VII. Trigonometria plana

A. Introdução

Considere um pêndulo, como o da **Figura 1a**, preso no ponto O e oscilando com amplitude pequena. A **Figura 1b** mostra um gráfico do ângulo θ formado com a direção vertical em função do tempo, a partir do momento em que o pêndulo é abandonado de uma posição formando cerca de 9º com a vertical. Os pontos em vermelho são valores experimentais, enquanto a linha é a função

$$\theta = 8{,}99\cos(0{,}042 + 5{,}82\,t)\text{, em graus para } t \text{ em s,} \quad \text{(VII.1)}$$

com o argumento do cosseno em radianos. Note que a curva desenhada explica muito bem os dados experimentais dentro das suas incertezas, que correspondem a desvios padrões aproximadamente iguais ao raio dos marcadores vermelhos

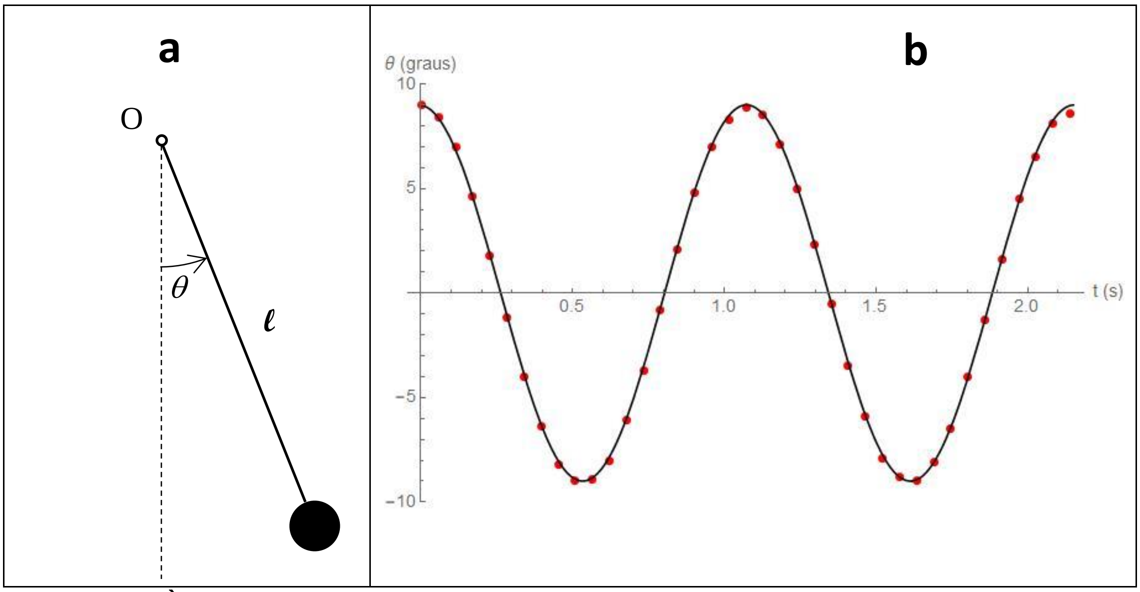


FIGURA 1. À esquerda, esboço de um pêndulo simples, com a indicação da maneira de medir o ângulo θ. À direita, dados experimentais e função calculada com parâmetros ajustados a eles.

Muitos movimentos periódicos são bem descritos pelas funções seno e cosseno. Aprenderemos adiante que a maioria dos fenômenos periódicos pode ser descrita por uma soma de senos e cossenos, de maneira que essas funções são fundamentais no estudo da Física. Note que aqui vai acontecer algo parecido com os outros assuntos – podemos operar com quantidades físicas que sabemos interpretar de maneira que têm significado somente algébrico (trigonométrico, matemático, etc.). Ou seja, aprendemos a somar, dividir, multiplicar, expandir, ..., expressões trigonométricas complexas, porque essas operações serão usadas nas combinações das equações que representam o sistema e que levarão a expressões mais compactas e mais simples, mesmo que os cálculos intermediários não representem algo com significado físico. No entanto, as regras matemáticas precisam ser respeitadas ao longo de todas as transformações algébricas que fizermos e, por outro lado, toda transformação matematicamente correta pode ser efetuada, embora neste último caso o resultado pode ou não interessar.

As funções trigonométricas também são importantes para descrever a geometria dos arranjos e lidar com os sistemas de coordenadas usados para descrevê-los, mas este assunto fica para a última seção.

B. A medida do ângulo em radianos

O exemplo da **Figura 2** indica que há pelo menos duas maneiras comuns de medir ângulos (graus e radianos) e que um ângulo pode ter medida infinita, o que é muito estranho – afinal, os ângulos que desenhamos estão na faixa entre 0 e 360º. Assim, o primeiro detalhe a compreender é o significado de ângulos maiores que 360º e ângulos negativos.

1. A definição de radiano

A fim de explicar como se mede um ângulo em radianos, apresentamos na **Figura 2** abaixo um ângulo θ formado por duas retas que se encontram no ponto O. A circunferência de centro em O e raio *r* está desenhada com linha cheia no espaço delimitado pelo ângulo e em linha tracejada, fora. O arco dessa circunferência dentro do ângulo θ tem medida *s*. Imagine a circunferência de raio *R*; o arco compreendido dentro do ângulo tem medida *S* (no caso, maior que *s* porque $R > r$) e podemos deduzir, por semelhança das figuras, que o arco compreendido pelo ângulo é diretamente proporcional ao raio da circunferência,

$$\frac{s}{r} = \frac{S}{R}$$

Define-se a medida do ângulo em radianos como o coeficiente de proporcionalidade entre o tamanho do arco coberto pelo ângulo e o raio da circunferência com centro na interseção das linhas que formam o ângulo, ou seja

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(VII.2)}$$

não sendo necessário especificar o raio do círculo, qualquer um servirá.

2. Conversão da medida em graus para radianos

Essa conversão baseia-se na proporcionalidade direta que a medida em graus tem com a medida em radianos, de modo que é necessário apenas determinar esse coeficiente de proporcionalidade. Uma volta inteira da circunferência mede, em radianos

$$\theta(\text{volta inteira}) = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

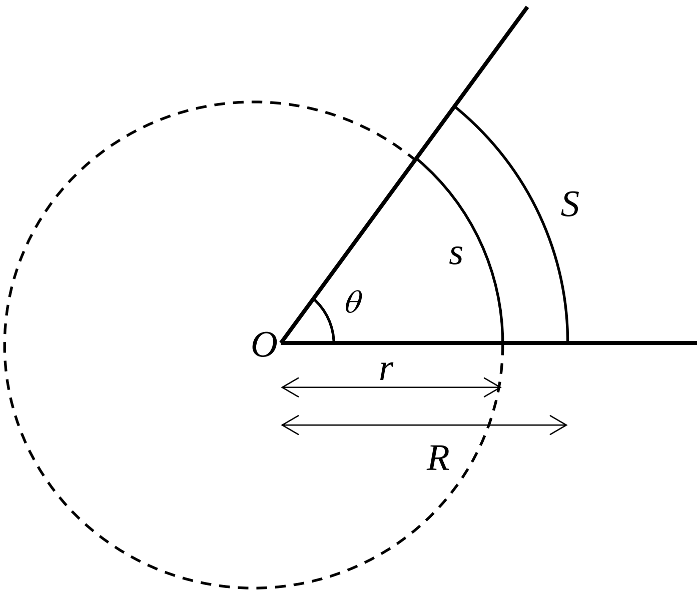


Figura 2. Construção geométrica para medir um ângulo. Desenha-se uma circunferência centrada no vértice do ângulo formado pelas linhas grossas, que cortam essa circunferência em dois pontos e definem um arco, cuja medida é proporcional ao ângulo.

