IX. A construção e interpretação de gráficos na física

Muitas relações entre grandezas físicas podem ser representadas por conjuntos de valores numéricos na forma de um gráfico. Quando a variável é contínua, esse gráfico será uma linha, que pode ou não ter descontinuidades, quebras, máximos e mínimos, concavidade, pontos de inflexão, situar-se sempre acima do eixo ou cruzar o eixo, com cada uma dessas características provavelmente ligada a uma propriedade interessante do fenômeno ao qual se relaciona. Se a variável é discreta, a informação costuma ser menos rica, mas não menos útil; no entanto, neste texto, vamos nos limitar a estudar funções de variável contínua.

A. Um estudo gráfico do movimento de uma bola de futebol no ar

O exemplo de motivação será a interpretação, por meio de gráficos, do movimento de uma bola no ar, em que o atrito desempenha um papel importante. O diagrama de corpo livre da bola está na figura 1

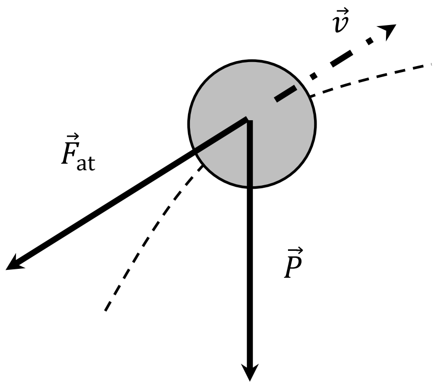

Figura 1. Diagrama de corpo livre da bola no ar com velocidade $\vec{v}$. A trajetória da bola está representada pela linha tracejada. A força de atrito é oposta ao deslocamento da bola.

De acordo com a Figura 1, a equação de movimento é

$$\vec{P} + \vec{F}_{at} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Quando a bola tem uma velocidade entre 1 e 20 m/s, a força de atrito tem mesma direção e sentido oposto ao da velocidade e módulo proporcional ao quadrado da velocidade[1]. Esse termo será escrito $\vec{F}_{at} = -c\,v^2\,\hat{v}$, em que c é uma constante que depende da área da bola e de grandezas relacionadas às propriedades do ar no lugar, e

[1] A bola expulsa o ar que está à sua frente ao avançar. Para isso, transmite um impulso que é a massa do ar que expulsa pela velocidade ganha por esse ar; como a força é a quantidade de impulso transmitido por unidade de tempo, a força é proporcional à quantidade de ar que a bola atravessa por unidade de tempo vezes a velocidade ganha pelo ar, ambas grandezas proporcionais à velocidade da bola.

usamos um vetor unitário na direção e sentido da velocidade – um *versor* – identificado por um chapéu, ou seja,

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} \qquad \text{com} \qquad v = |\vec{v}|$$

Assim, a equação de movimento de uma bola de futebol de massa m é

$$m\vec{g} - c\, v^2\, \hat{v} = m\, \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{9.1}$$

em que t é o tempo e $\vec{g}$ é a aceleração local da gravidade.

A equação (9.1) não tem solução analítica, assim é necessário escrever um programa de computador para resolvê-la. As seções seguintes apresentam os gráficos em função do tempo das posições, velocidades e acelerações nas direções horizontal, x, e vertical y, com o eixo Oy orientado para cima, de uma bola chutada com velocidade inicial $v_0 = 40$ m/s em um ângulo θ = 45º com a horizontal, do ponto {0,0} no instante t = 0 s. Esses gráficos revelam o efeito do ar no movimento da bola.

1. O movimento vertical

A figura 2 mostra os gráficos da posição, velocidade e aceleração na direção vertical, desde o instante do chute até que a bola volta a bater no campo pela primeira vez. O gráfico da aceleração revela que a aceleração não é constante, tendo intensidade maior que a gravidade até 1,8 s e menor, a partir desse instante. Além disso, a intensidade diminui rapidamente nesse intervalo em que ela supera a gravidade, caindo mais devagar depois de 1,8 s.

> Questão 1. Um estudante imaginou que, como o atrito atrapalha o movimento, a aceleração vertical da bola seria sempre menos intensa que a gravidade, mas isso só ocorre após o instante 1,8 s. Como você explicaria para esse estudante que, nesse chute da bola, espera-se que a aceleração inicial seja mais intensa que a gravidade?

O gráfico da velocidade também mostra que a aceleração não é constante, uma vez que é uma curva côncava para cima. O fato do gráfico ser uma função decrescente corresponde ao sentido da gravidade, sempre para baixo e, portanto, oposta ao eixo. O cruzamento do gráfico com o eixo Ox acontece em t = 1,8 s, exatamente o mesmo instante em que a queda da intensidade da aceleração perde ritmo, o que também se reflete na inclinação desse gráfico, mais parecido com uma reta depois de cruzar o 0.

> Questão 2. Explique por que o cruzamento do gráfico com o eixo Ox acontece em t = 1,8 s, que é o instante em que a queda da intensidade da aceleração perde ritmo.

