VIII. Desigualdades e Inequações

A. Introdução

Um procedimento usado com frequência na resolução de problemas de física consiste em montar expressões matemáticas correspondentes à aplicação das leis físicas ao sistema, de modo a incorporar os dados do problema, e procurar a grandeza desejada que satisfaça essas expressões. Quando a fórmula resultante é uma *igualdade*, ela constitui uma **equação**, que foi o tema do capítulo III. No entanto, há situações que se baseiam em *desigualdades*, como por exemplo no caso da intensidade da força de atrito estática, F_e, que segue à lei

$$F_e \leq \mu N \qquad \text{(VIII.1)}$$

em que μ é o coeficiente de atrito estático e N, o módulo da força normal.

Uma relação como essa não permite determinar os valores das grandezas envolvidas, de modo que precisam existir outras condições para encontrá-las. Por exemplo, considere um bloco de massa m que está sobre uma mesa horizontal, e que o coeficiente de atrito com a superfície, μ, é desconhecido. Se o bloco está sendo empurrado por uma força F , horizontal, e ele não se move, então

$$F - F_e = 0 \rightarrow F_e = F \qquad \text{(VIII.2)}$$

Como o bloco também não acelera na direção vertical, a força normal N pode ser determinada a partir da relação

$$N - mg = 0 \rightarrow N = mg \qquad \text{(VIII.3)}$$

em que g é a aceleração local da gravidade. Substituindo esses dois resultados na equação (VIII.1), obtemos

$$F \leq \mu\, m\, g \qquad \text{(VIII.4)}$$

A expressão (VIII.4) é uma **inequação, que** retrata o fato do bloco não se mover com a força *F*; é uma relação de desigualdade entre grandezas, das quais ao menos uma é desconhecida. Podemos resolver essa inequação para o coeficiente de atrito, isolando-o em um membro da inequação:

$$\mu \geq \frac{F}{mg} \qquad \text{(VIII.5)}$$

Essa *desigualdade* define o valor *mínimo* do coeficiente de atrito que permite manter o sistema parado.

B. Desigualdades

Uma desigualdade é uma relação de qualidade: um dos membros é maior ou menor que o outro, ou mesmo são diferentes, simplesmente. A grande maioria das desigualdades pode ser reduzida a uma ou várias desigualdades, dentro de cinco tipos básicos, exibidos na figura 1 abaixo tanto na forma analítica quanto gráfica; nessa figura, *x* e *a* representam dois números reais, em que *a* é conhecido.

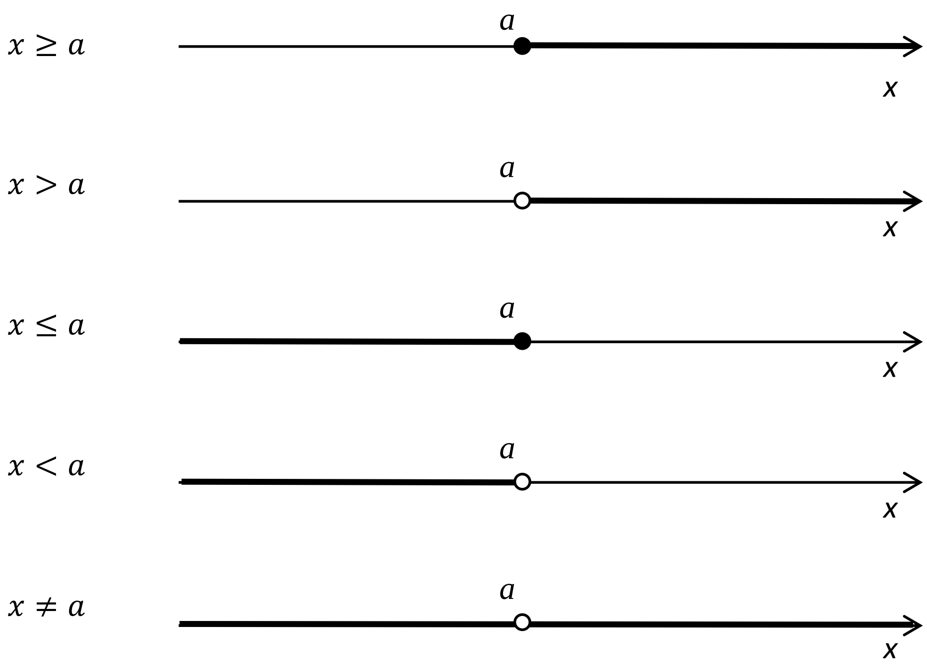


Figura 1. Cinco tipos básicos de desigualdades. Do lado esquerdo da figura está a forma analítica, que pode ser representada pelo gráfico à direita, em que a linha é grossa nos valores que satisfazem a desigualdade. Note que, para o ponto extremo, a, a igualdade corresponde a marcá-lo com bola cheia e a desigualdade, com bola vazia.

