Eletromagnetismo

Energia do Campo Magnético

- Quanto trabalho dá para gerar um campo magnético?
- Podemos armazenar energia nele?
- Ou o trabalho é totalmente perdido quando desligamos a fonte?
- Qual o efeito de colocarmos um meio magnético em uma bobina?
- Podemos calcular a força sobre um meio magnético?

Aula 17: Energia no campo magnético

→ Trabalho sobre uma carga: $W = q \cdot (V_A - V_B)$

é o trabalho realizado para levar uma carga de uma posição B a uma posição A

→ Potência associada ao trabalho:

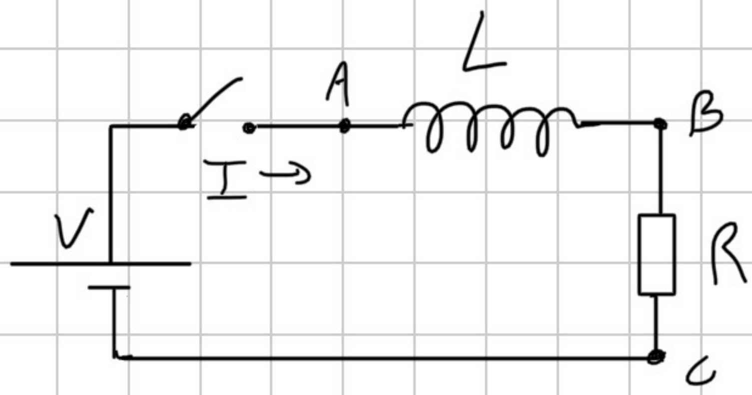
$$P = \frac{dW}{dt}$$ → entre os potenciais constantes

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta W}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta q}{\Delta t} (V_A - V_B) \right]$$

$$\Rightarrow P = I \cdot (V_A - V_B)$$

Voltando ao circuito:

$$V_A - V_B = L \cdot \frac{dI}{dt}$$



Atenção ao sinal!

Força eletromotriz: o indutor é um "gerador" que se opõe à variação de fluxo magnético

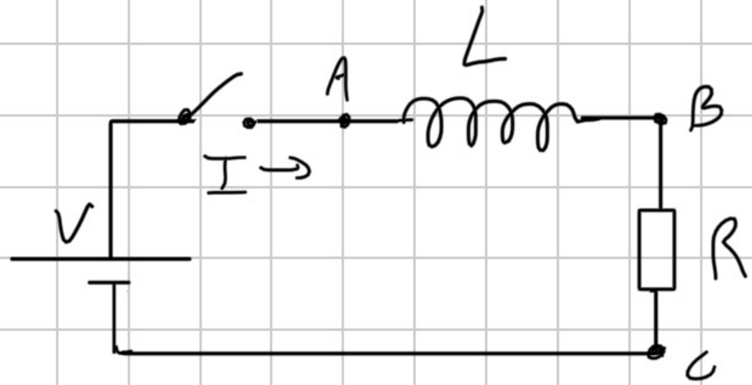
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{d}{dt}I$$

Se a corrente I aumenta: $V_A > V_B$ se opõe à variação

Se I diminui: $V_A < V_B$ busca compensar a variação

Voltando ao circuito:

$$V_A - V_B = L \cdot \frac{dI}{dt}$$



Potência entregue pelo gerador: $P_T = V \cdot I$

Potência dissipada na resistência: $P_D = V_R \cdot I = R \cdot I^2 > 0$

Potência fornecida ou recebida sobre o indutor

$$P_L = (V_A - V_B) \cdot I = L \cdot \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{>0} \cdot I$$

> 0 para aumento de corrente

Trabalho realizado sobre o indutor

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dW}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt} \cdot dt$$

Substituindo variáveis : $t \to I$

$$W = \int_{I_1}^{I_2} L\, I \cdot dI = \frac{L I^2}{2} \Bigg|_{I_1}^{I_2}$$

Começando do zero $(I_1 = 0) \Rightarrow$ trabalho total sobre o indutor : $W = \frac{L I^2}{2} \to$ energia acumulada sobre o indutor

Onde fica esta energia?

