4302212 – Física IV

Polarização – III

Equações de Maxwell

Vácuo: ausência de cargas ($\rho = 0$) e correntes ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$) livres:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Dielétricos: ausência de cargas ($\rho = 0$) e correntes ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$) livres:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ondas EM em Meios Dielétricos

Em vista das equações de Maxwell, todos os resultados discutidos anteriormente para o vácuo valerão em dielétricos, desde que

$$\mu_0 \to \mu \;\; ; \;\; \epsilon_0 \to \epsilon$$

Equação de Onda: Abaixo, indicamos as componentes $i = x, y, z$

$$\nabla^2 E_i - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 B_i - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = 0$$

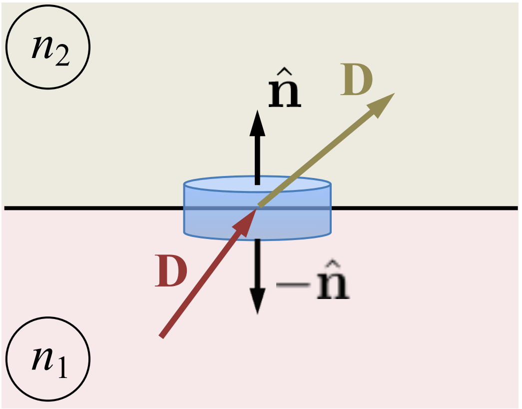
Velocidade de Propagação: Para vários materiais, $\mu \approx \mu_0$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \approx \sqrt{\kappa}$$

(índice de refração resulta da polarização dielétrica)

Condições de Contorno



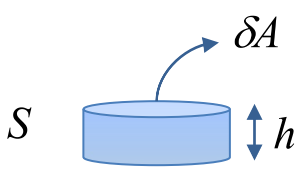
Interface entre dois meios dielétricos e lineares na ausência de cargas ($\rho = 0$) e correntes ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$) livres.

Lei de Gauss ($\rho = 0$):

$$\lim_{h\to 0} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0$$

$$\epsilon_2 E_2^\perp = \epsilon_1 E_1^\perp$$

Superfície gaussiana muito estreita:



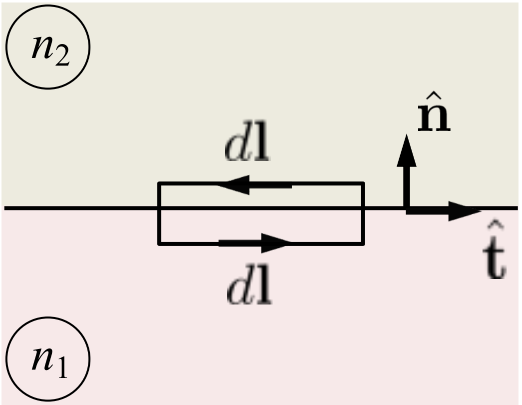
$h \to 0$

Inexistência de monopólios magnéticos:

$$\lim_{h\to 0} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0$$

$$B_2^\perp = B_1^\perp$$

Condições de Contorno



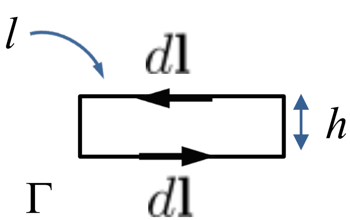
Lei de Faraday:

0, pois $h \to 0$

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \cancel{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA$$

$$E_1^{||} = E_2^{||}$$

Circuito amperiano muito estreito:



$h \to 0$

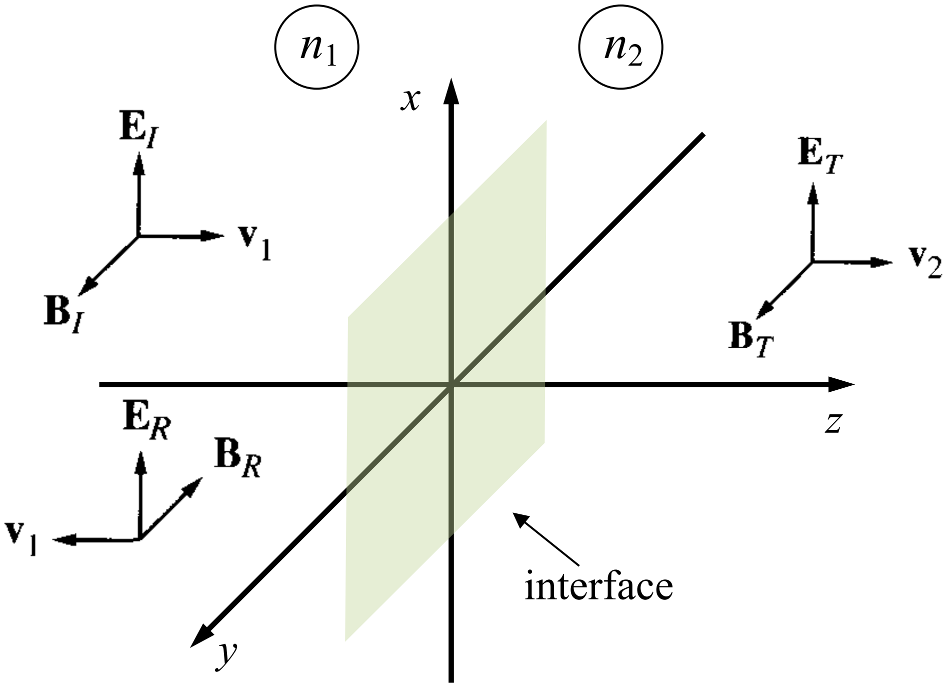
Lei de Ampère-Maxwell ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$) :

