Eletromagnetismo   Lei de Faraday

- Até agora, o campo elétrico, gerado por cargas estáticas, e o campo magnético, gerado por correntes, seguiram separados.
- Mas corrente nada mais é do que carga em movimento. A origem dos dois campos é a mesma: carga elétrica.
- Campos magnéticos só agem sobre cargas em movimento.
- Vimos que correntes são geradas por campos elétricos.
- Vimos que correntes geram campos magnéticos.
- Podem campos magnéticos gerar campos elétricos?

Equações de Campos Elétrico e Magnético

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (lei de Gauss, com $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$)

$\nabla \times \vec{E} = 0$ (campo conservativo $\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$)

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (ausência de monopolos elétricos)

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (lei de Ampère)

$\vec{B}, \vec{E}$ parecem desacoplados, mas...

→ Diferença de potencial

$$\Delta V_{BA} = V_B - V_A = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Downarrow$$

→ Corrente $I = V/R \Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E}$

$\vec{J} \Rightarrow$ fonte de campo magnético $\vec{B}$

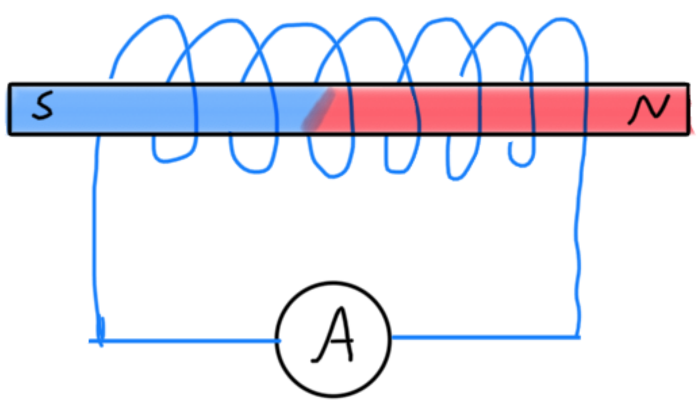
O reverso ocorre?

Experimento de Faraday (1791-1867)

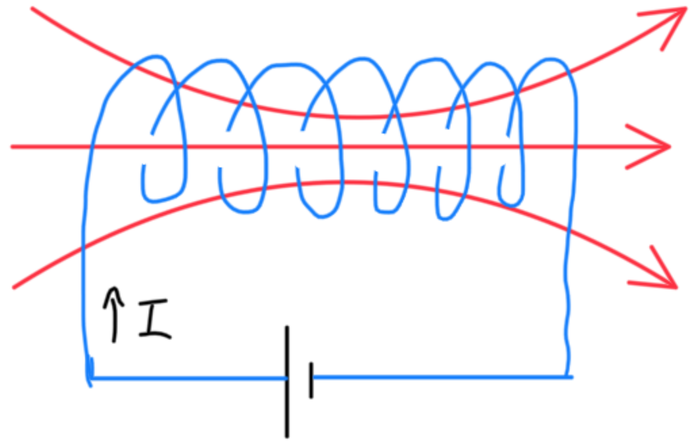
Joseph Henry (1797-1878)