Como o ângulo que corresponde à volta inteira da circunferência mede 360°, a regra de transformação da medida de um ângulo em graus para radianos é

$$\theta_{\text{rad}} = 2\pi \cdot \frac{\theta_{\text{graus}}}{360°} \qquad \text{(VII.3)}$$

A tabela 1 apresenta os valores em radianos dos ângulos mais usados.

Tabela 1. Cada coluna dá as medidas em graus e radianos dos ângulos mais usados.

graus	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Questão 1. Determine a medida em graus do ângulo que mede:

a) 1 rad
b) 0,1 rad
c) 0,01 rad
d) 0,001 rad (ou 1 mrad, um miliradiano)

Questão 2. Determine a medida em radianos do ângulo que mede

a) 37º
b) 22º 30’
c) 1º
d) 1’
e) 1”

Questão 3. São Paulo fica sobre o trópico de Capricórnio. Determine a menor distância de São Paulo ao equador, sobre a circunferência terrestre, com dois dígitos significativos. Procure por sua conta os dados necessários: latitude de São Paulo e tamanho da circunferência terrestre.

C. Significado dos ângulos negativos ou maiores que 2π rad.

No exemplo da seção A, o argumento da função cosseno é um número negativo para qualquer $t < -0{,}01$ s e maior que 2π para $t > 1{,}1$ s. No entanto, estamos acostumados a calcular o cosseno como a razão de segmentos de triângulos, caso em que o ângulo tem um valor entre 0 e π. Assim, é conveniente estender a ideia de ângulo para valores fora dessa faixa, a fim de dar um significado preciso às funções cosseno, seno, tangente, etc., fora do domínio conceitual da geometria.

1. Interpretação

A ideia é retomar a definição da equação (VII.2) e imaginar um objeto movendo-se ao longo da circunferência, que dá voltas e voltas, e substituir o arco de circunferência pela distância percorrida. Desse modo, a cada volta a mais, o ângulo aumenta em 2π rad. Definido dessa forma, todos os ângulos que diferem de 2π correspondem ao mesmo ângulo plano, ou seja

$$\theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \ldots, \theta + 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{N}$$

são medidas diferentes, mas equivalentes, do ângulo θ. Agora, também pode acontecer que o objeto se mova no sentido dos ponteiros do relógio, então o espaço é percorrido no sentido oposto à orientação positiva, e a equação (VII.2) dará um valor negativo. Assim, também os ângulos menores que θ por 2π ou um múltiplo de 2π correspondem ao mesmo ângulo plano, ou seja

$$\theta, \theta - 2\pi, \theta - 4\pi, \ldots, \theta - 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{N}$$

são outras medidas diferentes, mas equivalentes, do mesmo ângulo. Essas duas sequências podem ser reunidas em uma só,

$$\theta + 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(VII.4)}$$

são medidas diferentes, mas equivalentes, do ângulo θ, e as funções trigonométricas têm o mesmo valor para qualquer ângulo do conjunto definido pela relação (VII.4).

Questão 4. Encontre os ângulos na faixa [0,2π] que correspondem aos valores, em rad:

a) 157π e -157π
b) $\frac{157\pi}{2}$ e $-\frac{157\pi}{2}$
c) $\frac{157\pi}{4}$ e $-\frac{157\pi}{4}$
d) $\frac{157\pi}{8}$ e $-\frac{157\pi}{8}$

2. Como reduzir ângulos a um intervalo definido.

Considere o item c da questão 4 acima, que pede para determinar o ângulo no intervalo [0, 2π] rad equivalente a $\theta = -\frac{157}{4}\pi$ rad.

Há várias maneiras de resolver essa questão, mas antes perceba por que ela está aí. No sistema de coordenadas polares, a posição de uma partícula é dada pelo par de coordenadas (r, θ). A distância à origem determina o valor da coordenada r completamente, mas não é fácil identificar qual é esse lugar quando o ângulo vale, por exemplo, 1357,3 rad. A seção acima discute porque todos os ângulos pertencentes ao conjunto de valores $\{\theta + 2n\pi, \text{com } n \in \mathbb{Z}\}$, em rad, correspondem à mesma posição do espaço. Assim, os valores dos ângulos precisam ser reduzidos para uma faixa de valores pequenos, próximos a π, a fim de facilitar a identificação do local onde a partícula está. Note que a escolha do intervalo [0, 2π] é arbitrária e há uma infinidade de outros intervalos que cobrem univocamente ***todo*** o círculo, em particular $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, cujo uso é comum quando se calcula a direção de um vetor por meio da função arco tangente, mas a **questão 4** pede a redução para [0, 2π], que é um intervalo que tem a vantagem de incluir apenas valores positivos.

a) Lidando com ângulos positivos

Quando o ângulo é positivo, como $\theta_1 = \frac{157}{4}\pi$, a solução é direta: dividimos o ângulo por 2π rad e o resto da divisão multiplicado por 2π rad/volta é a fração da circunferência que define o ângulo pretendido:

$$\frac{\frac{157}{4}\pi \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/volta}} = \frac{157}{8}\text{volta} = 19 \text{ voltas} + \frac{5}{8} \text{ volta}$$

O resultado da divisão indica que θ_1 corresponde a 19 voltas mais 5/8 de volta; como 1 volta corresponde a 2π rad, basta multiplicar os 5/8 pelos 2π. Assim

$\theta_1' = \frac{5}{8}2\pi = \frac{5}{4}\pi$ rad é equivalente a $\theta_1 = \frac{157}{4}\pi$ rad.

b) Lidando com ângulos negativos

Quando o ângulo é negativo, como $\theta = -\frac{157}{4}\pi$, esse mesmo caminho pode ser usado, mas terá uma etapa a mais. Dividimos o ângulo por 2π, e o resto da divisão multiplicado por 2π dá um ângulo fora do intervalo pretendido:

$\frac{-\frac{157}{4}\pi}{2\pi} = -\frac{157}{8} = -19 - \frac{5}{8} \to \varphi = -\frac{5}{8}2\pi = -\frac{5}{4}\pi$ rad, um ângulo fora do intervalo desejado. Somando 2π, obtém-se o ângulo equivalente no intervalo pedido: $\theta' = -\frac{5}{4}\pi + 2\pi = \frac{3}{4}\pi$ rad, é equivalente $\theta = -\frac{157}{4}\pi$ e está no intervalo [0, 2π] rad, como solicitado na questão.

