# VI. Números racionais, frações e razões entre expressões algébricas

Estes assuntos são relacionados na prática e surgem em quase todo problema real de física, embora envolvam temas distintos.

A origem da fração correspondente a um **número** racional (=razão entre dois números inteiros) pode ser traçada ao tempo em que os agrimensores dos faraós do Egito demarcavam as terras. Eles dispunham de uma corda-padrão e determinavam os comprimentos pelo número de vezes que aquela corda estava contida na distância percorrida. Como raramente a corda cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno, foi necessário criar um novo tipo de número que descrevesse as partes de um inteiro – o número *fracionário*. Essa história pode ser vista na Wikipedia, verbete Fração (último acesso 10/5/2021). Note que uma razão que envolva um número irracional (=número real que não se consegue representar por uma razão entre dois números inteiros) também é chamada "fração".

Estamos acostumados a usar expressões algébricas e, com frequência, usar razões entre duas expressões, como no problema da seção A do capítulo IV – dividimos a equação que representava a conservação da energia (IV.4) pela da quantidade de movimento (IV.3), uma razão que não tem significado especial, mas permitiu eliminar variáveis e alcançar o resultado final desejado. Assim, passagens algébricas intermediárias na solução do problema não precisam ter conteúdo físico, mas nem por isso deixam de ser comuns e **essenciais** na solução dos problemas e no desenvolvimento das relações que explicam e preveem os fenômenos físicos. O desenvolvimento da álgebra com grandezas representadas por letras tem uma história de mais de 2000 anos, bastante irregular e com períodos de dormência, que pode ser lida, por exemplo, em "The Birth of Literal Algebra", por I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova e Abe Shenitzer, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 1 (1999), pp. 57-66.

Fração é a representação da parte de um todo. Podemos considerá-la mais uma representação de quantidade, seja numérica, seja das grandezas embutidas nas variáveis algébricas. Podemos efetuar todas as operações aritméticas com frações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. A estrutura de uma fração é:

$$\frac{numerador}{denominador}$$

e ela pode se repetir dentro do numerador, do denominador, ou dos dois; as frações que entram no numerador ou no denominador podem, por sua vez, serem fracionárias, não havendo limite matemático para essa estrutura aninhada, que ocorre com boa frequência.

## A. Frações de números inteiros (números racionais)

O conjunto das frações em que tanto o numerador quanto o denominador são números inteiros (com o denominador diferente de 0) é chamado de conjunto dos números racionais e simbolizado por $\mathbb{Q}$. Dos muitos motivos para estudar esses números, vamos aqui nos concentrar no fato de que as operações que podem ser efetuadas com números racionais são as mesmas que podem ser efetuadas com o quociente de expressões algébricas, e é mais fácil e intuitivo lidar com números do que com símbolos.

Uma forma corrente de trabalhar com uma fração é expressá-la como uma *porcentagem*, que é representada por uma fração cujo denominador é **sempre** igual a 1, mas escrito como $100\ \% = 100\ \frac{1}{100} = 1$, ou seja, o símbolo % é igual a $\frac{1}{100}$ (dá para ver os dois zeros do 100 do denominador abraçando a barra de divisão). Assim, 59 % = 0,59, uma identidade matemática.

**Questão 1**. É menos comum, mas ainda frequente, representar quantidades em milésimos.

Qual é o símbolo correspondente a $\frac{1}{1000}$ ? (lê-se "por mil")

**Questão 2**. Calcule e dê o resultado em porcentagem, com dois dígitos significativos, os números:

a) 0,37; 1/3; 2/7; 81/91; 82/91
b) $53\%$ de $1/7$; $25\%$ de $\frac{1}{2}$ somado com $50\%$ de $\frac{1}{4}$; $18\ \%$ de $\frac{1}{2}$ somado com $50\%$ de $\frac{1}{4}$
c) 23% de 18% de $\frac{1}{2}$

Fração não é necessariamente a parte que tiramos de **um** inteiro, ela pode ser parte de **dois** inteiros completos, um inteiro mais uma parte e assim sucessivamente. Podemos classificá-las em: próprias, impróprias ou aparentes.

