Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Eletromagnetismo (4300372-1)

Professor: Fernando S. Navarra
navarra@if.usp.br
Monitor: Guilherme R. Germano
guilherme.germano@usp.br

2ª Lista: Potencial e Energia Elétricos
Soluções

1 (a) O potencial elétrico no ponto P é a soma da contribuição das três cargas:

$$V = \sum_{\text{cargas}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{d}+\frac{Q}{d}+\frac{Q}{d}\right) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

O trabalho para trazer a quarta carga, de intensidade $-Q$, é portanto:

$$W = -QV = \boxed{\frac{-3Q^2}{4\pi\epsilon_0 d}.}$$

(b) Calculamos o trabalho para trazer cada uma das cargas, sucessivamente, multiplicando seu valor pelo potencial elétrico em seu ponto de destino:

$$W_1 = 0; \quad W_2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d}; \quad W_3 = \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

O trabalho total é então:

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} - \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \boxed{0.}$$

2 O campo elétrico é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{\mathbf{s}}.$$

Escolhemos um caminho que se afasta radialmente do fio, $d\mathbf{l} = ds\hat{\mathbf{s}}$, e calculamos:

$$V(s) = -\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}ds = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int\frac{ds}{s} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln s + c.$$

Para determinar a constante c, temos que escolher uma refêrencia para o potencial. Não podemos escolher $V(0) = 0$ nem $V(\infty) = 0$, pois $\ln s$ não é finita em nenhum desses extremos. Escolhemos simplesmente $V(a) = 0$, para a arbitrário, e obtemos:

$$\boxed{V(s) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln a - \ln s).}$$

O trabalho para mover a carga q de $s = 2d$ à $s = d$ é:

$$W = q\Delta V = q[V(d) - V(2d)] = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln a - \ln 2d + \ln a - \ln d) = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{2d}{d}\right) = \boxed{\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln 2.}$$

③ (a) Escolhendo um referêncial onde as placas são paralelas ao plano $x - y$, com a placa positiva em $z = 0$ e a negativa em $z = d$, e sabendo que o campo elétrico é vertical, podemos calculá-lo pela lei de Gauss, obtendo:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \text{ ou } z \geq d \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}, & 0 < z < d \end{cases}$$

Pela simetria do problema, $V = V(z)$. Ainda, como o campo é nulo no exterior das placas, $V(z) = V(0)$ para $x \leq 0$ e $V(z) = V(d)$ para $x \geq d$.
Para a região entre as placas, escolhendo $V(0) = 0$, temos:

$$V(z) = -\int_0^z E dz = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z,$$

portanto:

$$\boxed{V(z) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z & 0 < x < d \\ -\frac{\sigma d}{\epsilon_0} & x \geq d \end{cases}}$$

Para calcular a energia integramos sobre as cargas:

$$W = \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_{z=0} V(0)\sigma da} - \frac{1}{2}\int_{z=d} V(d)\sigma da = \frac{\sigma^2 d}{2\epsilon_0}\int da,$$

de modo que a energia por unidade de área é:

$$\boxed{\frac{dW}{da} = \frac{\sigma^2 d}{2\epsilon_0}.}$$

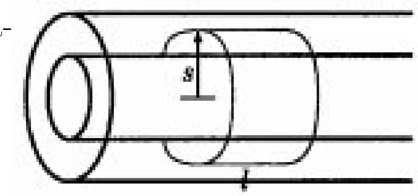
Usando a outra expressão para a energia, integramos sobre todo o espaço, lembrando que $dV = dxdydz = dzda$:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{espaco} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\int_0^d dz \int da = \frac{\sigma^2 d}{2\epsilon_0}\int da,$$

e obtemos a mesma energia por unidade de área:

$$\boxed{\frac{dW}{da} = \frac{\sigma^2 d}{2\epsilon_0}.}$$

(b) Por simetria, $\mathbf{E} = E(s)\hat{\mathbf{s}}$, de modo que, para um cilindro coaxial como o representado na figura, a lei de Gauss fica:



$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E 2\pi s l.$$

Nas diferentes regiões, a carga interna é:

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & s < a \\ \frac{K\sigma}{a}(2\pi l a) = 2\pi l K\sigma & a < s < b \\ \frac{K\sigma}{a}(2\pi l a) - \frac{K\sigma}{b}(2\pi l b) = 0 & s > b \end{cases}$$

Então o campo elétrico é:

$$\boxed{\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & s < a \text{ ou } s \geq b \\ \frac{K\sigma}{\epsilon_0 s}\hat{\mathbf{s}} & a \leq s < b \end{cases}}$$

Na região onde o campo é nulo o potencial é constante. Na região entre as cascas cilíndricas, escolhemos $V(a) = 0$, tomamos um caminho de integração radial $d\mathbf{l} = ds\hat{\mathbf{s}}$, e obtemos:

$$V(s) - \cancelto{0}{V(a)} = -\int \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_a^s E ds = \frac{-K\sigma}{\epsilon_0}\int_a^s \frac{ds}{s} = \frac{K\sigma}{\epsilon_0}(\ln a - \ln s) = \frac{K\sigma}{\epsilon_0}\ln(a/s),$$

portanto:

$$\boxed{V = \begin{cases} 0 & s \leq a \\ \frac{K\sigma}{\epsilon_0}\ln(a/s) & a < s \leq b \\ \frac{K\sigma}{\epsilon_0}\ln(a/b) & s > b \end{cases}}$$

Para calcular a energia, integramos sobre as cargas, lembrando que o elemento de área sobre o cilindro de raio s é $da = sd\phi dz$, obtemos:

$$\begin{aligned} W &= \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_{s=a} V(a)\frac{K\sigma}{a}da} + \frac{1}{2}\int_{s=b} V(b)\frac{-K\sigma}{b}da \\ &= \frac{1}{2}\frac{-K\sigma}{\epsilon_0}\frac{-K\sigma}{b}\ln\left(\frac{a}{b}\right)\int da = \frac{1}{2}\frac{K^2\sigma^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)(2\pi b)\int dx \\ &= \frac{\pi K^2\sigma^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\int dz, \end{aligned}$$

de modo que a energia por unidade de comprimento é:

$$\boxed{\frac{dW}{dz} = \frac{\pi K^2\sigma^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right).}$$

Usando a outra expressão para a energia, integramos sobre todo o espaço, usando o elemento de volume em coordenadas esféricas $dV = sdsd\phi dz$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_{espaco} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{K^2\sigma^2}{\epsilon_0^2}\int_0^{2\pi} d\phi\int_a^b \frac{sds}{s^2}\int dz \\ &= \frac{K^2\sigma^2 d}{2\epsilon_0}(2\pi)\int_a^b \frac{ds}{s}\int dz = \frac{\pi K^2\sigma^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\int dz, \end{aligned}$$

e obtemos a mesma energia por unidade de comprimento:

$$\boxed{\frac{dW}{dz} = \frac{\pi K^2\sigma^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right).}$$

(c) Por simetria o campo é radial $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, e pode ser calculado pela lei de Gauss usando superfícies esféricas concêntricas, resultando em:

$$\boxed{\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r < a \text{ ou } r \geq b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & a \leq r < b \end{cases}}$$

Na região onde o campo é nulo, o potencial é constante. Na região entre as cascas esféricas, escolhemos $V(a) = 0$ e tomamos um caminho de integração radial $d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}}$:

$$V(r) - \cancelto{0}{V(a)} = -\int \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_a^r Edr = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}),$$

portanto:

$$\boxed{V = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}) & a < r \leq b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) & r > b \end{cases}}$$

Para calcular a energia, integramos sobre as cargas:

$$\begin{aligned} W &= \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_{r=a} V(a)dq} + \frac{1}{2}\int_{r=b} V(b)dq \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})(-Q) \\ &\boxed{= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}).} \end{aligned}$$

