4302212 – Física IV

Equações de Maxwell – II

Tensor Eletromagnético

$$K^\mu = \frac{q}{c} F^\mu_\nu \eta^\nu \qquad F^\mu_\nu \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} \eta_\nu \qquad F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

Equações de Maxwell (Gauss e Ampère-Maxwell)

$$\partial_\nu F^\nu_\mu = -c\mu_0 J_\mu$$

ou

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = c\mu_0 J^\mu$$

– Uma matriz (tensor de rank 2) de ordem 4 tem 16 elementos, mas os vetores **E** e **B** fornecem apenas 6 componentes independentes. Isso sugere que $\hat{\mathrm{F}}$ seja escrito como um tensor antissimétrico, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, pois nesse caso há apenas 6 elementos independentes.

– Como discutido por Griffiths (Sec. 12.3.3) há duas formas de construir um tensor antissimétrico compatível com a transformação dos campos, que resultam em $F^{\mu\nu}$ e no **tensor dual**:

$$G^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ -cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ -cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

– Também podemos obter a forma mista G^{μ}_{ν}, bastando notar que em geral $\mathbf{E} \to c\mathbf{B}$ e $c\mathbf{B} \to -\mathbf{E}$ permite obter $\widehat{\mathrm{G}}$ a partir de $\hat{\mathrm{F}}$.

– **Exercício**: (a) Calcule $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e (b) verifique que se trata de um invariante.

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F^{0\nu}F_{0\nu} &= -E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 \\ F^{1\nu}F_{1\nu} &= -E_x^2 + c^2B_y^2 + c^2B_z^2 \\ F^{2\nu}F_{2\nu} &= -E_y^2 + c^2B_z^2 + c^2B_x^2 \\ F^{3\nu}F_{3\nu} &= -E_z^2 + c^2B_y^2 + c^2B_x^2 \end{aligned}\right\} \quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2)$$

– **Exercício**: (a) Calcule $F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$ e (b) verifique que se trata de um invariante.

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad G_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{0\nu}G_{0\nu} = F^{1\nu}G_{1\nu} = F^{2\nu}G_{2\nu} = F^{3\nu}G_{3\nu} = -c\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

$$F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -4c\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

– Explorando a transformação dos campos uma vez mais (verifique!):

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

Invariantes Relativísticos

– Em aulas anteriores, discutimos invariantes relacionados ao produto escalar ($a_\mu b^\mu$) e à norma ($a_\mu a^\mu$) de 4-vetores (contração de 1 índice). Por exemplo,

$$x_\mu x^\mu = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \qquad P_\mu P^\mu = -(E/c)^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$\eta_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

– Nesta aula obtivemos invariantes que resultam da contração dos dois índices de tensores ($\hat{\mathrm{F}}$, $\widehat{\mathrm{G}}$)

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2) \quad F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -4c\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

Equações de Maxwell

– As equações de Maxwell ainda não discutidas (divergência do campo magnético e Lei de Faraday) podem ser obtidas do tensor dual em qualquer das formas:

$$\partial_\mu G^\mu_\nu \qquad \text{ou} \qquad \partial_\nu G^{\mu\nu}$$

$$G^\mu_\nu \equiv \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ -cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ -cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu G_0^\mu = c\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) = c\nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\partial_\mu G_1^\mu = c\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_x$$

$$\partial_\mu G_2^\mu = c\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_y$$

$$\partial_\mu G_3^\mu = c\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})_z$$

– As componentes de $\partial_\nu G^{\mu\nu}$ são desenvolvidas por Griffiths, compare!

Equações de Maxwell

– Utilizando o resultado anterior:

$$\partial_\mu G^\mu_0 = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\partial_\mu G^\mu_i = 0 \iff \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

– Portanto a divergência de **B** e a Lei de Faraday são dadas conjuntamente por:

$$\partial_\mu G^\mu_\nu = 0$$

– Ou em termos de $G^{\mu\nu}$:

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

Equações de Maxwell

– A TL é evidentemente satisfeita:

$$\partial^T \hat{\mathrm{G}} = 0 \implies \partial^T \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\Lambda} \hat{\mathbf{G}} \hat{\Lambda}^{-1} = 0$$

$$\partial'^T \hat{\mathrm{G}}' = 0$$

– Mais precisamente, as equações de Maxwell são ditas covariantes frente à TL, isto é, têm a mesma forma em qualquer referencial inercial.

$$\partial_\nu F^\nu_\mu = -c\mu_0 J_\mu \qquad\qquad \partial_\nu F^{\mu\nu} = c\mu_0 J^\mu$$

ou

$$\partial_\mu G^\mu_\nu = 0 \qquad\qquad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$$