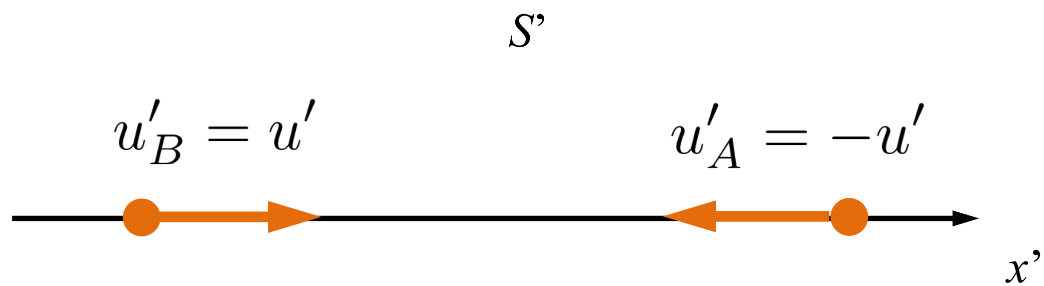
4302212 – Física IV

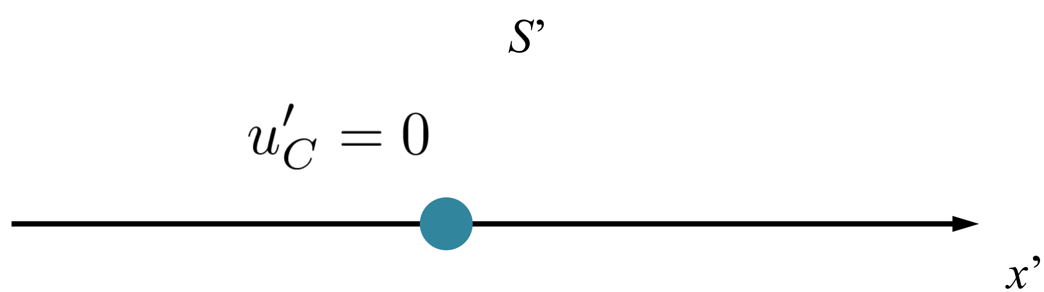
Equivalência Massa-Energia

– Vamos iniciar a discussão da equivalência massa-energia praticando a descrição relativística de colisões. No referencial *S*', vamos a colisão se dá entre duas partículas de mesma massa (própria), com velocidades inicias de mesmo módulo e sentidos opostos na direção *O*'*x*'. A colisão é totalmente inelástica:

(antes)

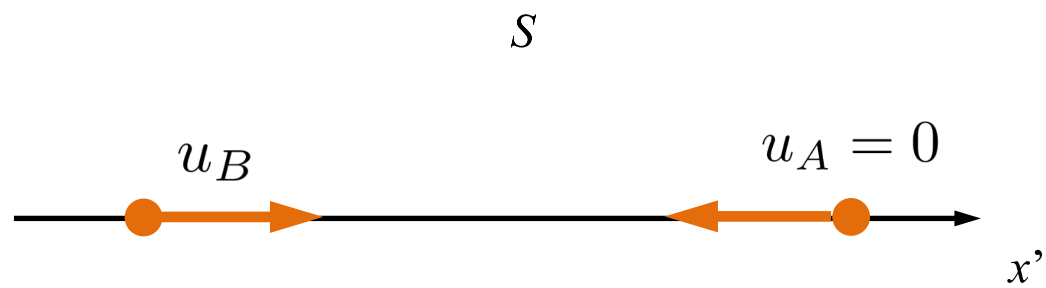


(depois)



– Vamos agora considerar a colisão no referencial *S*. A velocidade de *S*' em relação a *S* é $V = u'$. Recorrendo à TL inversa:

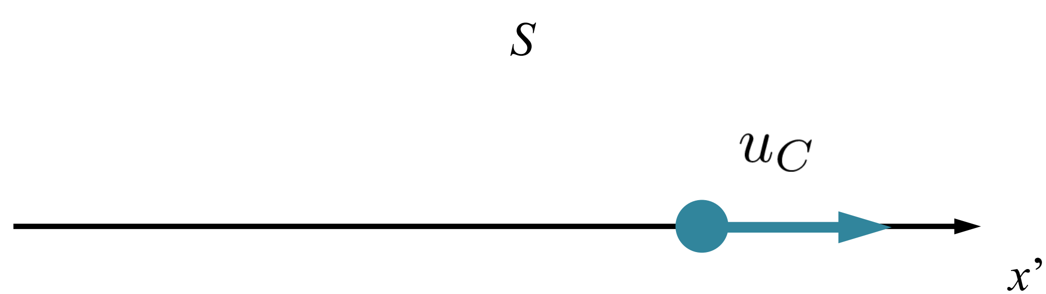
(antes)



$$u_B = \frac{u' + V}{1 + (u'V)/c^2} = \frac{2u'}{1 + (u'/c)^2}$$

$$u_A = \frac{-u' + V}{1 - (u'V)/c^2} = 0$$

(depois)



$$u_C = \frac{0 + V}{1 + (0V)/c^2} = u'$$

– No referencial *S*, vamos impor a conservação do momento linear:

$$m_A \underbrace{\cancel{u_A}}^{0} + m_B u_B = m_c u_c$$

– Além das expressões anteriores para u_B e u_C, vamos utilizar:

$$m_B = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u_B/c)^2}} = \frac{m_0\left[1+(u'/c)^2\right]}{1-(u'/c)^2}$$

– Sendo M_0 a massa de repouso de C:

$$\frac{m_0\left[1+(u'/c)^2\right]}{1-(u'/c)^2}\frac{2u'}{1+(u'/c)^2} = \frac{M_0 u'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} \Longrightarrow M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}$$

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}$$

– Na colisão, as partículas A e B se combinam, criando a partícula C. Interpretamos que a massa própria de C depende da velocidade das partículas A e B (*u*').

$$M_0 - 2m_0 = 2m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} - 1\right) \Longrightarrow M_0 > 2m_0$$

– O referencial *S*' é mais conveniente para a interpretar o resultado, pois C tem apenas energia de repouso. A energia cinética das partículas A e B antes da colisão (em *S*') é

$$K'_A + K'_B = 2m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} - 1\right)$$

Equivalência Massa-Energia

$$K'_A + K'_B = 2m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u'/c)^2}} - 1\right)$$

– Energia de repouso de C:

$$M_0c^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}$$

– *A energia cinética do sistema A-B é incorporada à massa (própria) de C*, que excede a soma das massas próprias de A e B ($M_0 > 2m_0$).

– Ficará como exercício verificar que (i) a energia ($\sum_i m_i c^2$) e (ii) a massa ($\sum_i m_i = \sum_i m_{0i}/\sqrt{1-(u_i/c)^2}$) se conservam em ambos os referenciais, *S* e *S*'.

Equivalência Massa-Energia

– A energia ($E = mc^2$) e a massa ($m = m_0/\sqrt{1-(u/c)^2}$) são quantidades conservadas concomitantemente e relacionadas pela constante universal c^2.

– Nessa medida, massa e energias são *equivalentes*, sendo por vezes referidas como uma só quantidade, *massa-energia*.

– Também há referência à *inércia da energia*, uma vez que a inércia de uma partícula está associada à sua massa (mesmo a massa própria é equivalente à energia, no sentido acima).

– Na relatividade, é comum expressar massas em unidades de energia/c^2 (Mev/c^2, GeV/c^2, etc.).

– **Exercício**: O dêuteron (núcleo do “hidrogênio pesado”) é formado por um próton e um nêutron. Em unidades atômicas de massa ($1\text{ua} = 1.661 \times 10^{-27}\text{kg}$), as massas de repouso são m_{0d} = 2.01360 ua, m_{on} = 1.00867 ua, e m_{0p} = 1.00731 ua (os índices d, n e p se referem ao dêuteron, nêutron e próton, respectivamente).

(a) Verifique que a massa própria do dêuteron é menor que a soma das massas próprias do nêutron e do próton. (b) Admita que um dêuteron em repouso possa decair, formando um próton e um nêutron também praticamente em repouso. Para que tal processo ocorra, é preciso fornecer, no mínimo, qual energia para o dêuteron?