Imã estático + bobina → corrente nula

Corrente estática + bobina → campo não-nulo



$\neq$



Elétrons no metal: $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

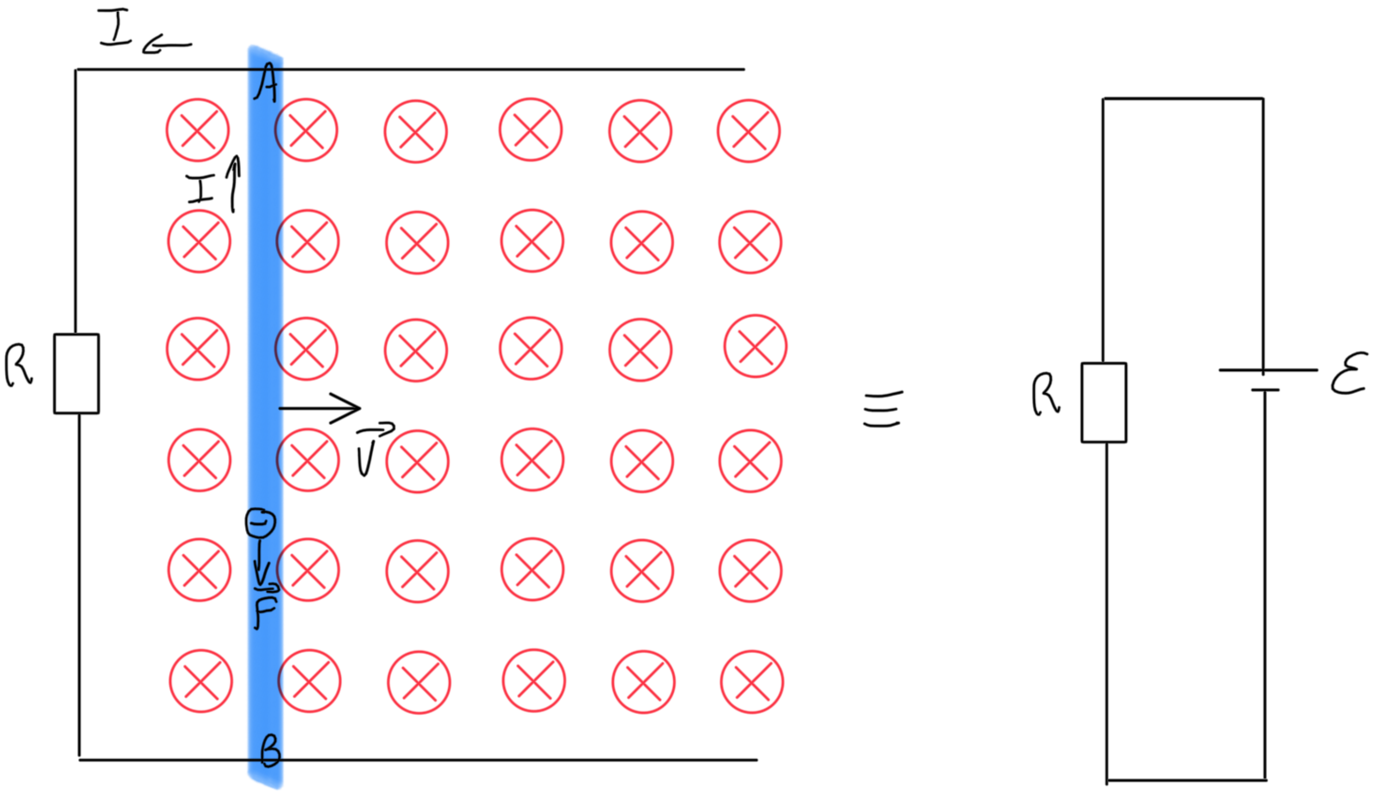
$$= -e(v\,\hat{i} \times -B\,\hat{k}) = -evB\,\hat{j}$$