Um outro procedimento é buscar o maior inteiro contido no resultado da divisão do ângulo por 2π, $\left[\frac{-\frac{157}{4}\pi}{2\pi}\right] = \left[-\frac{157}{8}\right] = -20$ (representamos o maior inteiro contido em x por $[x]$) e determinar o resultado como $-\frac{157}{4}\pi - 2\pi\left[\frac{-\frac{157}{4}\pi}{2\pi}\right] = \frac{3}{4}\pi$, que tinha que ser o mesmo. Algumas pessoas enxergam esse resultado assim:

$$-\frac{157}{4}\pi = -\frac{160}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = -20(2\pi) + \frac{3}{4}\pi$$

de onde, jogando fora os múltiplos inteiros de 2π, encontra-se a resposta desejada.

Note que todos estes valores: $-\frac{157}{4}\pi, -\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$ rad se referem ao mesmo ângulo em um sistema de coordenadas polares (r, θ), mas só o último está no intervalo [0, 2π] rad.

c) Um pouco de computação

A notação $[x] =$ maior inteiro (greatest integer) contido em x é bastante comum, mas há outra, que é $\lfloor x \rfloor$. Essa função$\lfloor x \rfloor$ tem o nome floor(x) nas linguagens de programação, que costumam definir também ceiling(x) ou ceil(x), simbolizada $\lceil x \rceil$, que é o menor inteiro maior ou igual a x. Note que floor(n)==ceiling(n) se, e somente se, n é inteiro, caso contrário, ceiling(x) é o inteiro seguinte ao maior inteiro contido no valor real não inteiro x. Note que as funções round() e int() ou IntegerPart() têm resultados parecidos, mas não idênticos a nenhuma dessas funções. Se x não for inteiro, round(x) volta floor(x) ou ceil(x), o que for mais próximo de x. Já int() trunca o número, assim, volta floor(x) se x > 0 e ceil(x), se x < 0.

D. O círculo trigonométrico

A **Figura 3** e a **Figura 4** ilustram o círculo trigonométrico, usado no estudo das relações básicas entre as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante; as quatro primeiras estão marcadas em traço mais escuro na **Figura 3**, as quatro últimas na **Figura 4**. O sistema de referência *x*O*y* é cartesiano, de modo que ambas as escalas são iguais. Por definição, o raio do círculo vale 1, de modo que os tamanhos dos segmentos representam diretamente os valores das funções.

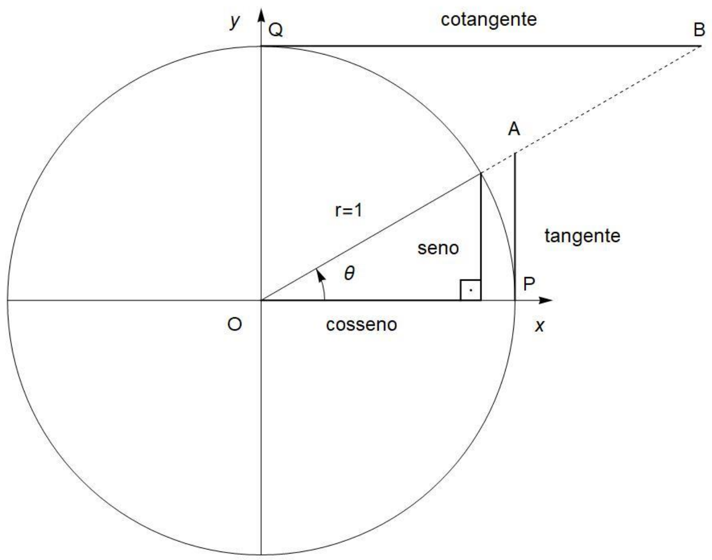


Figura 3. Círculo trigonométrico, cujo raio é definido igual a 1. Em traço grosso estão os segmentos que dão o seno, o cosseno, a tangente e a cotangente do ângulo θ, que é positivo quando medido no sentido anti-horário, indicado pela ponta de seta.

Questão 5. Represente graficamente seno, cosseno, tangente e cotangente em um círculo trigonométrico para os ângulos, em rad:

a) $5\pi/6$

b) $7\pi/6$

c) $11\pi/6$

Dica: nestes casos, muitas vezes o raio r precisa ser prolongado através de outro quadrante para que alcance alguma das retas tangentes aos pontos P e Q da Figura **3**.

A **Figura 3** e a **Figura 4** foram desenhadas com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, mas a construção geométrica que permite identificar as funções é a mesma para ângulos em qualquer quadrante. Fixando um ângulo θ e traçando o raio *r* que corresponde a esse ângulo:

- o cosseno e o seno são as projeções do raio *r* nos eixos O*x* e O*y*, respectivamente.
- a tangente e cotangente são tangentes ao círculo respectivamente nos pontos P ($\theta_P = 0$) e Q ($\theta_Q = \pi/2$), com tamanhos definidos pela interseção dessas tangentes com o prolongamento do raio *r*.
- a secante e a cossecante são os segmentos OA e OB, respectivamente, que são o próprio raio vetor, mas prolongado até alcançar as tangentes aos pontos P e Q.

Os sinais das funções trigonométricas vêm das suas projeções nos eixos coordenados O*x* e Oy. Os sinais da tangente e da cotangente são mais evidentes na **Figura 3**, enquanto os da secante e cossecante são determinados com facilidade na **Figura 4**.

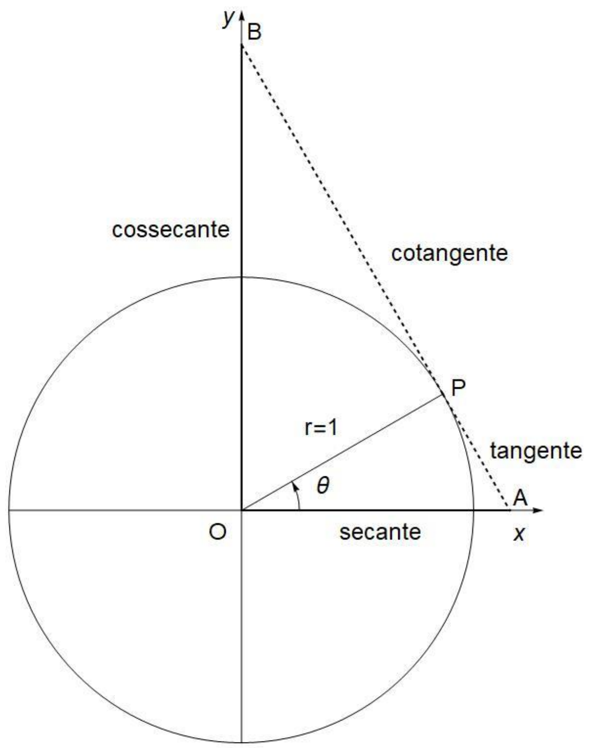


Figura 4. Outro esboço do círculo trigonométrico. Em traço grosso estão os segmentos que dão a secante e a cossecante do ângulo θ e, em linha tracejada, estão a tangente (segmento AP) e a cotangente (BP).