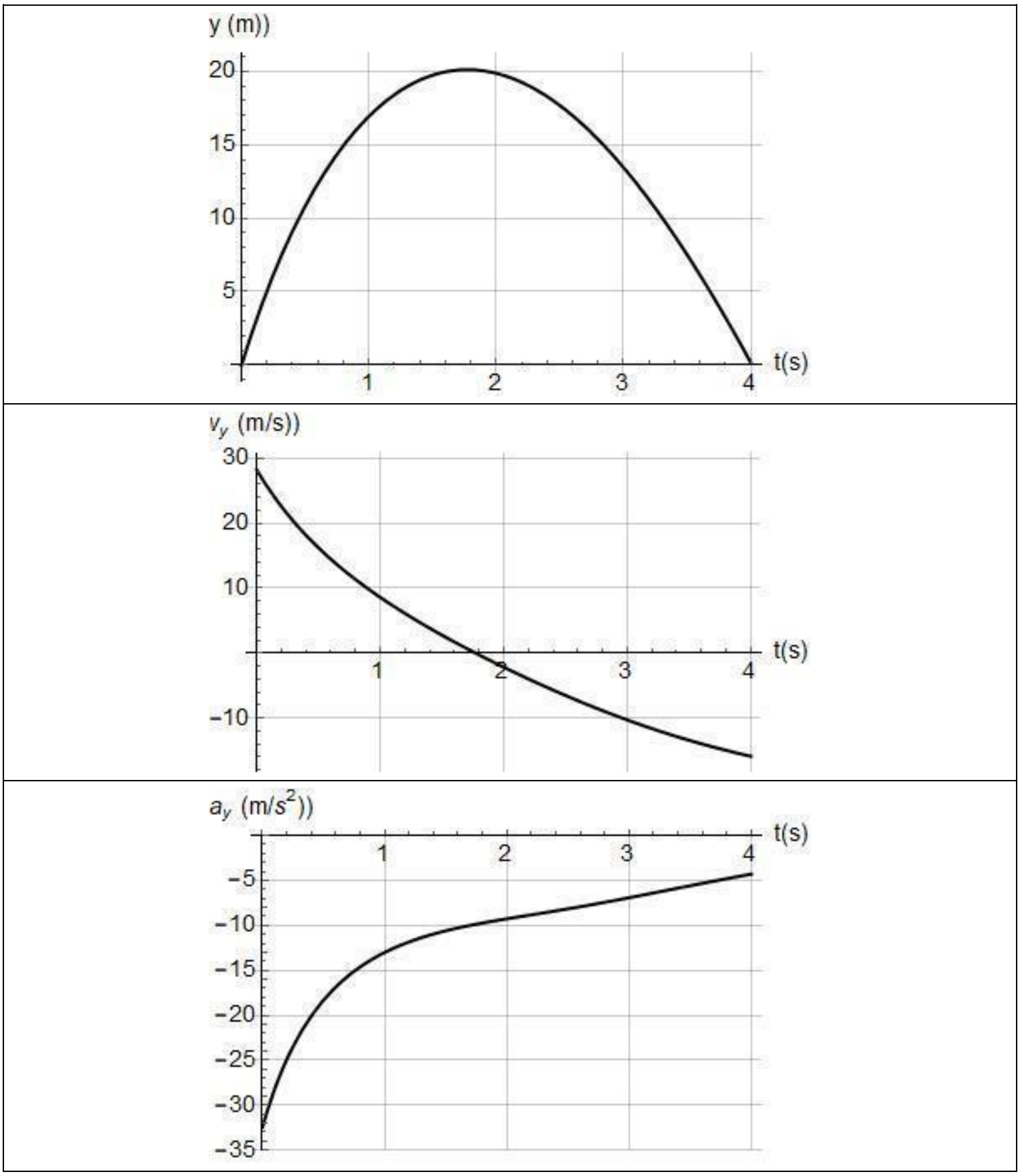

Figura 2. Posição, velocidade e aceleração da bola na direção vertical.

Finalmente, o gráfico da posição por tempo até parece uma parábola, mas sem simetria – a bola atinge a altura máxima em 1,8 s e demora 2,2 s para cair. Olhando bem, parece uma parábola cujo ramo direito levou uma esticada, e o final parece quase reto.

Questão 3. Explique porque a bola leva menos tempo para subir do que para descer.

2. O movimento horizontal

A figura 3 apresenta os gráficos da posição, velocidade e aceleração na direção horizontal, desde o instante do chute até que a bola volta a bater no campo pela primeira vez.

Assim como o gráfico da aceleração vertical, o ritmo de redução da intensidade da aceleração horizontal muda em t=1,8 s, mas a mudança é mais radical que a da figura 2c; a aceleração vertical é quase constante depois de 2,0 s. Claro que, se não houvesse atrito, a aceleração seria nula, mas no início do movimento, a aceleração horizontal é uma ordem de grandeza maior que no final.

Questão 4. Explique porque a mudança de aceleração é mais pronunciada na direção vertical que na horizontal.

O gráfico de v_x é sempre decrescente, correspondendo a uma aceleração contrária ao movimento o tempo todo. É interessante notar que v_x diminui quase uniformemente após t = 1,0 s, após mudar rapidamente no primeiro segundo do movimento. Finalmente, o gráfico da posição horizontal no tempo é crescente o tempo todo – a bola sempre vai para frente – mas não é uma reta, nem pode ser aproximada por uma reta em nenhum pedaço, embora varie mais suavemente no final do movimento. De todo modo, a curva é côncava para baixo, reflexo da aceleração sempre negativa.

3. A trajetória

O último gráfico é o da trajetória, que está representada na figura 4. Note que as escalas dos eixos vertical e horizontal são as mesmas. Embora isso não seja obrigatório, é a melhor escolha sempre que possível, como neste caso, em que os deslocamentos totais nos dois sentidos são parecidos.

