EXERCÍCIOS 2 (GABARITO) ESPAÇOS DE HILBERT E EDPS MAP4003/ MAP5707

Exercícios com solução: Todos com exceção do exercício 7.

Os exercícios abaixo foram retirados ou baseados nos dos livros:

C) Introdução à Análise Funcional, César R. de Oliveira, Projeto Euclides.

Con) A course in functional analysis, John B. Conway, Springer.

B) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Haim Brezis, Universitext, Springer.

AU) Partielle Differenzialgleichungen, Arendt and Urban, Springer Spektrum.

GG) Distributions and Operators, Gerd Grubb, Springer.

Lembramos da nossa notação $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Exercício 1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

i. Mostre que $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert com os produtos internos

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_\Omega \partial_x^\alpha u \partial_x^\alpha v dx = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_\Omega \partial_x^\alpha u \partial_x^\alpha v dx.$$

(Dica: Use que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e repita a demonstração do caso unidimensional).

ii. Prove por indução em m que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert para todo $m \geq 1$.

Solução: Vamos provar tudo ao mesmo tempo para $m \geq 1$.

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H^m(\Omega)$. Observamos que

$$\|u_j - u_k\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha u_j - \partial_x^\alpha u_k\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Assim $(\partial_x^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$ para cada $|\alpha| \leq m$. Assim, existem funções $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|\partial_x^\alpha u_j - u_\alpha\|_{H^m(\Omega)} = 0$, pois $L^2(\Omega)$ é completo. Vamos mostrar agora que $u \in H^m(\Omega)$ e $\partial_x^\alpha u = u_\alpha$ para todo $|\alpha| \leq m$.

De fato, vemos que

$$\int_\Omega u \partial_x^\alpha \varphi dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j \partial_x^\alpha \varphi dx = \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_x^\alpha u_j \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi dx.$$

Logo $u \in H^m(\Omega)$. Além disso,

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|^2_{H^m(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha u_j - \partial_x^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha u_j - u_\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Portanto a sequência de Cauchy $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para u em $H^m(\Omega)$.

Exercício 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in H^3(\Omega)$. Mostre que as derivadas fracas de ordem 3 comutam, ou seja,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i},$$

para quaisquer $i, j, k \in \{1, ..., n\}$.

Solução: Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo

$$\int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \varphi dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right)\varphi dx$$
$$= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx = -\int_\Omega u \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx$$
$$\stackrel{(1)}{=} -\int_\Omega u \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)\varphi dx = \int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} \varphi dx.$$

Em (1) usamos o lema de Schwarz para permutar derivadas. Para as outras igualdades, o argumento é o mesmo.

Exercício 3. Sejam $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ e $f : B(0,1) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x|^\alpha$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que a função f pertença a $H^1(B(0,1))$ nos casos em que $n = 1$, 2 e 3.

(Observação: É possível generalizar o resultado para $n \geq 4$ também).

Solução:

Se $\alpha = 0$, então $u(x) = |x|^\alpha = 1$ e $u \in H^1(B(0,1))$. Vamos considerar abaixo $\alpha \neq 0$. Neste caso, vamos mostrar que a solução é $\alpha > 1/2$ se $n = 1$, $\alpha > 0$, se $n = 2$, e $\alpha > -1/2$, se $n = 3$.

Afirmação 1: Se $u \in H^1(B(0,1))$ e $u \in C^1(B(0,1)\backslash\{0\})$, então a derivada fraca $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ coincide com a derivada clássica em $B(0,1)\backslash\{0\}$. Em particular, uma condição necessária para que uma função $u \in C^1(B(0,1)\backslash\{0\})$ pertença a $H^1(B(0,1))$ é que u e suas derivadas clássicas $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ pertençam a $L^2(B(0,1))$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Para não confundir, vamos denotar por ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F$ a derivada fraca e por ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C$ a derivada clássica.