Analogia com o capacitor:

$$W = \frac{Q \cdot V}{2}$$ para montar a distribuição de cargas

$$Q = C \cdot V \qquad C = \epsilon \frac{A}{d}$$
→ área
→ distância

$$\Rightarrow W = \frac{C \cdot V^2}{2} = \frac{\epsilon}{2} \cdot A \cdot \frac{V}{d} \cdot V$$ mas o campo $E = V/d$

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon}{2} E^2 A \cdot d = \frac{D \cdot E}{2} \cdot \underbrace{(A \cdot d)}_{\text{volume do capacitor}}$$

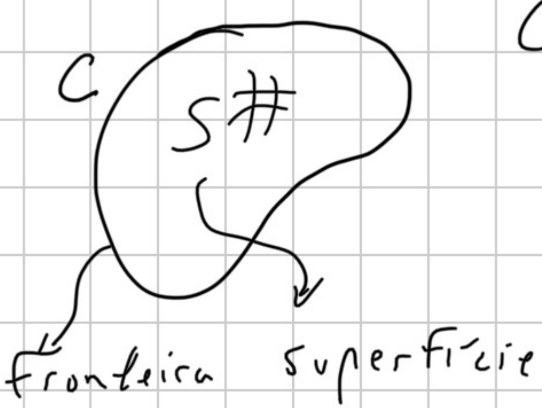
Densidade de energia do <u>campo elétrico</u>: $U_{el} = \frac{D \cdot E}{2}$

$$U_c = \frac{Q \cdot V}{2} = \frac{C \cdot V^2}{2} \iff U_L = \frac{L \cdot I^2}{2}$$

Vamos chegar então ao campo:

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ Stokes



Como $\phi = L\cdot I$ $\Rightarrow$ $LI = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$

$I \to$ corrente gerando $\vec{B}$
(e portanto $\vec{A}$)

$$W = \frac{L\cdot I^2}{2} = \frac{I}{2}\cdot\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Podemos inserir a corrente na integral, obtendo

$$W = \frac{1}{2}\oint_C (\vec{A}\cdot I)\cdot d\vec{l}$$

Podemos inserir a corrente na integral, obtendo

$$W = \frac{1}{2} \oint_C (\vec{A} \cdot I) \cdot d\vec{l}$$

Vale refletir aqui:

O perímetro define a borda do circuito, onde circula a corrente I.

Neste caso podemos associar a densidade de corrente $\vec{J}$, onde $I = \vec{J} \cdot d\vec{a}$, e $\underbrace{I\, d\vec{l}}_{\substack{\text{corrente ao} \\ \text{longo do fio infinitesimal} \\ d\vec{l}}} = \vec{J}\, dv$

→ elemento de corrente no volume dv

Assim: $W = \frac{1}{2} \oint_C (\vec{A} \cdot I)\, d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J})\, dv$

Assim: $W = \frac{1}{2} \oint_C (\vec{A} \cdot I)\, d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J})\, dv$

O volume de integração envolve toda a corrente, mas pode ser estendido até onde $\vec{J} = 0$, envolvendo todo o espaço

Como vimos: Lei de Ampère $\Rightarrow$ $\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$

$\therefore W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})\, dv$

Da relação: $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})$

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H}\, dv - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H})\, dv$$

$$= \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}\, dv - \frac{1}{2} \oint_{S'} (\vec{A} \times \vec{H})\, d\vec{a}$$

Estamos integrando em todo o espaço: o limite de V e S podem ir a ∞

$$\Rightarrow \oint (\vec{A} \times \vec{H})\, d\vec{a} = 0$$

$$\hookrightarrow O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Energia armazenada no campo: $U_B = \int_V u \cdot dv$

Com a densidade de energia $u = \dfrac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$