Questão 5. Calcule o tempo de subida, a altura máxima e o alcance da bola deste exemplo, ignorando o atrito com o ar.

Questão 6. Explique porque a curva da figura 2a parece uma parábola achatada do lado esquerdo, enquanto a da figura 4, parece uma parábola achatada do lado direito.

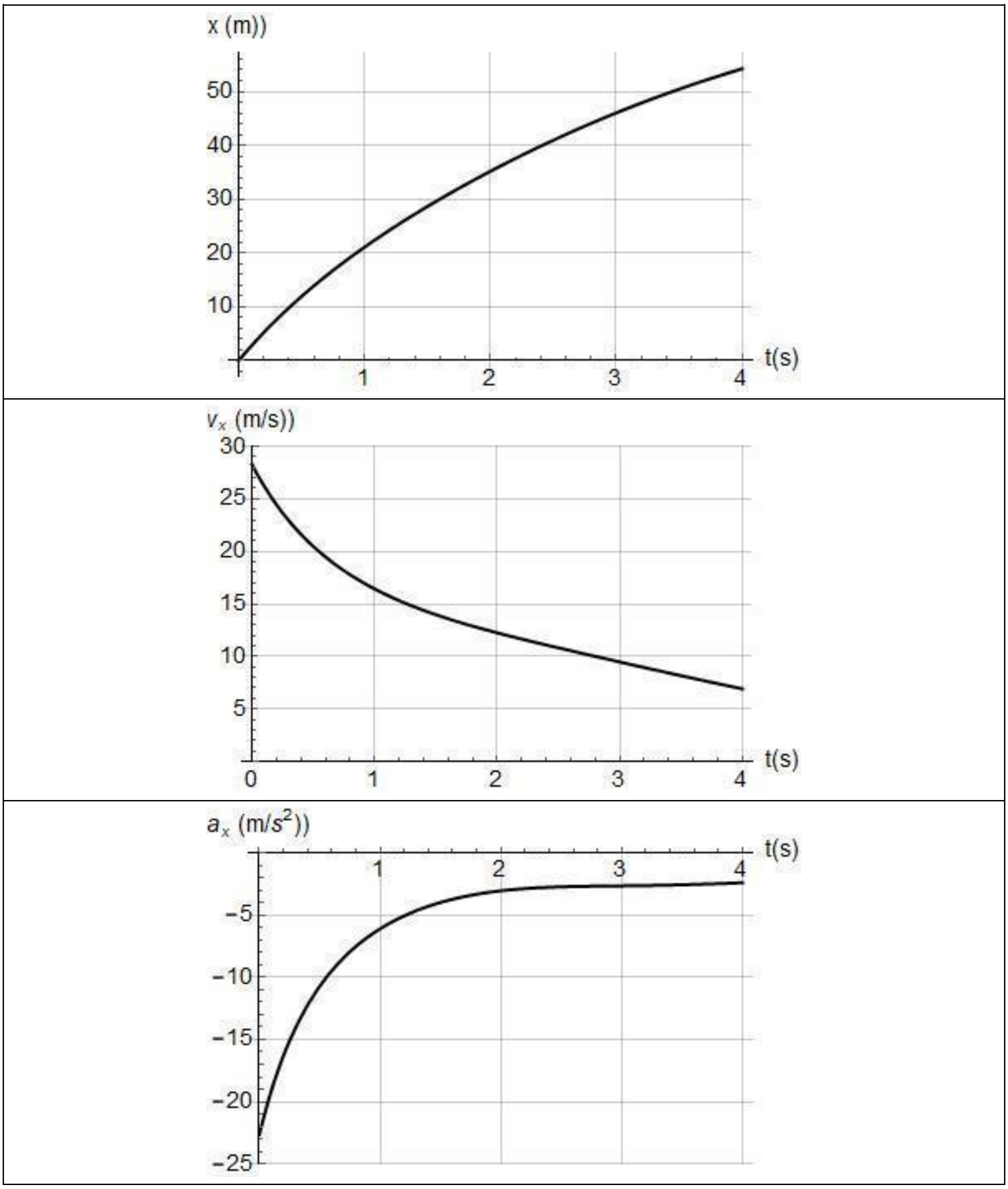

Figura 3. Posição, velocidade e aceleração do movimento horizontal da bola, desde que é chutada até tocar o campo pela primeira vez.

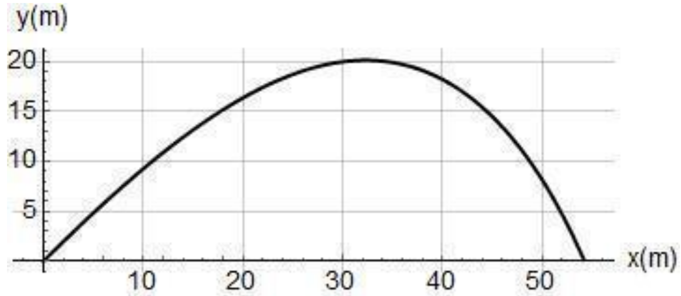

Figura 4. Trajetória da bola.

B. Esquema geral de construção de gráficos a partir da fórmula

Construir um gráfico manualmente, de modo que os principais aspectos do comportamento de uma grandeza em função da variação de outra sejam ressaltados em um esboço, pode ser um processo de muitas etapas a depender da complexidade da função. Por isso, é essencial proceder de maneira organizada e ordenada.

