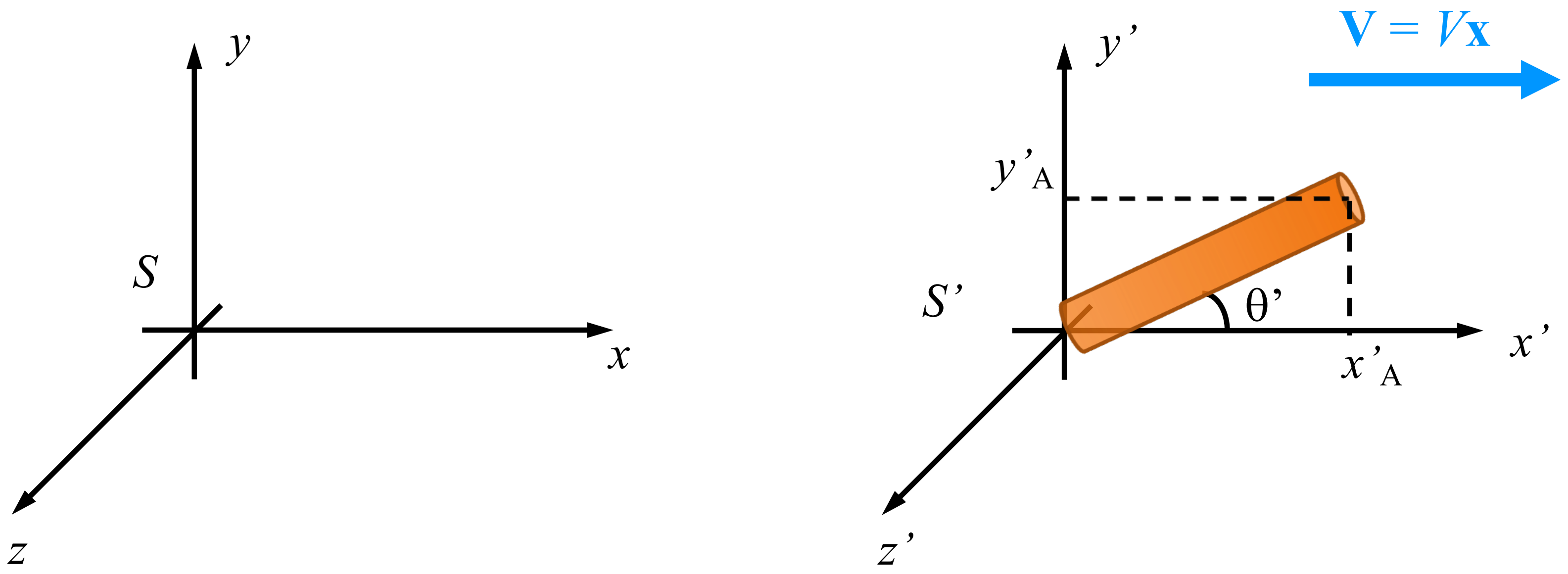
4302212 – Física IV

Transformação das Velocidades



Qual o ângulo θ entre a barra e a direção Ox no referencial S? Expresse o resultado em termos do ângulo medido no referencial próprio da barra, θ'.

No referencial *S*’, podemos expressar

$$\mathrm{tg}(\theta') = \frac{y'_A}{x'_A} \implies \theta' = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y'_A}{x'_A}\right)$$

