$, $\vec{u}'_2$, $\vec{u}'_3$ e $\vec{u}'_4$ no referencial S' em função das variáveis ω, v e α indicadas na figura, e do fator de Lorentz $\gamma_v = \gamma(v)$.

Assuma que, qualquer que seja a definição do momento linear $\vec{p}$, no sistema S a soma das componentes na direção y antes e depois da colisão é igual a zero.

(b) Com a definição newtoniana do momento linear, $\vec{p}(\vec{u}) = m_0\vec{u}$, obtenha α em função de ω e v. A soma dos momentos lineares na direção y antes e depois da colisão se conserva em S'? (Note que $v \neq 0$.)

(c) Repita o item anterior com a definição relativística do momento linear. **Sugestão:** escreva $\alpha = \frac{\sigma}{\gamma_v}$ (onde σ é uma velocidade a ser determinada) e use a relação obtida no exercício 1.

R: (a) $\vec{u}'_1 = (-v, -\frac{\omega}{\gamma_v}, 0)$, $\vec{u}'_2 = (0, +\gamma_v\alpha, 0)$, $\vec{u}'_3 = (-v, +\frac{\omega}{\gamma_v}, 0)$, $\vec{u}'_4 = (0, -\gamma_v\alpha, 0)$;
(b) $\alpha = \omega$, não; (c) $\alpha = \omega/\gamma_v$, sim.

3. Determine a quantidade de trabalho que deve ser fornecida a um elétron, inicialmente em repouso com massa $m_0 = 0,5$ MeV$/c^2$, para que ele atinja as seguintes velocidades:

(a) 0,60 c,

(b) 0,98 c,

(c) 0,99999 c.

R: (a) 0,125 MeV; (b) 2,0126 MeV; (c) 111,304 MeV.

4. Considere uma partícula movendo-se relativisticamente a uma velocidade u.
Obs: 1 GeV = 10^3 MeV.

(a) Mostre que u difere da velocidade da luz c por

$$\Delta u = c - u \approx \frac{c}{2}(\frac{m_0c^2}{E})^2,$$

onde E é a energia total.

Esta é uma aproximação útil para altas energias. Encontre esta quantidade para um elétron cuja enegia cinética é:

(b) 250 MeV,

(c) 50 GeV.

Interprete o significado das velocidades obtidas.

R: (b) 600 m/s; (c) 1,5 cm/s.

5. Mostre que a expressão relativística para a energia cinética pode também ser escrita como:

$$K = (\frac{\gamma^2}{1+\gamma})m_0u^2 \qquad \text{ou} \qquad K = \frac{p^2}{m_0(1+\gamma)}.$$

Observe que estas expressões reproduzem a expressão da mecânica clássica para $\gamma = 1$.

6. Encontre o fator de Lorentz γ e o parâmetro de velocidade β para uma partícula com energia cinética $K = 10$ MeV se a partícula é:

(a) um elétron ($m_0 \approx 0,5$ MeV/c^2),

(b) um próton ($m_0 \approx 1$ GeV/c^2).

R: (a) $\gamma = 21$, $\beta = 0,9989$; (b) $\gamma = 1,01$, $\beta = 0,14$.

7. Duas partículas idênticas, cada uma com massa de repouso m_0, movendo-se com velocidades iguais mas opostas de 0,60 c no referencial do laboratório, colidem e "grudam" formando uma única partícula de massa de repouso M_0. Expresse M_0 em termos de m_0.

R: $M_0 = 2,5m_0$.

8. Um próton (massa de repouso m_0) em um acelerador de partículas adquire uma energia cinética K, sendo posteriormente guiado a colidir com um segundo próton "parado" no acelerador. A colisão é tal que a soma de todas as energias iniciais (cinéticas e de repouso dos dois prótons) é suficiente para a criação de ao menos um par de próton-antipróton, não necessariamente em repouso no laboratório. Em outras palavras, trata-se de uma colisão completamente inelástica.

(a) Mostre que ϵ, definida como a energia disponível para a criação de novas partículas, é dada por

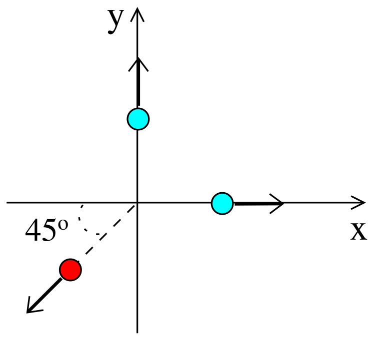
$$\epsilon = 2m_0c^2\sqrt{1 + (\frac{K}{2m_0c^2})}\,.$$

(b) Qual o valor de ϵ quando prótons com energia cinética de 100 GeV colidem desta maneira?

(c) Qual é o valor da energia cinética K que o próton incidente deve atingir para que se tenha $\epsilon = 100$ GeV?

R: (b) 13,825 GeV; (c) 5329 GeV.

9. Uma partícula e sua anti-partícula, ambas com massa de repouso m_0 tal que $m_0c^2 = 2,4$ MeV colidem, aniquilando-se mutuamente, e gerando 3 fótons (partículas de massa nula e energia $hf = hc/\lambda$, onde f é a frequência, λ o comprimento de onda da radiação, e h a constante de Planck). A anti-partícula se desloca na direção y. A velocidade inicial da partícula em um dado referencial S é $v_i = 0,6\ c$ na direção x. Um dos fótons é emitido nesta mesma direção (no sentido positivo de x), outro na direção y (também no sentido positivo), ambos com mesmo comprimento de onda λ, e o terceiro fóton é emitido na diagonal (a 45° com relação ao eixo x), na direção do quadrante de x e y negativos (figura).



Utilizando sempre o referencial S:

(a) Calcule a energia (E_1) da partícula e seu momento linear (p_1).

(b) Determine as componentes x e y do momento linear p_2 da anti-partícula e sua energia E_2.

(c) Determine a energia total dos fótons emitidos.

(d) Determine a energia de cada fóton.

(e) Calcule a variação da energia cinética entre os estados inicial e final.

Obs: Dê suas respostas em unidades de MeV e MeV/c, conforme o caso. Utilize $\sqrt{2} \approx 1,4$ para facilitar as contas.

R: (a) $p_1 = 1,8$ MeV/c e E_1 =3 MeV; (b) $p_2 = 1,8$ MeV/c $\hat{y}$ e E_2 =3 MeV; (c) $E_f = 6$ MeV; (d) $f_{f1}c = p_{f2}c = 2,5$ MeV; (e) 4,8 MeV.