O procedimento de construção de um gráfico pode ser separado nas seguintes etapas:

1. Determinação do domínio;
2. Análise da Imagem;
3. Análise da primeira derivada;
4. Identificação dos máximos e mínimos;
5. Análise da segunda derivada;
6. Identificação dos pontos de inflexão;
7. Identificação das assíntotas.

Compilando todas as informações obtidas nas etapas acima, teremos informações suficientes para esboçar um gráfico.

1. Determinação do domínio de uma função.

O domínio de uma função é definido como o conjunto de valores para os quais a função pode ser calculada. Para o nosso caso, vamos nos restringir a funções de uma variável com domínio e contradomínio pertencentes ao conjunto dos números reais, R, de modo que valores da função fora desse conjunto não são admitidos.

Resumidamente, definir os valores de entrada de uma função para os quais pode ser calculada consiste em, justamente, encontrar o conjunto de valores para qual a função não pode, de modo a excluí-los do conjunto dos números reais. Para o caso de funções do tipo f: A → B, com A e B pertencente ao conjunto dos reais, existem casos específicos que devemos estar atentos para identificarmos o domínio.

São valores da variável x que devem ser excluídos do domínio aqueles que:

i. anulam um denominador, como ocorre muito no caso das **frações racionais** (= quociente de polinômios, veja capítulo VI.D) e funções em que x está elevado a um expoente negativo.
ii. tornam negativo o radicando de uma raiz de índice par, $\sqrt[2n]{x}$ com n inteiro positivo
iii. tornam $g(x)$ negativa para funções do tipo ln [$g(x)$].

Essa lista não é exaustiva, mas, por outro lado, sempre é preciso verificar se algum (ou vários) desses casos ocorre(m), como mostrado a seguir.

A fim de facilitar o detalhamento de como achar esses pontos que devem ser excluídos do domínio, usaremos a seguinte função como exemplo:

$$f(x) = \frac{x^3 + \frac{3}{2}x}{x^2 - 1} \tag{9.2}$$

Como citamos anteriormente, para que a função da equação (9.2) seja definida em R, é necessário que o denominador seja diferente de zero. Com isso, podemos encontrar em que pontos x a função não pode ser calculada interpretando a seguinte desigualdade como uma inequação[2]:

$$x^2 - 1 \neq 0 \tag{9.3}$$

A solução dessa inequação é $\{x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$. Como o numerador pode ser calculado para qualquer valor real, o domínio da função (9.2) contém os valores do conjunto dos números reais **exceto** os valores 1 e -1:

$$Dom\, f = \{x \in R \mid x \neq -1 \; e \; x \neq 1\}$$

Com isso, a primeira informação sobre o gráfico de $f(x$ é que não existirão pontos da forma (-1, f(-1)) e (1, f(1)). Sempre que se excluem pontos do gráfico, devemos avaliar o comportamento da função nas vizinhanças desses pontos, começando pelos limites laterais da função para os valores citados:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

Além da função não possuir pontos sobre as retas verticais $x = 1$ e $x = -1$, esses limites vão dar origem a assíntotas, que estão explicadas no item 7 abaixo.

2. Análise da imagem da função (Estudo do sinal da função)

É muito útil conhecer o conjunto dos valores que uma função pode assumir, ou seja, saber qual é a imagem da função. Mais que isso, as grandezas que podem assumir valores negativos e positivos costumam significar coisas diferentes quando mudam de sinal. Por exemplo, uma velocidade positiva é diferente da negativa, porque representam movimentos em sentidos opostos. Assim, normalmente, ao determinar a imagem da função, localizamos que partes do domínio mapeiam em valores positivos da função e que parte, em negativos, além de localizar os valores de x para os quais a função é nula. Portanto, a análise da imagem de uma função consiste normalmente no estudo dos sinais que assumem os valores da função $f(x)$ em relação a determinados subconjuntos do

---

[2] Desigualdades e inequações são o tema do capítulo VIII.

domínio. Ao fazer o gráfico, saberemos para que valores de x a curva estará na parte positiva, nula, ou negativa do eixo das ordenadas[3].

A solução da inequação $f(x) > 0$ dá o conjunto de valores de *x* para os quais a curva de uma determinada função está acima do eixo das abcissas. Caso o conjunto seja vazio, podemos afirmar que o gráfico de f(x) não conterá nenhum ponto nos quadrantes 1 e 2 do plano cartesiano.

As raízes da equação $f(x) = 0$ são os valores de *x* para os quais a curva corta o eixo das abcissas, ou se confunde com ele, se existirem muitas raízes formando um intervalo contínuo. Uma função sem raízes não conterá pontos que façam intersecção com o eixo das abscissas.

Por último, resolvendo a inequação $f(x) < 0$, determinamos o conjunto de valores de *x* para os quais a curva de uma determinada função esteja na parte negativa do eixo das ordenadas. Caso o conjunto solução seja vazio, podemos afirmar que o gráfico de $f(x)$ não conterá nenhum ponto nos quadrantes 3 e 4 do plano cartesiano.