1. Fração Própria

É toda fração menor que um inteiro, ou seja, em que o numerador é menor que o denominador. Por exemplo, representamos 3 partes de um todo dividido em 8 partes iguais pela fração $\frac{3}{8}$.

2. Fração imprópria

É toda fração maior que um inteiro, que corresponde aos casos em que o numerador é maior que o denominador. Por exemplo, se dividimos vários objetos idênticos em 5 partes cada um e tomamos 6 dessas partes, escrevemos a fração $\frac{6}{5}$ para representar essas seis partes.

3. Fração aparente

Quando uma fração imprópria tem um denominador que é um múltiplo do numerador, ela representa um número de inteiros, mas nada nos impede de escrever essa fração, por exemplo $\frac{6}{3}$ é uma fração imprópria, uma maneira complicada de escrever o número 2 que, porém, pode ser útil em alguma situação.

Também existem as frações chamadas mistas, onde há uma parte inteira e uma fracionária: $2\frac{3}{4}$. Normalmente, evitamos essa representação, que pode ser facilmente confundida com a representação do produto $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, totalmente diferente do que se pretende com a fração mista $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. No entanto, ainda se usa, particularmente em elementos da construção civil e da mecânica, em que se usa polegada por influência americana – o diâmetro de um tubo de esgoto pode muito bem ser 1 ½", significando 3/2" (o " significa polegada). No curso, nunca usaremos essa representação, mas sim frações impróprias.

## B. Operações com frações numéricas

### 1. Adição e subtração:

Só podemos somar/subtrair os numeradores de frações diferentes se tiverem denominadores iguais. Assim, a primeira etapa da soma ou subtração de duas frações consiste em determinar o mínimo múltiplo comum dos denominadores, reescrever as frações para que tenham o mesmo denominador, e somar os numeradores.

**Questão 3.** Calcule e dê o resultado como um número racional, tal que o numerador e o denominador não tenham divisores comuns, exceto 1:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}+\frac{7}{18};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{6};\ \frac{3}{5}-\frac{3}{15};\ \frac{2}{3}-\frac{7}{24}$$

**Questão 4.** Considere as frações abaixo como mistas.

Calcule as frações mistas que representam os valores $4\frac{1}{8}+2\frac{3}{4}$ e $4\frac{1}{8}-2\frac{3}{4}$.

*Não vamos usar frações mistas no curso; esta questão está aqui somente para você verificar se saberá usá-las caso isso seja necessário.*

### 2. Multiplicação e Divisão

Multiplicam-se frações multiplicando-se os numeradores para achar o numerador do resultado e os denominadores, para achar o denominador do resultado. Por exemplo,

$$\frac{3}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{14}$$

O processo consistiu em multiplicar 3 por 5, os numeradores, e multiplicar 2 por 7, os denominadores.

Lembrando que a divisão é a operação inversa da multiplicação, efetua-se a divisão simplesmente multiplicando a fração que estiver no numerador pelo *inverso* da fração do denominador.

**Questão 5.** Calcule e dê a resposta como um número racional, tal que o numerador e o denominador não tenham mais divisores comuns diferentes de 1:

$$\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\ ;\ \ \frac{4}{3}\times\frac{21}{16}\ ;\ \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}\ ;\ \frac{\frac{1}{11}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}};\ \frac{2}{5}\div\frac{1}{4}\ ;\ \frac{25}{3}\div\frac{9}{15}$$

***Um quebra-cabeça para pensar depois da aula***.

*"Um fictício matemático árabe chamado Beremiz Samir, do século 10, época em que os matemáticos árabes eram os melhores do mundo, viajava com um amigo pelo deserto, ambos montados em um único camelo, quando encontram três irmãos discutindo acaloradamente. Haviam recebido uma herança de 35 camelos do pai, que deixava a metade para o mais velho, a terça parte para o irmão do meio e a nona parte para o irmão mais moço.*