Seja $r < 1/2$ e $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$. Logo

$$\int_{B(0,1-r)\backslash B(0,r)} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{B(0,1)} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{B(0,1)} {\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F \varphi dx = -\int_{B(0,1-r)\backslash B(0,r)} {\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F \varphi dx,$$

pela definição de derivada fraca.

Por outro lado, se $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$, então como $u \in C^1(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$, podemos usar derivação por partes e concluir que

$$\int_{B(0,1-r)\backslash B(0,r)} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{B(0,1-r)\backslash B(0,r)} {\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C \varphi dx.$$

Assim,

$$\int_{B(0,1-r)\backslash B(0,r)} \left({\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F - {\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C\right)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)}).$$

A função ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C$ é contínua em $\overline{B(0,1-r)}\backslash B(0,r)$. Logo é limitada. Como o conjunto é limitado, concluímos que ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C \in L^2(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$. A função ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F$ é restrição de uma função em $L^2(B(0,1))$. Logo ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F$ também pertence a $L^2(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$. Como as funções $C_c^\infty(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$ são densas em $L^2(B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)})$, concluímos que

$${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F(x) = {\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C(x), \quad \forall x \in B(0,1-r)\backslash\overline{B(0,r)}.$$

Como $r \in]0,1/2[$ é arbitrário, concluímos que ${\frac{\partial u}{\partial x_j}}^F = {\frac{\partial u}{\partial x_j}}^C$ em $B(0,1)/\{0\}$.

Afirmação 2: Uma condição necessária para que $u(x) = |x|^\alpha$ pertença a $H^1(B(0,1))$ é que $\alpha > (2-n)/2$.

Como a função $u \in C^1(B(0,1)/\{0\})$, é necessário que u e suas derivadas estejam em $L^2(B(0,1))$.

Usando coordenadas polares, vemos que

$$\int_{B(0,1)} u^2 dx = C_n \int_0^1 r^{2\alpha} r^{n-1} dr < \infty$$

se, e somente se, $2\alpha + n - 1 > -1$, ou seja, $\alpha > -n/2$. A constante C_n depende da dimensão. Temos $C_1 = 2$, $C_2 = 2\pi$ e $C_3 = 4\pi^2$.

Note que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^\alpha = \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_j}|x| = \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\right)$$
$$= \alpha|x|^{\alpha-1}\frac{x_j}{|x|} = \alpha|x|^{\alpha-2}x_j.$$

Para a derivada, vamos separar em casos.

Para $n = 1$, temos

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 2\alpha^2 \int_0^1 x^{2\alpha-2} dx < \infty$$

se, e somente se, $2\alpha - 2 > -1$, ou seja, $\alpha > 1/2$.

Para $n = 2$, temos

$$\int_{B(0,1)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx = \alpha^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta\right) \int_0^1 r^{2\alpha-4} r^2 r dr < \infty$$

se, e somente se, $2\alpha - 1 > -1$, ou seja, $\alpha > 0$. O mesmo vale para $\frac{\partial u}{\partial x_2}$.

Para $n = 3$, temos

$$\int_{B(0,1)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx = \alpha^2 \left(\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\theta)\text{sen}^3(\varphi) d\theta d\psi\right) \int_0^1 r^{2\alpha-4} r^2 r^2 dr < \infty$$

se, e somente se, $2\alpha > -1$, ou seja, $\alpha > -1/2$. O mesmo vale para $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_3}$.

Afirmação 3: Uma condição suficiente para que $u(x) = |x|^\alpha$ pertença a $H^1(B(0,1))$ é que $\alpha > (2-n)/2$.

Vamos mostrar que nas condições acima, a derivada fraca existe e é igual a derivada clássica.