Note as correspondências entre as equações

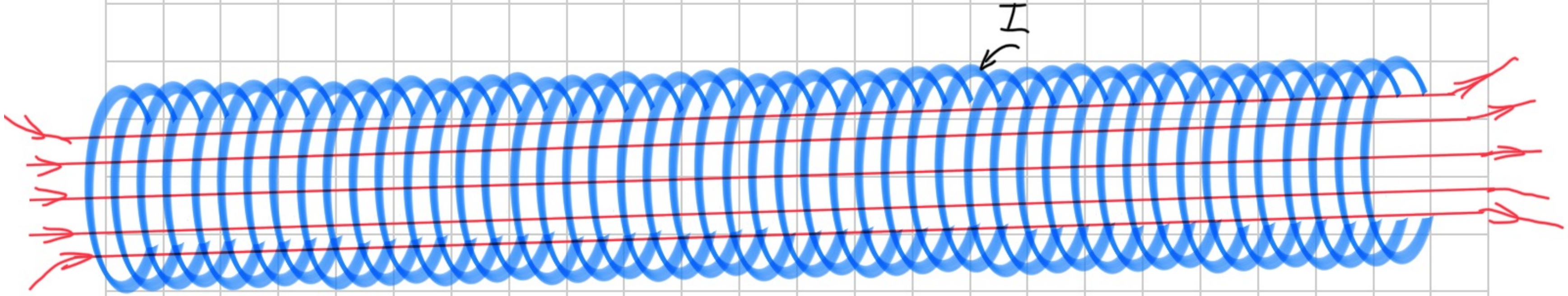
$$\boxed{U_{el} = \frac{1}{2} \int (V \cdot \rho)\, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 dv}$$

$$\boxed{U_{mag} = \frac{1}{2} \int (\vec{A} \cdot \vec{J})\, dv = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dv}$$

Aula 17: Energia magnética & matéria

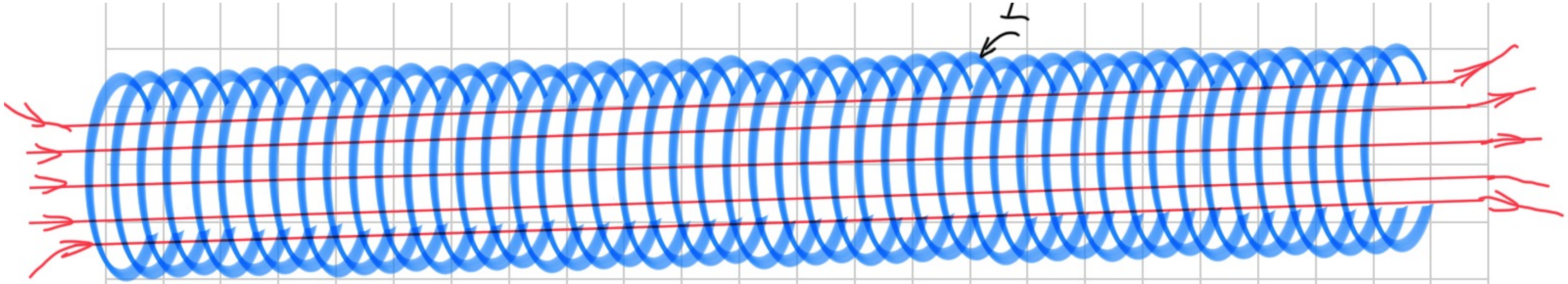
Exemplo canônico: Solenóide

N espiras, comprimento ℓ



Solenóide muito longo: $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$

Fluxo: $\phi = L \cdot I$; $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi \rho^2$



Solenóide muito longo: $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$

Fluxo: $\phi = L \cdot I$; $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi \rho^2$