Resolvendo as inequações descritas acima para a função dada em (9.2), podemos identificar onde a curva do gráfico dessa função se localiza em cada quadrante. Para achar a imagem completa, sobrepomos as soluções dessas inequações. Começamos esse procedimento reescrevendo $f(x)$ da equação (9.2) da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ em que } \quad g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x \quad \text{e} \quad h(x) = x^2 - 1$$

Podemos começar encontrando as raízes, que serão os valores de x para os quais o numerador da função é nulo: $g(x) = 0$. Essa função possui uma única raiz **real**, que é *x* = 0. Sendo assim, o gráfico de $f(x)$ será nulo apenas na origem do plano cartesiano.

Em seguida, a fim de determinar o sinal de $f(x)$, resolvemos inequações para $g(x)$ e $h(x)$ a fim de verificar onde cada função será positiva, negativa ou nula em relação a *x*. Como esses resultados, monta-se a tabela 1 só com os sinais de $f(x)$ e $g(x)$ ao longo do eixo *x*, que é separado em tantas regiões quantas necessárias para dividir simultaneamente os subconjuntos das imagens de $f(x)$ e $g(x)$ nos eixos positivo e negativo. A última coluna da tabela é construída considerando que o sinal de *f* é o produto dos sinais de g e *h*. Verificamos, portanto, que o gráfico de *f* está abaixo do eixo das abscissas nos intervalos]-∞, -1[e]0,1[, acima nos intervalos]-1, 0[e]1, +∞[, e cruza a origem quando *x* = 0.

[3] Como traçar um gráfico foi assunto do capítulo I, que define termos como eixo das ordenadas ou das abscissas.

Tabela 1. As células dão os sinais da função identificada na 1ª linha na região marcada na 1ª coluna. Os resultados para $g(x)$ e $h(x)$ são obtidos resolvendo as inequações e, para $f(x)$, considerando que seu sinal é o produto dos sinais das outras duas funções.

x	$g(x)$	$h(x)$	$f(x)$
$x < -1$	$-$	$+$	$-$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$
$x = 0$	0	$-$	0
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$

3. Análise da primeira derivada (regiões de crescimento e decréscimo de $f(x)$)

A derivada primeira de $y = f(x)$ em relação a x é outra função, $f'(x)$, que nos indicará o comportamento da taxa de variação instantânea de y em relação a x. Um caso emblemático na Mecânica é a função posição r de um objeto em função do tempo t, $r(t)$, cuja derivada primeira é a velocidade: aa taxa de variação instantânea da posição desse corpo em relação ao tempo.

Retomando novamente o caso de uma função de uma variável x do tipo $f : A \rightarrow B$, com A e B pertencente aos reais, temos que a primeira derivada $f'(x)$ nos trará informações sobre o crescimento, decrescimento, ou trechos de constância da função f cujo gráfico queremos esboçar. Novamente, devemos recorrer ao estudo de sinal de uma função, no caso, da derivada de f.

Resolvendo as inequações: $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$ e $f'(x) < 0$, determinamos os conjuntos de valores de x para os quais a curva de f tem, respectivamente, comportamento crescente (inclinação positiva), corta o eixo das abscissas ou decresce (inclinação negativa).

A fim de aplicar esse procedimento à função da fórmula (9.2), começamos por derivar $f(x)$ em relação a x, com o resultado:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 9x^2 - 3}{2(x^2 - 1)^2}$$

Novamente, podemos reescrever e função como uma divisão de polinômios em x. Chamaremos a função do numerador de G(x) e a do denominador de H(x), mas atenção: essas funções *não* correspondem às derivadas de g(x) e h(x) definidas no item anterior.

Começando pelos pontos onde f'(x) é nulo, encontramos duas raízes reais, que são as raízes de G(x) = 0:

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{105}} \approx \pm 2{,}2$$

Como faremos um gráfico, precisamos calcular o valor numérico das raízes de modo a posicionar corretamente o ponto no sistema de eixos. As raízes de H(x) são as mesmas de h(x), sendo estas x = 1 e x = -1. Construímos a Tabela 2 para o estudo dos sinais de $f'(x)$; ela é similar à Tabela 1. A última coluna guia a construção do gráfico.

Tabela 2. As 4 primeiras colunas são construídas da mesma forma que a Tabela 1. A última coluna é deduzida da penúltima, interpretando o significado do sinal da derivada.

x	$G(x)$	$H(x)$	$f'(x) = \frac{G(x)}{H(x)}$	$f(x)$
x < -2,2	+	+	+	Cresce
x = -2,2	0	+	0	Paralelo a Ox
-2,2 < x < -1	-	+	-	Decresce
-1	-	∞	-	indefinido
-1 < x < 1	-	+	-	Decresce
1	-	∞	-	indefinido
1 < x < 2,2	-	+	-	Decresce
x = 2,2	0	+	0	Paralelo a Ox
x > 2,2	+	+	+	Cresce

4. Identificação de máximos e mínimos

Colocamos os resultados do item anterior acerca da imagem de $f'(x)$ em uma reta orientada para indicar o seu o sinal de f'(x) em relação aos valores de x, como mostra o esquema da **Figura 5**.