Elétrons no metal: $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

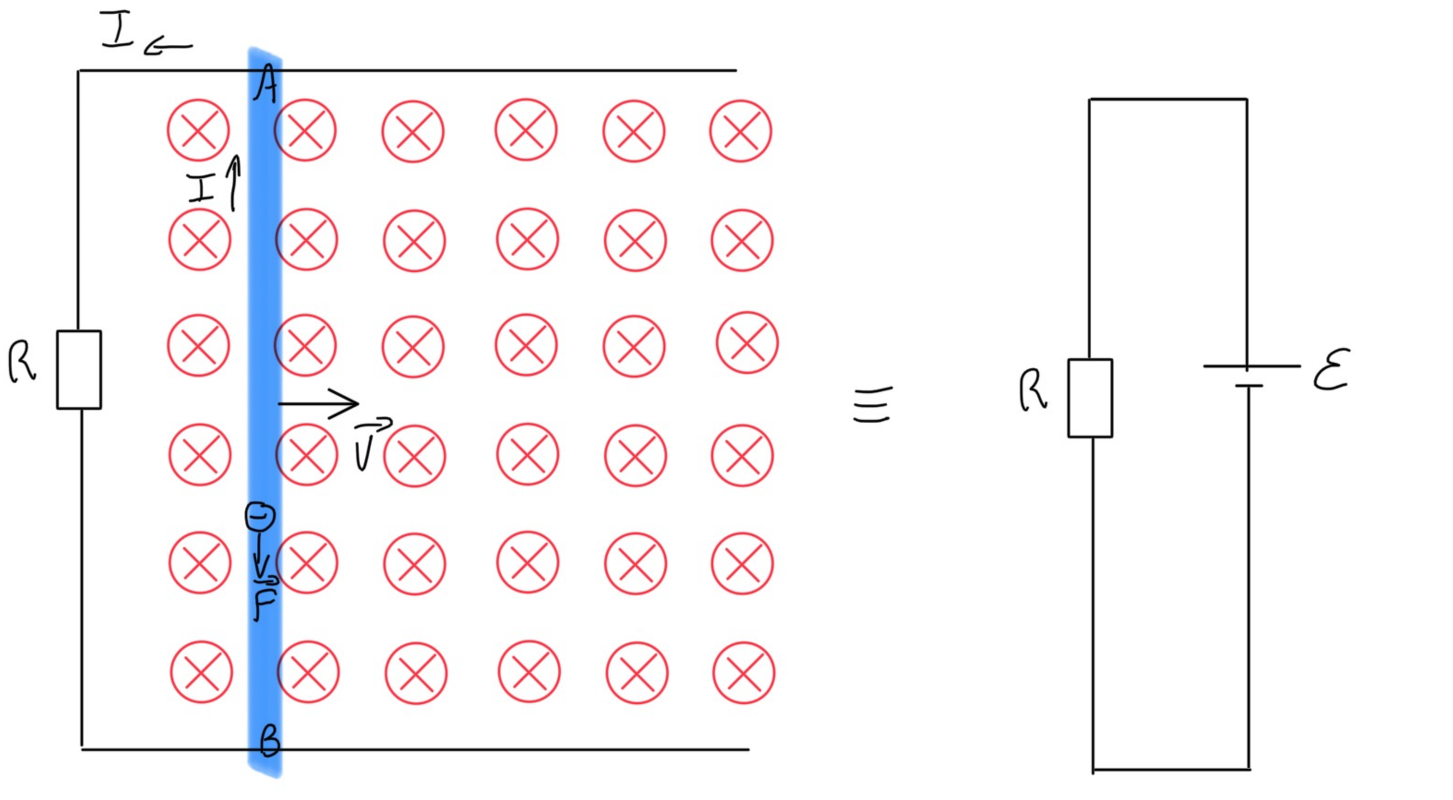
$$= -e(v\,\hat{i} \times -B\,\hat{k}) = -evB\,\hat{j}$$

O efeito é equivalente à aplicação de um campo elétrico $\vec{E} = vB\,\hat{j}$, ao qual podemos associar uma diferença de potencial $|V_{AB}| = \left| -\int_{r_B}^{r_A} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right| = vB\ell$

Este fluxo induzido de elétrons pode ser usado como uma fonte de tensão!

