Eletromagnetismo

Equação de Laplace - solução

- Vimos que dada uma distribuição de cargas ρ, e uma condição de contorno em uma superfície S, a solução da equação de Poisson é definida a menos de uma constante arbitrária.
- Podemos assim considerar esta solução como única. O mesmo raciocínio pode se aplicar no caso de uma Equação de Laplace ($\rho = 0$).
- Se acharmos uma solução, ela é suficiente!
- Separação de variáveis: o palpite mais simples.
- Desdobrar o problema para cada grau de liberdade.

Separação de Variáveis:

$$\nabla^2 V(x,y,z) = 0$$

$$V(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} X(x) = 0 \text{, etc.} \Rightarrow \nabla^2 V = Y \cdot Z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + X Z \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + X \cdot Y \frac{d^2}{dz^2} Z$$

$$\frac{\nabla^2 V(x,y,z)}{V(x,y,z)} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2}{dx^2} X}_{\text{só } x} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2}{dy^2} Y}_{\text{só } y} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z}_{\text{só } z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} X(x) = 0 \text{, etc.} \Rightarrow \nabla^2 V = Y \cdot Z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + X Z \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + X \cdot Y \frac{d^2}{dz^2} Z$$

$$\frac{\nabla^2 V(x,y,z)}{V(x,y,z)} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2}{dx^2} X}_{\text{só } x} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2}{dy^2} Y}_{\text{só } y} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z}_{\text{só } z} = 0$$

Cada termo precisa ser associado a uma constante: C_x, C_y, C_z

e $C_x + C_y + C_z = 0$ → Já vimos isso!

(Aula 3)

Qual o campo em uma posição de estabilidade para uma carga q?

Mínimo de potencial: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} U = a$; $\frac{\partial^2}{\partial y^2} U = b$; $\frac{\partial^2}{\partial z^2} U = c$

$a, b, c > 0$

Aproximando: $U = U_0 + ax^2 + by^2 + cz^2$

$$V = \frac{U}{q} \qquad ; \quad \vec{E} = -\nabla U$$

$$\vec{E} = -\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}U - \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}U - \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}U$$

$$= -\hat{\imath}\frac{2ax}{q} - \hat{\jmath}\frac{2by}{q} - \hat{k}\frac{2cz}{q}$$

$$\vec{E} = -\hat{i}\,\frac{2ax}{q} - \hat{j}\,\frac{2by}{q} - \hat{k}\,\frac{2cz}{q}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{OK}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\hat{i}\,\frac{2ax}{q} - \hat{j}\,\frac{2by}{q} - \hat{k}\,\frac{2cz}{q}\right)$$

$$= -\frac{2}{q}\left(a+b+c\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \neq 0$$

Não há estabilidade estática!

Troca-se uma equação diferencial parcial em 3 variáveis por 3 eqs. diferenciais <u>ordinárias</u> de segunda ordem!

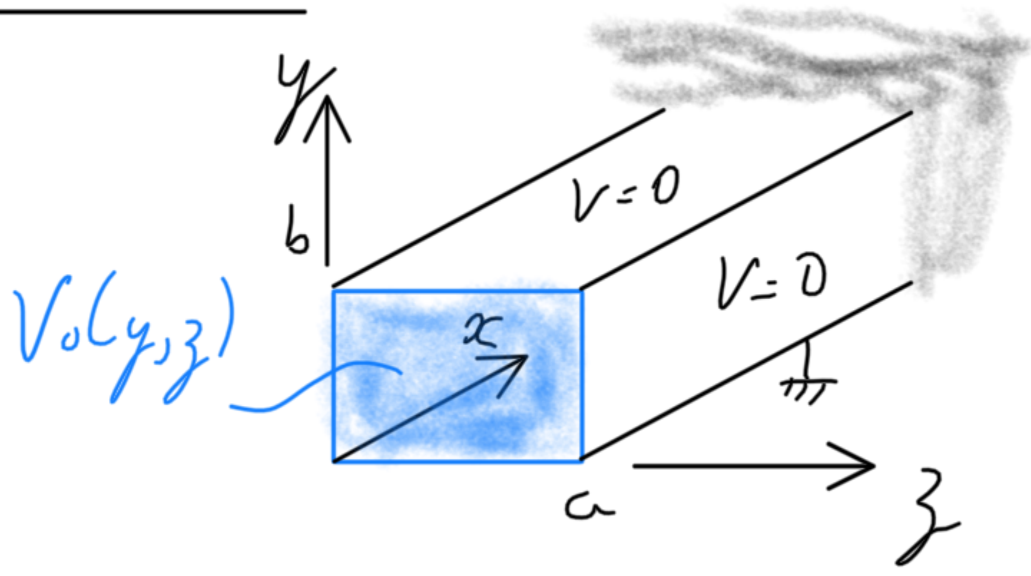
$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} X = C_x \cdot X \longrightarrow & X = a\,x + b\,, \text{ se } C_x = 0 \\ & X = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx),\ \text{se } C_x = -k^2 \\ & X = a\,e^{kx} + b\,e^{-kx},\ \text{se } C_x = k^2 \end{cases}$$