(a) $m_{0p} + m_{0n} = 1.00731 + 1.00867 = 2.01598\text{ua} > 2.01360\text{ua} = m_{0d}$

$$\Delta m_0 = (m_{0p} + m_{0n}) - m_{0d} = 0.00238\text{ua}$$

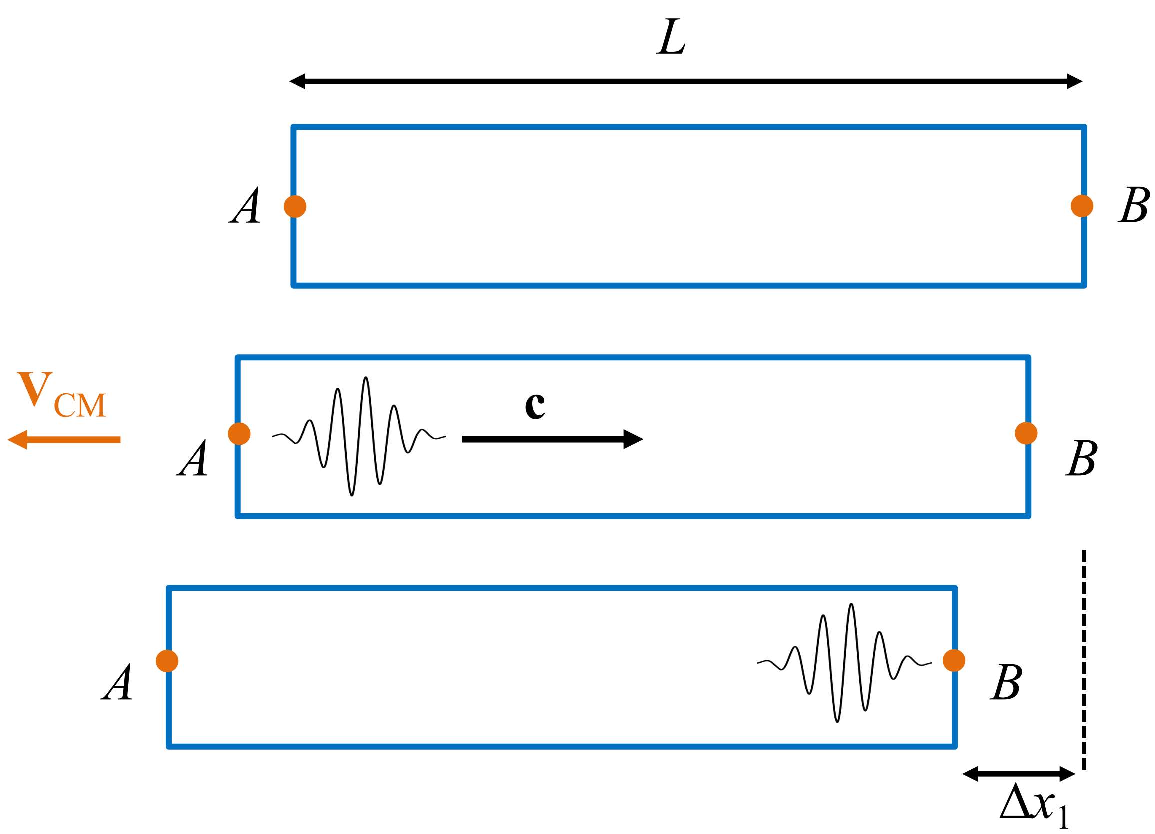
(b) Como a energia dos produtos do decaimento $(m_{0p}c^2 + m_{0n}c^2)$ é maior que a energia do dêuteron $(m_{0d}c^2)$, a conservação da energia exige que uma fonte externa forneça pelo menos

$$E = \Delta m_0 c^2 = (0.00238\text{ua}) \times (1.661 \times 10^{-27}\text{kg/ua}) \times (2.998 \times 10^8\text{m/s})^2$$

$$= 3.553 \times 10^{-13}\,\text{J} = 2.217\,\text{MeV}$$

(esse resultado corresponde à **energia de ligação** do dêuteron, isto é, à energia necessária para dissociá-lo em um próton e um nêutron)

Considere a seguinte experiência imaginada por Einstein. O tubo, com massa M_0 e comprimento L, está em repouso no referencial S, enquanto A e B são corpos com massas desprezíveis frente a M_0. A emite um pulso de radiação EM, que é absorvido por B. Por conservação do momento linear, há recuo do centro de massa (CM) do sistema.