Questão 6. Preencha a tabela abaixo com os sinais das funções nos vários quadrantes.

quadrante	Seno	cosseno	tangente	cotangente	secante	cossecante
1º						
2º						
3º						
4º						

Questão 7. Represente graficamente a secante e a cossecante em um círculo trigonométrico para os ângulos, em rad:

a) $5\pi/6$

b) $7\pi/6$

E. As relações fundamentais entre as funções trigonométricas

De acordo com o círculo trigonométrico, o ângulo entre os segmentos que representam o seno e o cosseno é reto, assim o seno e o cosseno são catetos e *r*, a hipotenusa, portanto pode-se usar o teorema de Pitágoras e concluir que

$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{(VII.5)}$$

Essa equação (VII.5) expressa uma relação trigonométrica fundamental e usada frequentemente para determinar o seno de um ângulo quando se conhece o cosseno e vice-versa. Também ocorre muito na simplificação de equações, como por exemplo, na demonstração da relação (VII.27) na seção K adiante, além de permitir eliminar o ângulo θ quando se resolvem sistemas de equações.

Da semelhança entre o triângulo formado pelo cosseno, seno e raio e o triângulo OPA, podemos deduzir duas relações:

$$\frac{\tan\theta}{r} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\sec\theta}{r} = \frac{\text{r}}{\cos\theta}$$

Usando que $r = 1$, deduz-se

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \tag{VII.6}$$

e

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \tag{VII.7}$$

De maneira parecida, o triângulo formado pelo cosseno, seno e raio também é semelhante ao triângulo BQO, e chega-se a

$$\frac{\text{cotan}\,\theta}{r} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\text{cosec}\,\theta}{r} = \frac{r}{\text{sen}\,\theta}$$

de modo que, substituindo $r = 1$, deduz-se que

$$\text{cotan}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \tag{VII.8}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \tag{VII.9}$$

Questão 8. Escolhendo os triângulos retângulos apropriados na **Figura 4** (ou na **Figura 3**), prove que:

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \tag{VII.10}$$

$$\text{cosec}^2\,\theta = \text{cotan}^2\,\theta + 1 \tag{VII.11}$$

Questão 9. Prove as relações (VII.10) e (VII.11) algebricamente, a partir das relações (VII.5) a (VII.9).

Questão 10. A partir da **Figura 3**, pode-se deduzir que há quatro ângulos na faixa 0 a 2π que têm seno do mesmo módulo, dois com sinal positivo e dois com sinal negativo. O mesmo acontece com as demais funções trigonométricas. Na tabela abaixo, relacionamos nas linhas as várias funções trigonométricas e nas colunas, esses ângulos, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. A 2ª coluna dá os valores dessa função para θ.

Preencha as colunas vazias da tabela com os valores correspondentes à função e ao ângulo. A linha correspondente ao seno já está toda preenchida.

Função\ângulo	θ	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$2\pi - \theta$
sen	s	s	$-s$	$-s$
cos	c			
tan	t			
cotan	χ			
sec	σ			
cosec	τ			

Para ver como mudam os segmentos que correspondem às diferentes funções trigonométricas com o ângulo na faixa entre zero e noventa graus, click no link a seguir: animação com o GeoGebra (último acesso em 7/6/2021).

Os valores numéricos das funções trigonométricas para os ângulos mais comuns estão na tabela 2 abaixo.

Tabela 2. As colunas de 3 a 8 dão os valores numéricos das funções trigonométricas para os ângulos mais comuns que estão na 1ª e 2ª colunas, em graus e radianos, respectivamente.

ângulo (graus)	ângulo (rad)	seno	cosseno	tangente	cotangente	secante	cossecante
0	0	0	1	0	∞	1	∞
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1

Questão 11. Usando o círculo trigonométrico para localizar as funções, mostre que

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{(VII.12)}$$

e

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \text{(VII.13)}$$

A fim de facilitar a demonstração, use $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, mas essas identidades valem para qualquer ângulo.

F. Gráficos e aplicação das funções trigonométricas aos triângulos retângulos.

A Figura **5** representa um triângulo OCD semelhante ao formado pelo seno, cosseno e raio do círculo trigonométrico, cuja hipotenusa mede ρ que, em princípio, tem um tamanho qualquer – usamos $\rho > 1$, para facilitar a visão. Por conta da semelhança entre os triângulos, os lados OC e CD valem

$$\overline{OC} = \rho\cos\theta \quad \text{e} \quad \overline{CD} = \rho\operatorname{sen}\theta$$

Assim, qualquer razão entre os lados desse triângulo OCD independe de ρ, de modo que podemos usar as funções trigonométricas, sempre definidas como razões, em qualquer triângulo retângulo. A Tabela 3 apresenta essas propriedades para as funções mais usadas, junto com seus gráficos. O desenho da direita da Figura **5** facilita a referência aos lados do triângulo, que foram nomeados:

a, cateto adjacente a θ;

o, cateto oposto a θ;

ρ, hipotenusa

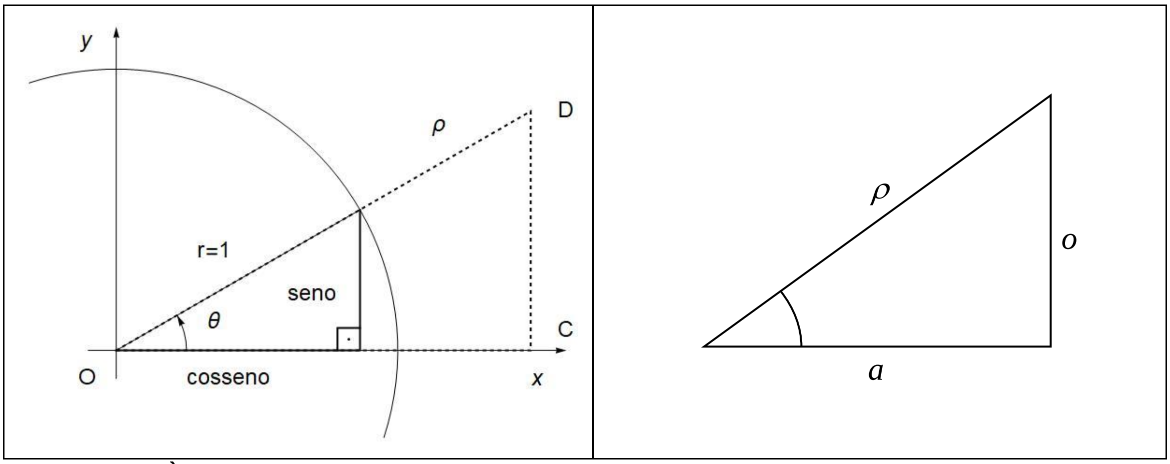


Figura 5. À esquerda, esboço do círculo trigonométrico com um triângulo semelhante ao formado pelo seno, cosseno e raio, para ilustrar a aplicação das funções trigonométricas na determinação dos lados de um triângulo retângulo. À direita, um triângulo retângulo em que os lados e um dos ângulos agudos foram identificados, para facilitar sua referência na Tabela 3.

