Lista de Exercícios I

① Considere a energia potencial

$$U(x) = -U_1 \left[\left(\frac{x}{x_1} \right)^3 - \left(\frac{x}{x_1} \right)^2 \right] ,$$

onde U_1 e x_1 s ao constantes positivas.

(a) Calcule os pontos de máximo e de mínimo da energia potencial;

(b) Expanda a energia potencial entorno do mínimo até terceira ordem;

(c) Para quais valores de x a aproximação harmônica é válida?

(d) Qual a equação de movimento de uma partícula sujeita à energia potencial que está sendo considerada aqui?

(e) Dada a ausência de forças não conservativas, resolva a equação $dE/dt = 0$ (com E a energia total da partícula) e mostre que uma das equações obtidas é a equação de movimento do item anterior;

(f) Obtenha a equação de movimento entorno do mínimo expandindo a força encontrada e a energia potencial; mostre que os dois resultados são equivalentes;

(g) Qual seria a equação de movimento se expandíssemos a energia potencial entorno do máximo? Discuta o resultado obtido.

② Um corpo de massa m está conectado a uma mola de constante elástica k e comprimento de repouso ℓ.

(a) Qual a equação de movimento?

(b) Resolva a equação de movimento com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.

③ Considere um oscilador harmônico simples em movimento com trajetória $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

(a) Mostre que é sempre possível escrever

$$C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi) ,$$

calculando explicitamente A e $\tan\varphi$.

Calcule:

(b) A energia total do sistema;

(c) Quanto vale a frequência de oscilação?

(d) Definimos a média temporal de uma função periódica durante um período de oscilação como

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)\,,$$

onde T é o período de oscilação. Calcule as médias

$$\overline{\cos(\omega t)},\ \overline{\sin(\omega t)},\ \overline{\cos^2(\omega t)},\ \overline{\sin^2(\omega t)}$$

calculando explicitamente as integrais;

(e) Repita o cálculo do item (d) usando a linearidade da integral e considerando as funções trigonométricas escritas em termos de exponenciais complexas;

(f) Usando os resultados obtidos no item (d), calcule a energia total média durante um período de oscilação.

④ Considere um cilindro de massa M, raio R e comprimento L. Duas molas (ambas de constante elástica k) estão conectadas ao eixo do cilindro, de acordo com a figura 1. Usando a ausência de forças não conservativas, calcule a equação de movimento quando o cilindro está em rotação sem deslizar na superfície.

⑤ Considere duas massas m_1 e m_2 conectadas por uma mola de constante elástica k e comprimento de repouso ℓ. O sistema está em um plano sem atrito, e a dinâmica pode ser considerada como sendo unidimensional.

(a) Considerando um referencial inercial apropriado, escreva as equações de movimento para os dois corpos;

(b) Usando os resultados do item (a), escreva as equações de movimento da coordenada do centro de massa e da coordenada relativa;

(c) Resolva as equações diferenciais do item (b);

(d) Escreva a energia total do sistema, e verifique que $dE/dt = 0$.

⑥ Resolva a equação diferencial

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F_0\,,$$

onde a, b, c e F_0 são constantes. Qual a solução da equação homogênea associada? Qual a solução particular? Suponha que, no instante $t = 0$, $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

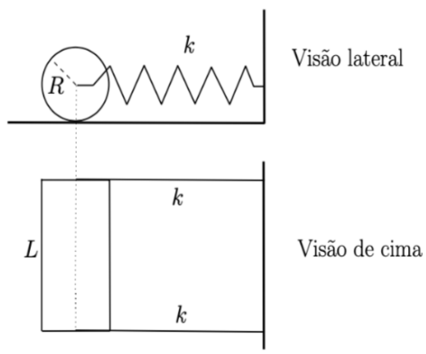

Figure 1: Cilindro conectado a molas.