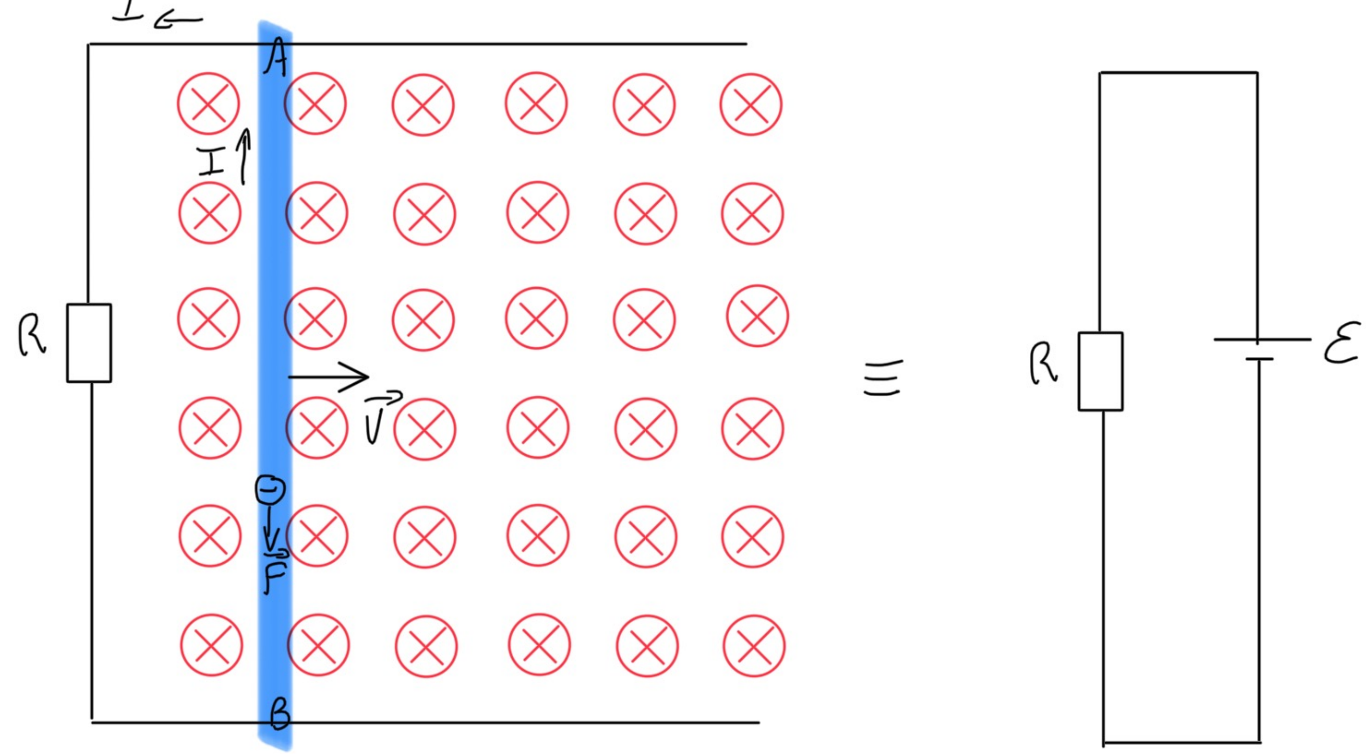


Chamamos este potencial equivalente de <u>força eletromotriz</u> $\mathcal{E}$



Chamamos este potencial equivalente de <u>força eletromotriz</u> $\mathcal{E}$

$\Rightarrow$ realiza trabalho <u>interno</u> no sistema, movendo os elétrons em sentido <u>contrário</u> ao do campo elétrico resultante.



O trabalho pode vir da energia química gasta em uma bateria, ou da energia mecânica do deslocamento do fio AB sob um campo magnético (o qual não realiza trabalho).

Cálculo da fem $\mathcal{E}$:

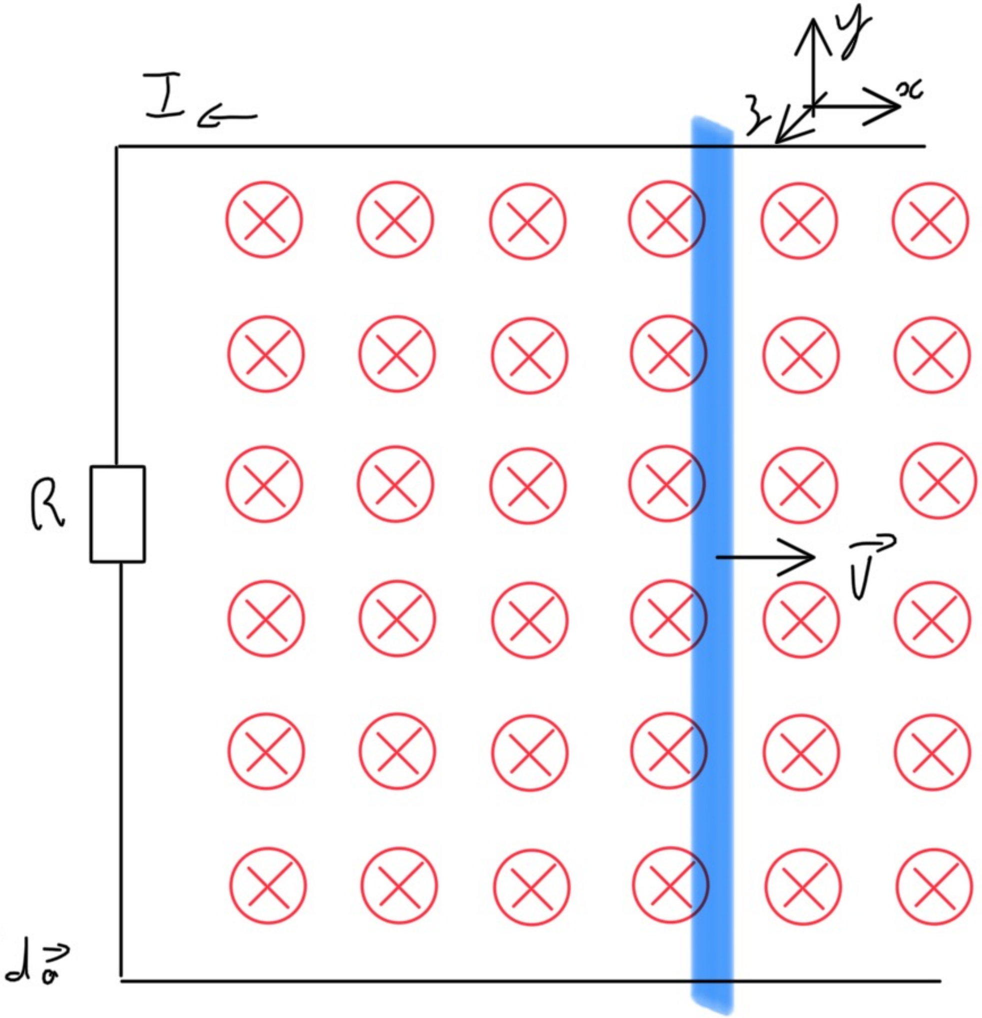
$$\mathcal{E} = \int v \cdot B \cdot \hat{j} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int \frac{dx}{dt} B \cdot \hat{j} \, d\vec{l}$$