Observando as figuras na Tabela 3, pode-se verificar que tanto o valor do $\operatorname{sen}\theta$ quanto o do $\cos\theta$ está no intervalo [-1,1], uma vez que seu comprimento é sempre menor ou igual ao raio, que vale 1 no círculo trigonométrico. Já a tangente pode ter qualquer valor, assim sua imagem cobre todo o conjunto real e seu domínio corresponde aos números reais diferentes de $(\pi/2) + k\pi$, com $k \in \mathbf{Z}$, uma vez que para esses valores: ..., $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$,... a tangente tende ao infinito.

Lembrando da discussão da seção C acima, veja que o seno e o cosseno têm período igual a 2π, uma vez que esse é o ângulo que corresponde a uma volta inteira – o ponto marcado em vermelho no círculo volta ao mesmo lugar depois de girar 2π em volta do centro do círculo trigonométrico. Já a tangente e a cotangente têm período ainda menor, π.

Para referência no texto, numeramos as relações das funções com os lados do triângulo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \tag{VII.14}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{VII.15}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \tag{VII.16}$$

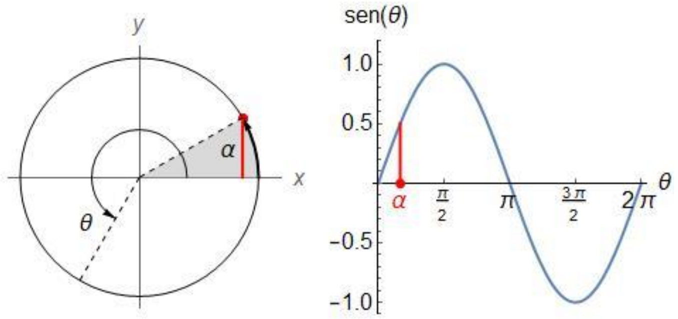
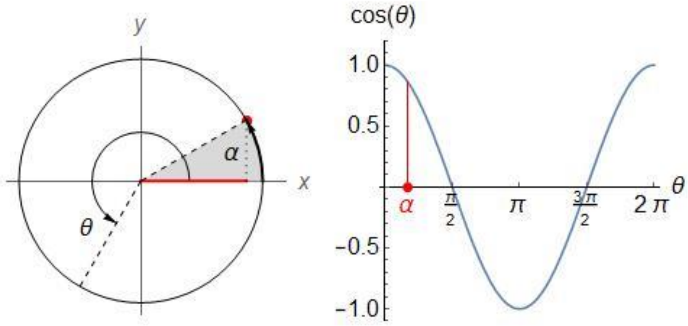
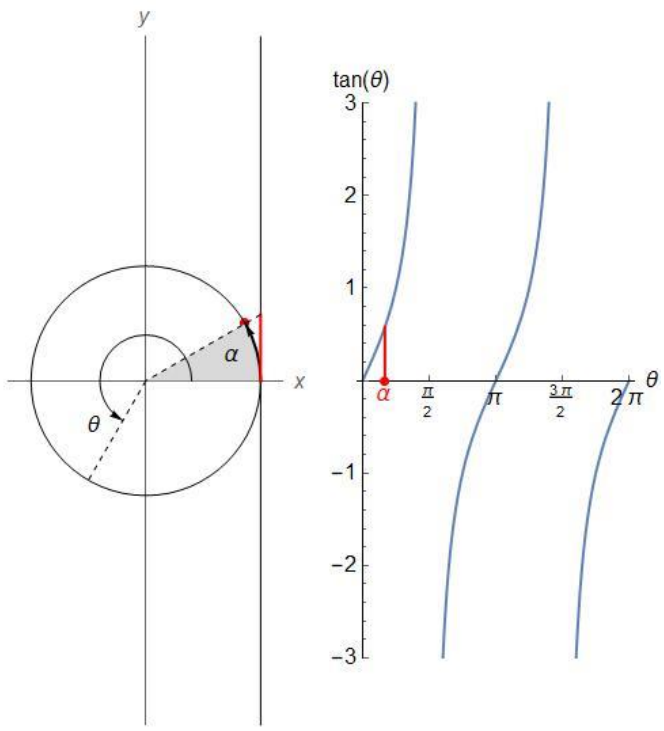
Questão 12. Faça os gráficos de $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ no mesmo sistema de eixos.

Determine os valores de x que resolvem a equação $\operatorname{sen}x = \cos x$.

Questão 13. Faça os gráficos de $\operatorname{sen}x$ e $\tan x$ no mesmo sistema de eixos.

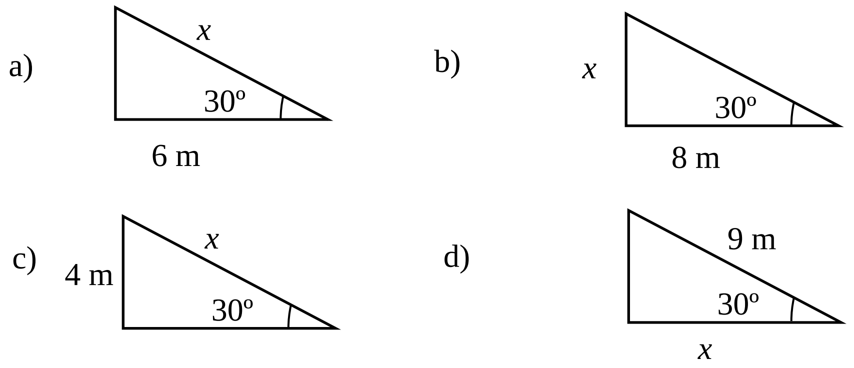
Determine os valores de x que resolvem a equação $\operatorname{sen}x = \tan x$.

Tabela 3. Relação das funções trigonométricas com os lados de um triângulo retângulo, o círculo trigonométrico e suas representações gráficas.

Razão dos lados do triângulo	Segmento no círculo e gráfico
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{o}{\rho}$ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$	
$\cos\alpha = \frac{a}{\rho}$ $\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$	
$\tan\alpha = \frac{o}{a}$ $\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$	

Questão 14. Nos esboços dos triângulos retângulos das figuras abaixo, que não estão em escala, conhecem-se as medidas de um lado e de um dos ângulos agudos.

Determine a medida do lado marcado x nos seguintes casos:



G. Fase

Na seção anterior, estão os gráficos das funções trigonométricas de argumento igual à grandeza representada na abscissa. No entanto, é comum que o argumento seja uma transformação afim da abscissa, como no exemplo da seção A, em que o argumento do cosseno é

$$\alpha(t) = 0{,}042 + 5{,}82\,t \quad \text{em rad para } t \text{ em s.}$$

Nessa expressão, o deslocamento da origem é chamado frequentemente de fase, φ, no caso

$$\varphi = 0{,}042 \text{ rad}$$

Note que uma transformação como essa não muda a aparência do gráfico: a fase causa um deslocamento do desenho em relação à origem, e o fator que multiplica t faz com que a função cruze o zero em valores diferentes do gráfico da função $\cos t$.