*O motivo da discussão era a dificuldade em dividir a herança: o mais velho receberia a metade. Acontece que a metade de 35 camelos corresponde a 17 camelos inteiros mais meio camelo! O irmão do meio receberia a terça parte, ou seja, 35 dividido por 3, o que resulta em 11 camelos inteiros mais 2/3 de camelo! O caçula receberia a nona parte de 35 camelos, ou seja, 3 camelos inteiros e 8/9 de camelo! Naturalmente, cortar camelos em partes para repartir a herança seria destruí-la. Ao mesmo tempo, nenhum irmão queria ceder a fração de camelos ao outro.*

*O sábio Beremiz resolveu o problema e apresentou a seguinte solução: 'Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui vos trouxe. Os camelos agora são 36 e a divisão é fácil: o mais velho recebe 1/2 de 36, ou seja, 18; o irmão do meio recebe 1/3 de 36, o que equivale a 12; finalmente, o caçula recebe 1/9 de 36, que é igual a 4'.*

*Os irmãos nada reclamaram. Cada um deles ganhou mais do que receberia antes. Todos saíram lucrando. Beremiz explicou sua resolução: 'O primeiro dos irmãos recebeu 18, o segundo, 12 e o terceiro, 4. O total da herança recebida por eles é 18 + 12 + 4, ou seja, 34 camelos. Sobraram 2 camelos, um deles pertence a meu amigo, o que foi emprestado a vocês para permitir a partilha da herança, mas agora pode ser devolvido. O outro camelo que sobra fica para mim por ter resolvido esse complicado problema de herança satisfatoriamente'.*

*Como o feito do matemático foi possível, e como lhes foi possível ficar com mais camelos do que lhes cabiam e ainda sobrou um?*

*Extraído do livro "o homem que calculava", de Malba Tahan.*

## C. Quociente de expressões algébricas

Podemos construir frações em que tanto o numerador como o denominador são expressões algébricas. Pode-se operar com elas da mesma maneira que os números racionais, por exemplo, numa soma é necessário expressar os termos da soma como frações com mesmo denominador antes de somar os numeradores. No entanto, há um cuidado adicional, que diz respeito a verificar que o denominador não possa ser nulo, algo que fica por vezes escondido dentro da expressão. Normalmente, quem fornece uma expressão algébrica com um denominador literal deve informar o domínio das variáveis usadas, e essas exceções devem ser mantidas no resultado final, especialmente se o problema que elas causariam desapareceu. Por exemplo, a razão $\frac{a^3+1}{a+1}$ só tem sentido se $a \neq -1$. No entanto, ela pode ser simplificada:

$$\frac{a^3+1}{a+1} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a+1} = a^2 - a + 1 \text{ somente se } a \neq -1.$$

Neste exemplo, é impossível deduzir da forma final que a expressão não vale para $a = -1$, uma vez que a substituição desse número na expressão dá o valor 3 – mas ela não vale para $a = -1$ , uma vez que foi deduzida de uma expressão que não valia para esse valor de $a$.

**Questão 6**. Calcule e dê a resposta como um uma fração, tal que o numerador e o denominador não tenham mais divisores comuns.

a) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$

b) $\frac{1}{a} + \frac{3}{2a}$ com $a \neq 0$

c) $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$ com $a \neq 1\ e -1$

d) $\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1}$ com $a \neq 1\ e -1$

e) $\frac{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}}{\frac{1}{a^3-1}}$ com $a \neq 1\ e -1$

f) $\frac{ab}{d} \times \frac{df}{b}$ com $d \neq 0\ e\ b \neq 0$

g) $\frac{a^3bd}{ac} \times \frac{c^2e}{ad}$ com $a \neq 0, c \neq 0\ e\ d \neq 0$

h) $\frac{15x^3y^6}{12} \times \frac{60}{25x^4y^6}$ com $x \neq 0\ e\ y \neq 0$

i) $\frac{28x^3y}{5a^2b^3} \div \frac{35x^2y^2}{30a^2b^2}$ com $a \neq 0\ e\ b \neq 0$

j) $\frac{a-a^2}{a^2-1} \div \left(\frac{a}{a+1} - a\right)$ com $a \neq -1, 0$ e 1

k) $\frac{4x^2-8x-5}{1-x^2} \div \frac{5-2x}{x-1}$ com $x \neq 1$ e $-1$

l) $\frac{1}{\frac{1}{x}-x}$ com $x \neq -1, 0$ e 1

m) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{x}$ com $x \neq 0$ e $-1$

## D. Dividindo um polinômio por outro

Um tipo muito comum de função é a razão de dois polinômios na mesma variável, que tem o nome de ***fração racional***. Vamos aqui lidar com funções $f(x)$ da forma

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} \qquad \text{(VI.1)}$$

em que $P_n(x)$ e $P_m(x)$ são polinômios em $x$ de ordens *n* e *m*, respectivamente[1].

Embora a forma de razão da expressão (VI.1) seja muito conveniente para calcular valores numéricos da função, ela é muito difícil de integrar, apesar das integrais de polinômios serem as mais fáceis. Assim, é preciso aprender a transformar essa razão para uma forma mais fácil de integrar. Quando $n > m$, a primeira tarefa nessa transformação é **dividir** os polinômios, de modo que

[1] Um polinômio de ordem *n* é aquele cuja maior potência de *x* é *n*.

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{P_m(x)} \tag{VI.2}$$

em que $P_{n-m}(x)$ é um polinômio de ordem $n - m$ e $R_k(x)$, um polinômio de ordem $k < m$, chamado *resto* da divisão, e que pode ser a função nula, quando o polinômio $P_n(x)$ for exatamente divisível por $P_m(x)$. Note que a fórmula (VI.2) pode ser escrita também

$$P_n(x) = P_{n-m}(x)P_m(x) + R_k(x) \tag{VI.3}$$

que explica a origem do nome resto para $R_k(x)$. A vantagem da forma do membro direito é que a integral de $P_{n-m}(x)$ é imediata, uma vez que é um polinômio, e isola a dificuldade de integração no termo $\frac{R_k(x)}{P_m(x)}$, cuja redução a formas mais simples é o assunto da próxima seção.

Daremos um exemplo para apresentar o procedimento da divisão dos polinômios, usando $N(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ e $D(x) = x^2 + 4$ no numerador e denominador do quociente de polinômios. Começamos o algoritmo como na divisão de dois números:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \hline \end{array}$$

Como $x^3/x^2 = x$, achamos o primeiro termo do quociente e o colocamos no mesmo lugar do algoritmo da divisão de números:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} & \quad x \end{array}$$

Multiplicamos esse termo pelo denominador e colocamos abaixo do numerador:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad + 4x & \quad x \end{array}$$

Fazemos a subtração

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad + 4x & \quad x \\ \cline{1-1} \qquad 3x^2 \qquad + 5 & \end{array}$$

e vemos que ainda sobra $3x^2 + 5$, de modo que o próximo termo do quociente é 3

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad + 4x & \quad x+3 \\ \cline{1-1} \qquad 3x^2 \qquad + 5 & \end{array}$$

Multiplicamos o número 3 pelo denominador e alinhamos com o resto da etapa anterior

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad + 4x & \quad x+3 \\ \cline{1-1} \qquad 3x^2 \qquad + 5 & \\ \qquad 3x^2 \quad + 12 & \end{array}$$