$$= \frac{d}{dt} \int^{x(t)} B \cdot dy$$

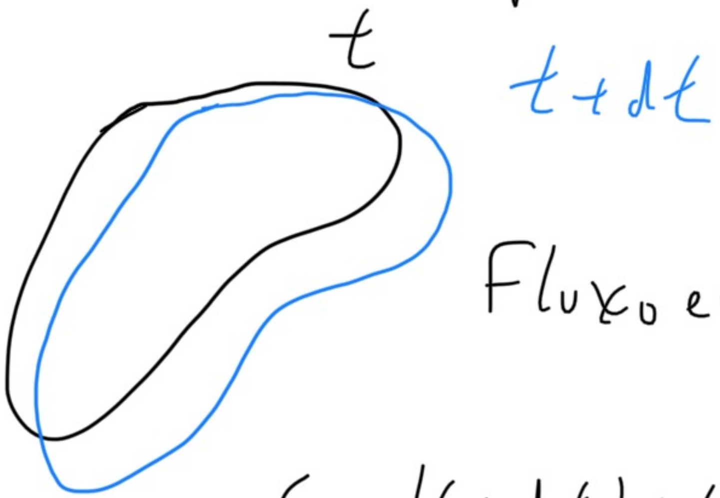
$$= -\frac{d}{dt} \phi$$

onde o fluxo $\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a}$



Na figura, o sentido da corrente (anti-horário) se opõe à variação de fluxo (que aumenta com o deslocamento do condutor).

O resultado se aplica a qualquer laço, de qualquer formato



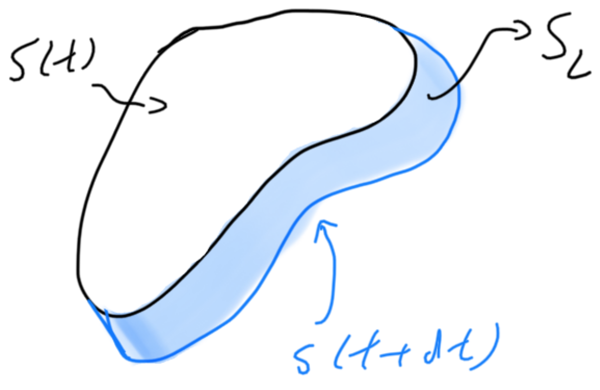
Fluxo em $t \rightarrow \phi(t) = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot \hat{n} \, da$

Em $(t+dt) \rightarrow \phi(t+dt) = \int_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot da$

$$d\phi(t) = \phi(t+dt) - \phi(t)$$

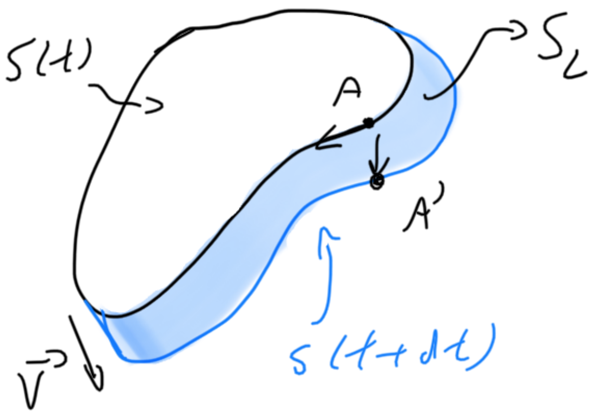
Mas a variação do fluxo no <u>volume</u> deve ser nula,

afinal $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{B} \, dv = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot da = 0$



