# Lista 1
# Os vários tipos de números e as suas propriedades básicas

Victor Saliba *
André Salles de Carvalho †

Data de Entrega: 2 de Setembro de 2022

Primeiramente, sejam bem-vindos e bem-vindas ao CCM! Apresento-lhes a primeira lista de exercícios de Matemática I desse semestre, cujo título é uma homenagem ao prólogo do excelentíssimo livro *Calculus*, de Michael Spivak. Talvez um aviso prévio seja necessário: essa lista deve ser a mais difícil dentre aquelas que serão enviadas ao longo do semestre (e também a mais longa). Explicarei melhor. O principal objetivo dessa lista é desenvolver em cada aluno a maturidade necessária para o curso de Matemática I. Muitas vezes, em um exercício, vocês irão se deparar com o famoso par de palavras “Prove que” (ou “Mostre que”). Em um primeiro momento, elas podem parecer assustadoras e intimidadoras, mas não tenham medo, o exato propósito dessa lista é fazer com que vocês adquiram as ferramentas básicas que serão necesárias para enfrentar essas questões. (Isso não significa que vocês não irão encontrar essas palavras nessa lista.) É claro que essas ferramentas não serão suficientes para resolver qualquer exercício de Matemática I. Mas isso faz parte do aprendizado sem limites, e é aí que está a graça! Com essa finalidade em mente, essa lista foi preparada com bastante cuidado, de forma que em cada problema uma técnica ou abordagem diferente é utilizada. O terreno escolhido para esse treinamento é o dos números reais. Assim, serão abordados problemas sobre as propriedades básicas desses números, conceitos essenciais como o de conjunto e função, e, principalmente, diferentes técnicas de demonstração (essas, sim, serão as ferramentas mais importantes na sua jornada).

*E-mail: victorsaliba13@usp.br; WhatsApp: (12) 99145-9087.
†E-mail: andre@ime.usp.br.

**Instruções:**

1. Essa lista está dividida em três grupos de exercícios, numerados de I a III.
2. Não é necessário resolver todos os exercícios! Tente resolver aqueles que você achar mais interessantes. Se você não possui preferência, ou não achou nenhum aparentemente divertido, tente resolver os exercícios recomendados primeiro. Esses exercícios estão indicados na nota de rodapé de cada seção.
3. Escolha dois exercícios do grupo I, três exercícios do grupo II e três exercícios do grupo III entregar **ou** entregue "apenas" os exercícios 4 e 17.
4. Os exercícios não estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Todavia, serão concedidos três símbolos distintos para os exercícios "interessantes": $\delta$ para os exercícios particularmente difíceis (que geralmente precisam de algum truque não tão óbvio para serem resolvidos), $\pi$ para os problemas difíceis (que requerem tanto um truque, quanto um cuidado maior na resolução) e † para aqueles…
5. Não desanime se não conseguir resolver alguns exercícios ou cometeu algum erro na resolução, erros fazem parte do processo de aprendizado e quanto mais tempo gastar tentando solucionar um exercício, mais você irá aprender com ele.
6. Se houver dúvidas, sugestões ou quiser alguma (outra) dica, basta nos contactar.
7. A colaboração é não apenas permitida, mas encorajada. Caso tenha precisado de ajuda, por favor, dê o devido crédito, mencionando nomes.
8. Por último, mas definitivamente o mais importante, divirta-se!

## Exercícios:

### Grupo I[1]

**Exercício 1.** Seja $A$ um conjunto. Dadas duas funções $f, g : A \to \mathbb{N}$, defina a soma $f + g : A \to \mathbb{N}$ e o produto $f \cdot g : A \to \mathbb{N}$, e dê um significado que lhe pareça razoável para a afirmação $f \leq g$. Dado $X \subset A$, a função característica de $X$ é definida como a função $\xi_X$ dada por $\xi_X(x) = 1$, se $x \in X$, e $\xi_X(x) = 0$, se $x \notin X$. Prove que:

(a) $\xi_{X\cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y$;

(b) $\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X\cap Y}$. Em particular, $\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y$ se, e somente se, $X \cap Y = \emptyset$.;

(c) $X \subset Y$ se, e somente se, $\xi_X \leq \xi_Y$ (essa é uma forma de se certificar que sua definição é boa);

(d) $\xi_{A\setminus X} = 1 - \xi_X$.

**Exercício 2.** Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. Prove que

$$Y \setminus \left( \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X \right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}} Y \setminus X \quad \text{e} \quad Y \setminus \left( \bigcap_{X\in\mathcal{F}} X \right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} Y \setminus X.$$

Dê exemplos das duas igualdades.

