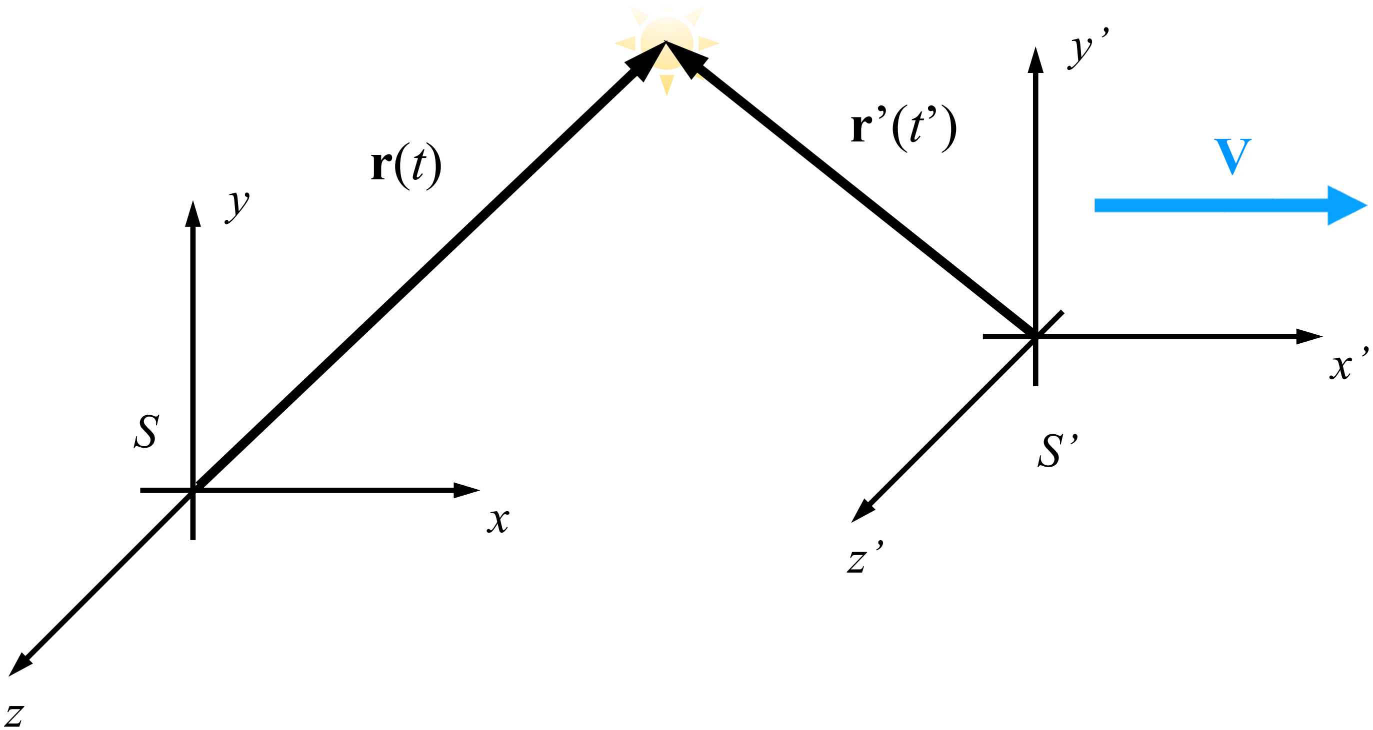
4302212 – Física IV

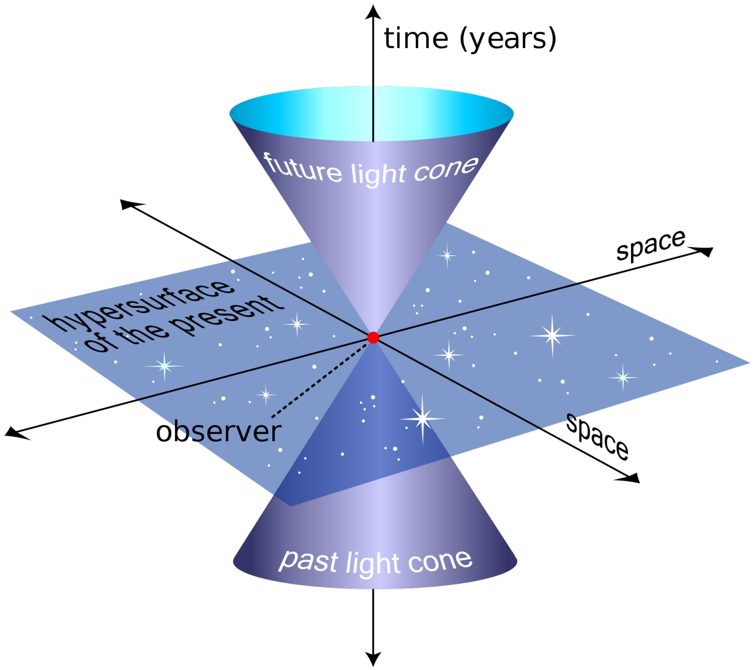
Efeito Doppler



Vamos considerar o movimento da partícula em relação ao referencial S', que se move com velocidade **V** = V**x** em relação a S:

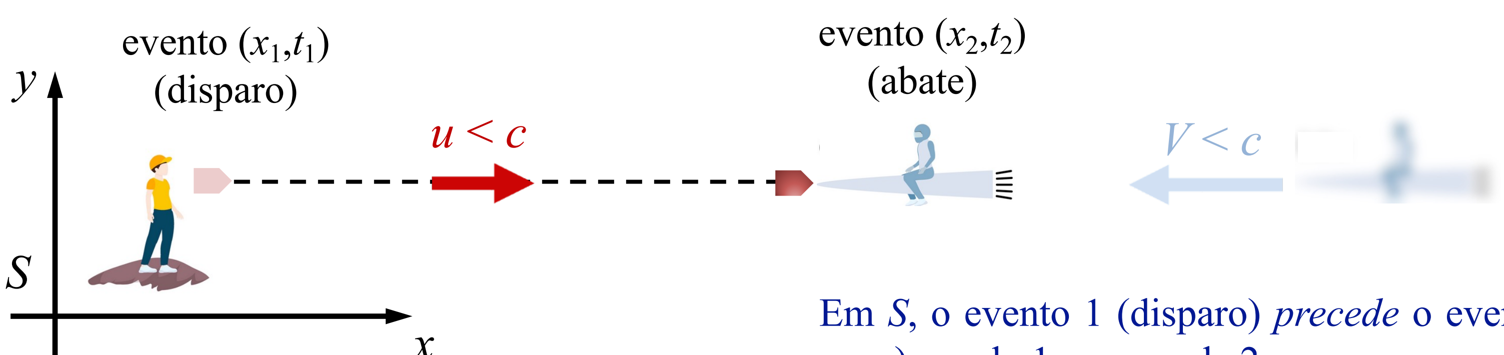
$$v'_x = \frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}$$

$$|\mathbf{r}| < c|t| \begin{cases} t > 0: \quad t' = \gamma(t - \dfrac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2}) > \gamma(t - \beta t) \implies t' > \gamma(1-\beta)t > 0 \\[2ex] t < 0: \quad t' = \gamma(t - \dfrac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2}) < \gamma(-|t| + \beta|t|) \implies t' < -\gamma(1-\beta)|t| < 0 \end{cases}$$