$S_L \rightarrow$ <u>Fluxo lateral</u>

$$\int_{S_L} \vec{B} \cdot \vec{n} \, da = d\phi$$



Deslocamento com velocidade $\vec{v}$

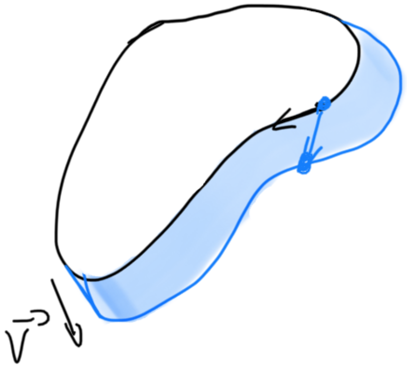
Elemento de área na fita:

$$\vec{v} \, dt \times d\vec{l}$$

$$\hat{n} \cdot da = (\vec{v} \times d\vec{l}) \, dt$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dt} = \int \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})$$

A integral na fita passa a uma integral de linha pois $dt \to 0$



O elemento de carga desloca-se com velocidade $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{v}$: vel. do fio

$\vec{u}$: vel. ao longo do fio

Como $\vec{u} \,//\, d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{u} \times d\vec{\ell} = 0$

$$\vec{v} \times d\vec{\ell} = \vec{w} \times d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\phi = \oint \vec{B} \cdot (\vec{w} \times d\vec{\ell})$$

Como $\vec{B} \cdot (\vec{w} \times d\vec{\ell}) = -(\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$

$$\frac{d}{dt}\phi = -\oint \underbrace{(\vec{w} \times \vec{B})}_{\text{Força magnética por unidade de carga}} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\frac{d}{dt}\phi = -\oint \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{\ell} = -\mathcal{E}$$

$\hookrightarrow$ força eletromotriz

Força eletromotriz →

Circuito se deslocando no campo

$$\equiv$$

Campo se deslocando (variando) sobre o circuito

⇒ Força do campo magnético sobre as cargas livres levando a uma aceleração (tangencial)

⇒ Nasce em 1831 da observação empírica

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Faraday & Henry associam a F.E.M. a um campo elétrico induzido

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$

$$\Downarrow$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\int_S \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$$

Relatividade: a Física deve ser a mesma se a bobina ou o magneto se deslocam!

Bobina → Força de Lorentz

Magneto → Campo elétrico equivalente (não eletrostático)

Resultado ⇒ corrente induzida, opondo-se à variação

(Emil Lenz, 1834 - Estônia)

Superposição de campos:

Coulombiano: $\vec{E}_c \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E}_c = \rho/\epsilon$

Induzido: $\vec{E}_i \Rightarrow \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_i \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_c + \nabla \cdot \vec{E}_i$$

Mas: $\nabla \cdot \vec{E}_i = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_c + \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Mas: $\nabla \times \vec{E}_c = \nabla \times (-\nabla V) = -\nabla \times (\nabla V) = 0$

$\therefore$ Permanece válido: $\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}}$

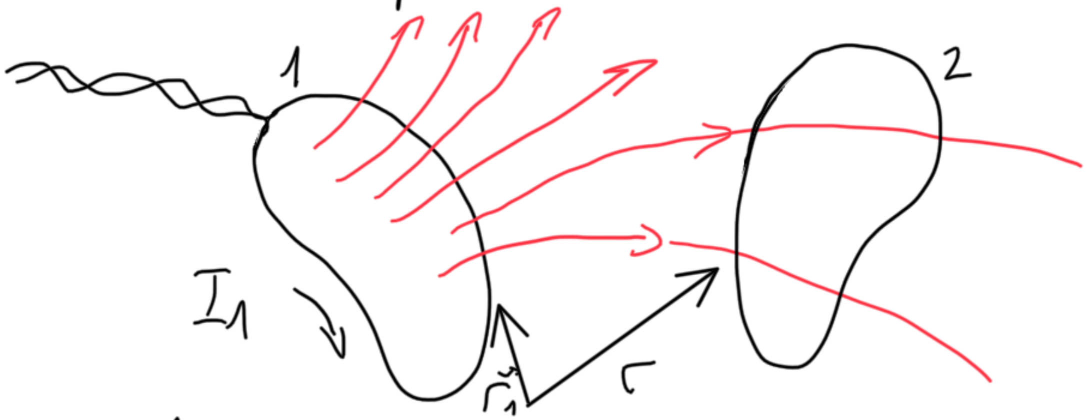
Mais um elemento:

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$; $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$; $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$

Aula 15: Indutância

Dois circuitos próximos:



Circuito 1 →

$$\text{Campo } \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I_1 \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}'}{r'^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{B}_1| \propto I_1 \qquad\qquad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_1$$