0, pois $h \to 0$

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\int_S \cancel{\mathbf{D}}\cdot\hat{\mathbf{n}}dA$$

$$\frac{1}{\mu_1}B_1^{||} = \frac{1}{\mu_2}B_2^{||}$$

Incidência Normal



Onda incidente:

$$\mathbf{E}_I(z,t) = A_I e^{i(k_1 z - \omega t + \delta)}\,\hat{\mathbf{x}}$$
$$= \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{B}_I(z,t) = \frac{1}{v_1}\tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}}$$

Onda transmitida:

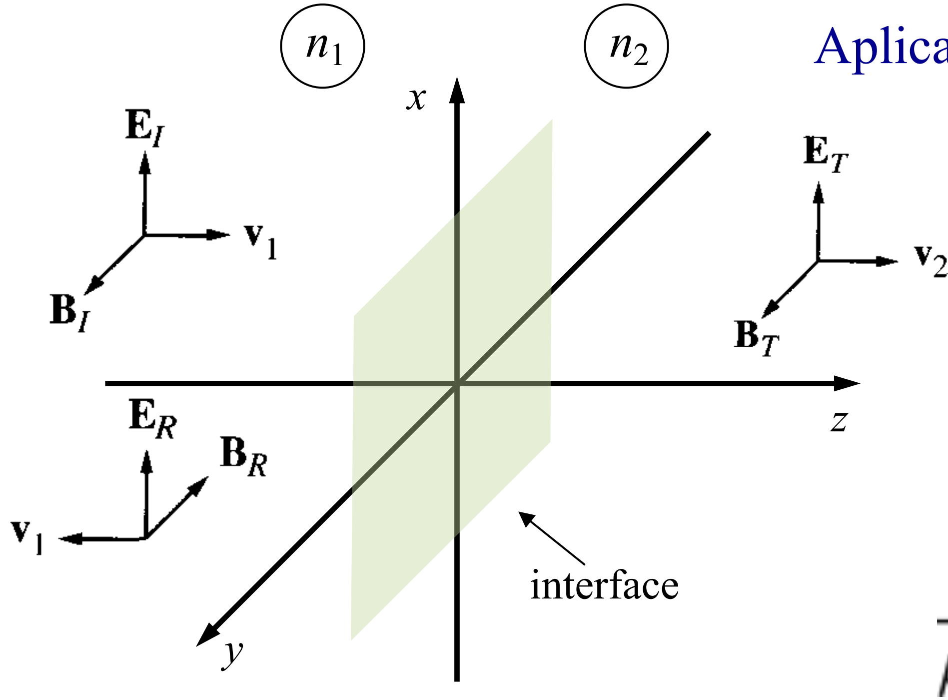
$$\mathbf{E}_T(z,t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{B}_T(z,t) = \frac{1}{v_2}\tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}}$$

Onda refletida:

$$\mathbf{E}_R(z,t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{B}_R(z,t) = -\frac{1}{v_1}\tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}}$$



Aplicando as condições de contorno (z = 0):

1) Campo Elétrico:

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T$$

2) Campo Magnético:

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{v_1}\tilde{A}_I - \frac{1}{v_1}\tilde{A}_R\right) = \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{v_2}\tilde{A}_T$$

Condições de contorno:

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$$

$$\frac{1}{\mu_1}B_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2}B_2^{\parallel}$$

Equacionando:

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\tilde{A}_I \qquad \tilde{A}_T = \left(\frac{2}{1+\beta}\right)\tilde{A}_I$$

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

Consideremos as fases, lembrando que $\mu \approx \mu_0$: $\beta \approx \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

1) Amplitude refletida:

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) \tilde{A}_I$$

caso $n_1 > n_2$:

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) \tilde{A}_I = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| \tilde{A}_I$$

caso $n_1 < n_2$:

$$\tilde{A}_R = -\left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| \tilde{A}_I = \tilde{A}_I e^{i\pi}$$

2) Amplitude transmitida (refratada):

$$\tilde{A}_T = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right) \tilde{A}_I$$

Conservação da Energia

Intensidade do vetor de Poynting (onda plana monocromática):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \qquad\qquad \langle \mathbf{S} \rangle = I = \frac{1}{2} v \epsilon A^2 \, \hat{\mathbf{z}}$$

Coeficiente de Reflexão:

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Coeficiente de Transmissão:

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \frac{(2n_1)^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$R + T = 1$$

$$I_R + I_T = I_I$$