Física IV (4302212) – Primeira Lista de Exercícios – Ondas Eletromagnéticas

1. Escreva os campos elétrico e magnético para uma onda plana monocromática de amplitude E_0 e frequência ω que:

   (a) se propaga no positivo da direção x, polarizada na direção z.

   (b) se propaga no sentido negativo da direção x, polarizada na direção z.

   (c) se propaga na direção e sentido do vetor (1, 1, 1), com polarização paralela ao plano xz.

2. Considere uma onda plana monocromática cujo campo elétrico é dado por

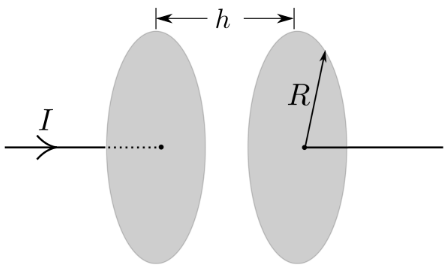
$$\mathbf{E} = A\cos(ky - \omega t + \delta)\hat{\mathbf{z}} \ .$$

   (a) Identifique o período, a frequência, e o comprimento de onda.

   (b) Obtenha o campo magnético $\mathbf{B}$.

   (c) Qual a direção de propagação de onda? Qual o versor de polarização de onda?

3. Um capacitor de placas paralelas circulares de raio R, separadas pela distância h, é carregado através de um fio conductor que suporta a corrente I, como mostra a figura.

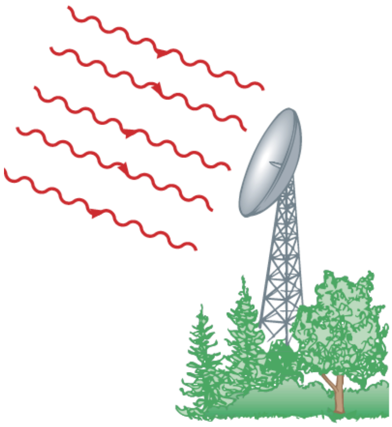


   (a) Calcule o campo elétrico gerado pelo capacitor durante o carregamento. Admita que o capacitor é ideal, e faça um esboço indicando as placas positiva e negativa, bem como as linhas de campo elétrico.

   (b) Calcule o vetor de Poynting durante o carregamento do capacitor.

   (c) Integrando o vetor de Poynting sobre uma superficie cilíndrica apropriada, mostre que $\Phi_S(t) = dU_C/dt$, onde $U_C = (1/2C)Q^2$ é a energia potencial elétrica associada à carga acumulada no capacitor, e Φ_S é o fluxo do vetor de Poynting através da superfície escolhida.

4. Uma antena parabólica com diâmetro de 20.0 m recebe sinal de rádio emitido por uma fonte distante. O sinal é sinuisodal com amplitude $E_{\text{max}} = 0.200\,\mu\text{V/m}$. Admita incidência normal e absorção completa do sinal de rádio.



   (a) Qual a intensidade da radiação recebida pela antena?

   (b) Qual a potência recebida pela antena?

   (c) Qual a força exercida pela radiação sobre a antena?

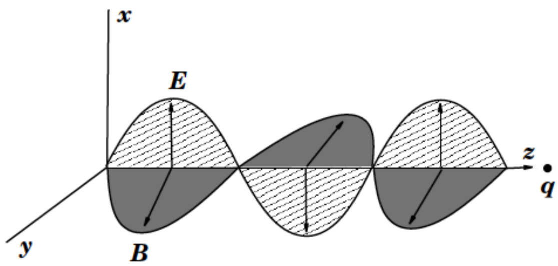
5. Um laser é utilizado para fazer um espelho em forma de disco levitar no campo gravitacional da Terra. Admita incidência normal e que a radiação seja completamente refletida.

   (a) Sendo r o raio e m a massa do espelho, qual deve ser a intensidade da radiação?

   (b) Calcule a intensidade da radiação admitindo $m = 1.00\,\text{mg}$, $r = 0.50\,\text{mm}$ e $g = 9.80\,\text{m/s}$.

6. **Modelo simples para a pressão de radiação.** Vamos considerar a incidência normal de radiação monocromática sobre uma superfície metálica, utilizando várias simplificações: (i) os elétrons do metal estão inicialmente em repouso; (ii) os elétrons não emitem radiação EM; (iii) há uma força viscosa sobre os elétrons, em consistência com o modelo de Drude de condução elétrica; (iv) as velocidades eletrônicas são pequenas comparadas à velocidade da luz, $v \ll c$.

   Iremos considerar que a onda se propaga na direção z com polarização $\hat{\mathbf{x}}$, e que interage com um elétron, $q = -e$. Como simplificação adicional, o comprimento de onda será admitido muito grande comparado à dimensão linear da região em que a interação acontece. Assim, $kz \ll 1$, sendo razoável escrever $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{B} = (E_0/c)\cos(\omega t)\hat{\mathbf{y}}$.