Fluxo no circuito 2 $\quad \phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a} \propto I_1$

Depende da geometria! $\Rightarrow \phi_2 = M_{21} I_1$

Fluxo no circuito 2 $\quad \phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a} \propto I_1$

Depende da geometria! $\Rightarrow \phi_2 = M_{21} I_1$

$M_{21} \to$ indutância mútua

Como $\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a} = \int (\nabla \times \vec{A}_1)\, d\vec{a} = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$

E como $\vec{A}_1 = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint \dfrac{I_1\, d\vec{l}_1}{r'}$

$$\Rightarrow \quad \phi_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{r'}\, d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \qquad \vec{r}\,' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \quad \phi_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{r'} \vec{dl_1} \cdot \vec{dl_2} \qquad \vec{r}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\therefore M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \vec{dl_1} \cdot \vec{dl_2}$$

$$\Rightarrow \quad M_{21} = M_{12}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_1 = M_{12} I_2 \; ; \; \phi_2 = M_{21} I_1$$

se $I_1 = I_2$, $\phi_1 = \phi_2$!

Os Fluxus acoplados levam a uma relação entre correntes e FEM

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}\phi_2 = -M \frac{d}{dt} I_1$$

Variar $I_1 \rightarrow$ gerar I_2 !

Mas variar I_1 muda o próprio ϕ_1.

Como o circuito reage?

$$\phi_1 \propto I_1 \Rightarrow \qquad \phi_1 = L_1 \cdot I_1 \quad (\text{ou } \phi = L \cdot I)$$

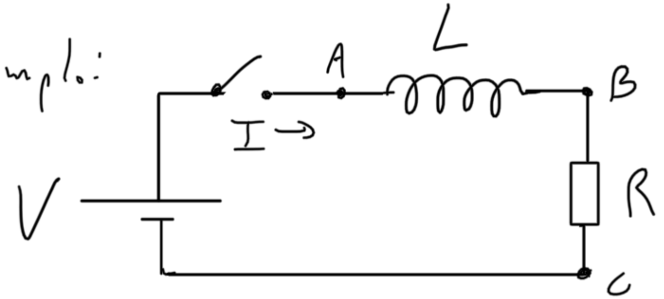
Auto-indutância: para variar a corrente, nos opomos à FEM auto-induzida

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\phi = -L\frac{d}{dt}I$$

$L \rightarrow$ Henry

$$[H] = \frac{V \cdot s}{A}$$

Exemplo:



Ligando a fonte, teremos

$$V = V_{AB} + V_{BC}$$

$$V_B = R \cdot I \quad ;$$

$$V_{AB} = L \frac{dI}{dt} \; ? \qquad \text{ou} \qquad V_{AB} = -L \frac{dI}{dt}$$

Aumentar I leva a uma reação contrária do indutor $\Rightarrow$ $\frac{dI}{dt} > 0$, $V_{AB} > 0$

$$\therefore \; V = L \frac{dI}{dt} + R I$$

Eq. diferencial de 1ª ordem: $I = A + B \, e^{-t/\tau}$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{B}{\tau} \, e^{-t/\tau}$$

Eq. diferencial de 1ª ordem: $I = A + B\,e^{-t/\tau}$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{B}{\tau}\,e^{-t/\tau}$$

$$V = -L\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau} + R\cdot A + R\cdot B e^{-t/\tau} = R\cdot A + B\left(R - \frac{L}{\tau}\right)e^{-t/\tau}$$

1) $V = cte \Rightarrow \quad R = \dfrac{L}{\tau} \qquad \boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$

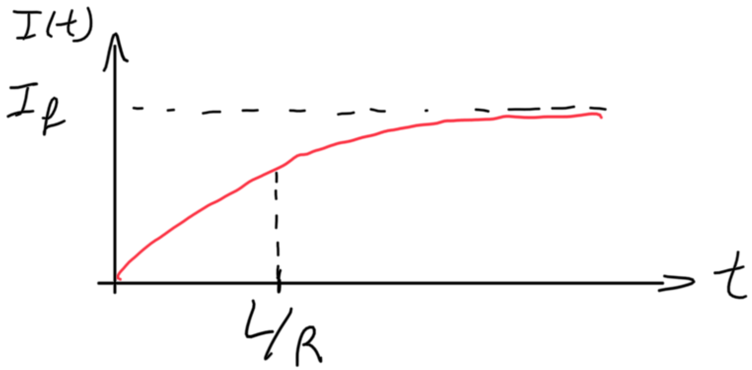
2) $t = 0 \qquad I = 0 \qquad I(0) = A + B \Rightarrow \quad A = -B$