Duas desigualdades podem ser escritas como uma única expressão. Por exemplo, o conjunto de duas desigualdades, $\{x < b \ ; \ \ x > a\}$ pode ser representado $a < x < b$, se $a < b$, e corresponde ao conjunto vazio, se $a \geq b$. A representação gráfica dessa desigualdade, no padrão da figura 1, é bastante intuitiva, mas vamos exercitá-la nas questões 1 e 2 abaixo.

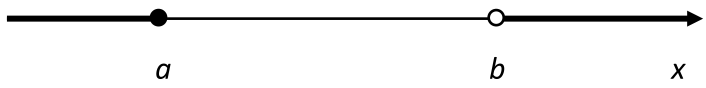
Questão 1. Represente graficamente as seguintes desigualdades ou conjunto de desigualdades, considerando que $a < b$:

a) $a < x < b$
b) $a \leq x < b$
c) $x < a$ ou $x \geq b$

Questão 2. Represente analiticamente as regiões demarcadas nos itens abaixo.

a)

b)



C. Inequações e desigualdades

1. Um exemplo de inequação e da sua solução

Uma desigualdade dará origem a uma inequação toda vez que o valor de um ou mais dos seus elementos for desconhecido. Por exemplo, a fim de indicar que um número somado com o número 2 dá um número maior que 5, pode-se escrever a fórmula

$x + 2 > 5$ (ler "*x mais* 2 *é maior que* 5")

em que x indica o número de interesse. Essa expressão matemática traduz a **desigualdade** desejada. O valor $x = 4$ satisfaz essa desigualdade, mas existem outros e, normalmente, deseja-se conhecer o conjunto de todas as soluções. Assim, quando x é uma incógnita, a desigualdade representa uma **inequação**.

Resolver uma inequação consiste em determinar os valores da incógnita (ou incógnitas) que a satisfaz. Na prática, recorre-se a algumas propriedades que permitem adicionar ou subtrair a mesma quantidade aos dois membros da inequação ou, ainda, multiplicar ou dividir ambos os membros pela mesma quantidade **positiva** sem que isso altere o sentido da desigualdade. Por exemplo, a inequação $x + 2 > 5$ pode ser escrita na forma $x + 2 - 2 > 5 - 2$, ou seja, $x > 3,$ que define o conjunto-solução da inequação. Comparando com a resolução de equações, é necessário um cuidado adicional: nas etapas intermediárias da solução, caso ambos os membros forem multiplicados ou divididos por uma grandeza **negativa**, é preciso **trocar o sentido** da desigualdade para manter-se a equivalência. Por exemplo, na desigualdade $5 > 3$, se multiplicarmos ambos os membros pelo número negativo - 2 e esquecermos de inverter a desigualdade, obteremos erroneamente $5 \times (-2) > 3 \times (-2)$, ou seja, $-10 > -6$, o que é uma proposição falsa. A fim de que a desigualdade se mantenha válida, é necessário inverter o sentido da desigualdade; neste caso, obtém-se $-10 < -6$, o que é verdadeiro.

2. Uma definição de inequação

Quando comparamos dois números reais a e b, somente uma das três afirmações é verdadeira:

- a < b
- a = b
- a > b.

Se a e b forem distintos, dizemos que a < b ou a > b e que existe uma desigualdade entre eles; esse par de desigualdades também pode ser escrita numa única desigualdade na forma a ≠ b.

Exemplos de desigualdades verdadeiras:

4 é menor que 7: 4 < 7

23 é maior que 11: 23 > 11

- 10 é menor que 0: $-10 < 0$

Quando não se conhece o valor de uma grandeza algébrica, a sentença matemática está aberta, por exemplo:

- O dobro de um número é maior que 8: $2x > 8$
- O consecutivo do triplo de um número é maior que 12: $3x + 1 > 12$

As sentenças abertas são denominadas inequações:
Inequação é uma sentença aberta expressa por uma desigualdade entre duas expressões algébricas.

A letra *x* em cada uma das desigualdades é chamada de variável, e cada expressão algébrica é um membro da inequação.