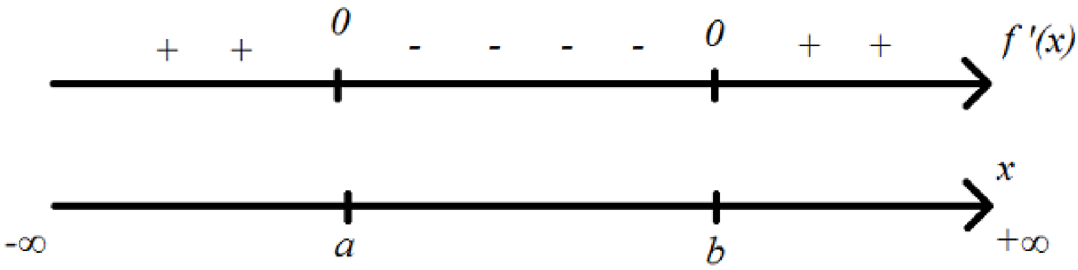

Figura 5. No eixo de cima, representa-se o sinal da derivada, enquanto no de baixo, que é o eixo Ox, marcam-se os pontos em que a derivada muda de sinal.

Esse esquema indica que, dada a função f, sua primeira derivada em relação a x é positiva para $x < a$ e $x > b$, negativa para $a < x < b$ e nula em $x = a$ e $x = b$. Portanto, o gráfico de f cresce no intervalo $]-\infty, a[$, é paralelo ao eixo das abscissas em $x = a$, decresce entre o intervalo $]a, b[$, torna-se novamente paralelo ao eixo das abscissas em $x = b$, e volta a crescer entre o intervalo $]b,+\infty[$.

A alternância de sinal ao redor dos pontos em $f'(x) = 0$ indicam pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de *f*.

Como apresentado no esquema da Figura 5, $f'(a)$ é positiva à esquerda de *a* e negativa, à direita. Isso indica que f cresce até $x = a$ e decresce logo em seguida, como ilustrado na **Figura 6**. Sendo assim, o ponto $(a, f(a))$ configura um **máximo** local. Se não houver outro valor de x tal qual $f(x) > f(a)$, podemos afirmar que $(a, f(a))$ é um máximo global da função.

Por outro lado, $f'(b)$ está entre valores negativos à esquerda e positivos à direita. Isso indica que f decresce até $x = b$ e cresce logo em seguida. Sendo assim, o ponto $(b, f(b))$ configura um **mínimo** local, como ilustrado na **Figura 7**. Se não houver x tal qual $f(x) < f(b)$, podemos afirmar que $(b, f(b))$ é um mínimo global.

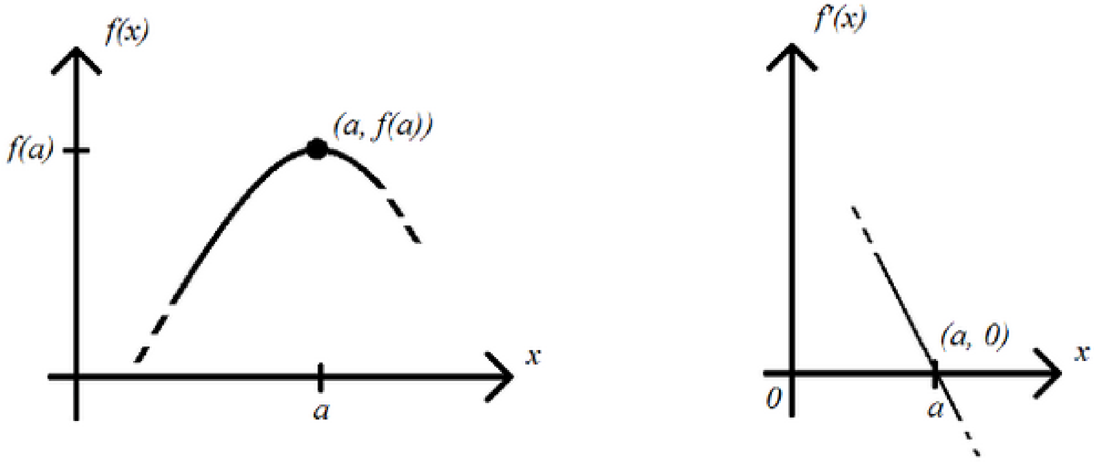

Figura 6. Representação do comportamento de f(x) em relação aos sinais de f'(x) que indicam um ponto de máximo.

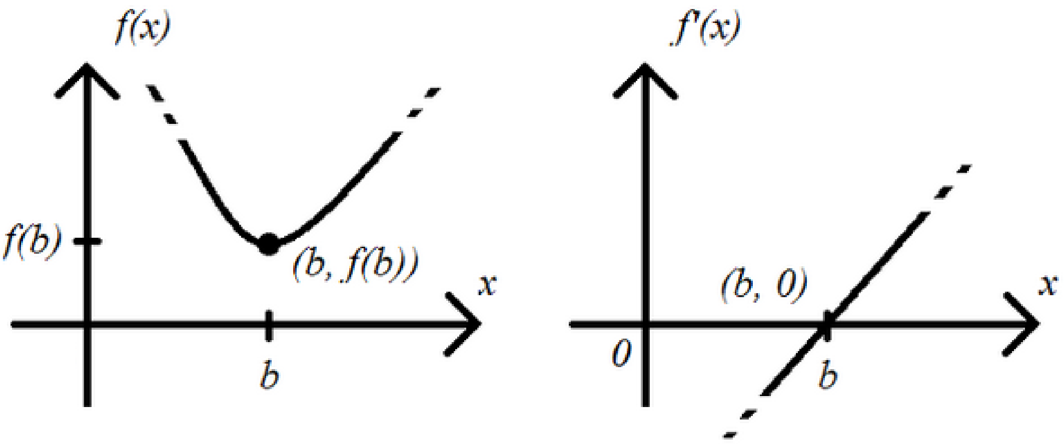

Figura 7. Representação do comportamento de f(x) em relação aos sinais de f'(x) que indicam um ponto de mínimo.