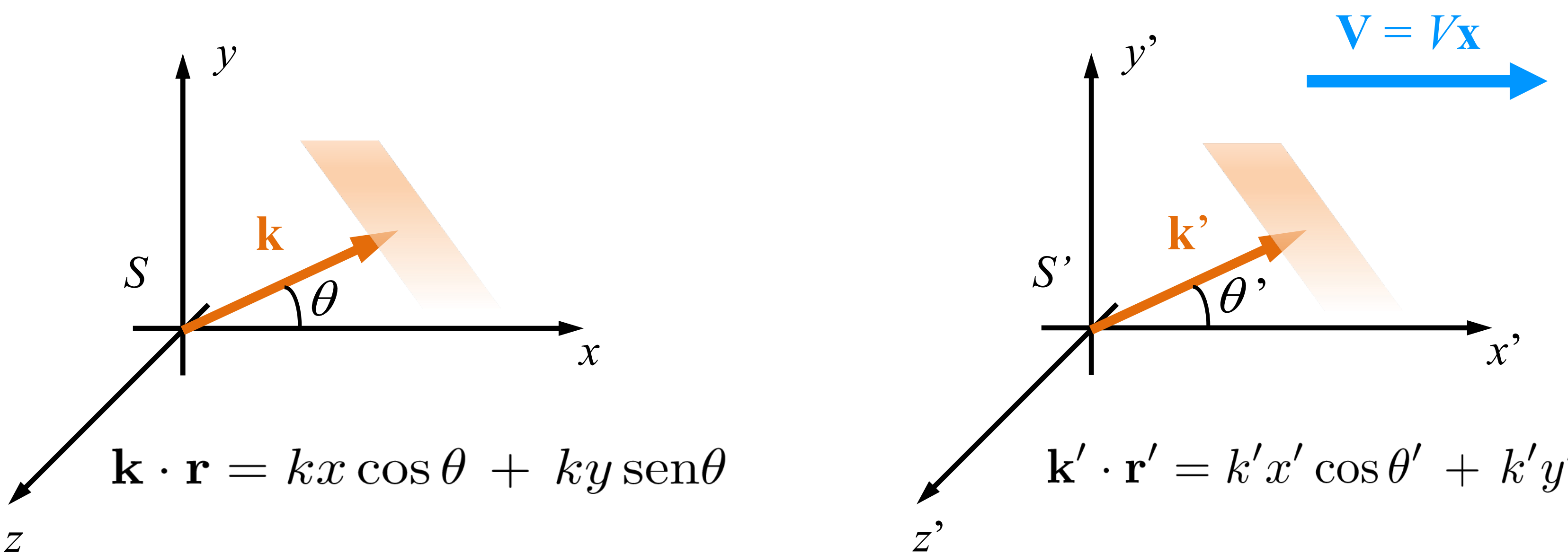
$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) = \gamma\left(1 - \frac{Vu}{c^2}\right)t$$

(t' e t terão sinais diferentes, caso $Vu > c^2$)



Em S, o evento 1 (disparo) *precede* o evento 2 (abate da nave), sendo 1 a *causa* de 2.

Onda EM Plana, Monocromática



$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx\cos\theta \; + \; ky\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' = k'x'\cos\theta' \; + \; k'y'\,\mathrm{sen}\theta'$$

A TL é linear, de forma que uma frente de onda plana em *S*' será transformada em uma frente de onda plana em *S*.

Iremos considerar a fase da onda EM em *S*', e sua transformação para *S*. Por conveniência a constante de fase será admitida nula:

$$(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t') \;=\; 2\pi \left[\frac{x' \cos\theta' + y' \,\mathrm{sen}\theta'}{\lambda'} - \nu' t' \right]$$

$$= \; 2\pi \left[\frac{\gamma(x - Vt)\cos\theta' + y\,\mathrm{sen}\theta'}{\lambda'} - \nu'\gamma(t - Vx/c^2) \right] \;\equiv\; 2\pi \left[\frac{x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\theta}{\lambda} - \nu t \right]$$

Portanto:

$$\gamma \left[\frac{\cos\theta' + \beta}{\lambda'} \right] \;=\; \frac{\cos\theta}{\lambda} \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\mathrm{sen}\theta'}{\lambda'} \;=\; \frac{\mathrm{sen}\theta}{\lambda} \qquad \text{(ii)}$$

$$\gamma\nu' \left[1 + \beta\cos\theta' \right] \;=\; \nu \qquad \text{(iii)}$$

Ainda:

$$\lambda'\nu' \;=\; \lambda\nu \;=\; c \qquad \text{(iv)}$$

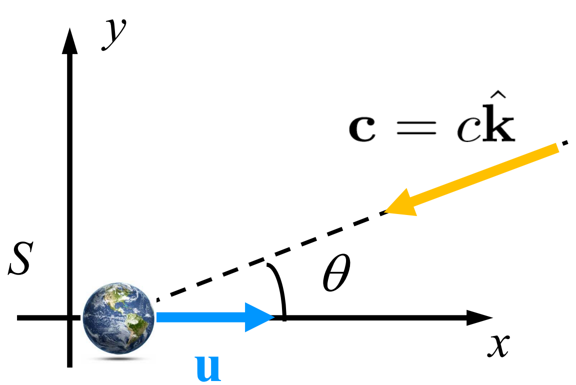
Aberração da Luz

Dividindo (ii) por (i):

