II. Proporções, variações proporcionais e a equação da reta

A. Proporção direta e Inversa

1. Um exemplo com base na matéria ser feita de átomos

Em física, frequentemente há grandezas de naturezas distintas que mantêm proporções definidas. Se a massa de uma única molécula de uma substância é μ, juntando um número ν dessas moléculas[1] teremos uma massa *m* igual a

$$m = \nu\,\mu \qquad (2.1)$$

Não é comum usar essa relação, porque qualquer quantidade de matéria possível de manusear, mesmo $m = 0{,}001$ g, tem um número enorme enorme enorme de moléculas. O fator de escala entre as massas dos mundos microscópico e macroscópico é o *número de Avogadro*

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$$

e define-se *a massa molar* M de uma substância como a massa de um número de Avogadro de moléculas,

$$M = N\mu \qquad (2.2)$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por ν e usando a equação (2.1) para substituir o produto $\nu\,\mu$ do lado direito, obtém-se, depois de rearranjar os elementos,

$$m = \frac{\nu}{N} M$$

Finalmente, ao definir o *número de moles* de uma substância, *n*, como

$$n = \frac{\nu}{N} \qquad (2.3)$$

chega-se na forma habitual de expressar a quantidade de moléculas na massa *m*,

$$\nu = n\,N \qquad (2.4)$$

e a massa de uma certa quantidade de substância,

$$m = n\,M \qquad (2.5)$$

2. Exemplo com a lei dos gases

Outro exemplo é o de um gás ideal contido em um recipiente, em que o volume *V* é proporcional ao número de moles n, quando são constantes a pressão *P* e a temperatura *T* no recipiente que contém o gás. Essa relação pode ser escrita usando o símbolo ∝ (parecido com a letra grega α ou com um oito deitado que perdeu um pedaço), que se lê *proporcional* a:

---

[1] O símbolo ν é a letra ni do alfabeto grego. Usamos letras gregas com frequência, especialmente para grandezas que guardam relação entre si, mas têm significados distintos, como na expressão (2.4), adiante. A wikipédia tem a lista de todas as letras em [Alfabeto grego – Wikipédia, a enciclopédia livre (wikipedia.org)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Alfabeto_grego) ou https://pt.wikipedia.org/wiki/Alfabeto_grego, último acesso em 14/4/2021. Note que as letras no estilo normal: α, β, ν parecem diferentes quando estão em itálico: α, β, ν.

$$V \propto n$$

ou seja, diz-se "*V* é proporcional a n". Note que a razão V/n tem dimensão física e **não** pode, portanto, ser representada por um número **apenas** – é preciso conhecer **o número e a unidade** usada na determinação desse número.

Duas quantidades podem ser **inversamente proporcionais**. Nesse mesmo caso do gás ideal, mantendo a temperatura constante, fixando o número de moles e liberando o volume, tem-se

$$P \propto \frac{1}{V}$$

que se lê "*P* é inversamente proporcional a *V*", que significa que *P* é **diretamente** proporcional ao **inverso** de *V*. Note que *V* e 1/*V* não têm a mesma dimensão física.

B. Razão, proporção e suas representações

Imagine uma placa plana e homogênea. Então, um pedaço dela com área 3 vezes maior que outro terá uma massa também três vezes maior. Agora, separe três pedaços de massas *a*, *b* e *c* tais que as razões das massas sejam $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ e $\frac{b}{c} = \frac{3}{7}$, portanto $\frac{a}{c} = \frac{1}{7}$. Essas 3 razões podem ser escritas de maneira a exibir a proporcionalidade das três massas aos fatores 1, 3 e 7 por uma sentença construída com os símbolos : e ::,

a : *b* : *c* :: 1 : 3 : 7 (ou *a* : *b* : *c* = 1 : 3 : 7)

Essa sentença define três proporções e três razões:

Como $\begin{cases} a \to 1 \\ b \to 3 \end{cases}$ então *b* = 3*a* (*b* é 3 vezes maior que *a*) e $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$

Como $\begin{cases} a \to 1 \\ c \to 7 \end{cases}$ então *c* = 7*a* (*c* é 7 vezes maior que *a*) e $\frac{a}{c} = \frac{1}{7}$