$C_x + C_y + C_z = 0 \Rightarrow$ 1 concavidade oposta!

Qual! Bom senso ao olhar o problema

Exemplo: Tubo aterrado

$C_\alpha, \quad \alpha \in [x, y, z]$



Qual C_α é nulo?

Qual C_α é limitado?

Qual C_α é livre?

Vemos que $C_y = -k_y^2$; $C_z = -k_z^2$; $C_x = k_x^2$

$$k_x^2 = k_y^2 + k_z^2$$

Condições de fronteira:

$$V(x, y, a) = V(x, y, 0) = 0$$

$$V(x, b, z) = V(x, 0, z) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} V(x, y, z) = 0$$

$$V(0, y, z) = V_0(y, z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, y, a) = V(x, y, 0) = 0 \Rightarrow Z(0) = Z(a) = 0 \\ Z(z) = A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z) \\ Z(0) = A = 0 \; ; \; Z(a) = B \sin(k_z a) = 0 \Rightarrow k_z a = n_z \pi \end{array} \right.$$

$$k_z = n_z \frac{\pi}{a}$$

$$\begin{cases} V(x,0,z) = V(x,b,z) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(b) = 0 \\ Y(y) = C\cos(k_y \cdot y) + D\,\mathrm{sen}(k_y \cdot y) \\ Y(0) = C = 0 \;;\quad Y(b) = D\,\mathrm{sen}(k_y \cdot b) = 0 \Rightarrow k_y \cdot b = n_y \pi \end{cases}$$

$$k_y = n_y \frac{\pi}{b}$$

$$\lim_{x \to \infty} V(x,y,z) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} X(x) = \lim_{x \to \infty} \left(E e^{kx} + F e^{-kx}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(E e^{kx}\right) = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\therefore V(x,y,z) = C e^{-kx}\,\mathrm{sen}\left(n_y \frac{\pi}{b} y\right) \mathrm{sen}\left(n_z \frac{\pi}{a} z\right)$$

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a}\right)^2}$$

$$\therefore V(x,y,z) = C\, e^{-kx} \operatorname{sen}\left(n_y \frac{\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{\pi}{a} z\right)$$

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a}\right)^2}$$

Múltiplas soluções → a resposta combina elas todas!

$$V(x,y,z) = \sum_{n_y, n_z = 1}^{\infty} C_{n_y, n_z} \exp\left[-k_{n_y, n_z} x\right] \operatorname{sen}\left(n_y \frac{y}{a} \pi\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{z}{b} \pi\right)$$

$$k_{n_y, n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a}\right)^2}$$

O cálculo de cada termo C_{n_y, n_z} depende de duas propriedades do conjunto de soluções $\{f_n(x)\}$

<u>Completeza</u>: Conjunto é <u>completo</u> se uma função $f(x)$ qualquer pode ser escrita como a soma $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x)$

<u>Ortogonalidade</u>: $\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = 0$ para $n \neq m$

<u>Ortogonalidade</u>: $\int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, dx = 0$ para $n \neq m$

Podemos usar os conceitos de geometria: $\{f_n(x)\}$ representa uma <u>base</u>, $f_n(x)$ são vetores da base, e a base é <u>ortonormal</u> se

$$\int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

onde $\delta_{nm} = 0$ se $n \neq m$

$\delta_{nm} = 1$ se $n = m$ (normalização)

