Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Física II - 4300112

10ª Lista de exercícios - Introdução à Mecânica Estatística - 2013

1. Dada a distribuição de Maxwell para as velocidades,

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2}, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{m}{2kT},$$

obtenha os resultados para as velocidades características:

(a) $v_{qm}^2 = \int_0^\infty v^2\, F(v)dv = \frac{3kT}{m}$,

(b) $< v >= \int_0^\infty v\, F(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$,

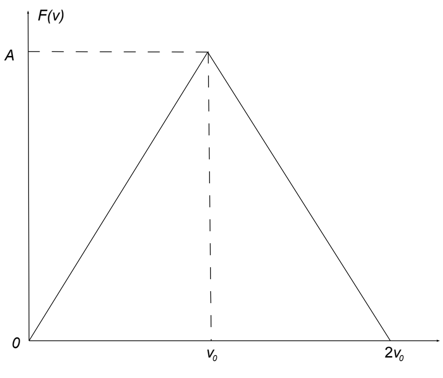
(c) $v_P = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ tal que $\left[\frac{dF(v)}{dv}\right]_{v=v_P} = 0$.

Dica para o item (a): lembre-se que $\int_0^\infty F(v)dv = 1$. Multiplique ambos os lados por $\alpha^{-3/2}$ e derive tudo com relação a α.
Dica para o item (b): lembre-se que v dentro da integral pode ser escrito como $-\frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dr}(-\alpha v^2)$. Use a integração por partes para chegar ao resultado.

2. (Moysés) Considere un gás hipotético para o qual a função $F(v)$ de distribuição de velocidades tivesse a forma indicada na figura em baixo. Calcule em função de v_0:

(a) A constante de normalização A.

(b) Os valores de $< v >$, v_p e v_{qm} para esta distribuição.



R: (a) $A = \frac{1}{v_0}$; (b) $< v >= v_p = v_0$, $v_{qm} = \sqrt{\frac{7}{6}}v_0$.

3. (Moysés) Considere um gás ideal em equilíbrio térmico á temperatura T. Ache:

(a) A função de distribuição em energia $F(E)$, tal que $F(E)dE$ é a fração das moléculas com energia entre E e $E + dE$.

(b) Desenhe um gráfico de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dE}$ vs E. O que acontece para energias muito altas?

(c) Calcule a energia média $< E >$, comparando o resultado com $\frac{1}{2}mv_{qm}^2$.

(d) Calcule a energia mais provável E_p, comparando o resultado com $\frac{1}{2}mv_p^2$.

R:

(a) $F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{E}}{(kT)^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{E}{kT})$;

(b) $< E >= \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{qm}^2$;

(c) $E_p = \frac{1}{2}kT \neq \frac{1}{2}mv_p^2 = kT$.

4. Um certo gás com N partículas tem a seguinte função de distribuição de velocidades:

$$p(v) = \begin{cases} \frac{c}{v_0}v & 0 \le v \le v_0 \\ c & v_0 \le v \le 2v_0 \\ \frac{c}{v_0}(3v_0 - v) & \le 2v_0 v \le 3v_0 \\ 0 & v \ge 3v_0 \end{cases}$$

onde c e v_0 são constantes.

(a) Expresse c em termos de N e v_0.

(b) Quantas moléculas têm velocidades entre $1.5v_0$ e $2v_0$?

(c) Espresse a velocidade média das moléculas em termos de v_0.

(d) Encontre a velocidade quadratica média.

R: (a) $c = \frac{N}{2v_0}$; (b) $\frac{N}{4}$; (c) $< v >= \frac{3}{2}v_0$.

5. Um gás ideal se encontra numa centrifugadora de raio r que gira com frequência angular ω. Suponha que a força exercida sobre o gás é $F = m\omega^2 r$. Mostre que a densidade do gás é proporcional a $\exp(\frac{m\omega^2 r^2}{2KT})$.