Voltando à função (9.2) do exemplo, já definimos os valores de x para os quais a primeira derivada é zero. Para definirmos quais desses pontos são máximos, mínimos, ou nenhum dos dois, devemos observar o comportamento de f em intervalos anteriores e posteriores aos pontos.

Para $x = -2,2$, a função tem um comportamento crescente no intervalo anterior e decrescente no intervalo posterior. Isso indica que (-2,2, f(-2,2)) é um ponto de máximo, e terá comportamento semelhante à **Figura 6**.

Por fim, para $x = 2,2$, a função tem um comportamento decrescente no intervalo anterior e crescente no intervalo posterior. Isso indica que (2,2, f(2,2)) é um ponto de mínimo, e terá comportamento semelhante à **Figura 7**.

5. Teste da segunda derivada (Análise das concavidades)

A primeira derivada da posição *r* de um objeto em relação ao tempo t é sua velocidade *v*. Ao derivar a velocidade em relação ao tempo, obtém-se a aceleração *a*, que é a taxa de variação da velocidade em função do tempo. Assim, a derivada da função velocidade em relação ao tempo é a *segunda* derivada da função posição em relação ao tempo:

$\frac{d}{dt}r(t) \; = \; v(t)$, derivando ambos os lados em relação à *t*, chega-se a

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}r(t) = \frac{d^2}{dt^2}r(t) \; = \; \frac{d}{dt}v(t) = a(t)$$

Sendo assim, retomando os casos de uma função, temos que a segunda nos indica a taxa de variação da taxa de variação de f.

Pensando no gráfico de uma função *f* de uma variável *x* do tipo *f*: A → B, com A e B pertencentes aos reais, a partir das retas tangentes, ponto a ponto, a segunda derivada de *f* em relação ao tempo, *f ''*, indicará se a inclinação das retas tangentes à curva de *f* em cresce, decresce, ou permanece constante em função da variação de x. Essa qualidade é extraída do sinal de *f ''*.

Para regiões onde o sinal de *f ''* é positivo, a inclinação das retas tangentes aumenta com o aumento de *x* e, onde o sinal é negativo, t diminuem com *x*. Por último, em uma região onde *f ''* é nula, a inclinação da reta tangente é constante, ou seja, o gráfico é uma reta.

Podemos associar a taxa de variação das inclinações das retas tangentes a *f* com a *concavidade* da curva. A Figura 8 ilustra o comportamento de *f* para as diferentes combinações dos sinais da primeira e segunda derivadas.

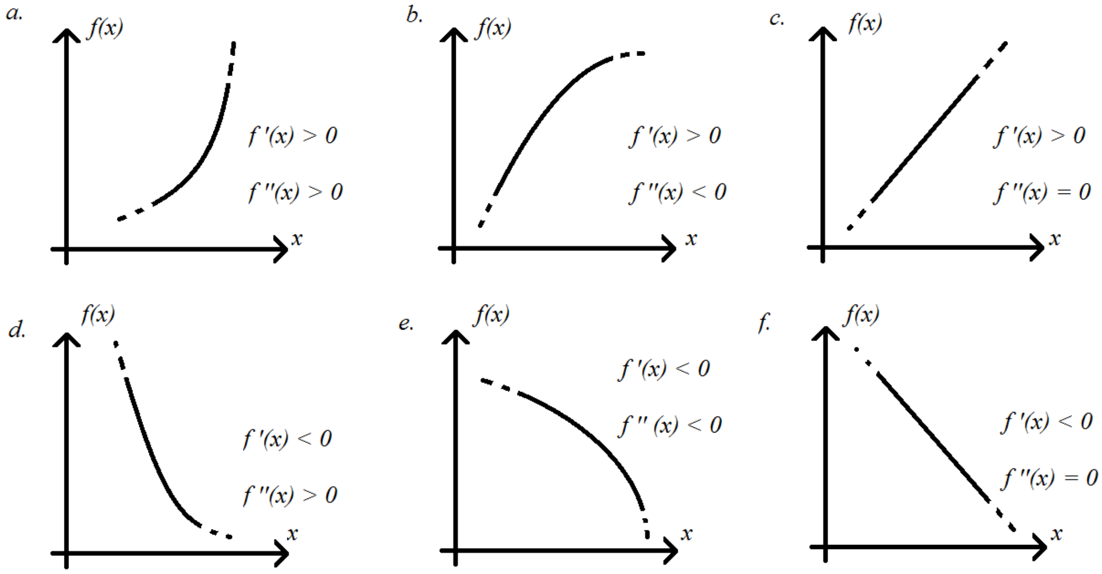

Figura 8. Comportamento de *f*(*x*) com respeito aos sinais de *f '*(*x*) e *f ''*(*x*).

Na Figura 8, vemos que, no intervalo em que $f''(x)$ é positiva, o gráfico de f é côncavo para cima e, quando é negativa, a concavidade é para baixo. Já quando $f''(x) = 0$, o gráfico de f é uma reta.

