Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Eletromagnetismo (4300372-1)

Professor: Fernando S. Navarra
navarra@if.usp.br
Monitor: Guilherme R. Germano
guilherme.germano@usp.br

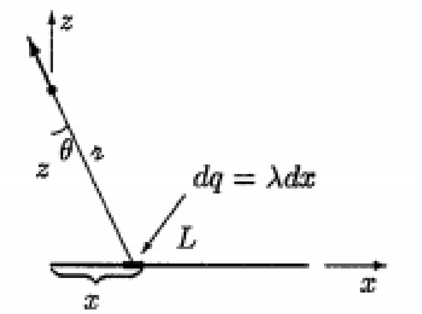
$1^{\underline{a}}$ Lista: Campos Elétricos
Soluções

(1) Pela lei de Coulomb o campo elétrico em $\mathbf{r}$ é dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\mathscr{r}^2}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\, dq,$$

onde $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ é o vetor que liga cada elemento de carga à $\mathbf{r}$, e a integral se estende sobre a distribuição de carga. Usando as figuras abaixo, escrevemos $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ e dq em termos dos parâmetros adequados a cada caso.

(a)



Nesse caso:

$$\mathscr{r} = \sqrt{z^2+x^2},$$

$$dq = \lambda dx.$$

E as componentes dos campo são:

$$dE_z = dE\cos\theta = dEz/\mathscr{r};$$

$$dE_x = -dE\sin\theta = dEx/\mathscr{r}.$$

Temos então:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda z dx}{(z^2+x^2)^{3/2}}; \quad E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{-\lambda x dx}{(z^2+x^2)^{3/2}}.$$

As integrais podem ser resolvidas pela substituição $x = z\tan\theta$; $dx = zd\theta/\cos^2\theta$, e resultam em:

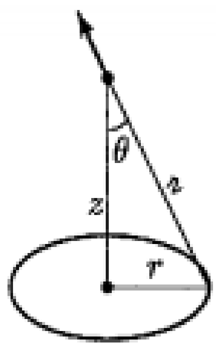
$$\boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{z}\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}; \quad E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{z}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}-1\right).}$$

No limite em que o ponto é muito distante do fio, $z >> L \Rightarrow 1/\sqrt{z^2+L^2} \approx 1/z$, então:

$$\boxed{E_z \to \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{z^2}, \quad E_x \to 0,}$$

que é o campo de uma carga pontual $q = \lambda L$.

(b)



Nesse caso:

$$\mathscr{r} = \sqrt{z^2+r^2},$$

$$dq = \lambda r d\phi.$$

As componentes horizontais do campo se cancelam, enquanto para a componente z:

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{zdE}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Assim, integrando ao longo do círculo no plano:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda r d\phi}{z^2+r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda r z}{(z^2+r^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi = \boxed{\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{rz}{(z^2+r^2)^{3/2}}}.$$

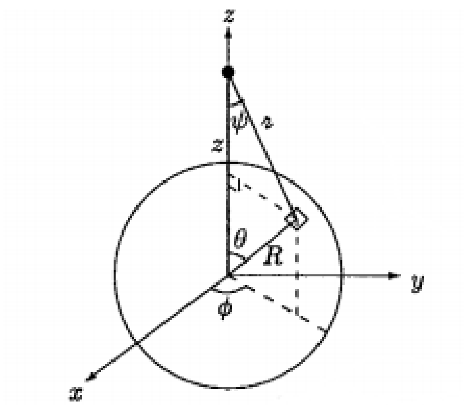
(c) Usando as mesmas coordenadas do exercício anterior, temos novamente $\mathscr{r} = \sqrt{z^2+r^2}$ e o campo elétrico resultante vertical, com $dE_z = dE\cos\theta = dEz/\sqrt{z^2+r^2}$.
O elemento de carga, no entanto, é bi-dimensional $dq = \sigma r dr d\phi$, e devemos integrar ao longo de todo o disco:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{\sigma r dr d\phi}{z^2+r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^{R}\frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

A integral pode ser resolvida pela mudança $v = z^2+r^2$; $dv = 2rdr$, e resulta em:

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right).}$$

(d)



Pelo diagrama:

$$\mathscr{r} = \sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta},$$
$$\cos\psi = \frac{z-R\cos\theta}{\mathscr{r}},$$
$$dq = \sigma da = \sigma R^2\sin\theta d\theta d\phi.$$