1) De acordo com a discussão sobre ondas EM, o momento linear associado à radiação é tal que $E = pc$.

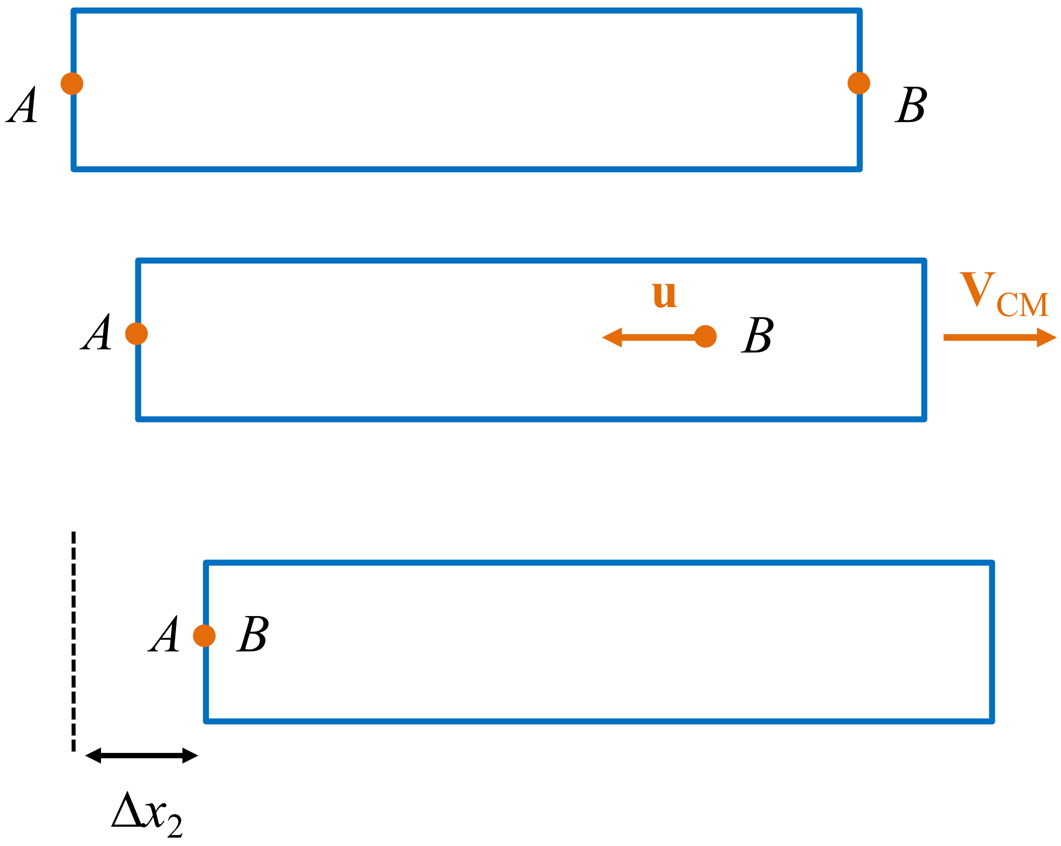
2) A conservação do momento linear exige que a emissão do pulso seja acompanhada de recuo do tubo:

$$\Delta p_{\text{tubo}} = -p_{\text{rad}} = -\frac{E}{c}$$

3) O tempo de emissão/absorção será admitido desprezível frente a $t = L/c$. Enquanto a radiação se propaga de A para B, o recuo do CM (Δx_1) será:

$$\frac{\Delta p_{\text{tubo}}}{M} t = -\frac{E}{Mc}\frac{L}{c} = -\frac{L}{Mc^2}E$$

Após absorver a radiação, *B* se desloca até *A*, em um processo regido por *forças internas*. Novamente haverá recuo do CM.