Retomando o exemplo com f da expressão (9.2), calculamos a segunda derivada em relação a x:

$$f''(x) = \frac{5x^3 + 15x}{(x^2 - 1)^3}$$

Reutilizando o método de escrever a segunda derivada de f em relação a x como um quociente de polinômios,

$$f''(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

atentando ao fato de que N(x) e D(x) não correspondem às segundas derivadas de h e g em relação a x, analisamos os sinais de f'' sobrepondo as imagens dos polinômios, o que está feito na Tabela 3, como já fizemos anteriormente, nas Tabela 1 e Tabela **2**. Verificamos que, em termo dos valores de x, o gráfico de f possui concavidade para cima nos intervalos]-1,0[e]1, +∞[, e concavidade para baixo em]-∞, -1[e]0, 1[. A **Tabela 3** traz mais uma novidade: quando o gráfico muda o tipo concavidade em um determinado ponto, em que a curva não é nem côncava para cima nem para baixo, este ponto recebe o nome de *ponto de inflexão*, o que acontece na origem do plano cartesiano para a função (9.2).

Tabela 3. Determinação da concavidade de $f(x)$ a partir do sinal da segunda derivada.

x	N(x)	D(x)	$f''(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$	$f(x)$
x < -1	-	+	-	Côncavo para baixo
-1 < x < 0	-	-	+	Côncavo para cima
x = 0	0	-	0	Ponto de inflexão
0 < x < 1	+	-	-	Côncavo para baixo
x > 1	+	+	+	Côncavo para cima

7. Identificação das assíntotas

Assíntotas são retas que indicam o comportamento do gráfico conforme o valor de x tende a um valor que não está no domínio de f, ou quando x tende ao infinito. Falaremos neste texto em dois tipos de assíntotas: as verticais e as horizontais.

a. Assíntotas Verticais

Uma assíntota vertical é uma reta paralela ao eixo das ordenadas, portanto pode ser escrita como uma equação do tipo $x = a$, em que a é uma constante real. Geralmente, estão presentes em gráficos de funções cujo domínio não contém o valor $x = a$, como no caso deste exemplo O comportamento do gráfico da função ao redor dessa reta pode assumir diversas formas, a depender do que acontece quando verificamos os limites laterais dessa função nesse ponto (item 1 desta seção 1, página 7).

Como antecipamos na determinação do domínio da função utilizada como exemplo, vimos que os limites laterais de f para x → -1 e x → 1 divergem. À esquerda de -1, a função tende para o infinito negativo. À direita de -1, a função tende ao infinito positivo. O mesmo ocorre com o valor de x = 1, portanto a funão do exemplo tem duas assíntotas verticais, $x = a$ e $x = b$.

b. Assíntotas Horizontais

Uma assíntota horizontal é uma reta paralela ao eixo das abscissas, que pode ser escrita através de uma equação do tipo $y = c$, tal que c é uma constante real. Geralmente, estão presentes em gráficos de funções cujo limite da função para $x \to \pm\infty$ é igual a uma constante real. Esta reta indica como o gráfico da função tende a se conformar conforme x cresce ou decresce indefinidamente.

A função do exemplo tende a ∞ tanto quando x→∞ , quanto x→- ∞ , assim não possui nenhuma assíntota horizontal.

C. Construindo o gráfico do exemplo

A ideia é calcular alguns pontos e plotá-los, sempre incluindo pontos de máximo, mínimo e de inflexão, desenhar as assíntotas, e ligar os pontos, respeitando a característica de máximo ou mínimo local. A tabela abaixo tem todos os pontos que são necessários para um bom gráfico.

Tabela 4. Valores calculados para a função. Incluímos um dígito a mais do que é possível desenhar no gráfico para deixar claro que 2,2 é um ponto de mínimo local.

x	f(x)
-3	-3,94
-2,2	-3,63
-2	-3,67
-0,5	-1,17
0	0
0,5	1,17
2	3,67

2,2	3,63
3	3,94

O gráfico, feito por computador, está na **Figura 9**.

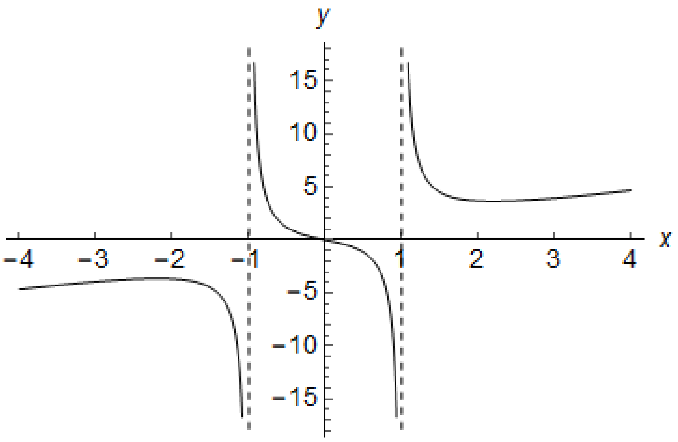

Figura 9. Gráfico da função (9.2). As assíntotas estão desenhadas em linha tracejada.

D. Exercícios

1. Trace o gráfico da figura 9 à mão, usando o procedimento descrito acima. Note que é impossível ter a qualidade do gráfico da figura 9; tudo que tem que ficar claro no seu desenho é o andamento geral do gráfico, em particular os extremos, assíntotas e o cruzamento com os eixos coordenados.

2. Siga todos os passos do texto para fazer o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-1}$, no intervalo $[-4,6]$.

3. Siga todos os passos do texto para fazer o gráfico da função $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+4}$, no intervalo $[-4,6]$.