Sexta lista de exercícios: Quadrivetores

1) Definimos a 4-aceleração como $A^{\mu} = \frac{d\eta^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \frac{d\eta^{\mu}}{dt}$, onde **u** é a velocidade da partícula, η^{μ} sua 4-velocidade, e τ seu tempo próprio. Mostre que as componentes da 4-aceleração podem ser escritas na forma

$$A^0 = \frac{\gamma^4(u)}{c}\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} \qquad A^1 = \frac{\gamma^4(u)}{c^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})u_x + \gamma^2(u)a_x$$

$$A^2 = \frac{\gamma^4(u)}{c^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})u_y + \gamma^2(u)a_y \qquad A^3 = \frac{\gamma^4(u)}{c^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})u_z + \gamma^2(u)a_z$$

onde **a** é a aceleração da partícula. <u>Dica</u>: Lembre-se que $u^2(t) = u_x^2(t) + u_y^2(t) + u_z^2(t)$.

2) Obtenha os invariantes dados por (a) $\eta_{\mu}\eta^{\mu}$, (b) $J_{\mu}J^{\mu}$, e (c) $G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$, onde η^{μ} é a 4-velocidade, J^{μ} a 4-densidade, e $G^{\mu\nu}$ o tensor dual do campo eletromagnético.

3) (a) Considere um referencial *S* onde não exista campo magnético, $\mathbf{E} \neq 0$ e $\mathbf{B} = 0$. Considere agora o sistema *S*', que se move com velocidade $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ em relação a *S*. Mostre que em *S*' vale

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{E}'$$

(b) Considere agora $\mathbf{B} \neq 0$ e $\mathbf{E} = 0$ em *S*. Mostre que

$$\mathbf{E}' = \mathbf{V}\times\mathbf{B}'$$

4) Considere uma carga puntiforme *Q* em repouso na origem do referencial *S*. Nesse referencial, há apenas o campo elétrico

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Explorando a transformação dos campos, mostre que no referencial *S*', que se move com velocidade $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ em relação a *S*, temos.

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix}$$

(b) Explore agora a transformação das coordenadas espaço-temporais para obter

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x'+Vt')^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} x'+Vt' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(c) Finalmente, mostre que, no instante *t*' = 0:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^2[(1-\beta^2\sin^2\theta')]^{3/2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

onde θ' é o ângulo entre $\mathbf{r}'$ e a direção $O'x'$. Perceba que o campo elétrico não é isotrópico no referencial *S*'.

5) Ondas Eletromagnéticas. Considere uma onda plana monocromática com vetor de onda $\mathbf{k}$ e frequência angular ω. Iremos definir $W^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$. (a) Mostre que a fase da onda pode ser escrita na forma

$$\phi = W_\mu x^\mu$$

Como discutido anteriormente, a fase é um invariante (ver Moyses, Vol. 4, Sec. 6.8). Tendo a expressão acima a forma de produto escalar, concluímos que W^μ é um 4-vetor. (b) Vamos admitir, no referencial *S*, a onda plana

$$\mathbf{E} = (0, E, 0)\,, \qquad E = E_{\max}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \qquad \mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$$

bem como

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = (0, 0, E/c)$$

Explorando a transformação de Lorentz, descreva a onda no referencial *S*', que se move com velocidade $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ em relação a *S*. (c) Verifique que o resultado é compatível com os invariantes relativísticos (escalares) discutidos na Aula 38, $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2)$ e $F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -4c\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$. Calcule também o invariante $W_\mu W^\mu$, conhecido como relação de dispersão.

Respostas:

2) (a) $-c^2$ (b) $-c^2\rho_0^2$ (c) $2(E^2 - c^2B^2)$

5) (b) $\mathbf{E}' = (0, E', 0)$, $\mathbf{B}' = (0,0,B')$, $E' = \gamma(1-\beta)E_{max}\cos(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' - \omega' t')$, $B' = E'/c$,

$$k' = (k_x', 0,0)\,,\ \ k_x' = \gamma\left(k_x - \frac{V}{c^2}\omega\right),\ \ \omega' = \gamma(\omega - Vk_x)$$

(c) $W_\mu W^\mu = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + k^2$