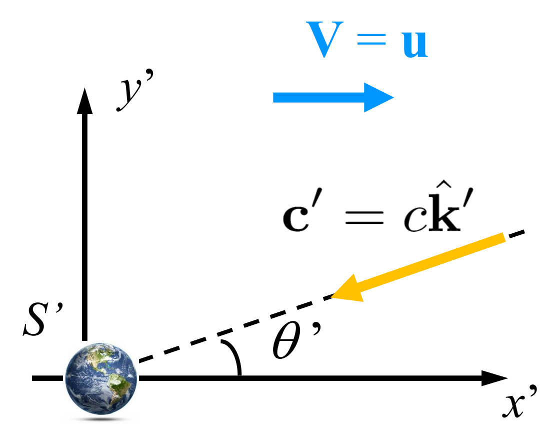
$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta'}{\gamma(\cos\theta' + \beta)} \quad \text{ou} \quad \text{tg}\theta' = \frac{\text{sen}\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

(TL inversa)

As expressões acima correspondem ao efeito de **Aberração da Luz** (efeito do movimento do observador sobre a posição aparente da fonte de luz):



(Em S, a Terra se move com velocidade **u**)



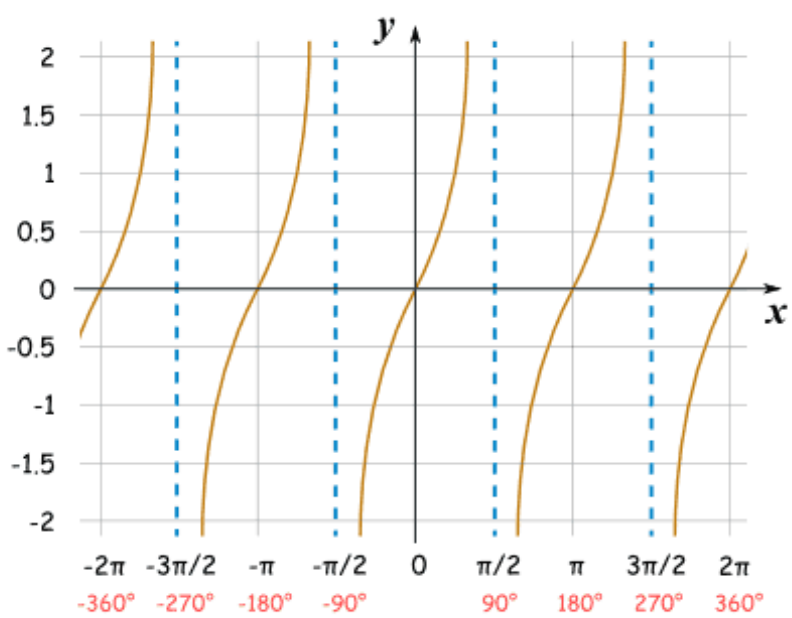
(Em S', a Terra está em repouso)

Aberração da Luz

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{sen}\theta'}{\gamma(\cos\theta' + \beta)} \quad \text{ou} \quad \mathrm{tg}\theta' = \frac{\mathrm{sen}\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

A **Aberração Clássica** é um caso particular da expressão relativística: primeira ordem em β. Para uma estrela no zênite ($\theta = \pi/2$):

$$\mathrm{tg}\theta' = \frac{-1}{\gamma\beta} \approx -\frac{c}{V}$$



(θ' ligeiramente maior que $\pi/2$)

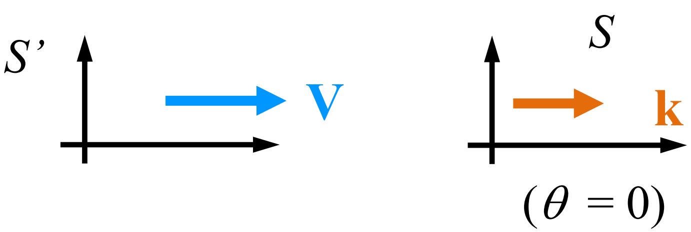
$$\frac{c}{V} \approx \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^4} = 10^4$$

Efeito Doppler

A expressão (iii) corresponde ao **Efeito Doppler Relativístico**. Para definir ângulos em relação ao observador (*S*), vamos utilizar a TL inversa:

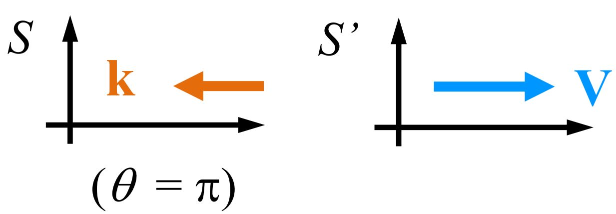
$$\nu' = \nu\,[1 - \beta\cos\theta]$$

Efeito Doppler Longitudinal:



$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}$$

(observador em *S* vê a fonte se aproximando)



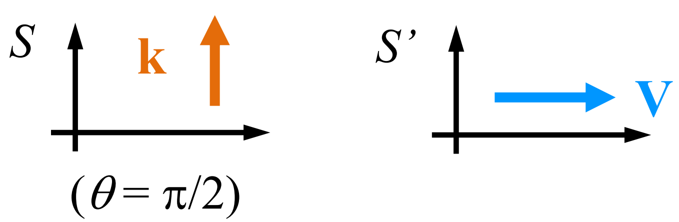
$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}$$

(observador em *S* vê a fonte se afastando)

Limite Clássico: $\nu = \nu'\left(1 \pm \dfrac{V}{c}\right)$

Efeito Doppler

Efeito Doppler Transversal (não há análogo clássico): Considerando a emissão perpendicular no referencial do observador ($\theta = \pi/2$), vamos utilizar a TL inversa, $\nu' = \nu\gamma(1-\beta\cos\theta)$:



$$\nu = \frac{1}{\gamma}\nu'$$ (corresponde à dilatação temporal)

– O Efeito Doppler (Longitudinal e Transversal) é confirmado experimentalmente: Ives e Stilwell (1938, 1941), Kundig (1939).

– Galáxias distantes: desvio para o vermelho ($\nu < \nu'$)

– Hubble (1929): Universo em expansão.

Paradoxo dos Gêmeos

O (falso) paradoxo dos gêmeos se baseia na dilatação temporal. Um gêmeo (João) permanece na Terra, enquanto o outro (José) parte em viagem e retorna à Terra.

Como há movimento relativo entre eles, qualquer um poderia considerar-se "estacionário", enquanto o outro se movimenta ("relógio biológico" em atraso).

Ao se reencontrarem, qual dos dois estaria mais velho? Ambos !?!?

Paradoxo dos Gêmeos

– A situação *não é simétrica*, pois João permanece em repouso, enquanto José necessariamente passa por períodos de aceleração (partida, mudança de direção/sentido, chegada). A aceleração de um referencial pode ser percebida (ao contrário da velocidade). *José pode concluir que sua nave não é um referencial inercial*.

– Poderemos desconsiderar os períodos de aceleração admitindo que os períodos de viagem em movimento uniforme são muito longos. Ainda assim existe uma assimetria: *João permanece sempre no mesmo referencial inercial, enquanto o movimento de José define dois referenciais inerciais* (ida com velocidade **V**, volta com velocidade –**V**).

– Portanto não nos deparamos com as situações estudadas até aqui, seja por haver aceleração de um dos referenciais (não inercial), seja por *compararmos o tempo decorrido em um referencial ao tempo em dois referenciais*.

Vamos considerar:

– Movimento unidimensional.