Questão 15. Esboce os gráficos em função de x da função:

a) $\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
b) $\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$
c) $\tan\left(0{,}4\,x - \frac{\pi}{4}\right)$

H. Relações trigonométricas importantes

A ocorrência de funções trigonométricas com argumentos formados por uma soma é frequente, como ilustrado desde a seção A, mas é mais fácil lidar com argumentos que têm um único termo. Por isso, é conveniente saber transformar o argumento que é uma soma em uma combinação de funções trigonométricas. As fórmulas básicas são as do seno e cosseno de uma soma de ângulos:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a \qquad \text{(VII.17)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \qquad \text{(VII.18)}$$

É interessante deduzir essas fórmulas a partir de uma construção geométrica, mas o caminho não é evidente. Primeiro, construímos três triângulos retângulos, um com um ângulo b e hipotenusa igual a 1 e os outros dois com ângulo a e hipotenusas iguais aos catetos do primeiro triângulo: $\text{sen}\, b$ e $\cos b$. A **Figura 6** abaixo identifica todos os lados dos três triângulos, em particular daquele que tem hipotenusa igual a 1, cujos catetos valem $\text{sen}\, b$ e $\cos b$.

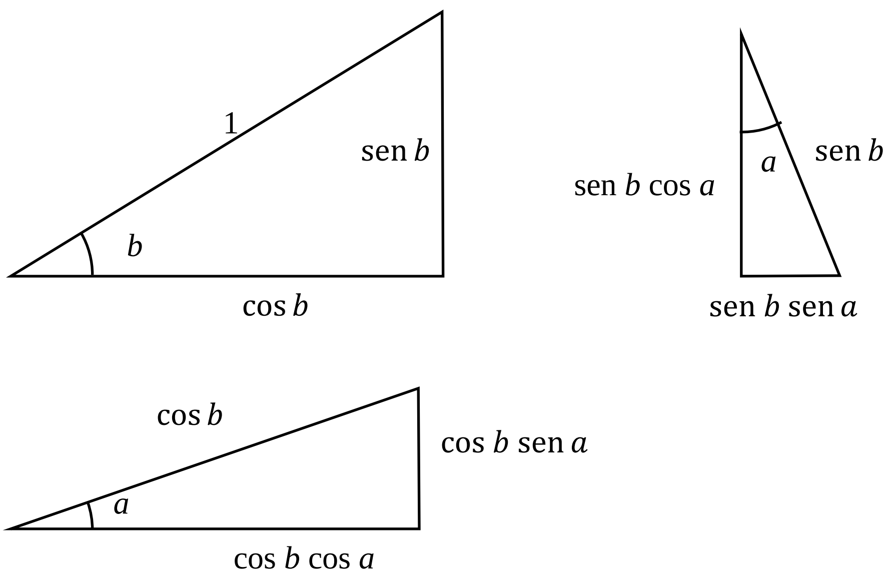


Figura 6. Triângulos usados para demonstrar a fórmula do seno da soma de ângulos. A figura indica as medidas dos ângulos e dos lados.

Agora, é preciso juntar esses três triângulos pelos lados que medem $\text{sen}\, b$ e $\cos b$, conforme a **Figura 7** abaixo, em que, usando uma linha tracejada, definimos um quarto triângulo retângulo, com um ângulo igual a $a + b$ e hipotenusa 1. Desse tangram de 3 peças saem as fórmulas (17) e (18).

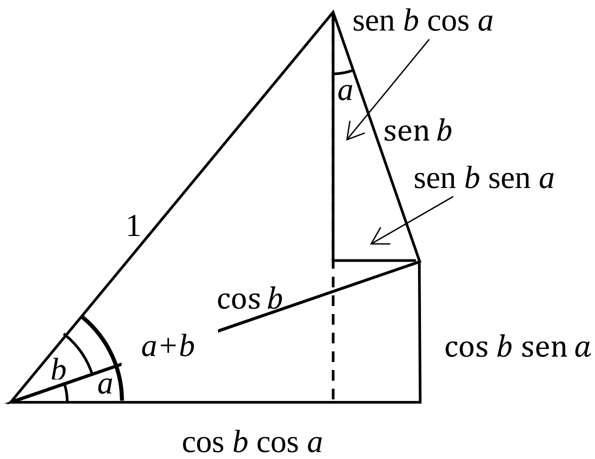


Figura 7. Montagem dos triângulos da figura 6, destinada a deduzir as fórmulas do seno e cosseno da soma de ângulos.

A medida do cateto oposto ao ângulo $a+b$ é o $\operatorname{sen}(a+b)$, uma vez que a hipotenusa vale 1 e, de outro ponto de vista, é a soma dos catetos dos outros dois triângulos, $\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$, provando, portanto, a relação (VII.17). Já o cateto adjacente ao ângulo $a+b$ é o $\cos(a+b)$, que é uma diferença dos catetos dos outros dois triângulos, $\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, provando a relação (VII.18). Essa fórmula vale para qualquer ângulo, não se limitando a ângulos menores que o reto, como foi usado para montar a figura.

Questão 16. Prove que

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a \qquad \text{(VII.19)}$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \qquad \text{(VII.20)}$$

A partir das fórmulas (VII.17) e (18), pode-se encontrar as fórmulas para o seno e o cosseno de uma diferença de ângulos, que vamos precisar em seguida:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}\big(a + (-b)\big) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \qquad \text{(VII.21)}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad \text{(VII.22)}$$

Note que a soma membro a membro das equações (VII.17) e (21) dá uma fórmula que transforma o produto de dois senos em uma soma (e vice-versa),

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\big) \qquad \text{(VII.23)}$$

a soma das equações (VII.18) e (22) dá

$$\cos a \cos \mathrm{b} = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \qquad \text{(VII.24)}$$

e, finalmente, a diferença das equações (VII.18) e (22) resulta em

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{b} = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \qquad \text{(VII.25)}$$

Estas 3 últimas relações são conhecidas como fórmulas de prostaférese.

Questão 17. Calcule cos(15º).