Para achar C_{n_y,n_z}, usamos a última condição de contorno

$$V_0(y,z) = \sum_{n_y,n_z=1}^{\infty} C_{n_y n_z} \operatorname{sen}\left(n_y \frac{y}{b} \pi\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{z}{a} \pi\right)$$

Projetando na base

$$\int_0^a \int_0^b V_0(y,z) \operatorname{sen}\left(m \frac{y}{b} \pi\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{z}{a} \pi\right) dy\, dz$$

$$= \sum_{n_y n_z=1}^{\infty} C_{n_y n_z} \int_0^b \operatorname{sen}\left(n_y \cdot \frac{y}{b} \pi\right) \operatorname{sen}\left(m \frac{y}{b} \pi\right) dy$$

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(n_z \cdot \frac{z}{a} \pi\right) \operatorname{sen}\left(n \frac{y}{a} \pi\right) dz$$

Como vimos na última aula

$$\int_0^b \text{sen}\left(n_y \cdot \frac{y}{b}\pi\right) \text{sen}\left(m \frac{y}{b}\pi\right) dy = \frac{b}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}(n_y \theta)\, \text{sen}(m \cdot \theta)\, d\theta$$

$$\frac{y\pi}{b} = \theta \qquad dy = \frac{b}{\pi} d\theta$$

$$= \frac{b}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \cos[(n_y - m)\theta]\, d\theta - \int_0^{\pi} \cos[(n_y + m)\theta]\, d\theta\right] =$$

$$= \frac{b}{2\pi} \cdot \pi \cdot \delta_{n_y m} = \frac{b}{2}\delta_{n_y m}$$

$$C_{n_y n_z} = \frac{4}{ab}\int_0^a \left[\int_0^b V_0(y,z)\, \text{sen}\left(n_y \frac{y}{b}\pi\right) dy\right] \text{sen}\left(n_z \frac{z}{a}\pi\right) dz$$

Ex: $V_0(y,z) = V_0 \Rightarrow C_{n_y n_z} = V_0 \int_0^b \operatorname{sen}\left(n_y \frac{y}{b}\pi\right) dy \cdot \int_0^a \operatorname{sen}\left(n_z \frac{z}{a}\pi\right) dz$

Como: $\int_0^b \operatorname{sen}\left(n_y \frac{y}{b}\pi\right) dy = \frac{b}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(n_y\theta)\,d\theta = \frac{b}{\pi}\,\frac{-\cos(n_y\theta)\Big|_0^\pi}{n_y} = \frac{2b}{\pi n_y}$

$\frac{y}{b}\pi = \theta$

n_y ímpar

$= 0$ n_y par

$C_{n_y n_z} = \frac{16}{\pi^2 ab} V_0 \frac{1}{n_y n_z}$; n_y e n_z ímpar

$= 0$; n_y ou par

$$C_{n_y n_z} = \frac{16}{\pi^2 ab} V_0 \frac{1}{n_y n_z} \quad ; \quad n_y \text{ e } n_z \text{ ímpar}$$

$$= 0 \quad ; \quad n_y \text{ ou par}$$

Note:

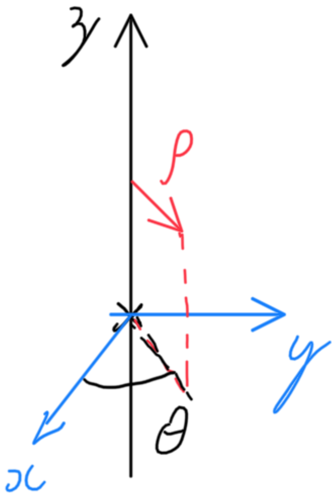
$$V(x,y,z) = \sum_{n_y, n_z = 1}^{\infty} C_{n_y, n_z} \, \underline{\exp\left[-k_{n_y, n_z} x\right]} \, \text{sen}\left(n_y \frac{y}{a} \pi\right) \text{sen}\left(n_z \frac{z}{b} \pi\right)$$

$$k_{n_y, n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a}\right)^2}$$

Decaimento exponencial

mais rápido quanto maior n_y, n_z!