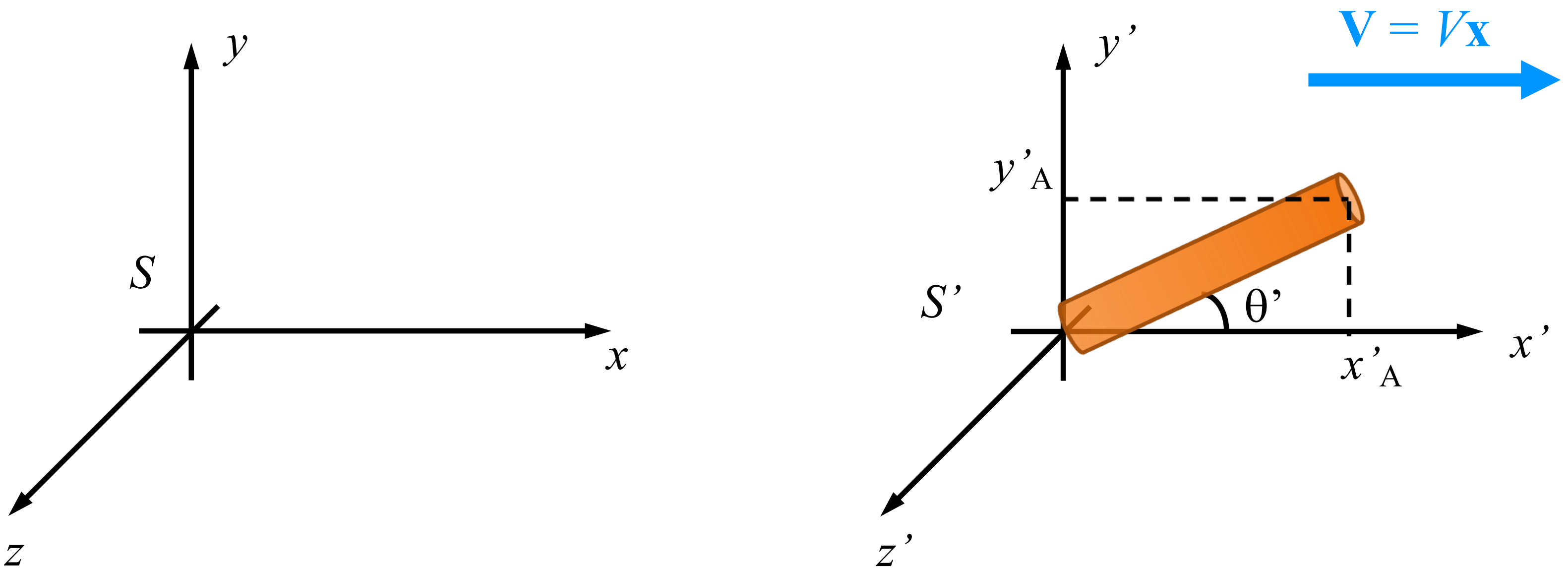
Denotando por $x_{O'}$ e $x'_{O'}$ as posições da origem *O*’ nos referenciais *S* e *S*’, teremos:

$$x'_A - \cancelto{0}{x'_{O'}} = \gamma(x_A(t) - Vt) - \gamma(x_{O'}(t) - Vt) = \gamma(x_A(t) - x_{O'}(t))$$

$$y_A(t) = y'_A$$

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{y_A}{(x_A(t) - x_{O'}(t))} = \frac{\gamma y'_A}{x'_A} \implies \theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma y'_A}{x'_A}\right)$$