D. Propriedades da desigualdade:

1. A desigualdade não se altera ao adicionar ou subtrair o mesmo valor de ambos os membros

Se $b > a$, quando se soma ou subtrai um mesmo valor de cada um dos membros a desigualdade segue válida, ou seja, se é verdade que $b > a$, então $b + c > a + c$ e $b - c > a - c$ também é verdade. Um exemplo direto, partindo da sentença verdadeira 7 > 4: somando ou subtraindo 2 a cada um dos membros, a desigualdade permanece verdadeira, 7 + 2 > 4 + 2 bem como 7 – 2 > 4 – 2. Esta propriedade vale para todos os tipos de desigualdades (>, <, ≥, ≤, ≠).

2. A desigualdade **não se altera** quando ambos os membros são multiplicados ou divididos por uma grandeza **positiva**.

Para um exemplo direto, considere que 6 > 4; ao multiplicar s ambos os membros por 3, obtém-se $6 \cdot 3 > 4 \cdot 3$, e ao dividir por 2, obtém-se $\frac{6}{2} > \frac{4}{2}$, desigualdades verdadeiras.

3. Uma desigualdade **muda** de sentido quando ambos os membros são multiplicados ou divididos por uma grandeza **negativa**.

De novo, no mesmo exemplo anterior, 6 > 4, mas, multiplicando por – 2, teremos:
$6 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2)$ pois $-12 < -8$.

E. Resolução de inequações de primeiro grau

Chamamos inequação do primeiro grau aquela em que a variável que se deseja isolar aparece como uma potência de primeiro grau.

Resolve-se uma inequação usando as mesmas estratégias de isolamento da incógnita de uma equação, por exemplo, $3x + 5 > 2x - 10 \Rightarrow 3x - 2x > -10 - 5 \Rightarrow x > -15$. **Há uma única e importante diferença: quando multiplicamos ou dividimos por um número negativo, é preciso inverter o sentido da desigualdade**. Nesse caso e só nesse caso, a desigualdade muda de sentido, conforme as propriedades 1 a 3 enunciadas na seção anterior.

Inequações simultâneas são conjuntos de inequações para as quais é necessário buscar a solução que satisfaça todas elas, em outras palavras, elas formam um sistema de inequações. Por exemplo, considere as duas inequações na mesma variável x:

$$\begin{cases} 5x + 4 > 2x - 7 \\ \\ 4\,x - 5 < 5x + 2 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação:

$5\,x + 4 > 2\,x - 7 \rightarrow 5x\text{-}2x > \text{-}7\text{-}4 \rightarrow 3x > -11 \rightarrow x > \frac{-11}{3} \rightarrow x > -3{,}666$

Resolvendo a segunda inequação:

$4x\text{-}5 < 5x\text{+}2 \rightarrow 4x - 5x < 2 + 5 \rightarrow -x < 7 \rightarrow x > \text{-}7$, em que o sentido da inequação inverteu na última passagem, conforme a regra 3 do item D acima, porque ambos os membros foram multiplicados pelo número negativo -1.

Juntando as soluções, chega-se a $x > \frac{-11}{3}$.

Uma boa maneira de juntar as duas inequações é montar um diagrama como o da figura 2 abaixo.

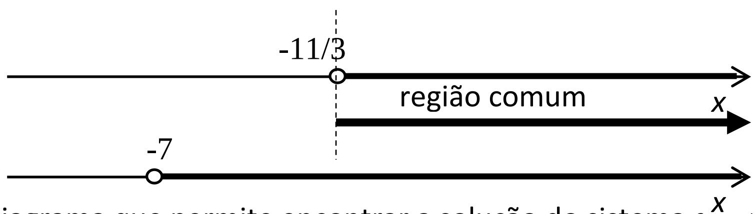


Figura 2. Diagrama que permite encontrar a solução do sistema de inequações do texto, pela determinação da região comum às duas inequações do sistema.

Nos casos em que não existem números que sejam compatíveis ao mesmo tempo, o sistema é chamado de impossível ou incompatível e a solução é o conjunto vazio.