Fazemos a subtração e constatamos que sobra -7, que é um polinômio de grau 0 e portanto não pode ser dividido por $x^2 + 4$ e o algoritmo terminou.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad + 4x & \quad x+3 \\ \cline{1-1} \qquad 3x^2 \qquad + 5 & \\ \qquad 3x^2 \quad + 12 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad -7 & \end{array}$$

Concluímos então que o quociente é $x$+3 e o resto, $-7$, ou seja,

$$\frac{x^3+3x^2+4x+5}{x^2+4} = x+3-\frac{7}{x^2+4}$$

Neste caso, o membro direito da expressão é integrável analiticamente (um polinômio mais um arco tangente), o que nem sempre acontece; muitas vezes, o termo que é a razão de dois polinômios requer a decomposição em frações parciais, assunto da próxima seção.

**Questão** 7. Determine o quociente e o resto das seguintes frações racionais:

a) $\frac{x^3}{x^2+2x+1}$ com $x \neq -1$

b) $\frac{x^4}{x^2-1}$ com $x \neq -1$ e $1$

c) $\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+x-6}$ com $x \neq -3$ e $2$

Dividir polinômios também pode ser usado para fatorar polinômios do 3º grau, quando se consegue identificar uma raiz. Considere o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$. Ao perceber que a soma dos coeficientes é nula (1+1-10+8 = 0), pode-se deduzir que $x = 1$ é uma raiz, portanto $P(x)$ será exatamente divisível por $x - 1$. O quociente será um polinômio de 2º grau, cujas raízes podem ser calculadas com a fórmula habitual.

**Questão 8**. Fatore o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$, com o seguinte procedimento.

a) Mostre que $x = 1$ é uma raiz, por substituição direta do valor no polinômio.
b) Divida $P(x)$ por $x - 1$.
c) Encontre as raízes do quociente da divisão do item anterior.

## E. Frações Parciais

Frações racionais em que o polinômio do numerador tem ordem menor que o do denominador podem ser decompostas em formas mais simples, chamadas Frações Parciais. Uma aplicação importante dessa decomposição está no cálculo das integrais de frações racionais, conforme explicado na seção anterior. Aqui, não desenvolveremos a teoria dessa decomposição, mas apenas realizá-la em casos práticos e comuns, ilustrados por 3 exemplos a seguir

### 1. Decompor a fração algébrica

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

Quando o denominador pode ser fatorado, uma fração pode ser decomposta numa soma de frações em que os denominadores são os polinômios da forma fatorada:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Para obter os valores de *A* e *B*, primeiro reescrevemos o lado direito como uma única fração, usando o mesmo denominador do membro esquerdo, que nada mais é que o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos polinômios nos denominadores das frações do membro direito,

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

que queremos que seja igual à fração original, ou seja

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

e, como os denominadores são iguais, os numeradores também precisam ser, ou seja:

$$A(x-1)+B(x+2)=1$$

para qualquer valor de $x$. Olhando para essa equação, substituindo $x=1$, obtemos *B*=1/3 e substituindo $x=-2$, obtemos *A* = –1/3. Assim, substituindo *A* e *B* pelos valores encontrados, obtemos:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}$$

Esse modelo serve para frações com mais fatores e para fatores quadráticos quando o polinômio não é fatorável. O exemplo seguinte mostra como se decompõem a fração que tem um quadrado perfeito no denominador.

2. Decompor $\frac{1}{x^2(x+1)}$

Neste caso, é necessário incluir, além dos termos com $x^2$ e $x+1$ no denominador, um termo em $1/x$:

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Juntando todos os termos do lado direito no mesmo denominador do termo do lado esquerdo, a igualdade exige que

$$1=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$$

Substituindo $x=0$ na equação acima, encontramos

$$B=1$$

e substituindo $x=-1$, encontramos

$$C=1$$

Se você sabe derivar, a maneira mais fácil de calcular o valor de $A$ é fazer a derivada da equação em $x$ e substituir $x=0$ na expressão encontrada. No entanto, é possível achar $A$ se usarmos uma propriedade importante dos polinômios: dois polinômios são iguais (isto é, dão os mesmos valores para todos os valores de $x$) se e somente se todos os coeficientes forem idênticos. Assim, substituindo $B$ e $C$ na equação acima, obtemos

$$1=Ax(x+1)+x+1+x^2 \therefore$$

$$1=(A+1)x^2+(A+1)x+1$$

Do lado esquerdo, temos um polinômio de grau 0, enquanto do lado direito temos um de grau 2, que não são idênticos a não ser que $A + 1 = 0$. Assim, concluímos

$$A + 1 = 0 \Longrightarrow A = -1$$

Finalmente, o resultado é

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

Note que os numeradores das frações parciais da decomposição de uma fração racional em que o expoente de *x* do numerador é menor do que aquele do denominador são constantes independentes de *x*, por exemplo,

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$$

Finalmente, é preciso sempre incluir nos denominadores todas as potências menores dos termos da fatoração, por exemplo,

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)^4} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)^3} + \frac{E}{(x-b)^4}$$

## 3. Decomposição da fração cujo denominador não é fatorável

Considere a expressão

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

Atente para a necessidade de usar um polinômio de grau 1 no numerador do segundo termo da decomposição – isso não acontece quando o denominador pode ser fatorado, como nos exemplos 1 e 2. Em ambos os casos, o mesmo método que vimos aplicando permite determinar os valores de $A$, $B$ e $C$. Como sempre, começamos por escrever o membro direito com o mesmo denominador que o esquerdo e concluir que

$$A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x + 1) = 1$$

Substituindo $x = -1$ na expressão acima, deduz-se

$$A = 1$$

que, quando substituímos na expressão anterior, dá

$$x^2 + 2x + 2 + Bx^2 + (B + C)x + C = 1 \therefore$$

$$(B + 1)x^2 + (B + C + 2)x + C + 1 = 0$$

de onde se conclui que

$$B + 1 = 0$$

$$B + C + 2 = 0$$

$$C + 1 = 0$$

Embora tenhamos 3 equações a duas incógnitas, a primeira e a última dão que

$$B = -1$$

$$C = -1$$

e esses valores de $B$ e $C$ satisfazem também a outra equação. Assim, podemos decompor

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

**Questão 9.** Decomponha as expressões seguintes em frações parciais.

a) $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$ com $x \neq 1$ e 2

b) $\frac{x+4}{x^2-5x+6}$ com $x \neq 2$ e 3

c) $\frac{x^3}{x^2+2x+1}$ com $x \neq -1$

d) $\frac{3x^2+x+4}{x^3+x}$ com $x \neq 0$

e) $\frac{x^4}{x^2-1}$ com $x \neq -1$ e 1

f) $\frac{1}{(x-a)(x^2+2x+2)}$ com $x \neq a$

g) $\frac{1}{\frac{1}{x}-x}$ com $x \neq -1, 0$ e 1

h) $\frac{1}{t(t-1)^2}$ com $t \neq 0$ e 1

i) $\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}$ com $x \neq -1$

## 4. Comentário final

Neste texto, motivamos o estudo da técnica de decomposição de frações racionais (=quocientes de polinômios) em frações parciais pela sua aplicação à integração dessas expressões. No entanto, fazer a integração "a mão" quando o denominador é um polinômio de grau maior que 2 exige cálculos que tornam impossível chegar na resposta correta em um tempo razoável. Assim, nesses casos é praticamente inescapável usar um programa de computador que tenha capacidade de manipulação algébrica, os quais não têm nenhuma dificuldade em integrar analiticamente qualquer fração racional, com polinômios de qualquer ordem. O algoritmo que esses programas usam é a decomposição mostrada na fórmula (VI.1), completada pela expansão em frações parciais do termo contendo o resto da divisão, que é o procedimento padrão na integração das frações racionais.