$$\mathrm{tg}(\theta) = \gamma\,\mathrm{tg}(\theta')$$

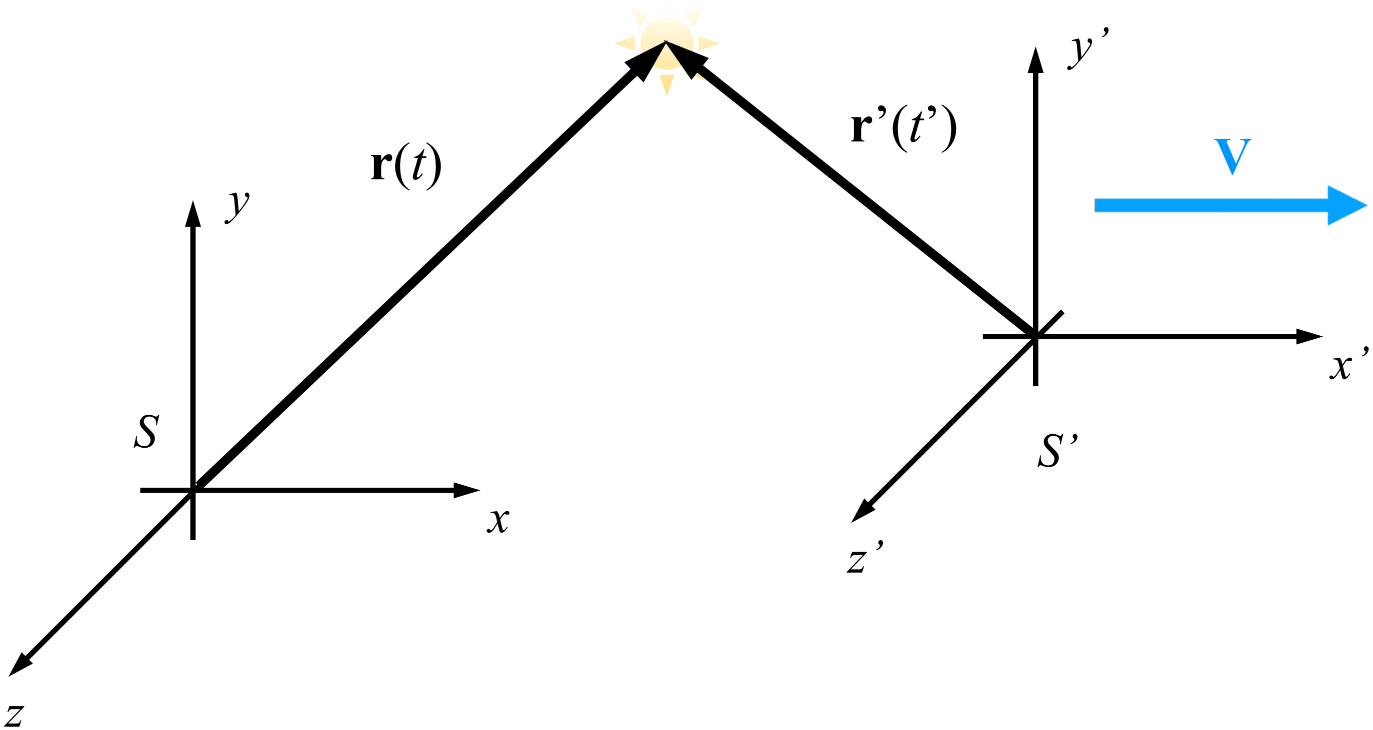


Obtenha a relação entre os comprimentos da barra nos referenciais *S* e *S*'.

No referencial *S'*, o comprimento *l'* é próprio. Vamos simplificar a notação utilizando Δx e $\Delta x'$ para a projeção da barra sobre a direção *x*:

$$l^2 = (\Delta x)^2 + (y_A)^2 = \left(\frac{\Delta x'}{\gamma}\right)^2 + (y'_A)^2 = l'^2 - \beta^2(\Delta x')^2$$

$$l = l'\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2(\theta')}$$



Vamos considerar o movimento da partícula em relação ao referencial *S*', que se move com velocidade **V** = *V***x** em relação a S:

$$x'(t') \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$y'(t') \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'}$$

$$z'(t') \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

1) Componentes de velocidade em *S*:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