**Exercício 3** ($\delta$)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ com mdc}(p, q) = 1 \end{cases}$$

Desenhe o gráfico da função $f$ da melhor forma que puder (não desenhe pontos aleatórios no papel; considere primeiro os números racionais com $q = 2$, depois aqueles com $q = 3$, etc.).

**Exercício 4** (†)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(x\cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Suponha que $f$ não é identicamente nula e prove que:

(a) $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

(b) $f(x) = x$ para todo $x$ racional. (Essa parte é delicada. Primeiro, prove por indução que $f(n) = n$ para todo natural $n$. Em seguida, estenda esse resultado para os inteiros e então…)

[1]Exercícios recomendados: 1, 2, 3 e 6.

(c) $f(x) > 0$ se $x > 0$.

(d) $f(x) > f(y)$ se $x > y$.

(e) $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Dica: Use o fato do exercício 15.)

**Exercício 5.** Seja $f : X \to X$ uma função injetora tal que $f(X) \neq X$. Tomando $x \in X \setminus f(X)$, prove que os elementos $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ são dois a dois distintos.

**Exercício 6 ($\pi$).** Dado um conjunto $X$, denote por $\mathrm{id}_X$ a função identidade de $X$. Prove que:

(a) Uma função $f : X \to Y$ é injetora se, e somente se, existe $h : Y \to X$ tal que $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

(b) Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora se, e somente se, existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(c) Se $f : X \to Y$ e $g, h : Y \to X$ são tais que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $h \circ f = \mathrm{id}_X$, então $g = h$. (Dica: A composição de funções é associativa.)

(d) Uma função $f : X \to Y$ bijetora admite uma inversa $f^{-1}$ e a sua inversa é única.

## Grupo II[2]

**Exercício 7.** A função módulo é definida por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Prove que:

(a) $|x| = |-x|$. (Uma ideia seria, primeiramente, provar esse fato para $x \geq 0$. Feito isso, para $x \leq 0$ a igualdade segue-se imediatamente, certo?)

(b) $-a \leq x \leq a$ se, e somente se, $|x| \leq a$.

(c) $|x+y| \leq |x| + |y|$. (Dica: O resultado do item anterior não está aqui por acaso.)

**Exercício 8.** Considere os itens abaixo:

(a) A soma de dois números racionais é sempre racional. A soma de dois números irracionais é sempre irracional? Prove ou dê um contra-exemplo.

(b) Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, definimos $A + A = \{x + y : x, y \in A\}$. Seja $\mathbb{I} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$. Prove que $\mathbb{I} + \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

**Exercício 9.** Prove que se $0 < x < y$, então

$$x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

Note que a desigualdade $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ é verdadeira quando $x, y \geq 0$. Na verdade…

**Exercício 10** (†)**.** Sejam $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Neste exercício iremos generalizar o fato do exercício anterior provando que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

(a) Use o princípio da indução para provar a desigualdade acima no caso em que $n = 2^k$.

(b) Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números positivos fixados e $A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ a média aritmética destes números. Suponha que a desigualdade acima valha para $n+1$ números reais positivos quaisquer; aplicando-a para $x_1, \ldots, x_n, A$, conclua que a desigualdade vale também para quaisquer $n$ números reais positivos.

[2] Exercícios recomendados: 7, 8, 9, 11, 13 e 15.

(c) Mostre que, dado um número natural $n$, existe um natural $k$ tal que $n \leq 2^k$.

(d) Combinando os itens anteriores, prove a desigualdade para todo $n$ natural.

**Exercício 11.** Sejam $A, B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais tais que, se $x \in A$ e $y \in B$, então $x \leq y$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Mostre ainda que $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podem-se obter $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

**Exercício 12 ($\delta$).** Uma sequência de intervalos é uma função que associa a cada natural $n$ um intervalo $I_n$. Dê exemplo de uma sequência de intervalos fechados ilimitados cuja interseção seja vazia e de uma sequência de intervalos abertos limitados cuja interseção seja vazia.

**Exercício 13.** Prove que $\inf \left\{ \frac{n^3}{n^4+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

**Exercício 14 ($\pi$).** Prove que $\inf \left\{ \frac{2^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$. (Dica: Passeie pela lista e tente encontrar algo que te ajude. Se encontrá-la, essa desigualdade ainda não resolve o exercício, mas, a partir dela, pense em algo que iria resolver o problema.)

**Exercício 15 ($\delta$).** Prove que o conjunto $\mathbb{Q}$ é *denso* em $\mathbb{R}$, isto é, dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número racional $r$ tal que $|r - x| < \varepsilon$. (Dica: Siga para o próximo exercício.)

**Exercício 16 ($\pi$).** Resolva os itens a seguir, preferencialmente na ordem em que são apresentados:

(a) Mostre que, se $r$ é um racional não nulo e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $r\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $0 < \alpha < \varepsilon$. (Dica: você conhece algum irracional positivo? O cardápio é bem grande, mas escolha um, pois irá precisar dele.)