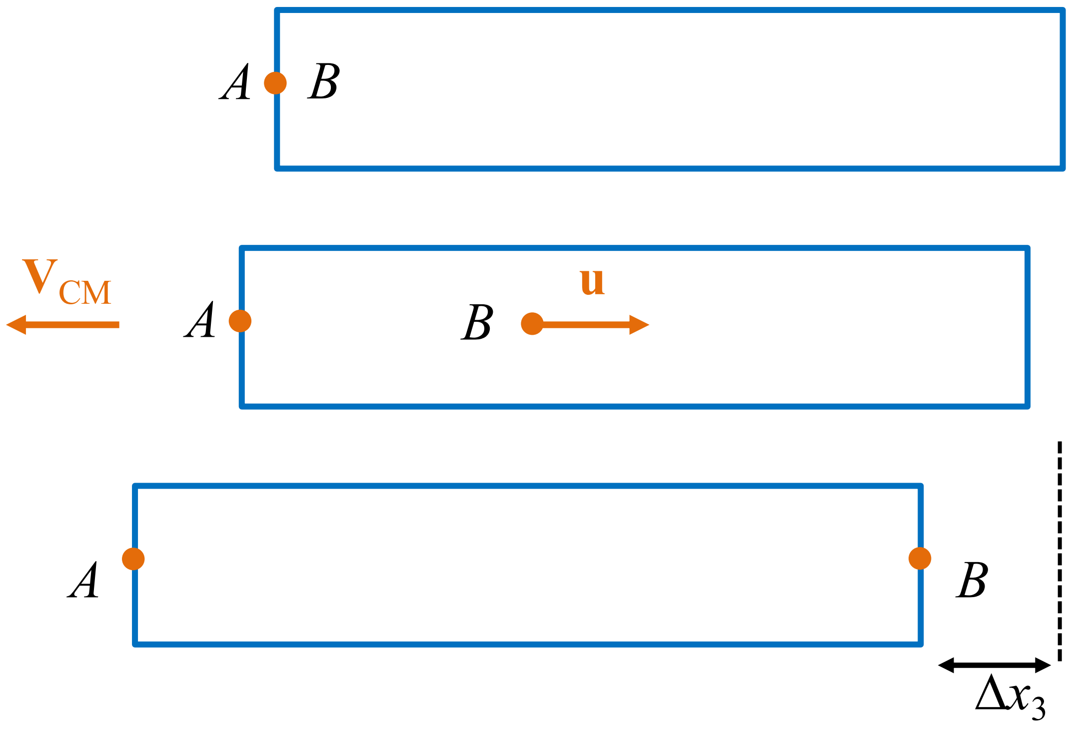
4) Sendo $-u$ a velocidade de B, e m_1 sua massa *após* absorver a radiação. A conservação do momento linear exige que a velocidade de recuo seja

$$V_{CM} = \frac{m_1 u}{M}$$

5) O tempo de do percurso de B é $t_1 = L/u$. O recuo do CM (Δx_2) será:

$$\Delta x_2 = V_{CM} t_1 = \frac{m_1 u}{M} \frac{L}{u} = \frac{m_1}{M} L$$

Após transferir a energia absorvida de volta a A, o corpo B retorna ao outro extremo do tubo. Há, uma vez mais, recuo do CM.



6) Após ceder a energia absorvida a A, a massa de B passa a ser m_2. Por argumentos semelhantes aos utilizados anteriormente, o recuo do CM (Δx_3) será:

$$\Delta x_3 = -\frac{m_2}{M} L$$

7) Não há forças externas sobre o sistema, e a distribuição de energia final é idêntica à inicial (mesmo estado). Assim, a posição final do CM será igual à inicial:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$$

$$E = (m_1 - m_2)c^2$$

A energia absorvida por B corresponde à variação de sua massa, independente da forma como a energia é armazenada em B (térmica, potencial, etc).