O Laplaciano ∇^2 varia conforme o sistema de coordenadas



Cilíndricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Separação de variáveis: $V(\rho,\theta,z) = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$

Com isso $\dfrac{\nabla^2 V}{V} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\rho\left[\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}R\right)\right] + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta + \frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = 0$$

Tipicamente, $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \Rightarrow \Theta_m = A\cos(m\theta) + B\,\mathrm{sen}(m\theta)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2\Theta$$

Para z, podemos ter os três casos distintos vistos para as coordenadas cartesianas

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2}{dz^2}Z = C_z$$

Por fim, temos $\frac{1}{R}\rho\left[\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}R\right)\right] = m^2 - C_z = \mu^2$

$$\Rightarrow \rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}R + \rho\frac{d}{d\rho}R - \mu^2 R = 0 \Rightarrow \text{eq. de Cauchy-Euler}$$

Solução: substituição de variáveis $\Rightarrow \rho = e^t$; $t = \ln \rho$

$$\frac{d}{d\rho} R = \frac{dt}{d\rho} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} R$$

$$\frac{d^2 R}{d^2 \rho} = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} R\right] = \frac{dt}{d\rho} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} R\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{d}{dt} R + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} R\right] =$$

$$= -\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{dt} R + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{dt^2} R$$

$$\Rightarrow \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} R + \rho \frac{d}{d\rho} R - \mu^2 R = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2}R + \rho \frac{d}{d\rho}R - \mu^2 R = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}R - \frac{d}{dt}R + \frac{d}{dt}R - \mu^2 R = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}R = \mu^2 R$$

$$R_\mu(t) = C_\mu e^{\mu t} + D_\mu e^{-\mu t}$$

mas $e^{t} = \rho$, $e^{-t} = \rho^{-1}$

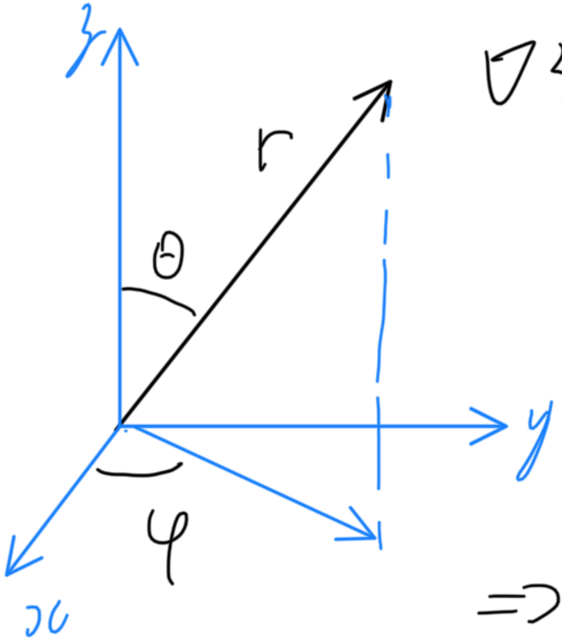
$$\Rightarrow R_\mu(\rho) = C_\mu \rho^{\mu} + D_\mu \rho^{-\mu}$$

Soluções do tipo:

$$V(\rho, \theta, z) = \sum_{m,\mu} (A_m \cos(m\theta) + B_m \,\text{sen}(m\theta))(C_\mu \rho^{\mu} + D_\mu \rho^{-\mu}) \cdot Z_{c_\gamma}(z)$$

para caso ciclico

Coordenadas Esféricas



$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{\nabla^2 V}{V} = 0 \quad ; \text{usando } V = \frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{-m^2} = 0$$

$$\Phi_m = A_m\cos(m\varphi) + B_m\operatorname{sen}(m\varphi) \qquad m \neq 0$$

$$\Phi_m = A_0 + B_0\varphi \qquad m = 0$$

Voltando temos

$$\frac{r^2 sen^2\theta}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{sen\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)= m^2 \quad \frac{1}{sen^2\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{m^2}{sen^2\theta}-\frac{1}{sen\theta}\cdot\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen\theta\frac{d}{d\theta}\Theta\right]$$

$$\Downarrow$$

$$l(l+1)$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}-l(l+1)R=0$$ $\rightarrow$ novamente, do tipo Cauchy-Euler