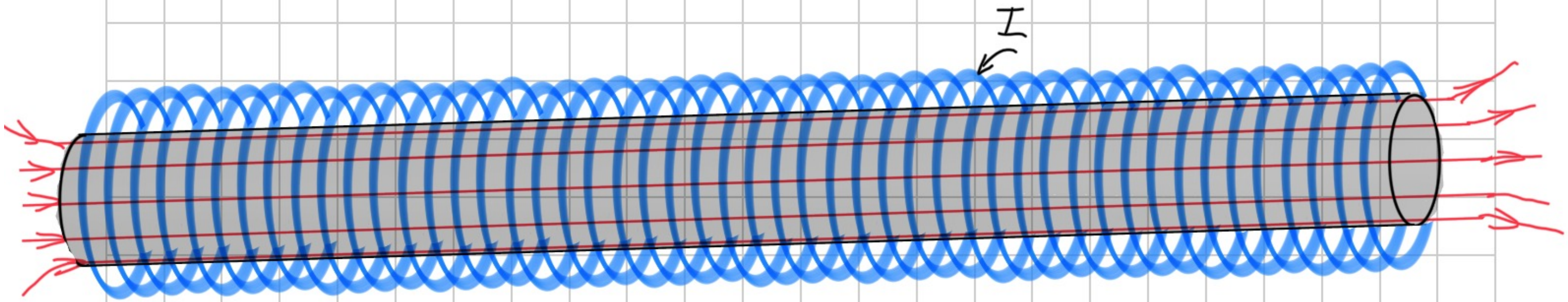
Campo armazenado no solenóide: $U_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dv = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot V$

Volume do cilindro: $V = \ell \cdot \pi \rho^2$

$$U_m = \mu_0^2 \frac{N^2 I^2}{\ell^2} \cdot \frac{1}{2\mu_0} \cdot \ell \, \pi \rho^2 = \frac{\mu_0}{2} N^2 I^2 \cdot \frac{\pi \rho^2}{\ell}$$

Carregamento: $W = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{\mu_0}{2} N^2 \frac{\pi \rho^2}{\ell} \cdot I^2$

Solenóide com meio magnético: e.g. um núcleo de ferrite



Campo H: $H = \frac{N \cdot I}{l}$

Magnetização: $M = \chi \cdot H = \chi \frac{NI}{l}$

Campo magnético: $B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1+\chi) \frac{NI}{l} = \mu \frac{NI}{l}$

$\Rightarrow$ Fluxo: $\quad \phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \underbrace{N}_{\text{nº de espiras}} \cdot \underbrace{\pi \rho^2}_{\text{área da espira}} \cdot B = \mu \frac{N^2}{\ell} \pi \rho^2 \cdot I$

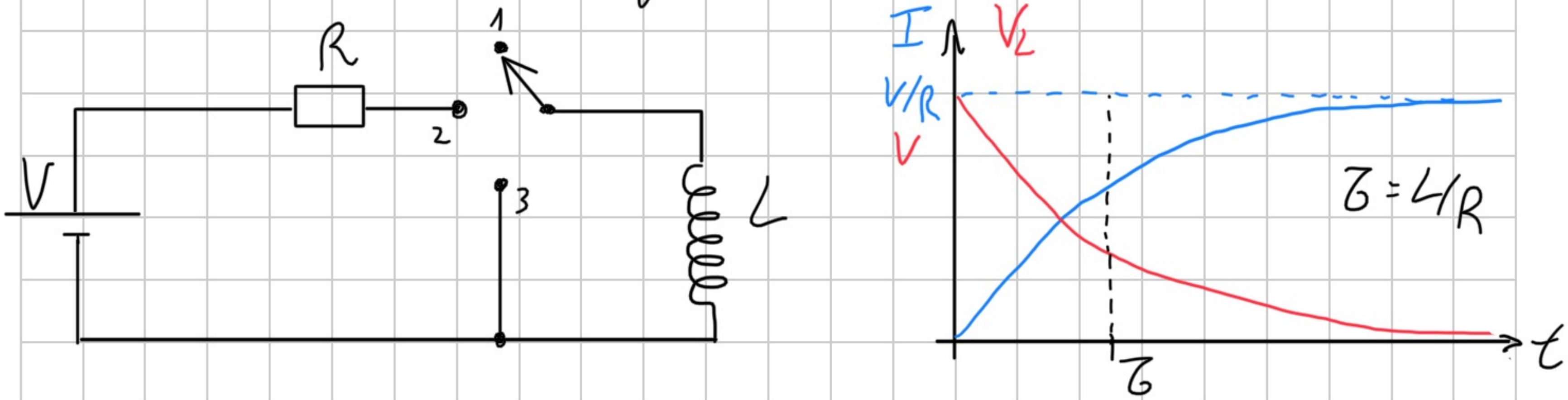
$\Rightarrow \phi = L \cdot I \;; \quad L = \mu \, N^2 \frac{\pi \rho^2}{\ell}$