Usando a outra expressão para a energia, integramos sobre todo o espaço, usando o elemento de volume em coordenadas esféricas $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = d\Omega r^2 dr$, obtendo a mesma energia:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_{espaco} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2}\oint d\Omega \int_a^b \frac{r^2 dr}{r^4} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2}4\pi\int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &\boxed{= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}).} \end{aligned}$$

(d) O campo foi calculado na lista 1, ex2 c):

$$\boxed{\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{ar^2}{4\epsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & r < R \\ \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & r \geq R \end{cases}}$$

Como o campo no exterior decresce com r^2, escolhemos $V(\infty) = 0$ e tomamos um caminho de integração radial $d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}}$, vindo do infinito até r.
Para $r > R$:

$$V(r) - \cancelto{0}{V(\infty)} = -\int \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_\infty^r Edr = \frac{aR^4}{4\epsilon_0}\int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{aR^4}{4\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Para $r < R$:

$$V(r) = V(R) - \int_R^r \frac{ar^2}{4\epsilon_0}dr = \frac{aR^3}{4\epsilon_0} - \frac{a}{4\epsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{a}{12\epsilon_0}(4R^3 - r^3),$$

portanto:

$$\boxed{V = \begin{cases} \frac{aR^4}{4\epsilon_0}\frac{1}{r} & r \geq R \\ \frac{a}{12\epsilon_0}(4R^3 - r^3) & r < R \end{cases}}$$

Para calcular a energia, integramos sobre a esfera carregada:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int_{esfera} V(r)dq = \frac{1}{2}\int_0^R \rho(r)V(r)r^2dr \int d\Omega \\
&= \frac{4\pi}{2}\int_0^R ar\frac{a}{12\epsilon_0}(4R^3 - r^3)r^2dr \\
&= \frac{a^2\pi}{6\epsilon_0}\int_0^R (4R^3r^3 - r^6)dr \\
&= \frac{a^2\pi}{6\epsilon_0}\left(R^7 - \frac{R^7}{7}\right) \\
&\boxed{= \frac{a^2\pi R^7}{7\epsilon_0}.}
\end{aligned}$$

Usando a outra expressão para a energia, integramos sobre todo o espaço, e obtemos o mesmo valor:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_{espaco} E^2dV = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{a^2}{16\epsilon_0^2}\oint d\Omega\left[\int_0^R r^4r^2dr + \int_0^R \frac{R^8r^2dr}{r^4}\right] \\
&= \frac{\pi a^2}{8\epsilon_0}\left[\int_0^R r^6dr + R^8\int_R^\infty \frac{dr}{r}\right] = \frac{\pi a^2}{8\epsilon_0}\left(\frac{R^7}{7} + \frac{R^8}{R}\right) \\
&\boxed{= \frac{a^2\pi R^7}{7\epsilon_0}.}
\end{aligned}$$

---

(4) Esse exercício corresponde ao exemplo 2.9 do livro texto do Griffiths, e recomenda-se sua leitura assim como da discução no início da seção 2.5 sobre condutores.

A ideia é que, se existe uma configuração de cargas na superfície de de um condutor que anule o campo em seu interior (e tal distribuição existe e é única para um condutor de qualquer formato, imerso num campo elétrico arbitrário, e carregado com qualquer carga) essa será a distribuição de carga que ocorrerá, pois qualquer campo no interior do condutor geraria movimento de carga até essa situação ser atingida (o que ocorre de fato quase instantaneamente).

Para o caso em questão, a carga do condutor se distribuirá na superfície da cavidade, de forma a anular o campo produzido pela carga q.

Pela lei de Gauss, tal situação implica que a carga total nessa superfície tem de ser igual a $-q$, e como o condutor é neutro a carga excedente q tem de se distribuir uniformemente na sua superfície externa, para manter o campo nulo no interior.

Assim, o campo no exterior da esfera é aquele produzido por uma casca esférica com carga q uniformemente distribuida na superfície, ou seja:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.}$$