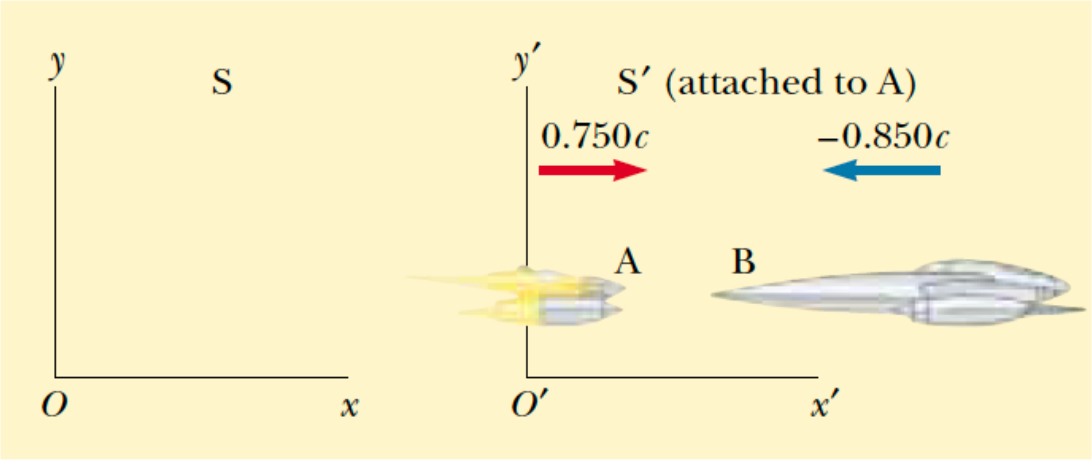
2) Transformação dos intervalos infinitesimais:

$$dx' = \gamma(dx - Vt)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}x\right)$$

3) Transformação das velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)}$$



Exercício: Duas naves, A e B, têm velocidades escalares $v_A = 0.750c$ e $v_B = 0.850c$ em relação à Terra. Qual a velocidade da nave B em relação à nave A?

Iremos considerar a Terra como o referencial S, enquanto a nave A como o referencial S' que se movimenta com velocidade $V = 0.750c$ em relação a S. Assim, vamos transformar $v_{\mathrm{Bx}} = -0.850c$ para S':

$$v'_{Bx} = \frac{v_{Bx} - V}{(1 - \frac{V}{c^2} v_{Bx})} = \frac{-0.850c - 0.750c}{(1 + 0.750 \times 0.850)} = -0.977c$$

OBS1: No referencial da Terra (S), a velocidade relativa entre as naves é $v_{\mathrm{BA}} = |v_{Bx} - v_{Ax}| > c$. Todavia, as velocidades individuais em relação à Terra são menores que a velocidade da luz.

OBS2: A velocidade de B em relação a A, no referencial de A (S'), também é menor do que c. Essa propriedade é garantida pela TL em geral (caso contrário, a nave poderia ser mais rápida que a luz em algum referencial inercial).

Intervalos e Causalidade

O **quadrado do intervalo** entre os eventos ($\mathbf{r}_1$, t_1) e ($\mathbf{r}_2$, t_2), no referencial S, é dado por

$$s_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

Por conveniência, vamos tomar a origem no evento 1, de forma que ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$, $t_1 = 0$) e ($\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, $t_2 = t$):

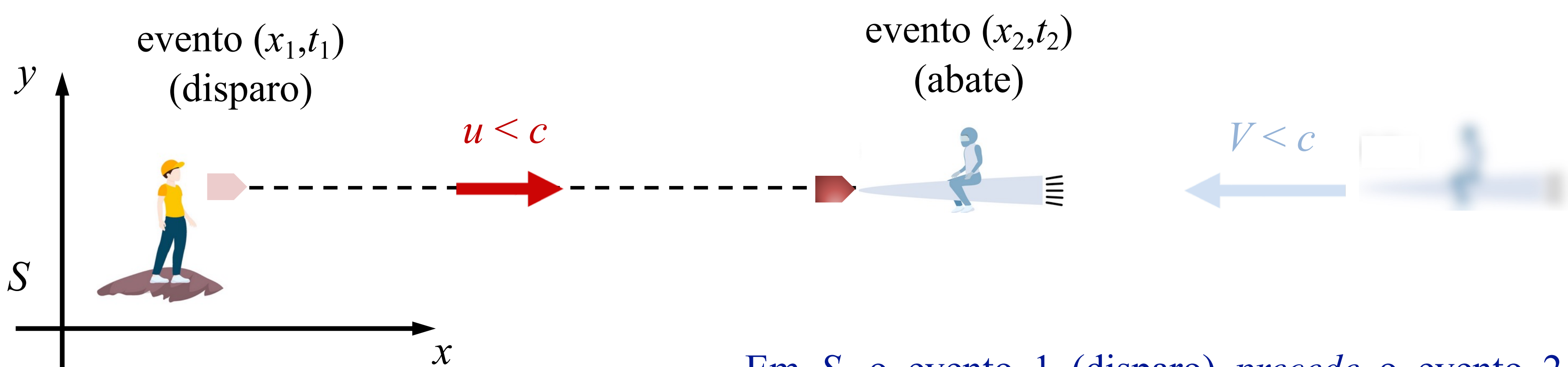
$$s_{12}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

