Quinta lista de exercícios: Dinâmica Relativística

1) (a) Qual a velocidade de um elétron cuja energia cinética é igual à sua energia de repouso? (b) O tempo de vida próprio de um múon é 2.3 μs. Um experimento observa o tempo de vida 6.9 μs. Qual a velocidade dos múons utilizados no experimento? (c) Qual a energia total de um múon com essa velocidade? (d) Qual o momento linear? Dado: a massa de repouso do múon é 207 vezes maior que a do elétron.

2) Uma carga puntiforme q com massa de repouso m_0, inicialmente em repouso na posição $x = 0$, é acelerada pelo campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$. (a) Mostre que a aceleração da carga é

$$a_x = \frac{qE}{m_0}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

(b) Mostre também que a velocidade é dada por

$$u_x(t) = \frac{qEt/m_0}{\sqrt{1 + (qEt/m_0c)^2}}$$

(c) Mostre finalmente que

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{qE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{m_0c}\right)^2} - 1\right]$$

3) Mostre que a aceleração de uma partícula sujeita à Força de Lorentz, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, é dada por

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m_0}\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}\left[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})\right]$$

4) O núcleo de carbono ^{12}C é formado por 6 prótons (^{1}H) e 6 nêutrons (n). As massas de repouso são dadas por

^{12}C: 12.00000 u.m.a.
^{1}H: 1.007825 u.m.a.
n: 1.008665 u.m.a.

onde 1 u.m.a (unidade de massa atômica) = 931.494 MeV/c^2. Qual a energia mínima necessária para separar o núcleo de carbono em seus prótons e nêutrons constituintes? Esse resultado corresponde à energia de ligação do núcleo.

5) Aniquilação de Pares. O pósitron é a antipartícula do elétron, tendo a mesma massa de repouso, mas carga positiva $+e$. Um par elétron-pósitron em repouso no referencial S se aniquila, produzindo dois fótons. (a) Qual a energia e o momento linear de cada fóton no referencial S? Lembre-se: O fóton é uma partícula com massa de repouso nula, sendo a relação entre energia e momento dada por $E = pc$. (b) Mostre que o processo de aniquilação não poderia produzir apenas um fóton.

6) O núcleo de um átomo de carbono, inicialmente em repouso no referencial do laboratório, sofre decaimento de um estado de energia maia alta para outro estado de energia mais baixa. Nesse processo, o núcleo emite um fóton com energia de 4.43 MeV. Em seu estado final (energia mais baixa), a massa de repouso do núcleo é 12.000000 u.m.a. No referencial do laboratório: (a) qual o momento linear do núcleo de carbono após a emissão do fóton? (b) Qual a energia cinética final do núcleo?

7) Identidades importantes. Sejam $\mathbf{u} = (u, 0{,}0)$ e $\mathbf{u}' = (u', 0{,}0)$ as velocidades de uma partícula nos referencias *S* e *S*', onde $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ é a velocidade de *S*' em relação a *S*. Tendo em vista a transformação

$$u' = \frac{u - V}{1 - uV/c^2}$$

(a) mostre que

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(V)\,(1 - uV/c^2)$$

(b) Utilizando o resultado do item (a), mostre também que

$$\gamma(u')u' = \gamma(u)\gamma(V)\,(u - V)$$

Perceba que o resultado do item (a) foi utilizado para discutir a transformação dos 4-vetores (ver Aula 33), enquanto o resultado do item (b) será útil no problema 8.

8) Considere a colisão abaixo, onde todas as velocidades estão na direção *Ox*:

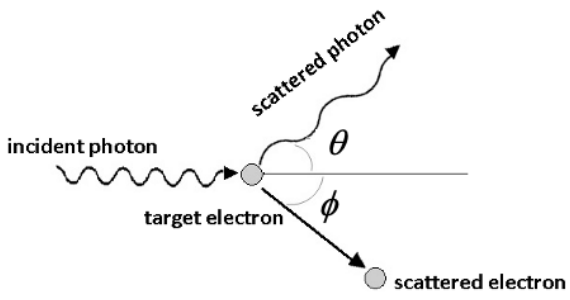
No referencial *S*, as velocidades iniciais são $\mathbf{v}_A^i = (v_A, 0{,}0)$ e $\mathbf{v}_B^i = (v_B, 0{,}0)$ enquanto as velocidades finais $\mathbf{v}_A^f = (v_C, 0{,}0)$ e $\mathbf{v}_B^f = (v_D, 0{,}0)$. No referencial *S*', que se move com velocidade $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ em relação a *S*, as velocidades se tornam $\mathbf{v}_A^{i'} = (v'_A, 0{,}0)$, $\mathbf{v}_B^{i'} = (v'_B, 0{,}0)$, $\mathbf{v}_A^{f\,'} = (v'_C, 0{,}0)$ e $\mathbf{v}_B^{f\,'} = (v'_D, 0{,}0)$, enquanto as massas próprias são m_A, m_B, m_C e m_D. (a) Imponha a conservação do momento linear em *S*', e então mostre que a transformação para o referencial *S* resulta na expressão abaixo (Dica: explore o resultado do problema **7**(b)):

$$m_A\gamma(v_A)(v_A - V) + m_B\gamma(v_B)(v_B - V) = m_C\gamma(v_C)(v_C - V) + m_D\gamma(v_D)(v_D - V)$$

(b) Impondo a conservação de momento linear em *S*, mostre que

$$\gamma(v_A)m_A + \gamma(v_B)m_B = \gamma(v_C)m_C + \gamma(v_D)m_D$$

Perceba que embora a massa de repouso seja invariante frente à TL, a conservação da massa na Relatividade se expressa em termos de $\gamma(u)m_0$.



9) Efeito Compton. No processo conhecido como espalhamento Compton, um fóton de alta energia (*incident photon*) colide contra um elétron estacionário no referencial do laboratório. Sendo o momento linear do fóton incidente $\mathbf{p}_i = p_i\hat{\mathbf{x}}$, após a colisão o fóton espalhado (*scattered photon*) tem momento linear $\mathbf{p}_f$ defletido pelo ângulo θ, enquanto o elétron (*scattered electron*) adquire momento linear $\mathbf{p}_e$ orientado segundo

ϕ em relação à direção de incidência. As energias inicial e final do fóton são E_i e E_f, respectivamente, enquanto a massa própria do elétron é m_0. (a) Explorando a conservação de energia no referencial do laboratório, mostre que

$$p_e^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f + \frac{2(p_i - p_f)m_0 c^2}{c}$$

(b) Explorando a conservação de momento linear, mostre ainda que

$$p_e^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos\theta$$

e portanto

$$\frac{1}{p_f} - \frac{1}{p_i} = \frac{1}{m_0 c}[1 - \cos\theta]$$

A Mecânica Quântica estabelece uma relação entre o comprimento de onda e o momento linear do fóton, $p = h/\lambda$, onde h é a constante de Planck, permitindo reescrever a expressão acima em termos do comprimento de onda do fóton (radiação). Apesar dessa característica ondulatória, você acaba de tratar o fóton como partícula em sua resolução!

Respostas:

1) (a) 0.867c (b) 0.943c (c) 317 MeV (d) 299 MeV/c

4) 92.16 MeV

5) (a) 0.511 MeV (b) 0.511 MeV/c

6) (a) 4.43 MeV/c (b) 0.878 keV