4302212 – Física IV

Quadrivetores: Exemplos

Quadrivetores (4-vetores)

$$x^0 \equiv ct$$

$$x^1 \equiv x \ , \quad x^2 \equiv y \ , \quad x^3 \equiv z$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$

$$a'^1 = \gamma(-\beta a^0 + a^1)$$

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu \, a^\nu$$

$$a'^2 = a^2$$

$$a'^3 = a^3$$

Produto Escalar

– Os 4-vetores definidos anteriormente (a^μ) serão ditos **contravariantes**. São também definidos os 4-vetores **covariantes** (a_μ), tal que

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

– O **produto escalar entre 4-vetores**, a_μ e b^μ, é definido como:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$$

– **Exercício**: Mostre que o produto escalar $\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$ é invariante frente à TL.

– Partindo do produto escalar dos 4-vetores transformados:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a'_\mu b'^\mu = -a'^0 b'^0 + a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 + a'^3 b'^3$$

$$= -\gamma(a^0 - \beta a^1)\gamma(b^0 - \beta b^1) + \gamma(-\beta a^0 + \ a^1)\gamma(-\beta b^0 + \ b^1) + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= \gamma^2(1 - \beta^2)(-a^0 b^0 + a^1 b^1) + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

$$= \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$$

– Seja $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ a velocidade de uma partícula no referencial inercial S (as coordenadas espaço-temporais são dadas nesse referencial). Vamos definir o 4-vetor η^μ (quadrivelocidade) segundo

$$\eta^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \frac{dx^\mu}{dt}$$

– Suas componentes podem ser escritas como

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \frac{d(ct)}{dt} = \frac{c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\eta^1 = \frac{u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \,,\ \eta^2 = \frac{u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \,,\ \eta^3 = \frac{u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

– **Exercício**: Verifique que η^μ é de fato um 4-vetor.

– Será deixado como exercício adicional verificar as identidades abaixo (**u**’ e **u** denotam a velocidade da partícula nos referenciais *S*’e *S*):

$$\frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} = \frac{1 - V u_x/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{1 + V u'_x/c^2}{\sqrt{1-(u'/c)^2}\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

– Transformação da componente η^0:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^0_{\nu}\eta^{\nu} = \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) = \gamma\left[\frac{c - \beta u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right] = \frac{c\,(1 - V u_x/c^2)}{\sqrt{1-(V/c)^2}\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} = \eta'^0$$

– Transformação das demais componentes. Vamos introduzir a **notação de Einstein** (soma implícita sobre índices repetidos):

$$\sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^1_\nu \eta^\nu \equiv \Lambda^1_\nu \eta^\nu = \gamma(-\beta\eta^0 + \eta^1) = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}(-V + u_x)$$

$$= \frac{u'_x}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} = \eta'^1$$

(expressão conhecida para transformação de velocidades)

$$\Lambda^2_\nu \eta^\nu = \frac{u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} \frac{u_y(1+Vu'_x/c^2)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} u_y \frac{u'_y}{u_y} = \frac{u'_y}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} = \eta'^2$$

$$\Lambda^3_\nu \eta^\nu = \frac{u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{u'_z}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} = \eta'^3$$

(mesmas passagens utilizadas para u_y)

4-vetor Momento-Energia

– Sendo η^μ um 4-vetor, p^μ definido abaixo para uma partícula com massa própria m_0 também o será (m_0 é invariante frente à TL):

$$p^\mu \equiv m_0 \eta^\mu$$

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{1}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{E}{c}$$

$$p^1 = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = p_x$$

$$p^2 = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = p_y$$

$$p^3 = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = p_z$$

4-vetor Momento-Energia (Quadrimomento)

– A invariância da norma (intervalo) frente à TL garante:

$$p_\mu p^\mu = -(E/c)^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -(E'/c)^2 + p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 = p'_\mu p'^\mu$$

$$E^2 - (pc)^2 = E'^2 - (p'c)^2$$

– O resultado acima garante que **a conservação de energia e momento linear é absoluta** (se vale em um referencial inercial, valerá em todos).