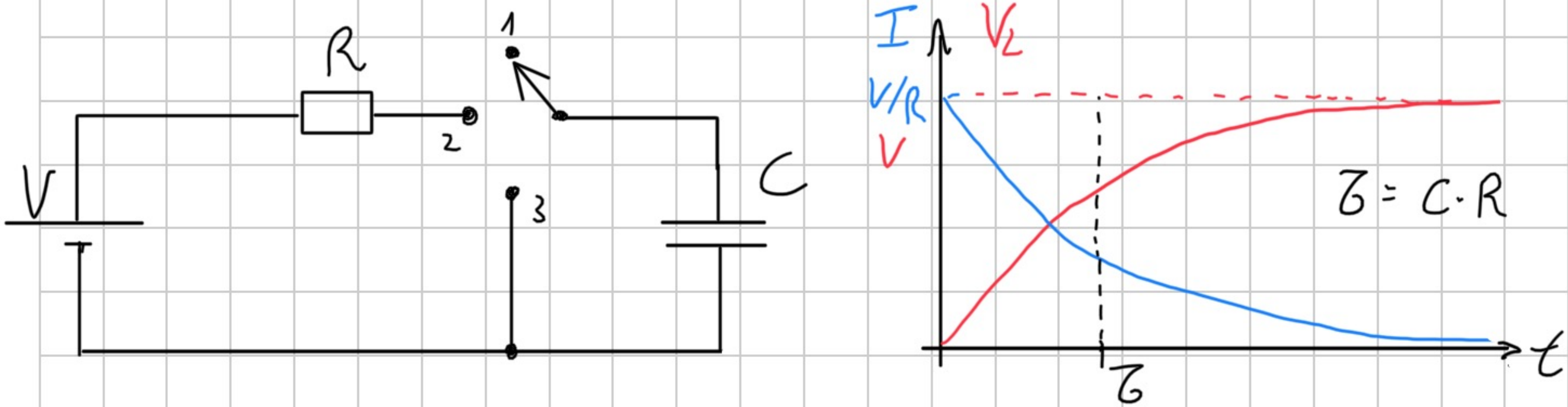
$$W = \frac{L \cdot I^2}{2} = \boxed{\mu \, N^2 \frac{\pi \rho^2}{2\ell} \, I^2}$$

$$U_m = \int \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \, dv = \mu \, \frac{NI}{\ell} \cdot \frac{NI}{\ell} \cdot \frac{\pi \rho^2 \cdot \ell}{2} = \boxed{\mu \, N^2 I^2 \frac{\pi \rho^2}{2\ell}}$$

$\hookrightarrow$ conveniência de $u_m = \dfrac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$

A corrente carregada se mantém?