I. A lei dos senos

Esta é outra relação importante, especialmente porque vale para qualquer triângulo. Considere a Figura 8 abaixo, em que os lados que medem *a*, *b* e *c* são opostos aos ângulos α, β e γ, respectivamente. A lei dos senos é

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{(VII.26)}$$

ou seja, os lados têm tamanhos proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

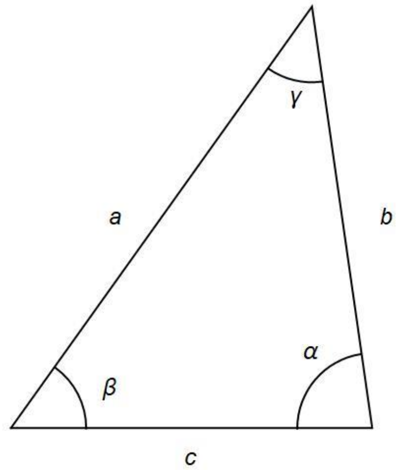
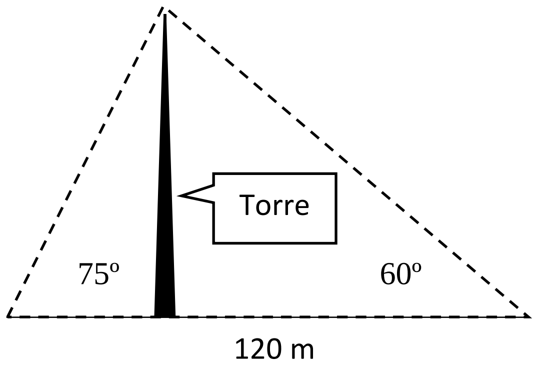


Figura 8. Ilustração de um triângulo escaleno, em que os elementos da Lei dos Senos estão identificados.

Questão 18. A fim de determinar a altura de uma torre que fica dentro de um quarteirão cujo interior é inacessível, mas fica em uma região completamente plana e horizontal, mede-se a largura do quarteirão (120 m) e dois ângulos de visada do topo da torre; os dados obtidos estão na figura abaixo, que está fora de escala.



Determine:

a) o terceiro ângulo do triângulo.
b) um dos lados desconhecidos do triângulo (em linha tracejada) com a lei dos senos.
c) a altura da torre, com o resultado do item anterior e o ângulo adequado para usar a relação (VII.14).

Questão 19. Prova da lei dos senos. Na Figura **8**, desenhe a altura em relação ao lado *b*; essa altura é o cateto comum a dois triângulos retângulos de hipotenusas *a* e *c* e ângulos γ e α. Use a relação (VII.14) para os senos de γ e α e elimine o cateto comum, a fim de mostrar que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Convença-se que pode completar a demonstração, usando qualquer uma das outras duas alturas.

J. A lei dos cossenos.

Outra relação importante é a chamada lei dos cossenos. No triângulo da Figura **9** pode-se determinar *c* a partir dos outros lados e o ângulo formado por eles,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad \text{(VII.27)}$$

Note que, quando $\gamma = 90^\circ$, a expressão acima recai no teorema de Pitágoras.

A demonstração é uma aplicação do que vimos até agora. Primeiro, no lado esquerdo da **Figura 9**, estão marcados dois pontos A e B de coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B). A distância entre A e B pode ser calculada como o tamanho da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $x_B - x_A, y_B - y_A$, portanto

$$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

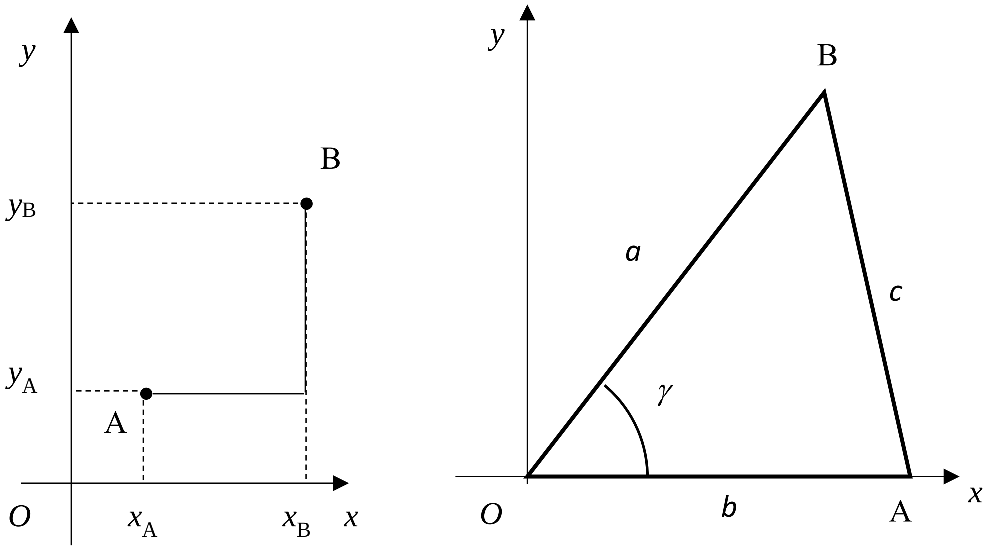


Figura 9. Ilustração de um triângulo e do sistema de coordenadas cartesianas usadas para provar a lei dos cossenos.

Essa fórmula será usada no cálculo do lado c. Para isso, no lado direito da Figura **9**, o sistema cartesiano foi escolhido com origem no vértice do ângulo formado pelos lados a e b. As coordenadas do ponto B são $(a\cos\gamma\,,\ a\,\mathrm{sen}\,\gamma)$ e do ponto A, $(b, 0)$. Assim, o quadrado da distância entre A e B é

$$c^2 = (a\cos\gamma - b)^2 + (a\,\mathrm{sen}\,\gamma - 0)^2 = a^2\cos^2\gamma - 2\,ab\cos\gamma + b^2 + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\gamma$$

que se reduz à (VII.27) após fatorar a^2 e substituir a relação fundamental (VII.5).

K. As funções trigonométricas na geometria plana

Na **Figura 10** abaixo, representamos um pássaro que se desloca do Sul para o Norte, em um dia em que o vento sopra exatamente do Leste para o Oeste. Como o pássaro voa em relação ao ar, que o carrega para o lado (o vento é o movimento do ar), ele precisa voar numa direção inclinada com relação ao eixo Sul-Norte. Assim, no referencial preso ao ar (é preciso um físico para prender um referencial no ar em movimento), o pássaro orienta seu voo no ângulo α da figura.