Por construção, $(s_{12})^2$ é invariante frente à TL (propriedade imposta à transformação). Assim, o sinal de $(s_{12})^2$ também é invariante frente à TL (o sinal é o mesmo em todos os referenciais inerciais).

1) Admitindo $(s_{12})^2 < 0$:

$$x^2 + y^2 + z^2 < c^2 t^2 \implies |\mathbf{r}| < c|t| \implies \begin{cases} t > |\mathbf{r}|/c & (t > 0, \text{ isto é, } \ t_2 > t_1) \\ t < -|\mathbf{r}|/c & (t < 0, \text{ isto é, } \ t_2 < t_1) \end{cases}$$

1.a) Em ambos os casos, a distância entre os pontos em que ocorrem os eventos ($|\mathbf{r}|$) é *menor* que a distância percorrida pela luz ($c|t|$). Admitindo $t > 0$, evento 1 *precede* o evento 2, de modo que 1 pode *causar* 2:



Em S, o evento 1 (disparo) *precede* o evento 2 (abate da nave), sendo 1 a *causa* de 2.

1.b) Recordando a forma geral da TL, podemos considerar a transformação dos eventos para um referencial *S*':

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2}\right)$$

$$-|\mathbf{V}||\mathbf{r}| \leq \mathbf{V}\cdot\mathbf{r} \leq |\mathbf{V}||\mathbf{r}|$$ (prod. escalar)

$$-\beta|t| < \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2} < \beta|t|$$ (pois $|\mathbf{r}| < c|t|$)

Considerando $t > |\mathbf{r}|/c > 0$, o evento 1 é o *passado absoluto* (em todos os referenciais inerciais) do evento 2. Caso $t < -|\mathbf{r}|/c < 0$, o evento 1 será o *futuro absoluto* do evento 2:

$$t > 0: \quad t' = \gamma(t - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2}) > \gamma(t - \beta t) \implies t' > \gamma(1-\beta)t > 0$$

$$t < 0: \quad t' = \gamma(t - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}}{c^2}) < \gamma(-|t| + \beta|t|) \implies t' < -\gamma(1-\beta)|t| < 0$$

1.c) Vamos *supor* que possa haver velocidades superiores à velocidade da luz. Isso inverteria o sinal do quadrado do intervalo:

$$|\mathbf{r}| > c|t| \implies s_{12}^2 > 0$$

Para o caso $t > 0$, vamos admitir $V < c$ (velocidade relativa entre S e S'), mas $u = dx/dt > c$ (objeto mais rápido que a luz no referencial S):

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) = \gamma\left(1 - \frac{Vu}{c^2}\right)t$$

(t' e t terão sinais diferentes, caso $Vu > c^2$)

Portanto, $u > 0$ permite *violar a relação de causalidade* em outro referencial suficientemente rápido ($Vu > c^2$). *A velocidade da luz é o limite de propagação de qualquer sinal ou movimento* (causalidade).