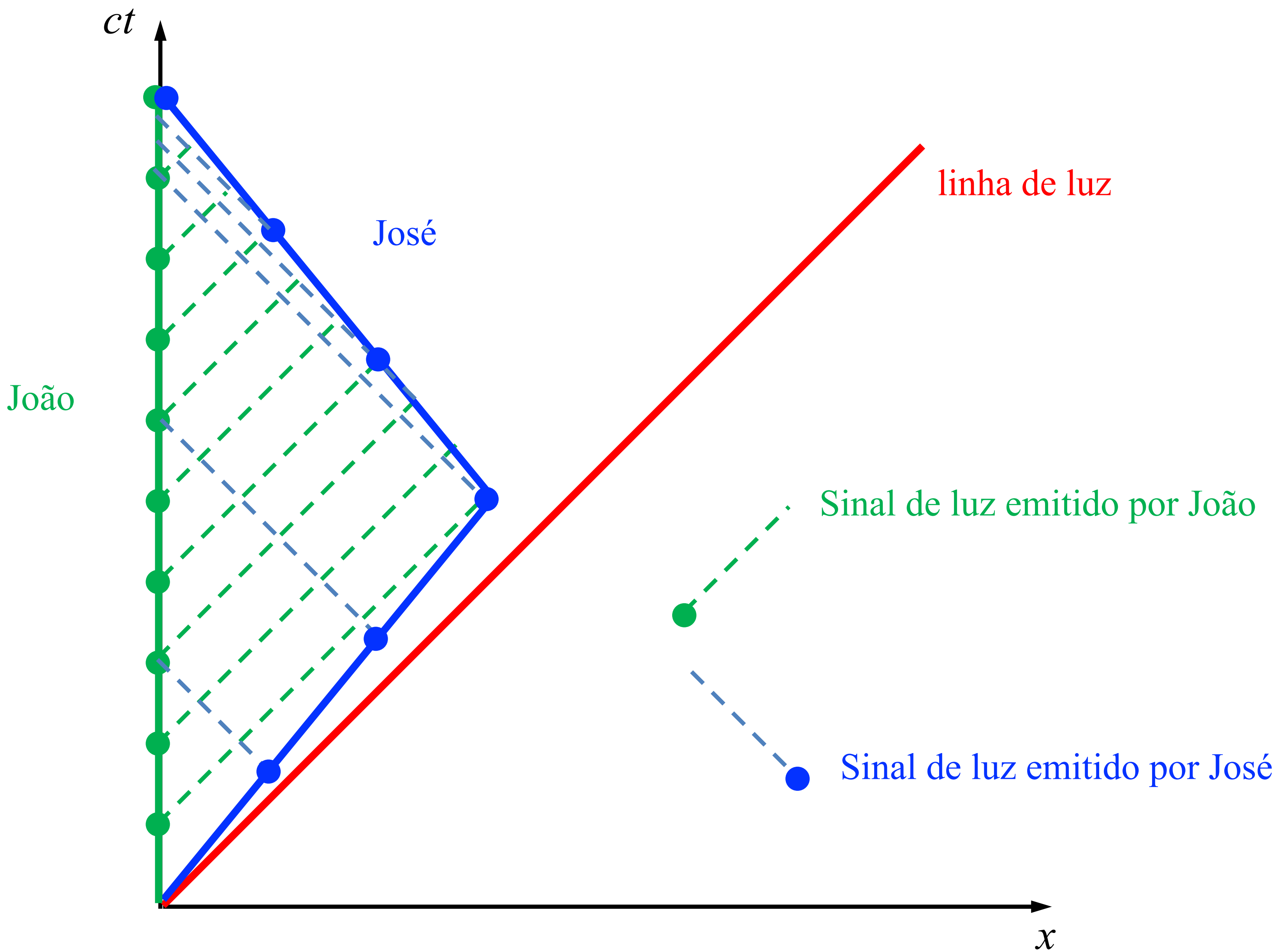
– Períodos de aceleração desprezíveis.

– Velocidades dos referenciais: $V = \pm 0.8c$ (ida e volta), $\gamma = (\frac{1}{0.6})$.

– Iremos descrever a situação no referencial de João (“estacionário”), no qual podemos aplicar a Relatividade Especial trivialmente.

– A viagem dura 6 anos no referencial de José (tempo próprio da nave, 3 anos de ida e outros 3 de retorno), e 10 anos no referencial de João.

– A cada ano (tempo próprio na Terra, *S*), João emite um sinal de luz para José. A cada ano (tempo próprio da nave, *S*’), José emite um sinal de luz para João.



(Baseados nas contagens dos sinais de luz emitidos/recebidos, os gêmeos *concordam*: se passaram 10 anos para João e 6 para José)

Seja ν' a frequência com que José emite sinais de luz (1 ano^{-1} em *S*'). Na viagem de ida, a nave é uma fonte que se afasta:

$$\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu' = \sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}}\,\nu' = \frac{\nu'}{3}$$

Já na viagem de volta (fonte se aproxima):

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu' = \sqrt{\frac{1+0.8}{1-0.8}}\,\nu' = 3\nu'$$

Os mesmos fatores Doppler (1/3 na ida e 3 na volta) se aplicam a José, entendendo que João seja a fonte dos sinais de luz. Volte ao diagrama espaço-temporal e perceba que a frequência de recebimento dos sinais, tanto na Terra quanto na nave, são compatíveis com o efeito Doppler.