4302212 – Física IV

Equações de Maxwell

Transformação de Lorentz

– Anteriormente, definimos a TL para 4-vetores contravariantes (a^{μ}):

$$\begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{a}' = \hat{\Lambda}\mathrm{a} \implies \mathrm{a} = \hat{\Lambda}^{-1}\mathrm{a}'$$

– Para vetores covariantes (a_μ), a transformação será dada pela matriz da TL inversa:

$$\begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– É imediato perceber que essa transformação é equivalente àquela dos vetores contravariantes, bastando lembrar que $a_0 = -a^0$:

$$a'_0 = \gamma(a_0 + \beta a_1) \implies a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$

$$a'_1 = \gamma(\beta a_0 + a_1) \implies a'^1 = \gamma(-\beta a^0 + a^1)$$

$$a'_2 = a_2 \implies a'^2 = a^2$$

$$a'_3 = a_3 \implies a'^3 = a^3$$

– Em notação matricial, vamos representar os vetores covariantes como transpostos:

$$\begin{pmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{a}'^T = \mathrm{a}^T \hat{\Lambda}^{-1}$$

$$\mathrm{a}'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu a_\nu$$

Equações de Maxwell

– Na aula anterior, apresentamos o **tensor do campo eletromagnético** ($\hat{\mathrm{F}}$):

$$\mathrm{K} = \frac{q}{c}\,\hat{\mathrm{F}}\,\eta$$

$$\begin{pmatrix} K^0 \\ K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} = \frac{q}{c} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathrm{F}}} \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix}$$

– Vamos agora considerar o 4-gradiente de $\hat{\mathrm{F}}$ (perceba que μ é o índice das linhas em F^{μ}_{ν})

$$\partial_\mu F^{\mu}_{\nu}$$

$$\partial_\mu F^\mu_0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{E}$$

$$\partial_\mu F^\mu_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - c\frac{\partial B_z}{\partial y} + c\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - c(\nabla \times \mathbf{B})_x$$

$$\partial_\mu F^\mu_2 = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + c\frac{\partial B_z}{\partial x} - c\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} - c(\nabla \times \mathbf{B})_y$$

$$\partial_\mu F^\mu_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - c\frac{\partial B_y}{\partial x} + c\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - c(\nabla \times \mathbf{B})_z$$

– As componentes de $\partial_\mu F^\mu_\nu$ (4-vetor covariante) correspondem ao lado esquerdo das Equações de Maxwell que envolvem fontes (Lei de Gauss e Ampère-Maxwell).

– Uma vez que as fontes (densidades de carga e corrente) constituem as componentes da 4-densidade, vamos escrever

$$-c\mu_0 J_\nu = -c\mu_0(J_0, J_1, J_2, J_3) = -c\mu_0(-c\rho, j_x, j_y, j_z)$$

– Verificamos que igualdades entre as componentes de $\partial_\mu F^\mu_\nu$ e $-c\mu_0 J_\nu$ correspondem às Leis de Maxwell:

$$\partial_\mu F^\mu_0 = -c\mu_0 J_0 \iff \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

– Para as demais componentes ($\nu = 1,2,3$):

$$\partial_\mu F^\mu_\nu = -c\mu_0 J_\nu \iff \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Equações de Maxwell

– Percebemos que as Leis de Gauss e Ampère-Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

podem ser conjuntamente escritas na forma

$$\partial_\nu F^\nu_\mu = -c\mu_0 J_\mu$$

– A TL também é respeitada:

$$\partial^T \hat{\mathrm{F}} = -c\mu_0 \mathrm{J}^T \implies \partial^T \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\Lambda} \hat{\mathrm{F}} \hat{\Lambda}^{-1} = -c\mu_0 J^T \hat{\Lambda}^{-1} \implies$$

$$\implies \partial'^T \hat{\mathrm{F}}' = -c\mu_0 \mathrm{J}'^T$$

Tensor Eletromagnético

– A definição de F̂ utilizada até aqui é dita mista (*mixed-variant*)

$$F^{\mu}_{\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

– A maioria dos textos (Griffiths, por exemplo) utiliza a forma antissimétrica (dita contravariante):

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

– Na última aula, $\hat{\mathrm{F}}$ foi obtido da relação entre a 4-força K^{μ} e a 4-velocidade η^{μ}:

$$K^{\mu} = \frac{q}{c} F^{\mu}_{\nu} \eta^{\nu}$$

– A forma antissimétrica (contravariante) pode ser obtida da relação com a 4-velocidade covariante:

$$K^{\mu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} \eta_{\nu}$$

– Nesse caso, as equações de Maxwell tomam a forma (perceba que ν é o índice das colunas em $F^{\mu\nu}$):

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = c\mu_0 J^{\mu}$$