(d) Prove que, se $(x, y) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo tal que $y - x > \alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ positivo, então existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $x < z\alpha < y$.

(e) Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

(f) Usando argumentos análogos, conclua que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

**Exercício 17 (†).** Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}$ chama-se um *subgrupo aditivo* quando $0 \in G$ e $x, y \in G$ implica que $x - y \in G$. Seja $G \subset \mathbb{R}$ um subgrupo aditivo tal que $G \neq \{0\}$. Prove que:

(a) Se $g \in G$ e $m \in \mathbb{Z}$, então $mg \in G$.

(b) $G^+ = \{g \in G : g > 0\} \neq \emptyset$.

(c) Se $\inf G^+ = 0$, então $G$ é denso em $\mathbb{R}$. (Caso você já tenha provado que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$, não é preciso pensar muito para resolver esse item.)

(d) Se $\inf G^+ = a > 0$, então $a \in G^+$ e $G^+ = \{0, a, -a, 2a, -2a, \ldots\}$. (Esse é o item complicado... Sugestões? Bom, para a primeira parte, suponha, por absurdo, que o resultado não vale e tome dois elementos $g, h \in G^+$ distintos entre $a$ e $a + \frac{a}{2}$. Onde está o absurdo? Para a segunda parte, note que todo $g \in G$ se escreve como $g = aq + r$ com $q$ inteiro, sendo $0 \leq r < a$. Agora, observe que $r = g - aq$ e então...)

(e) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, os números reais da forma $m + n\alpha$, com $m, n$ inteiros, constituem um subgrupo aditivo denso em $\mathbb{R}$.

## Grupo III[3]

**Exercício 18.** Use indução para demonstrar os seguintes fatos:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural $n$;

(b) $n! > 2^n$ para todo natural $n \geq 4$;

(c) Se $x \geq -1$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo natural $n$.

**Exercício 19.** Prove que, dados dois números reais $a, b$ e um número natural $n$, tem-se

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

(Dica: Não é necessário um argumento por indução, basta saber o que é uma soma telescópica...)

**Exercício 20.** Resolva os itens a seguir, preferencialmente na ordem em que são apresentados:

(a) Prove que
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(b) Se $a$ e $b$ são números reais quaisquer e $n$ é um número natural, prove que

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}b^j.\end{aligned}$$

**Exercício 21.** Considere números reais estritamente positivos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tais que, para todo natural $n$ tem-se $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}$. Prove que $a_n \leq \frac{a_1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que para todo $\varepsilon > 0$ existe um natural $n$ tal que $a_n < \varepsilon$.

**Exercício 22.** Considere a definição recursiva de $a^n$: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Prove, por indução, que
$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

(Tome cuidado! Use indução apenas sobre $n$, ou então apenas sobre $m$, mas não faça os dois ao mesmo tempo. Faça uma dessas tarefas primeiro, e depois faça a outra.)

**Exercício 23.** Seja $X$ um conjunto com $n$ elementos. Use indução para provar que o conjunto das bijeções (ou permutações) $f : X \to X$ tem $n!$ elementos.

[3] Exercícios recomendados: 18, 22, 23, 24 e 26.

**Exercício 24** ($\delta$)**.** Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida pondo-se $s(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Prove que, para todo natural $p$ vale que $s(2^p) \geq \frac{p}{2}$. Conclua que o conjunto $\{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitado superiormente. (Dica: Note que $s(2^{p+1}) = s(2^p) + \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k}$ e então...)

**Exercício 25** ($\delta$)**.** *O Princípio da Boa Ordenação* nos diz que todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo. Prove o princípio da indução como uma consequência do princípio da boa ordenação.

O exercício a seguir é uma forma alternativa de definir números naturais.

**Exercício 26.** Um conjunto $A$ de números reais é chamado de *indutivo* se $1 \in A$ e $k \in A$ implica que $k + 1 \in A$. Um número real $n$ é chamado de número natural se $n$ pertence a todo conjunto indutivo. Prove que:

(a) $1$ é um número natural.

(b) $k + 1$ é um número natural se $k$ é um número natural.

**Exercício 27** ($\pi$)**.** Considere o jogo da *Torre de Hanoi*: há três pinos, com $n$ anéis concêntricos de diâmetros externos decrescentes empilhados em um dos pinos (veja a figura a seguir). Um anel que está no topo da pilha pode se mover de um pino para outro, desde que ele não seja colocado em cima de um anel menor. O objetivo do jogo é, então, mover todos os anéis para um outro pino. Prove que é possível vencer o jogo com "apenas" $2^n - 1$ movimentos, e que o jogo não pode ser vencido com uma quantidade menor de movimentos.