4302212 – Física IV

Quadrivetores: Exemplos – II

Quadrivetores (4-vetores)

$$\begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$

$$a'^1 = \gamma(-\beta a^0 + a^1)$$

$$a'^2 = a^2$$

$$a'^3 = a^3$$

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu \, a^\nu$$

4-vetores: Exemplos

$$\eta^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx^\mu}{dt}$$

$$p^\mu \equiv m_0 \eta^\mu$$

$$\eta^0 = \frac{c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\eta^1 = \frac{u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\eta^2 = \frac{u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\eta^3 = \frac{u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{E}{c}$$

$$p^1 = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = p_x$$

$$p^2 = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = p_y$$

$$p^3 = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = p_z$$

4-vetor Potência-Força (Quadriforça)

– Vamos introduzir K^μ definido abaixo, com p^μ, $\mathbf{u}$ e t dados no referencial S:

$$K^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dp^\mu}{dt}$$

– É deixado como exercício verificar que K^μ é um 4-vetor (em analogia a η^μ). A componente temporal será:

$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$$

– Rememorando a discussão sobre trabalho e energia cinética (K):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$$

4-vetor Potência-Força (Quadriforça)

– Demais componentes:

$$K^1 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dp^1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}F_x$$

$$K^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dp^2}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}F_y$$

$$K^3 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dp^3}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}F_z$$

– O 4-vetor K^μ também é chamado de **Força de Minkowski**. Perceba que a dinâmica de uma partícula em um dado referencial resulta da força **F** (3-vetor) nesse referencial. Já K^μ é conveniente para transformação entre referenciais.

Tempo próprio

– Intervalo infinitesimal do tempo próprio da partícula ($d\tau$):

$$d\tau = \sqrt{1-(u/c)^2}\,dt$$

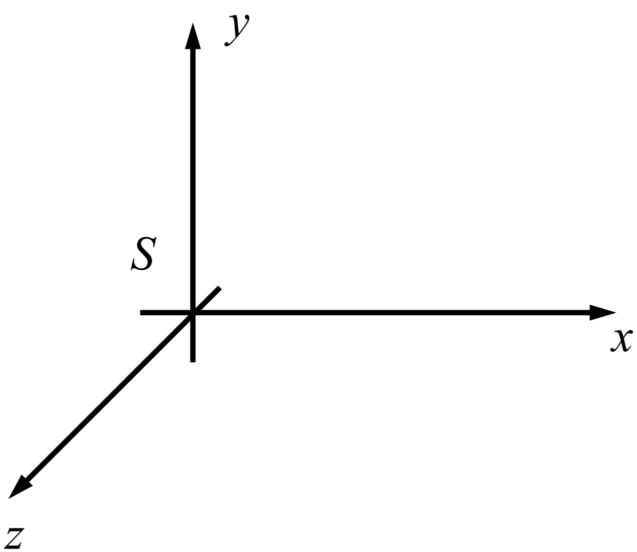
– Assim:

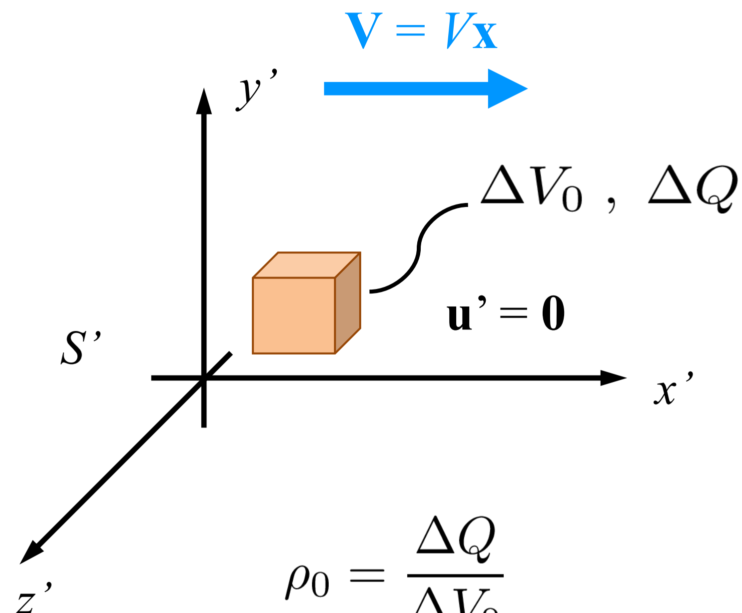
$$\eta^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad p^\mu = m_0\eta^\mu = m_0\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$K^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

– Sendo dx^μ um 4-vetor e $d\tau$ invariante, $\eta^\mu = (dx^\mu/d\tau)$ é um 4-vetor, devendo estar claro que o mesmo argumento vale para p^μ e K^μ.

