4302212 – Física IV

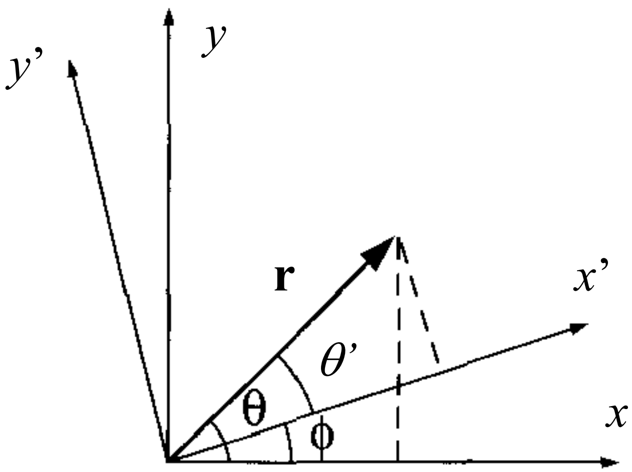
Quadrivetores

Bibliografia:

[1] David. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Ed., chap. 12
[2]. Robert Resnick, *Introdução à relatividade Especial*, cap. 3

Vetores em três Dimensões (3-vetores)

– 3-vetores obedecem à seguinte transformação frente a rotações do sistema de coordenadas (nesse caso, em tordo do eixo *Oz*):



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi \\ -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{R_z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_z^T R_z = R_z R_z^T = 1$$

(matriz ortogonal)

– A rotação preserva a norma do vetor:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (x\cos\phi + y\,\mathrm{sen}\phi)^2 + (-x\,\mathrm{sen}\phi + y\cos\phi)^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Vetores em três Dimensões (3-vetores)

– Em geral:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– Sendo R_{ij} ortogonal, a rotação preserva a norma:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

– Podemos *definir* o 3-vetor (**A**) como um conjunto de três componentes (A_x, A_y, A_z) que se transformam segundo a expressão acima frente a rotações do sistema de coordenadas.

Quadrivetores (4-vetores)

– A transformação de Lorentz (TL) pode ser expressa pela operação de uma matriz 4x4 sobre as quatro componentes do objeto x^μ, onde:

$$x^0 \equiv ct$$

$$x^1 \equiv x \;, \quad x^2 \equiv y \;, \quad x^3 \equiv z$$

– **Exercício**: Verifique que a TL é dada por:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

– Efetuando o produto matricial e utilizando a definição das componentes de x^μ:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \implies t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2} x)$$

$$x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \implies x' = \gamma(x - Vt)$$

$$x'^2 = x^2 \implies y' = y$$

$$x'^3 = x^3 \implies z' = z$$

– Denotando a **matriz da TL** por Λ^μ_ν (μ e o índice das linhas e ν o das colunas), teremos a notação compacta:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu$$

Quadrivetores (4-vetores)

– Definimos um **quadrivetor** (ou **4-vetor**) como um conjunto de componentes a^μ que se transformam segundo a TL:

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu \, a^\nu$$

$$a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1)$$

$$a'^1 = \gamma(-\beta a^0 + a^1)$$

$$a'^2 = a^2$$

$$a'^3 = a^3$$

Produto Escalar

– Por definição, o produto escalar de 3-vetores é invariante frente a rotações:

$$\mathbf{c}' \cdot \mathbf{d}' = c'_x d'_x + c'_y d'_y + c'_z d'_z = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$$

– Os 4-vetores definidos anteriormente (a^μ) serão ditos **contravariantes**. São também definidos os 4-vetores **covariantes** (a_μ), tal que

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

– O **produto escalar entre 4-vetores**, a_μ e b^μ, é definido como:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$$

– **Exercício**: Mostre que o produto escalar $\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$ é invariante frente à TL.

– Partindo do produto escalar dos 4-vetores transformados:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a'_\mu b'^\mu = -a'^0 b'^0 + a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 + a'^3 b'^3$$

$$= -\gamma(a^0 - \beta a^1)\gamma(b^0 - \beta b^1) + \gamma(-\beta a^0 + \ a^1)\gamma(-\beta b^0 + \ b^1) + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= \gamma^2(1 - \beta^2)(-a^0 b^0 + a^1 b^1) + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

$$= \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu$$

– A rotação de 3-vetores tem geometria circular: o lugar geométrico de todos os pontos de norma $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ constante é um círculo (casca esférica)

– A norma do 4-vetor x^μ corresponde à definição anterior de *intervalo* (s):

$$\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - (ct)^2 \equiv s^2$$

– A componente a^0 do 4-vetor é dita **temporal**. Por causa dessa componente, a norma do 4-vetor x^μ tem **geometria hiperbólica** (lugar geométrico dos pontos de mesma norma):

$$s^2 = x^2 - (ct)^2 \quad \text{(hipérbole)}$$

$$s^2 = x^2 + y^2 - (ct)^2 \quad \text{(hiperboloide)}$$

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad \text{(hiper-hiperboloide)}$$