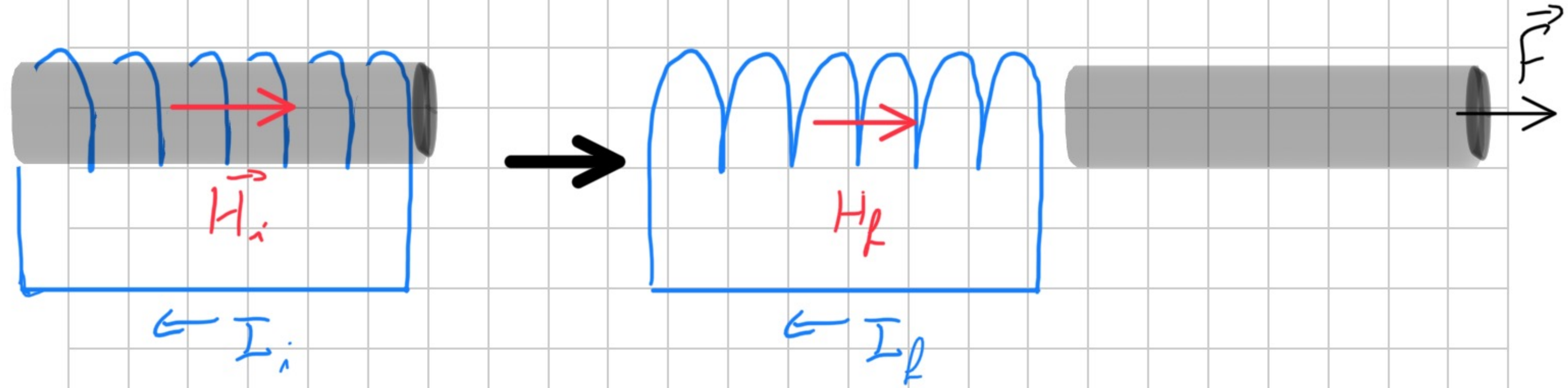


Como manter o capacitor carregado?

Como manter o indutor carregado?

Energia armazenada

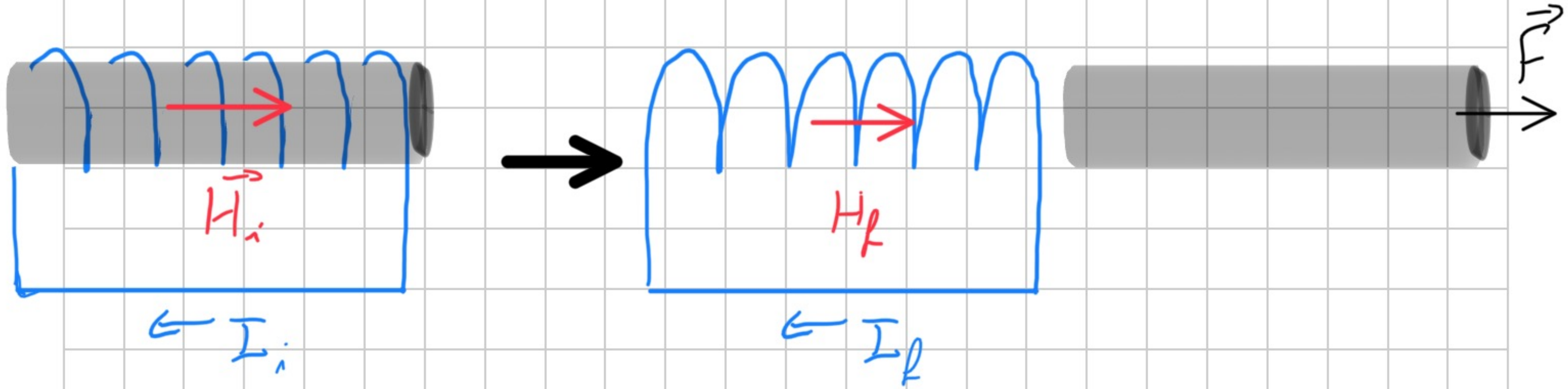
$$U_m = \mu \, N^2 I^2 \frac{\pi \rho^2}{2\ell}$$



No capacitor: carga constante $U_c = Q \cdot \frac{V}{2} = C \frac{V^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$

Tensão variável, $C = Q/V$ variável

$C_i = \epsilon \frac{A}{d}$ $\quad C_f = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow U_f - U_i = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_i}\right)$



No indutor ; corrente varia $\quad U_L = \dfrac{L I^2}{2}$

Indutância varia : $L_i = \mu \, N \dfrac{\pi r^2}{\ell}$; $L_f = \mu_0 \, N \dfrac{\pi r^2}{\ell}$

Fluxo: $\phi = L \cdot I$? $\quad$ FEM : $\mathcal{E} = \dfrac{d\phi}{dt} = 0$

$$U_L = \frac{L I^2}{2} = \frac{\phi \cdot I}{2} = \frac{\phi^2}{2L}$$

$$U_f - U_i = \frac{\phi^2}{2}\left(\frac{1}{L_f} - \frac{1}{L_i}\right) = \frac{\phi^2}{2}\left(\frac{L_i - L_f}{L_f L_i}\right) > 0$$