O campo resultante é novamente vertical, com:

$$dE_z = dE\cos\psi = \frac{(z-R\cos\theta)dE}{\mathscr{r}}$$

Assim:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta(z-R\cos\theta)}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}} = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(z-R\cos\theta)\sin\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}}d\theta$$

Fazendo a substituição $v = \cos\theta$; $dv = -\sin\theta$:

$$E_z = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{z-Ru}{(R^2+z^2-2Rzu)^{3/2}}du,$$

que pode ser resolvida por frações parciais ou consultada numa tabela, e resulta em:

$$E_z = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{z^2}\frac{zu-R}{\sqrt{R^2+z^2-2Rzu}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma}{z^2}\left\{\frac{z-R}{|z-R|}-\frac{-z-R}{|z+R|}\right\}$$

Dentro da esfera $z < R$, então $|z-R| = R-z$, zerando a expressão em colchetes:

$$\boxed{E_z = 0, \qquad z < R}$$

Fora da esfera $|z-R| = z-R$, e a expressão em colchetes resulta em 2, usando ainda que a carga total é $q = 4\pi R^2\sigma$ temos:

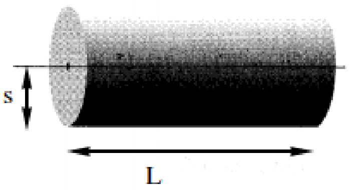
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{z^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}, \qquad z > R.}$$

2 A Lei de **Gauss** estabelece que:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0},$$

em cada caso escolheremos superfícies gaussianas que sabemos serem perpendiculares ao campo, de forma que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E da$, e sobre as quais o campo tem módulo constante, portanto:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \oint da = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

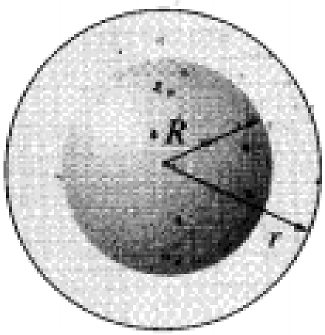
(a) 

Sabemos que o campo é radial e tem intensidade constante sobre o cilindro na figura, temos então:

$$E \oint da = E 2\pi s L = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s}.}$$

(b) 

O campo é radial e tem intensidade constante sobre uma esfera concêntrica à casca carregada, como na figura (representando o caso $r > R$), então:

$$E \oint da = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Para $r < R$, não há carga dentro da superfície gaussiana, $Q_{in} = 0$, portanto:

$$\boxed{\mathbf{E} = 0, \quad r < R}$$

Para $r > R$, $Q_{in} = 4\pi R^2 \sigma$, portanto:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad r > R.}$$

(c) Novamente $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$, então usamos uma esfera concêntrica de raio r como superfície Gaussiana, de modo que:

$$E \oint da = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

A carga encerrada pela superfície deve ser calculada integrando-se a densidade de carga. Para $r < R$:

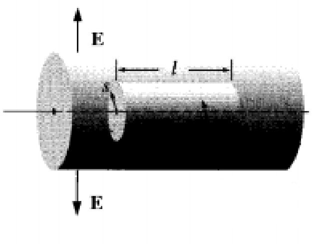
$$Q_{in} = \int_V \rho dV = \int_0^r ar 4\pi r^2 dr = 4\pi a \int_0^r r^3 dr = a\pi r^4$$

Assim:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{ar^2}{4\epsilon_0}\hat{r}, \quad r < R.}$$

Para $r > R$, a integral se estende de 0 a R, então $Q_{in} = a\pi R^4$. Assim:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad r > R.}$$

(d) 

Como $\mathbf{E} = E(s)\hat{s}$, escolhemos como superfície gaussiana um cilíndro de raio s e comprimento l, com o mesmo eixo do cílindro do problema, conforme a figura (representando o caso $s > S$), então:

$$E \oint da = E 2\pi s l = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q_{in}}{2\pi\epsilon_0 s l}$$

Para $s < S$, não há carga dentro da superfície gaussiana, $Q_{in} = 0$, portanto:

$$\boxed{\mathbf{E} = 0, \quad s < S}$$

Para $s > S$, $Q_{in} = 2\pi S l \sigma$, portanto:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{S\sigma}{\epsilon_0 s}\hat{s}, \quad s > S.}$$