Como $\begin{cases} b \to 3 \\ c \to 7 \end{cases}$ então $c = \frac{7}{3}b$ (*c* é $\frac{7}{3}$ vezes maior que *b*) e $\frac{b}{c} = \frac{3}{7}$

Desse modo, há infinitas possibilidades para as massas dos três pedaços, mas conhecida uma delas, as demais estão bem definidas. Por exemplo, pode ser que *a* = 1 kg, *b* = 3 kg e *c* = 7 kg, ou então *a* = 1,2 kg; *b* = 3,6 kg e *c* = 8,4 kg, ou mesmo

$a = \sqrt{2}$ kg, $b = 3\sqrt{2}$ kg e $c = 7\sqrt{2}$ kg.

Note que a expressão *b* = 3*a* representa uma **proporção** (se *a* = 1 kg então *b* = 3 kg, mas se $a = \sqrt{2}$ kg, então $b = 3\sqrt{2}$ kg e assim por diante – todas essas possibilidades estão contidas nessa equação matemática). Já $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ dá a **razão** entre as massas *a* e *b* (*a* é um terço de *b*)[2].

C. Representações algébrica e gráfica da proporção

Uma proporção direta entre as grandezas *h* e *r* é representada algebricamente por

$$h = k\,r \tag{2.6}$$

e a proporção inversa entre *s* e *r* por

$$s = \frac{q}{r} \tag{2.7}$$

em que *k* e *q* são as constantes de proporcionalidade.

Questão 1. Em um gás nas condições normais de temperatura e pressão,

$$V = v\,n$$

a) Qual o nome da constante de proporcionalidade v?
b) Qual é o valor de v?

Questão 2. Encontre outros exemplos de quantidades físicas que sejam:

a) Diretamente proporcionais.
b) Inversamente proporcionais.

Questão 3. Uma experimentadora está em um corpo celeste do sistema solar e pesa um corpo com 4,0 kg de massa, encontrando como resultado o valor 14,8 N.

Determine:

a) A aceleração local da gravidade
b) O peso de um corpo com 3,0 kg de massa.
c) O corpo celeste em que a experimentadora está.

[2] **Jamais** diga "*a* é três vezes menor que *b*", que é uma frase inconsistente – se *a* é três **vezes** algo, não pode ser **menor**, de modo que os termos estão em contradição. Além disso, a frase "*a* é um terço de *b*" não é maior nem mais complicada que a frase errada do início desta nota!

Toda a discussão da representação gráfica das proporções que faremos aqui ficará por conta da Questão 4. Depois de resolvê-la, certifique-se que tenha ficado claro: o que caracteriza o gráfico de uma proporção é que a reta que a representa passa pela origem do sistema de coordenadas.

Questão 4. Na superfície da Lua, um experimentador determina os pesos de corpos de massas diferentes, encontrando os resultados da tabela abaixo.

Massa (kg)	3,00	5,00	7,00	9,0
Peso (N)	4,9	8,1	11,3	14,6

a) Faça o gráfico do peso em função da massa na Lua.
b) Determine o peso que corresponde à massa nula.
c) Desenhe uma única reta pelo conjunto dos pontos.
d) Determine a aceleração local da gravidade.
e) Explique porque o gráfico não existe para valores negativos da abscissa.

D. Variações proporcionais

Em certas situações, a **mudança** de uma grandeza física **afeta** a outra de uma maneira **proporcional**, mas **não a define** completamente. Considere, por exemplo, a construção das colunas de uma estação polar, cuja base deve ficar a 3 m do chão, e a parte enterrada delas deve ter 12 m. Cada coluna tem uma seção transversal com área de 0,10 m^2, tanto na parte exposta quando na enterrada, de modo que são necessários 0,1 m^3 de concreto para cada m da coluna/estaca. Para construir a parte enterrada, é feito um buraco no chão e colocado um tubo, que tem uma seção transversal interna com 0,10 m^2 de área e se prolonga por 3 m acima do buraco. Esse tubo serve, então, de molde a ser preenchido de concreto. Controlar o volume de concreto lançado nesse tubo permite conhecer até onde o buraco já foi preenchido. Escolhendo para abscissa a altura exposta da coluna, o gráfico que relaciona essa altura com o volume de concreto lançado na forma está na Figura 1.