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}f+ax\frac{d}{dx}f+bf=0$$

$$r=e^t\rightarrow t=\ln r$$

$$\frac{d^2}{dr^2} R = \frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} R - \frac{dR}{dt} - \ell(\ell+1) R = 0$$

$$R = e^{pt} \rightarrow \quad p^2 e^{pt} - p\, e^{pt} - \ell(\ell+1) e^{pt} = 0$$

$$p(p-1) - \ell(\ell+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = -\ell \quad ; \quad p = \ell + 1 \quad \rightarrow \text{duas raízes}$$

$$R(t) = C e^{(\ell+1)t} + D e^{-\ell t}$$

$$R_\ell(r) = C_\ell\, r^{\ell+1} + D_\ell\, r^{-\ell}$$

Fechando com Θ:

$$\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta}\Theta\right] = l(l+1)$$

Substituindo $x = \cos\theta$ obtemos a equação diferencial generalizada de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Theta - 2x\frac{d}{dx}\Theta + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0$$

$$\Theta(\theta) = P_{m,l}(\cos\theta)$$

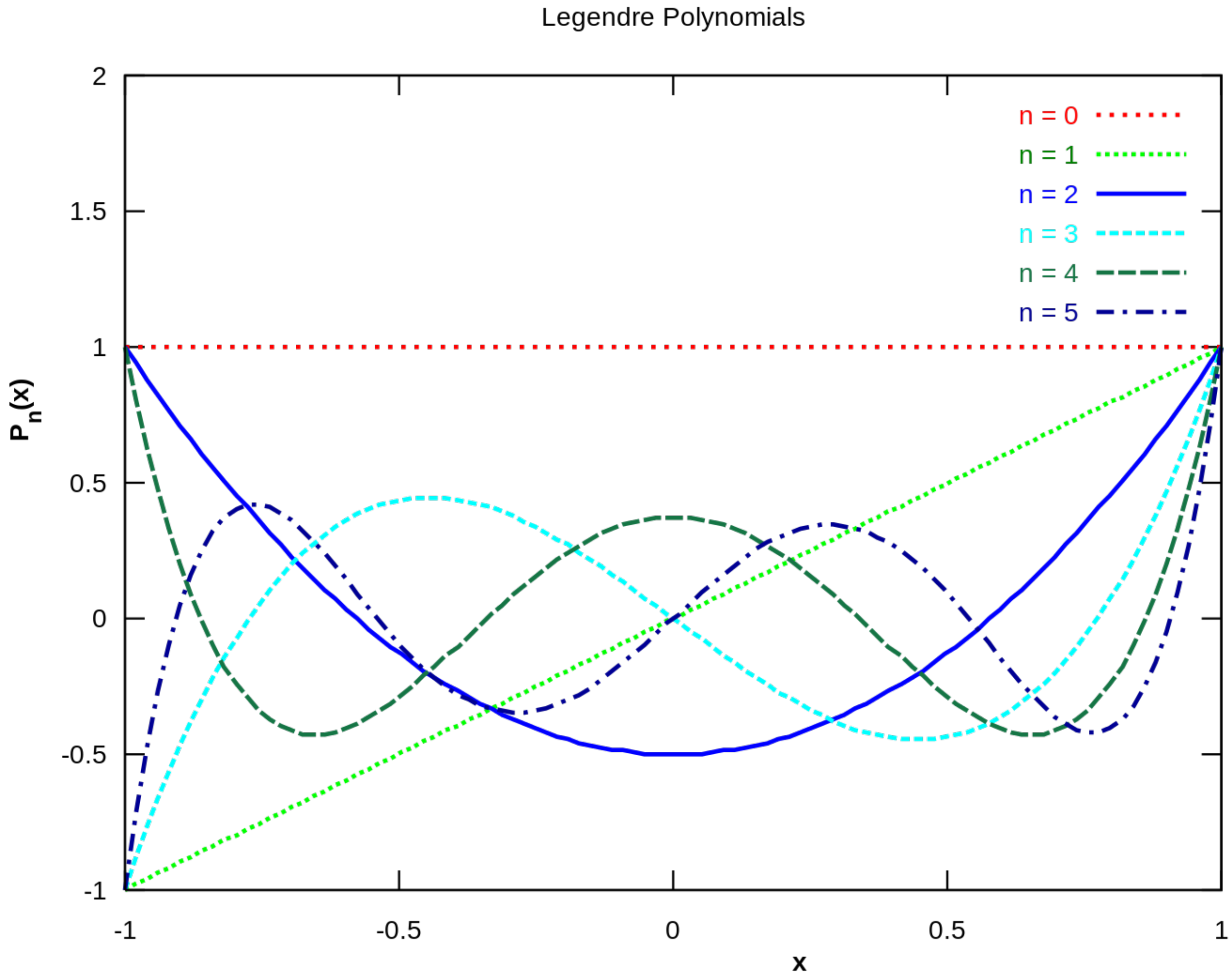
$m = 0$

$P_{0,0}(x) = 1$

$P_{0,1}(x) = x$

$P_{0,2}(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

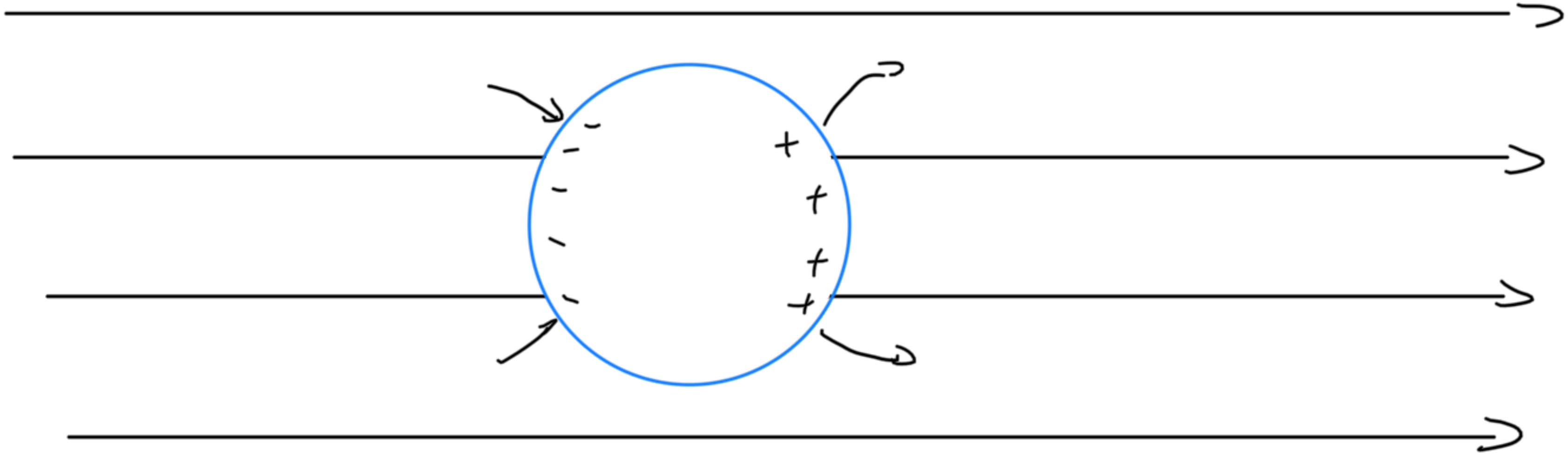
$P_{0,3}(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$



Neste caso: $m=0 \Rightarrow V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$