   (a) Mostre que força de Lorentz é dada por $\mathbf{F} = -e(E_x - v_z B_y)\hat{\mathbf{x}} - e v_x B_y \hat{\mathbf{z}}$, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade do elétron.

   (b) Lembrando que os elétrons são lentos ($v \ll c$), mostre que as equações de movimento são, aproximadamente (m é a massa do elétron):

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t) \;\; \text{e} \;\; \frac{dv_z}{dt} = -\frac{eE_0}{mc} v_x \cos(\omega t)\ .$$

   (c) Seguindo o modelo de Drude, vamos reescrever a equação para a componente v_x da velocidade,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t) - \frac{b}{m}v_x\ ,$$

onde foi introduzida a força dissipativa $-bv_x$, que descreve o efeito das colisões dos elétrons de condução contra os átomos (íons) do material. Verifique que a solução tem a forma

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t + \delta) \ ,$$

onde

$$\delta = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\gamma}\right) \quad \text{e} \quad v_0 = -\frac{eE_0}{m}\left(\frac{\gamma}{\gamma^2+\omega^2}\right)\sec(\delta) \ .$$

Nas expressões acima, $\gamma = (b/m)$.

(d) De acordo com as equações de movimento do item (b), a amplitude de v_z deve ser pequena comparada à amplitude de v_x, em vista do fator $1/c$. Assim, podemos desconsiderar o termo de fricção e escrever

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{eE_0 v_0}{mc}\cos(\omega t + \delta)\cos(\omega t) \ .$$

Em escala macroscópica, o tempo de interação corresponde a muitos períodos de oscilação, sendo razoável considerar forças médias, $\langle F_x \rangle$ e $\langle F_y \rangle$, tomadas sobre o período da onda EM. Mostre que

$$\langle F_x \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle F_z \rangle = N\frac{e^2 E_0^2}{2mc}\left(\frac{\gamma}{\gamma^2+\omega^2}\right) \ ,$$

onde N é o número de elétrons que interagem com a radiação. Apesar da extrema simplicidade do modelo proposto, além das limitações do modelo de Drude, foi possível obter uma força média resultante na direção de propagação da onda EM, qualitativamente consistente com a pressão de radiação. O que acontece caso consideremos elétrons livres ($\gamma = 0$)?

Respostas:

1. (a) $\mathbf{E} = E_{\max}\cos(kx - \omega t + \phi)\hat{\mathbf{z}}$
   (b) $\mathbf{E} = E_{\max}\cos(kx + \omega t - \phi)\hat{\mathbf{z}}$
   (c) $\mathbf{E} = E_{\max}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, onde $\hat{\mathbf{k}} = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{3}$ e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$. Como não há informação sobre o campo magnético, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = (\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{x}})/\sqrt{2}$ é igualmente aceitável. (Por que?) Note também que o sinal pode ser incorporado à constante de fase arbitrária (ϕ).

2. (a) $T = 2\pi/\omega$, $f = \omega/(2\pi)$, e $\lambda = 2\pi/k$.
   (b) $\mathbf{B} = (A/c)\cos(ky - \omega t + \delta)\hat{\mathbf{x}}$
   (c) Propagação na direção y, polarização $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\mathbf{z}}$.

3. (a) $\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_0)\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0(\pi R^2)}\,\hat{\mathbf{z}}$, onde $\hat{\mathbf{z}}$ é perpendicular às placas, orientado da placa positiva para a negativa.
   (b) $\mathbf{B} = B(r)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, onde $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ é o versor do ângulo cilíndrico orientado segundo a regra da mão direita em relação a $\hat{\mathbf{z}}$. Para $r < R$, $B(r) = (\mu_0 I/2\pi)(r/R^2)$, enquanto para $R < r$, $B(r) = (\mu_0/2\pi)(I/r)$. Finalmente, $\mathbf{S} = -(1/\mu_0)EB\,\hat{\mathbf{r}}$, onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o versor radial em coordenadas

cilíndricas. Perceba que $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ para $R < r$, pois o capacitor é ideal.
(c) Dicas: utilize uma superfície cilíndrica com raio $r = R$ (por que?) e não deixe de apreciar que $\Phi_S < 0$ (o que isso significa?).

4. (a) $5.31 \times 10^{-17}\,\mathrm{W/m^2}$
(b) $1.67 \times 10^{-14}\,\mathrm{W}$
(c) $5.56 \times 10^{-23}\,\mathrm{N}$

5. (a) $I = (mgc)/(2\pi r^2)$
(b) $1.87\,\mathrm{GW/m^2}$

6. (d) $\langle F_z \rangle = 0$. Nesse caso haveria transferência de energia dos elétrons ao material, segundo o modelo proposto?