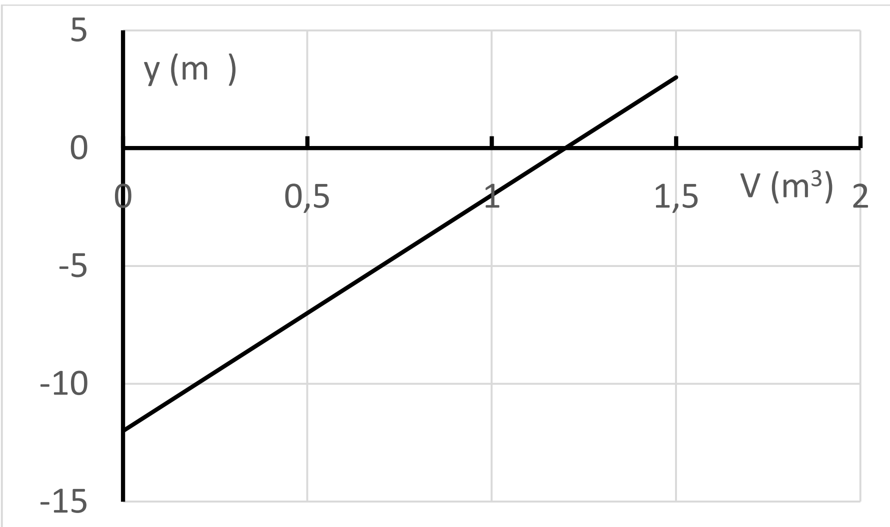

Figura 1. Altura exposta da coluna em função do volume de concreto derramado dentro da forma.

Note que a reta do gráfico da Figura 1 não passa pelo zero, embora haja proporcionalidade entre o volume de concreto derramado e o **aumento** do tamanho da coluna. Esse tipo de dependência entre as duas variáveis é representado algebricamente por

$y = 10\,V - 12$ em m para V em m^3.

Esse é um exemplo de uma função afim[3] que é chamada, com frequência, de função linear, mas este último nome deve ser evitado, uma vez que *y* não é linear em V.[4]

Em geral, uma função com a forma

$$y = a\,x + b \tag{2.8}$$

em que $a \neq 0$ indica que as grandezas y e x variam proporcionalmente, ou seja, uma mudança Δx em x produz uma mudança Δy em y igual a $a\,\Delta x$, ou seja, a é o coeficiente de proporcionalidade entre Δy e Δx.

> Questão 5. Escolha um par de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que satisfaçam a relação (2.8) e demonstre que $\Delta y = \ a\,\Delta x$ e que $y_i \neq a\,x_i$ quando $b \neq 0$. *Note que isso significa mostrar que as grandezas x e y não são proporcionais, mas sim que variam proporcionalmente.*

E. A equação da reta

A **equação geral** de uma reta em um sistema *x*O*y* de coordenadas ortogonais é representada por:

$$Ax + By + C = 0 \tag{2.9}$$

em que *A*, *B* e *C* são os coeficientes da equação, que são valores reais quaisquer exceto que *A* e *B* **não podem ser simultaneamente nulos**. No entanto, note o caso particular *B* = 0 com $A \neq 0$, caso em que a fórmula (2.9) se reduz a

$$x = -\frac{C}{A} \tag{2.10}$$

que representa uma reta paralela ao eixo O*y*.

> Questão 6. Substitua *A* = ½ , *B* = 0 e *C* = –2 na eq. (2.9).
>
> a) Faça o gráfico que representa a expressão obtida.
> b) Determine se essa expressão representa uma **função** de *x* e justifique sua resposta.

---

[3] A versão em inglês é "affine function".

[4] Uma função $f(x)$ é linear em x se $f(\alpha\,x_1 + \beta\,x_2) = \alpha\,f(x_1) + \beta\,f(x_2)$.

