4302212 – Física IV

Dinâmica Relativística

Momento Linear

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} m_0 \mathbf{u}}$$

– Na expressão acima, m_0 é a massa própria da partícula, também dita massa de repouso, ou simplesmente *massa*.

– A quantidade $m = m_0/\sqrt{1-(u/c)^2}$ é frequentemente denominada massa relativística. Esse é um conceito controverso, iremos utilizá-lo apenas por conveniência notacional/matemática.

– Também é comum a notação $\gamma = 1/\sqrt{1-(u/c)^2}$, mas cuidado: anteriormente utilizamos a velocidade relativa entre referenciais (V) na definição de γ, enquanto aqui empregamos a velocidade da partícula (u).

Exercício: Admita que no acelerador Sirius (LNLS) elétrons se movam com velocidade $0.991c$. Estime o momento linear dos elétrons utilizando a expressão relativística e seu limite clássico. Dado: massa própria do elétron é $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg e a velocidade da luz $c = 2.998 \times 10^8$ m/s.

https://cnpem.br/ciencia-brasil-inaugura-o-sirius-o-maior-acelerador-de-particulas-de-luz-sincrotron-do-mundo/

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\,v = \frac{(9.109 \times 10^{-31})}{\sqrt{1-(0.991)^2}} \times (0.991 \times 2.998 \times 10^8)$$

$$= 2.02 \times 10^{-21}\,\mathrm{kg.m/s}$$

Limite classico ($u << c$):

$$p_{\mathrm{clas}} = m_0 v = \sqrt{1-(u/c)^2}\,p = 2.71 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg.m/s}$$

Segunda Lei de Newton

– Nem todas as forças são compatíveis com o Princípio da Relatividade, mas a definição do momento linear permite escrever a Segunda Lei para uma partícula de massa (própria) m_0:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right]$$

– Por exemplo, a Força de Lorentz mantém sua forma Clássica na Relatividade. A dinâmica (relativística) de uma partícula de carga q é regida por

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Energia Cinética

– Classicamente, para uma partícula que parte do repouso sob ação de **F**:

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\mathbf{u}} m_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{u}^2 \equiv K$$

– Definimos, portanto:

$$K \equiv \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \int_{m_0}^{m} c^2 \, dm'$$

$$\boxed{K = mc^2 - m_0 c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - 1 \right) m_0 c^2}$$

Energia Cinética

– **Limite Clássico**. Para $u << c$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2$$

$$K \approx \left[\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right) - 1\right] m_0 c^2 \; = \; \frac{1}{2} m_0 u^2$$

Energia e Momento Linear

– **Energia Total** (E) da partícula:

$$E \equiv mc^2 = K + \underbrace{m_0c^2}_{\textbf{Energia de Repouso}}$$

– Energia total e momento linear:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

$$\frac{dE}{dp} = u$$

(verifique que o mesmo resultado vale para uma partícula clássica livre.)

Exercício: (a) Obtenha a energia de repouso do elétron, lembrando que $m_e = 9.109\times10^{-31}$ kg e $c = 2.998\times10^{8}$ m/s. Expresse sua resposta em elétron-volt (eV): $1\text{eV} = 1.602\times10^{-19}$J.

(b) Admita que, no acelerador Sirius, a velocidade dos elétrons seja aumentada de $0.991c$ para $0.999c$. Em quanto variam a energia total e a energia cinética dos elétrons?

(a)

$$m_0c^2 = \frac{(9.109 \times 10^{-31}\text{kg})(2.998 \times 10^{8}\text{m/s})^2}{1.602 \times 10^{-19}\text{J/eV}}$$

$$= 0.511\,\text{MeV}$$

(b)

$$E_1 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u_1/c)^2}} = \frac{0.511}{\sqrt{1-0.991^2}} = 3.82\,\text{MeV}$$

$$E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u_2/c)^2}} = \frac{0.511}{\sqrt{1-0.999^2}} = 11.4\,\text{MeV}$$

$$\Delta E = (E_2 - E_1) = 7.6\,\text{MeV}$$

$$\Delta K = \Delta E + \cancelto{0}{\Delta(m_0c^2)} = 7.6\,\text{MeV}$$