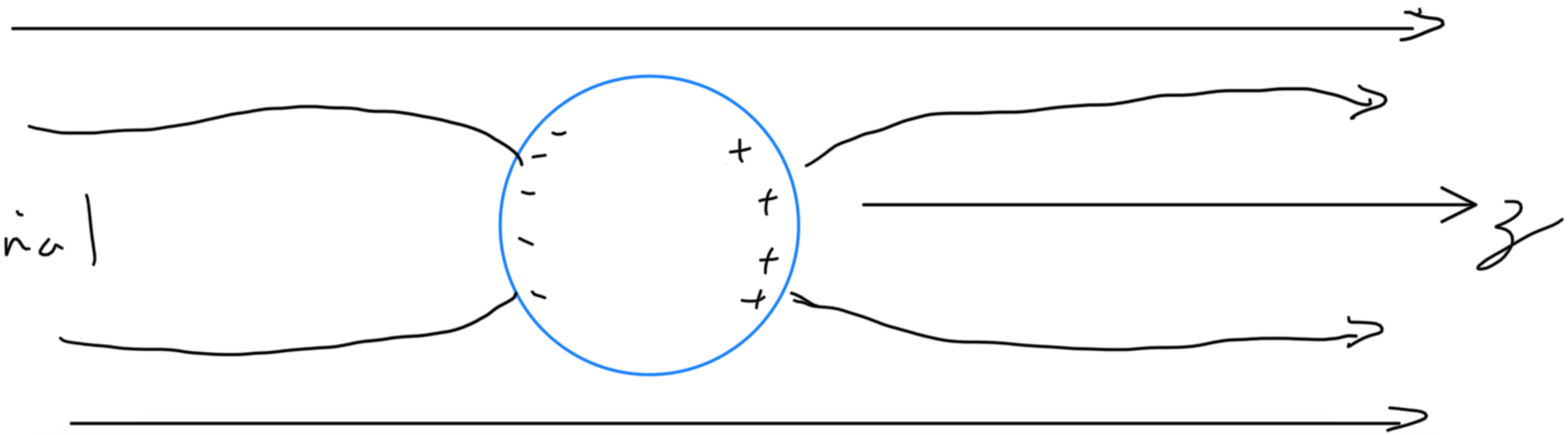
Aplicando: Uma esfera metálica é colocada em um campo inicialmente uniforme. O campo redistribui as cargas, de forma que o campo dentro da esfera se anule. Qual o potencial fora da esfera?

Aplicando: Uma esfera metálica é colocada em um campo inicialmente uniforme. O campo redistribui as cargas, de forma que o campo dentro da esfera se anule. Qual o potencial fora da esfera?



Aplicando: Uma esfera metálica é colocada em um campo inicialmente uniforme. O campo redistribui as cargas, de forma que o campo dentro da esfera se anule. Qual o potencial fora da esfera?

final



A esfera é equipotencial

longe da esfera $\quad V = -E_0 z + C$

Adotando $\quad V = 0 \quad$ p/ $r \leq R$

$V \to -E_0 \, r \cos\theta \qquad r >> R$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$V(R,\theta) = 0 \Rightarrow \quad \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = 0$$

$$A_l R^l = -\frac{B_l}{R^{l+1}} \quad \Rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1}$$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$r \gg R \therefore V(r,\theta) \simeq \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r \cos\theta$$

Somente $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ é conveniente

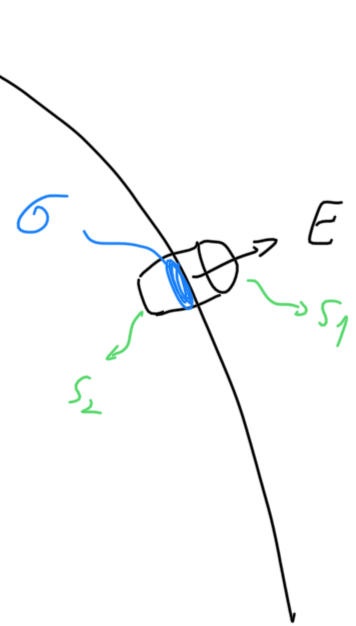
$$\Rightarrow A_1 = -E_0 , \quad A_l = 0 \quad l \neq 1$$

$$\therefore V(r,\theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta$$

$$= \underbrace{-E_0 r \cos\theta}_{\text{potencial externo}} + \underbrace{E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\theta}_{\text{potencial da esfera}}$$

r^2 ?

Densidade de carga variável



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_0} \quad \text{(Gauss)}$$

$$\int_{S_2} \vec{E}\, da = 0$$ (campo nulo dentro do condutor)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_{S_1} E \cdot da = E \cdot A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} A$$

$$E = \vec{E}\cdot\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-E_0 r \cos\theta + E_0 \frac{R^3}{r^2}\cos\theta\right)\Big|_{r=R}$$

$$= E_0 \cos\theta + 2E_0 \frac{R^3}{r^3}\cos\theta \Big|_{r=R}$$

$$= 3E_0 \cos\theta$$

$$\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$