Forças em circuitos:

$$U_m = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \, dv \qquad U = \frac{1}{2} L I^2 \text{ (circuito isolado)}$$

Trabalho da força magnética: $dW = \vec{F}_m \cdot d\vec{l}$

Correntes fixas: $dU = dW_e - dW$

dU ↓ variação de energia potencial

dW_e ↓ "baterias" ↳ forças eletromotrizes externas

dW ↳ trabalho mecânico

$$\frac{dW_e}{dt} = \mathcal{E}_{ext} \cdot I$$ (potência fornecida pelo circuito → fonte de tensão

Compensa a f.e.m. do indutor $\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\phi$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} W_e = i \frac{d\phi}{dt}$$

Como vimos também: $U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\phi . I}{2}$

Correntes fixas: $\Rightarrow$ $\frac{dU}{dt} = \frac{I}{2}\frac{d\phi}{dt}$

$\Rightarrow dW_e = 2 dU$

$dU = dW_e - dW \Rightarrow dW = dU$

Como $dW = \vec{F_m} \cdot d\vec{\ell}$ $\rightarrow$ correspondência com energia potencial

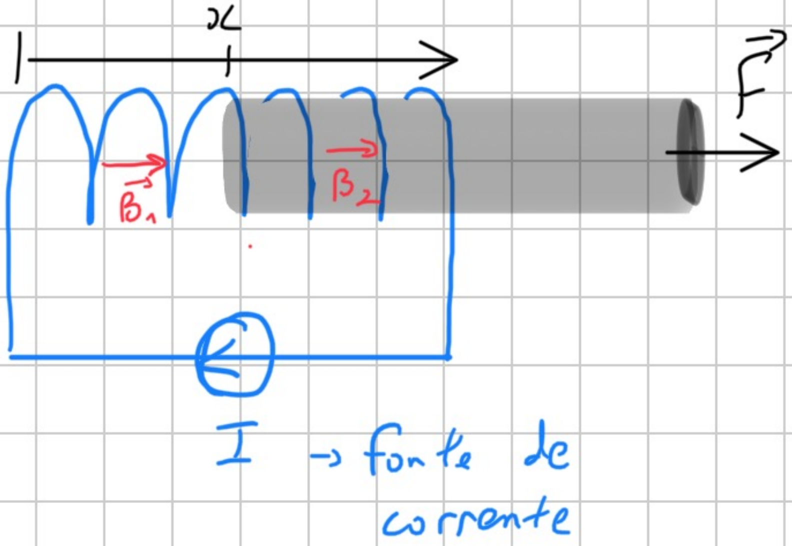
$\vec{F_m} = \nabla U$

Se o fluxo é constante, e corrente varia

$dW_e = 0 \Rightarrow dW = -dU$

$\vec{F_m} = -\nabla U$

De volta ao solenóide



$$H = \frac{NI}{l}$$

$$B_1 = \mu_0 H$$

$$B_2 = \mu H$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_1} B_1 \cdot H \, dv + \int_{V_2} B_2 \cdot H \, dv$$

$$= \frac{1}{2} H^2 \cdot \mu_0 \cdot x \cdot \pi \rho^2 + \frac{1}{2} H^2 \mu (l-x) \pi \rho^2$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_1} B_1 \cdot H \, dv + \int_{V_2} B_2 \cdot H \, dv$$

$$= \frac{1}{2} H^2 \cdot \mu_0 \cdot x \cdot \pi \rho^2 + \frac{1}{2} H^2 \mu (l-x) \pi \rho^2$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} H^2 \pi \rho^2 (\mu_0 - \mu) \Rightarrow F_x = \frac{d}{dx} U =$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \Longrightarrow \mu_0 - \mu = -\chi_m \mu_0$$

$$F_x = -\chi_m \mu_0 H^2 \frac{\pi \rho^2}{2}$$

$\chi_m > 0 \rightarrow$ Paramagnético / Ferromagnético

$\boxed{\text{Atração}}$

$\chi_m < 0 \rightarrow$ Diamagnético $\Rightarrow$ $\boxed{\text{repulsão}}$