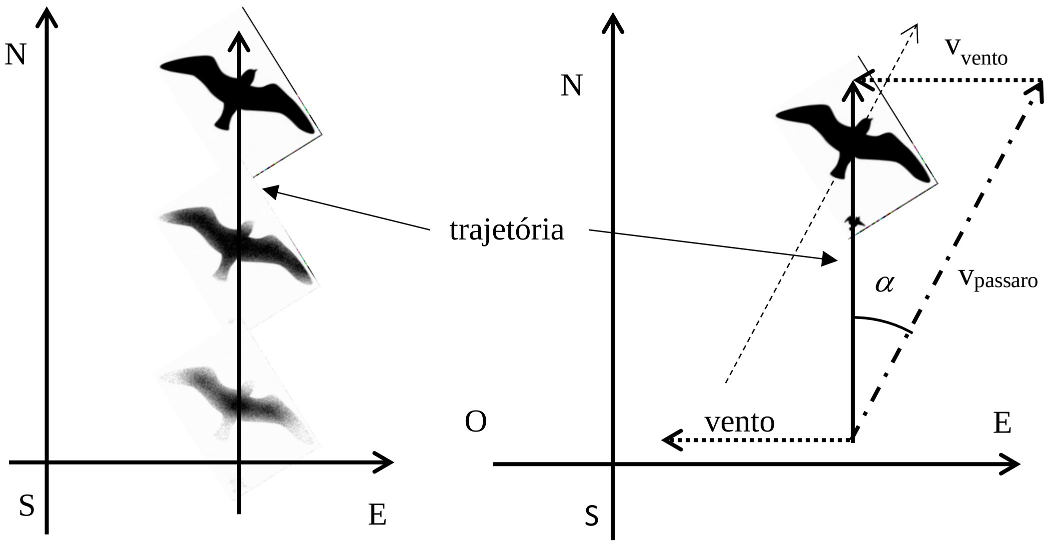


Figura 10. Movimento de um pássaro visto em um referencial preso a Terra, em um dia em que o vento sopra do Leste para o Oeste. O diagrama da esquerda esboça o movimento e o da direita, exibe o diagrama de velocidades que explica por que o pássaro voa com o corpo inclinado em relação à sua trajetória vista da terra. A linha tracejada fina que atravessa o desenho do pássaro mostra onde estão os pontos que ele ocupou ou ocupará *no referencial preso ao ar*.

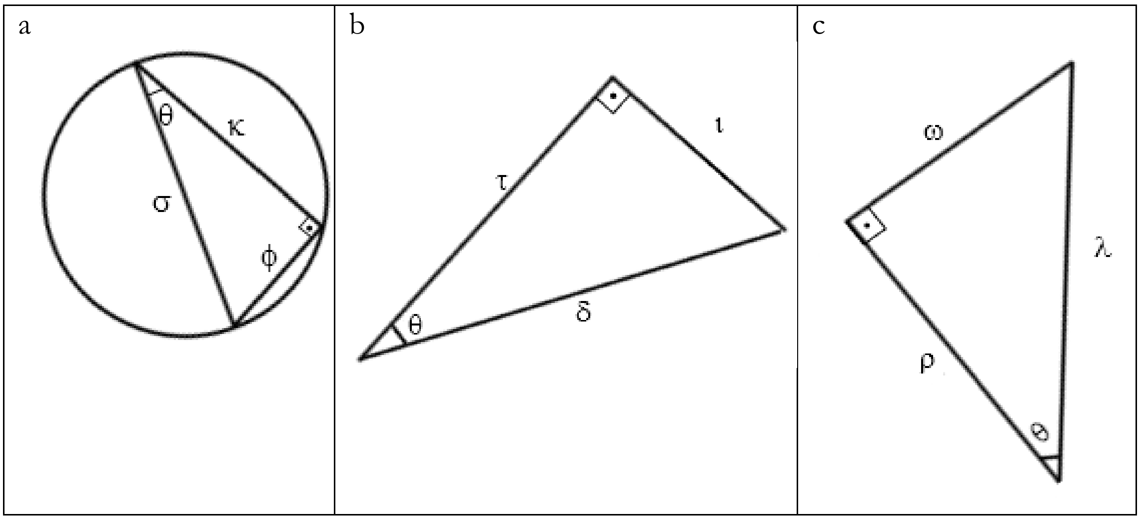
Assim, considerando que a soma das velocidades do vento com a do pássaro em relação ao ar dá um vetor exatamente na direçao Sul-Norte, podemos calcular

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{v_{\text{vento}}}{v_{\text{passaro(ar)}}}$$

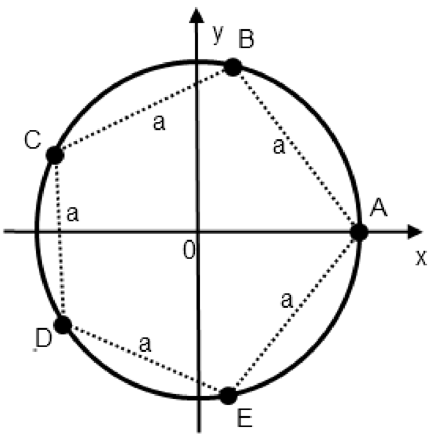
Note que, em relação ao solo, a velocidade é uma combinação dos movimentos, mas é o pássaro quem determina sua velocidade em relação ao ar, de modo que no lado direito da equação acima é essa velocidade que é controlada pelo pássaro, que tem que se ajeitar para voar formando esse ângulo α com a direção Sul-Norte de forma que siga do Sul para o Norte.

L. Exercícios.

1) De cada triângulo abaixo, determine os valores de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente do ângulo ϑ em função dos tamanhos dos lados dos triângulos.



2) Considere uma circunferência trigonométrica dividida em cinco partes iguais, por meio dos pontos A, B, C, D e E.



Dê as medidas algébricas (em radianos) dos conjuntos de arcos que têm extremidades nesses pontos, ou seja, AB, AC, AD e AE.

3) Simplifique $A = \frac{a^2\cos(0) - b^2\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{a\cos^2(\pi) + b\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2ab\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

4) Simplifique a expressão $(\text{sen}(x) + \cos(x))^2 + (\text{sen}(x) - \cos(x))^2$, para $x \in$ R.

5) Considere que $\text{sen}(x) - \cos(x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, com x um número real.

Determine o valor de $\text{sen}(x) \cdot \cos(x)$.

6) Considere a equação de segundo grau em x, em que $\text{sen}\,\theta \neq 0$.

$$x^2 \text{sen}(\theta) - 2x\cos(\theta) - \text{sen}(\theta) = 0$$

Determine as raízes.

7) Simplifique a expressão $y = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\text{sen}(\pi+\alpha)} - \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} + \frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

8) Resolva a equação $2\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 4 = 0$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

9) Resolva as equações abaixo, por meio dos gráficos das funções envolvidas. Em cada caso, construa os gráficos das funções intermediárias num mesmo par de eixos.

a) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x)$

b) $2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$

c) $4\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$

10) ***A fórmula do alcance***. A distância horizontal d percorrida por uma bola, que é chutada num campo de futebol com velocidade v_0, depende do ângulo θ do impulso fornecido pela jogadora com a direção horizontal. Quando se ignora o atrito com o ar, o resultado é uma fórmula compacta. Deduza essa fórmula e explore seu significado, seguindo as etapas abaixo.

a) Escreva as equações horárias dos movimentos da bola na horizontal, $x(t)$, e vertical $y(t)$ – adote as origens do sistema de referência e do tempo no ponto e momento em que a bola descola do chão.
b) Determine o tempo t_q que a bola fica no ar, considerando que $y(t_q) = 0$.
c) Substitua a fórmula de t_q na equação para a posição horizontal, obtenha a relação entre d e θ e simplifique para obter o resultado mais compacto possível.
d) Determine o ângulo θ que maximiza d, bem como o valor desse máximo, chamado *alcance*.
e) Determine o alcance de um chutaço ($v_0 = 30$ m/s) na Lua.