Diagrama de Minkowski (Espaço-Tempo)

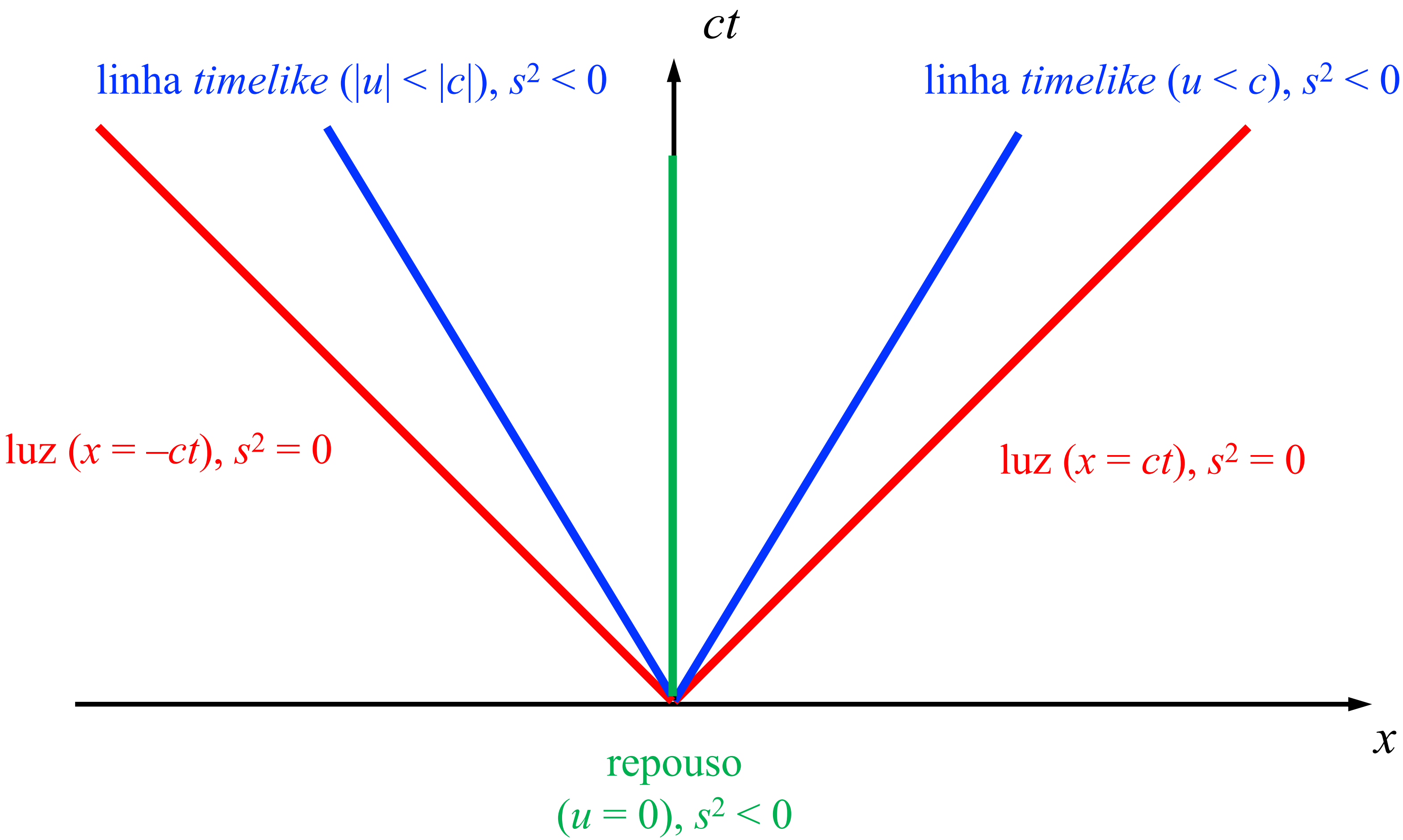
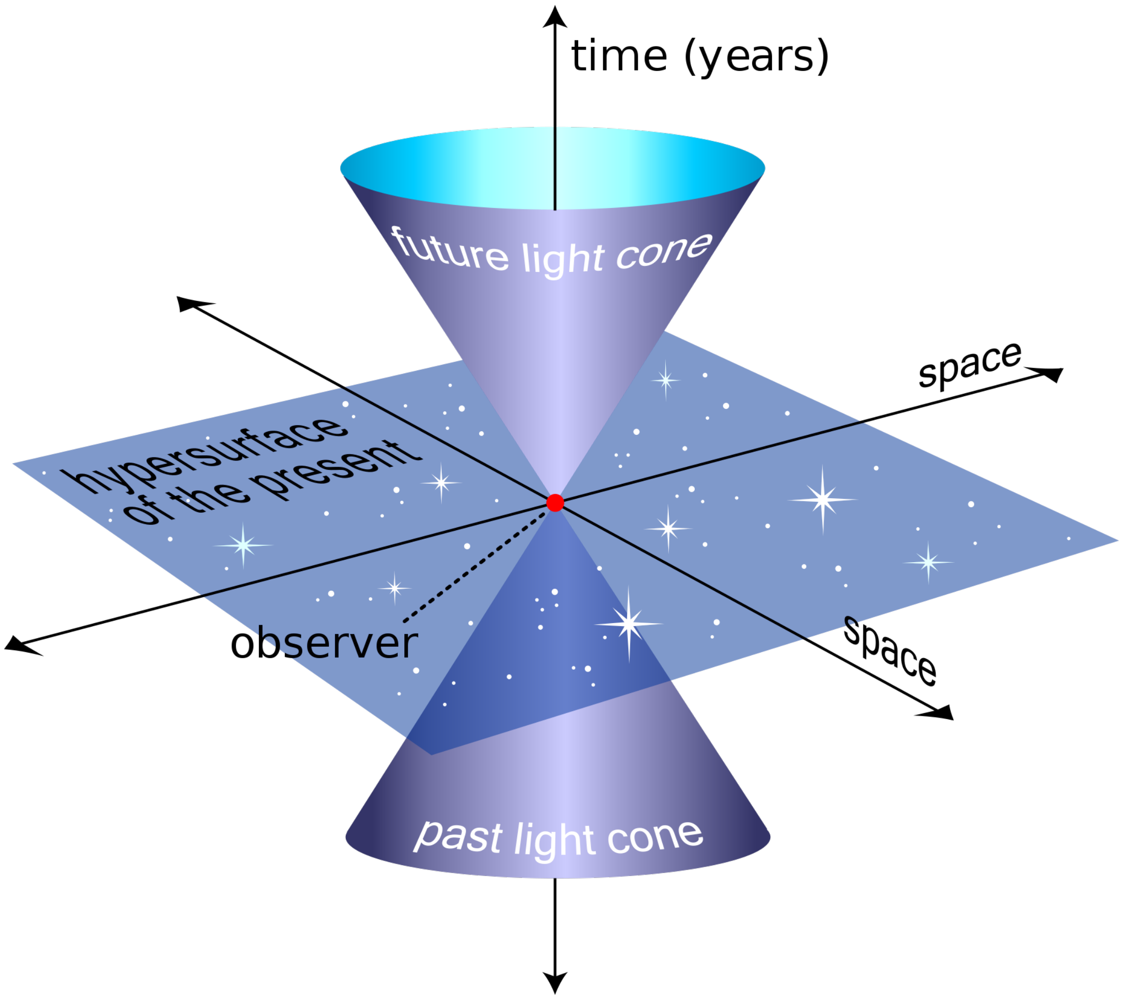


Diagrama 3D (Cone de Luz)



https://in.pinterest.com/pin/825214331698352330/