– Na Relatividade Especial, admitimos que **a carga elétrica é invariante**. Vamos considerar a situação abaixo:





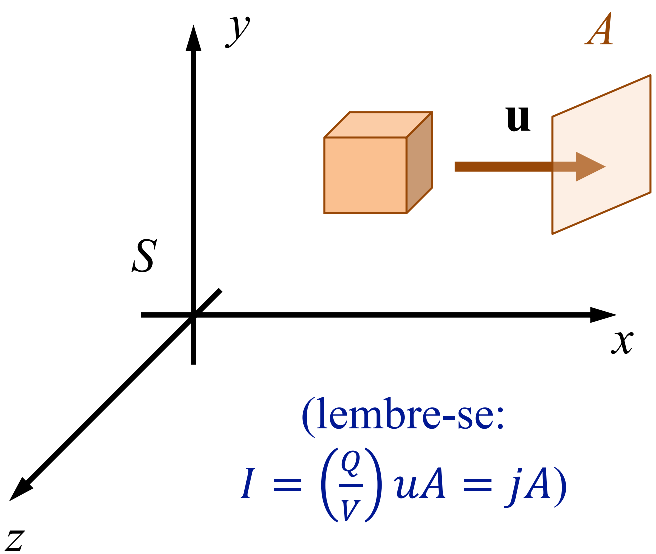
$$\rho_0 = \frac{\Delta Q}{\Delta V_0}$$

Em S, o elemento de carga tem velocidade $\mathbf{u} = \mathbf{V}$ e volume contraído:

ρ_0: densidade de carga própria

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\Delta Q}{\sqrt{1-(V/c)^2}\,\Delta V_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

4-vetor Densidade de Carga e Corrente (4-densidade)



(lembre-se:
$I = \left(\frac{Q}{V}\right) uA = jA$)

– Considerando o plano *Oyz* em *S*, teremos a densidade de corrente (**j**)

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u} = \frac{\rho_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

– Definiremos portanto o **4-vetor densidade de carga e corrente** (é imediato concluir que J^μ é um 4-vetor, pois ρ_0 é invariante):

$$J^\mu \equiv \rho_0 \eta^\mu$$

– Explicitamente, as componentes são:

$$J^0 \equiv \frac{c\rho_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = c\rho$$

$$J^1 \equiv \frac{\rho_0\, u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \rho u_x = j_x$$

$$J^2 \equiv \frac{\rho_0\, u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \rho u_y = j_y$$

$$J^3 \equiv \frac{\rho_0\, u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \rho u_z = j_z$$

4-Gradiente

$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad t = \gamma(t' + Vx'/c^2)$$

– Aplicando a regra da Cadeia às expressões da TL, podemos obter a relação com as derivadas em *S*':

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} \implies \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} \implies \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma(\beta\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})$$

– As derivadas $\left(\frac{1}{c}\right)\partial/\partial t$ e $\partial/\partial x$ **não** se transformam como as componentes de um 4-vetor. Todavia, a TL será respeitada caso o sinal da componente temporal seja invertido.

4-Gradiente

– Definindo $a^0 \equiv -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ e $a^1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, as equações anteriores tomam a forma da TL:

$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$

$$a'^1 = \gamma(-\beta a^0 + a^1)$$

– O 4-gradiente (contravariante) é portanto:

$$\partial^\mu \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Equação da Continuidade

– Rememorando a Equação da Continuidade, que manifesta a conservação da carga elétrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

– Essa equação pode ser expressa em termos de J^μ:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\partial^1 J^1 + \partial^2 J^2 + \partial^3 J^3 - \partial^0 J^0 = 0$$

$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

Equação da Continuidade

$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

– Na expressão acima, $\partial_\nu J^\nu$ é invariante frente à TL (ambos os objetos são 4-vetores), podendo ser interpretado como produto escalar.

– Em vista da invariância, a Equação da Continuidade (conservação da carga) é válida em todos os referenciais inerciais.