F. Reta na forma de polinômio.

Quando $B \neq 0$, a expressão (2.9) pode ser reescrita, tornando evidente que, nesses casos, *y* é uma função de *x*, que é a forma em que iremos trabalhar no resto deste capítulo. Partindo da equação (2.9) e isolando y literalmente (= usando letras), a equação fica

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{2.11}$$

que é um polinômio de grau 1 sempre que $A \neq 0$ (a condição $B \neq 0$ já foi enunciada no início deste parágrafo). Esses coeficientes em forma de fração dão origem a outros coeficientes com propriedades e nomes especiais:

$$a = -\frac{A}{B} \qquad \text{e} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

com a chamado coeficiente angular ou **inclinação** e b, coeficiente linear ou **termo constante**. A equação (2.11) com esses símbolos fica:

$$y = ax + b \tag{2.12}$$

Note que, quando $a = 0$, a eq. (2.12) ainda descreve uma função que é representada como uma reta paralela ao eixo O*x* , mas é um polinômio de grau 0. Veremos as características de cada um dos coeficientes citados acima por meio das duas próximas questões.

Questão 7. Considere as retas definidas pelas equações: $y = 2x + 3$, $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 4$.

a) Represente as três retas em um mesmo sistema de eixos ortogonais, no intervalo $-5 \leq x \leq 5$.
b) Determine a característica comum a essas 3 retas e use isso para verificar se o nome do coeficiente a da fórmula (2.12) é consistente com sua interpretação.

Questão 8. Considere as retas definidas pelas equações: $y = x - 2$, $y = 2x - 2$ e $y = \frac{x}{2} - 2$.

a) Represente as três retas em um mesmo sistema de eixos ortogonais, no intervalo $-5 \leq x \leq 5$.
b) Determine a característica comum a essas 3 retas e use isso para verificar se o nome do coeficiente b da fórmula (2.12) é consistente com sua interpretação.

Questão 9. Determine a equação da reta que corta o eixo O*y* em *y* = 1 e a ordenada aumenta de duas unidades quando a abscissa:

a) aumenta de uma unidade.
b) diminui de uma unidade.

Questão 10. Determine as equações das retas desenhadas no gráfico abaixo.

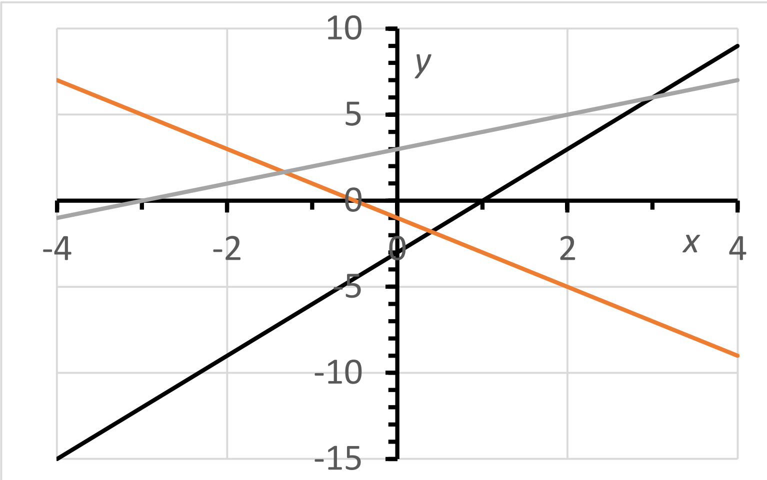

Figura 2. Gráficos de retas para a questão 10.

G. Achar a equação da reta a partir de dois pontos

Dois pontos definem uma reta, e a figura 3 ilustra como fazer isso graficamente. Abaixo, vamos usar os símbolos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) para as coordenadas desses pontos, que no caso da Figura são (2,3) e (6,5). Primeiro, determina-se a razão entre os incrementos, que é o coeficiente angular

$$a = \frac{5-3}{6-2} = \frac{1}{2}$$

Pode-se verificar que o coeficiente angular é sempre o mesmo fazendo o cálculo para outros pontos vizinhos a esses que estão desenhados. Dessa razão $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ deduz-se que a grandeza *y* muda uma unidade quando se desloca *x* por duas unidades.