F. Exercícios com inequações de primeiro grau

1) Resolver as inequações, isolando x no membro esquerdo.

a) $x - 4\,(x - 1) > 19$

b) $3(\,2\,x - 1) \leq 5\,x + 7$

c) $3(\,x+2) > 2(\,2\,x + 4)$

d) $2(3\,x - 1) - 4(x + 2) \leq 5\,x - 1$

e) $\frac{x}{2} + 1 > \frac{5}{3} - x$

f) $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

g) $\frac{x+2}{10} - 1 \leq \frac{1-x}{4}$

h) $\frac{x}{8} - \frac{3}{16} \geq \frac{x}{24} - \frac{2}{3}$

i) $\frac{x-1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} > 0$

j) $\frac{x+6}{3} - \frac{2x+3}{4} < \frac{x+5}{2}$

2) Determine o menor número *inteiro* que satisfaça a inequação:

$$\frac{4x-3}{5} - \frac{2x+7}{3} < 2x + 4$$

3) Subtraindo dois anos da idade de Maria e multiplicando a diferença por 7 obtém-se um número menor do que o sêxtuplo da sua idade aumentado de 8. Determine a idade de Maria, sabendo que é a maior dos valores compatível com a desigualdade obtida.

4) Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 2 - 3x < 30 - 10x \\ 3x - 1 < 4 - 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{x}{3} > x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3-x}{2} < 1 + \frac{5-2x}{3} \\ \frac{2x-3}{4} < \frac{x+5}{6} \end{cases}$

G. Inequação fracionária

Uma inequação é dita fracionária quando há uma incógnita no denominador.

Sua resolução é feita de forma diferente, tendo em vista a necessidade de analisar os sinais da fração algébrica resultante.

Ex. 1: $\frac{4}{3x-1} < 0$

Como o numerador é positivo, esta fração só é negativa se $3x - 1 < 0 \rightarrow 3x < 1 \rightarrow x < \frac{1}{3}$. Para esse subconjunto dos números reais, a fração será negativa.

Ex. 2: $\frac{-1}{2x-7} < 0$

O numerador é negativo, então para que a expressão total seja negativa o denominador deverá ter sinal oposto ao numerador, ou seja: $2x - 7 > 0$, uma vez que negativo × positivo = negativo.

$$2x - 7 > 0 => 2x > 7 => x > \frac{7}{2}$$

Quando, em uma inequação, a desigualdade não está sendo comparada com zero, é mais prático e simples manipular a expressão para essa forma:

Ex. 3: $\frac{x+3}{x-5} > -3 => \frac{x+3}{x-5} + 3 > 0 => \frac{x+3+3(x-5)}{x-5} > 0 => \frac{x-3}{x-5} > 0$

Para que toda a expressão seja maior que zero precisamos que:

ambas sejam positivas: $x - 3 > 0 => x > 3$ e $x - 5 > 0 => x > 5$

ou

ambas sejam negativas: $x < 3$ e $x < 5 => x < 3$

Reunindo as duas possibilidades, será verdadeira a expressão quando $x < 3$ ou $x > 5$

Questão 3. Isole x nas inequações abaixo:

a) $\frac{2}{x} > 0$
b) $\frac{3}{x+1} > 0$
c) $\frac{4x-3}{2x+1} > 0$
d) $\frac{x-4}{7-3x} - 3 \geq 1$
e) $\frac{2x-3}{x+1} < 5$
f) $\frac{5}{2x} - \frac{1}{2} \geq \frac{7}{x}$

H. Inequações do segundo grau

Uma inequação que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad \text{(VIII.6)}$$

é uma inequação do segundo grau.

A melhor maneira de resolver essa inequação é recorrer ao gráfico da função, que estudamos no capítulo III. Para um exemplo da conveniência do gráfico, considere a inequação

$$x^2 > x \tag{VIII.7}$$

Primeiro, note que o valor 0 não satisfaz a desigualdade. Depois, é preciso considerar duas possibilidades:

Se $x > 0$, dividindo ambos os membros de (VIII.7) por x, obtemos $x > 1$.

Se $x < 0$, dividindo ambos os membros de (VIII.6) por x, obtemos $x < 1$; a intersecção das duas condições é $x < 0$.

Portanto, a solução é $\{ x < 0$ ou $x < 1\}$, que é mais fácil de ver do gráfico da função $y = x^2 - x$, que tem zeros em $x = 0$ e $x = 1$ e concavidade positiva.

Questão 4. Resolva a inequação $x^2 < x$.

Note que toda a vez que for negativo o discriminante da equação que se obtém ao igualar a zero o membro esquerdo de (VIII.6), a solução será ou o conjunto todo dos valores reais, ou o conjunto vazio.

Questão 5. Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - x - 2 > 0$
b) $x^2 - x + 2 > 0$
c) $x^2 - x + 2 < 0$
d) $x^2 + 2x + 1 > 0$