$\Rightarrow \quad I = A\,(1 - e^{-t/\tau})$

3) $t \to \infty \qquad V = R\cdot I \qquad \lim\limits_{t\to\infty} I(t) = A \quad \therefore \quad A = \dfrac{V}{R}$

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$\tau = L/R$



Eq. diferencial de 1ª ordem: $I = A + B e^{-t/\tau}$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{B}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$V = -L\frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} + R \cdot A + R \cdot B e^{-t/\tau} = R \cdot A + B\left(R - \frac{L}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

1) $V = cte \Rightarrow \quad R = \frac{L}{\tau} \qquad \tau = \frac{L}{R}$

$R = V/I \qquad [\Omega] = \frac{V}{A}$

2) $t = 0 \quad I = 0 \qquad I(0) = A + B \Rightarrow A = -B$

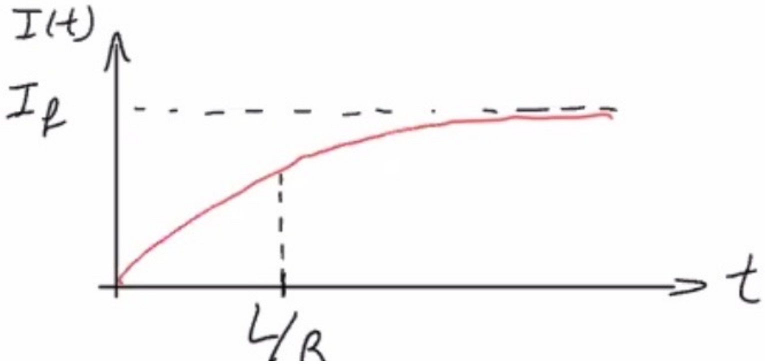
$\frac{H}{\Omega} = \frac{V}{A} \cdot s \; \frac{A}{V} = s$

$\Rightarrow \quad I = A\,(1 - e^{-t/\tau})$

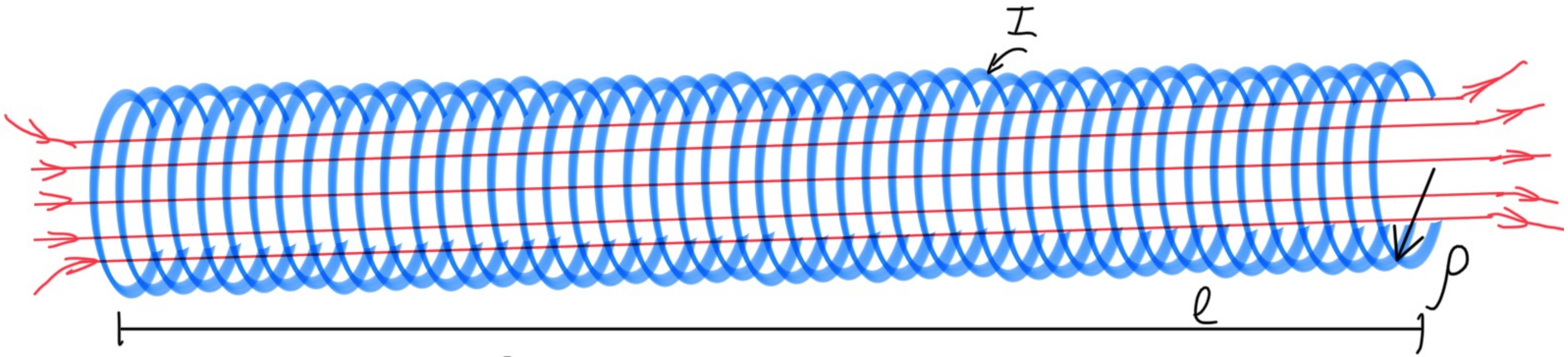
3) $t \to \infty \qquad V = R \cdot I \qquad \lim_{t \to \infty} I(t) = A \;\therefore\; A = \frac{V}{R}$

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$\tau = L/R$



Exemplo de cálculo: Solenoide longo



Como vimos: $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_t$

$$B \cdot \ell = \mu_0 N \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

Fluxo em uma espira $\phi_1 = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \cdot \pi \rho^2$

em N espiras: $\phi = N \cdot \phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot \pi \rho^2$

$$\therefore L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi \rho^2$$

Desprezando efeitos nas bordas