Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Eletromagnetismo (4300372-1)

Professor: Fernando S. Navarra
navarra@if.usp.br
Monitor: Guilherme R. Germano
guilherme.germano@usp.br

4ª Lista: Eletrodinâmica
Soluções

1 (a) O campo produzido pelo fio é $B = \mu_0 I\hat{\phi}/2\pi s$, de modo que o fluxo é;

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_s^{s+a} \frac{1}{s} a ds = \boxed{\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{s+a}{s}\right)}$$

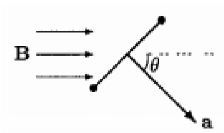
(b) Se o loop se afasta do fio com velocidade v, então $ds/dt = v$, e a força eletromotriz é:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{s+a}{s}\right) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\frac{1}{s+a}\frac{ds}{dt} - \frac{1}{s}\frac{ds}{dt}\right) = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi s(s+a)}}$$

O campo magnético do fio aponta para fora da página, quando o loop é afastado, o campo diminui de intensidade. A corrente gerada no loop tende a compensar esse efeito, produzindo um campo pra fora da página. Assim, a corrente gerada flui no sentido anti-horário.

(c) Como o campo gerado pelo fio não varia na direção horizontal, o fluxo é constante nesse caso, e:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0.}$$

2 

A figura mostra o arranjo visto de cima. Como o campo é uniforme, sendo $\mathbf{A}$ um vetor perpendicular ao loop cujo módulo é sua área, o fluxo é dado por:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = Ba^2 \cos\theta.$$

Com $\theta = \omega t$, temos:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = Ba\sin(\omega t)\omega = \boxed{Ba\omega^2\sin(\omega t)}$$

3 O fluxo no loop interno ao solenóide é:

$$\Phi = \pi\frac{a^2}{4}B = \frac{\pi a^2 B_0\cos(\omega t)}{4}$$

A força eletromotriz induzida é então:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi a^2 B_0\omega}{4}\sin(\omega t).$$

Assim, a corrente induzida é:

$$I = -\frac{\varepsilon}{R} = \boxed{\frac{\pi a^2 B_0 \omega}{4R}\sin(\omega t)}$$

4 (a) Sabemos da lista anterior que o campo gerado pelo loop circular grande sobre seu eixo é:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}.$$

Então o fluxo através do loop pequeno de área $A = \pi a^2$ é:

$$\Phi_1 = BA = \boxed{\frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}}$$

(b) O campo de um dipolo é:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\theta}),$$

onde $m = I\pi a$. Integrando sobre o pedaço de esfera delimitado pelo loop grande e centrado no loop pequeno:

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi a^2}{r^3}\int(2\cos\theta)(r^2\sin\theta d\theta d\phi) = \frac{\mu_0 I a^2}{2r}2\pi\int_0^{\theta'}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I a^2 \pi}{2r}\sin^2\theta',$$

onde, pela geometria do problema, $r = \sqrt{b^2+z^2}$ e $\sin\theta' = b/r$. Assim, obtemos o mesmo fluxo do item (a):

$$\boxed{\Phi_2 = \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}}$$

(c) Pela definição, as indutâncias mútuas são $M_{12} = \Phi_1/I_2 = \Phi_1/I$ e $M_{21} = \Phi_2/I_1 = \Phi_2/I$. Dividindo os resultados anteriores por I obtemos:

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}}$$

---

5 O campo do solenóide é $B = \mu_0 n I$, então o fluxo através de uma volta, de área πR^2, é:

$$\Phi = BA = \mu_0 n I \pi R^2$$

Num comprimento l temos nl voltas, então o fluxo total é $\mu_0 n^2 I \pi R^2 l$.

A auto-indutância L é definida por $\Phi = LI$, então, a autoindutância por unidade de comprimento nesse caso é:

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 \pi R^2}$$

---

6 O campo elétrico no espaço é

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \frac{It}{A\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \frac{It}{\epsilon_0 \pi a^2}\hat{\mathbf{z}},$$

a densidade de corrente de deslocamento é então:

$$\mathbf{J_d} = \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}}.$$

Sabemos que o campo magnético circunda o eixo do fio, então usamos um loop circular de raio s, e a lei de Ampere fica:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi s = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int \mathbf{J_d} d\mathbf{a} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi s^2 = \mu_0 I \frac{s^2}{a^2}.$$

Assim, o campo magnético é:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2} \hat{\phi}}$$