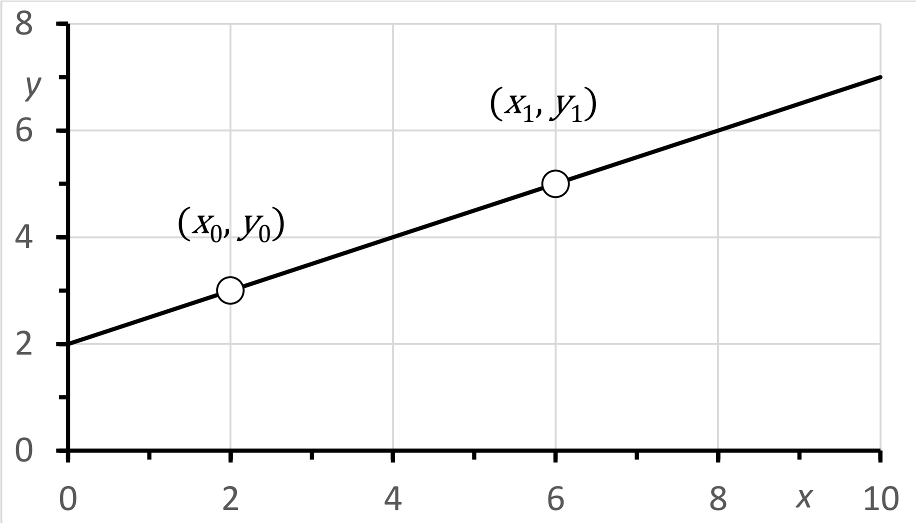

Figura 3. Reta definida pelos pontos (2,3) e (6,5).

Assim, deslocando duas unidades para a esquerda de *x* = 2, devemos ter *y* = 3-1 = 2, o que confere. A inclinação pode ser deduzida a partir de quaisquer pontos da reta, por exemplo, escolhendo o maior triângulo do desenho,

$$a = \frac{7-2}{10-0} = \frac{1}{2}$$

Faça outros testes como esse e certifique-se que não tem dúvidas sobre o significado da inclinação de uma reta. Uma vez que *a* está determinado, substituindo na equação (2.6) seu valor e as coordenadas de um ponto qualquer, por exemplo (2,3), obtém-se o termo constante:

$$3 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 + b \rightarrow 3 - 1 = 2$$

Usar o ponto (6,5) daria o mesmo resultado, verifique!

Para encontrar uma expressão geral, calculamos o coeficiente angular com símbolos

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \tag{2.13}$$

e escolhendo qualquer um dos pontos, por exemplo, o ponto (x_0, y_0)

$$y_0 = a\, x_0 + b \rightarrow b = y_0 - a\, x_0 \tag{2.14}$$

Questão 11. Cada item abaixo dá as coordenadas de dois pontos.

i. (–3; 0) e (0; 3)
ii. (–4; –15) e (–2; –9)
iii. (2; –5) e (4; –9)

Em cada caso, **escreva a equação da reta** que passa pelos pontos, na forma da eq.(2.12).

H. Achar a equação da reta a partir de um ponto e a inclinação

Uma reta pode ser definida por um ponto (x_0, y_0) e sua inclinação, *a*. Como a equação da reta é completamente definida pela inclinação mais o termo constate, tudo o que falta é achar o termo constante, o que é feito com o procedimento descrito acima, na equação (2.14). Esse resultado dá origem a uma fórmula da reta que é muito conhecida, basta substituir *b* da eq. (2.14) na eq. (2.12):

$$y = ax + b = ax + y_0 - ax_0$$

que pode ser fatorada assim:

$$y - y_0 = a(x - x_0) \tag{2.15}$$

Questão 12. *Encontrando a equação da tangente a uma parábola*.
Considere a parábola da equação $y = x^2$. As etapas abaixo permitem encontrar e desenhar a reta que é tangente a essa parábola em $x = 3$, sabendo[1] que aí a inclinação da reta tangente é $a = 6$.

a) Faça o gráfico dessa parábola no intervalo $0 \leq x \leq 5$.
b) Encontre a equação da reta tangente no ponto (3; 9), usando a fórmula (2.15).
c) Represente a reta obtida no item anterior no mesmo sistema de eixos em que desenhou a parábola.

[1] Você vai aprender daqui a pouco tempo como determinar a inclinação da reta tangente a qualquer ponto de uma curva; nesta questão, por enquanto, aceite o valor dado.