Para $n = 1$, consideremos $\varphi \in C_c^\infty(]-1,1[)$. Logo

$$\int_{]-1,1[} |x|^\alpha \frac{d\varphi}{dx}(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} (-x)^\alpha \frac{d\varphi}{dx}(x)dx + \int_\varepsilon^1 x^\alpha \frac{d\varphi}{dx}(x)dx\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{d}{dx}(-x)^\alpha \varphi(x)dx - \int_\varepsilon^1 \frac{d}{dx}x^\alpha\varphi(x)dx + \varepsilon^\alpha\varphi(-\varepsilon) - \varepsilon^\alpha\varphi(\varepsilon)\right)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{d}{dx}(-x)^\alpha\varphi(x)dx + \int_\varepsilon^1 \frac{d}{dx}x^\alpha\varphi(x)dx\right) = -\int_{]-1,1[}\frac{d}{dx}|x|^\alpha\varphi(x)dx,$$

pois $\alpha > 1/2$.

Para $n = 2$, consideremos $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$. Logo

$$\int_{B(0,1)} |x|^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)dx\right)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^\alpha\right)\varphi(x)dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha\varphi(x)n_j(x)dx\right)$$
$$= -\left(\int_{B(0,1)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^\alpha\right)\varphi(x)dx\right).$$

Na última passagem, usamos que

$$|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha \varphi(x) n_j(x)dx| \leq 2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\|\varphi\|_{L^\infty(B(0,1))} \to 0,$$

pois $\alpha > 0$.

Para $n = 3$, consideremos $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$. Logo

$$\int_{B(0,1)} |x|^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)dx\right)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^\alpha\right)\varphi(x)dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha\varphi(x)n_j(x)dx\right)$$
$$= -\left(\int_{B(0,1)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|x|^\alpha\right)\varphi(x)dx\right).$$

Na última passagem, usamos que

$$|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha \varphi(x) n_j(x)dx| \leq 4\pi^2\varepsilon^{2+\alpha}\|\varphi\|_{L^\infty(B(0,1))} \to 0,$$

pois $\alpha > -1/2$.

Exercício 4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado (não necessariamente de classe C^1) e $j \in \{1, ..., n\}$. Mostre que se $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

(Dica: Prove inicialmente para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e depois use um teorema de aproximação adequado).

Solução: Seja $u \in H^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo, pela definição de derivada fraca, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx.$$

Assim,

$$(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi)_{L^2(\Omega)} = -(u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, dado $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|v_j - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Isto é o mesmo que dizer que $\lim_{j\to\infty}\|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ e $\lim_{j\to\infty}\|\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = (\frac{\partial u}{\partial x_i}, v)_{L^2(\Omega)} = (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \lim_{j\to\infty} v_j)_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty}(\frac{\partial u}{\partial x_i}, v_j)_{L^2(\Omega)}$$
$$= -\lim_{j\to\infty}(u, \frac{\partial v_j}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)} = -(u, \lim_{j\to\infty}\frac{\partial v_j}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)} = -(u, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

Exercício 5. Mostre que as funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ são densas em $H^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, mostre que dado $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|u_j - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Dica: Imite a demonstração feita em sala de aula que mostrou que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Solução:

Seja $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Consideremos a função $\varphi_j = \rho_j * u$, em que ρ_j é um Mollifier como nas notas de aula. Logo $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, conforme vimos em aula (e nas notas de aula). Além disso, vimos que $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} = \frac{\partial \rho_j}{\partial x_l} * u$. Porém,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_j}{\partial x_l} * u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_l}(x-y)u(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\rho_j(x-y)\right)u(y)dy \\ &\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_l}(y)dy = \rho_j * \frac{\partial u}{\partial y_l}(x).\end{aligned}$$

Em (1) usamos que $y \mapsto \rho_j(x-y) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Da mesma forma, $\frac{\partial^2 \rho_j}{\partial x_m \partial x_l} * u = \rho_j * \frac{\partial^2 u}{\partial y_m \partial y_l}$. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} &= \lim_{j\to\infty} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_l} * u = \lim_{j\to\infty} \rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{\partial u}{\partial x_l}, \\ \lim_{j\to\infty} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_m \partial x_l} &= \lim_{j\to\infty} \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial x_m \partial x_l} * u = \lim_{j\to\infty} \rho_j * \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_l},\end{aligned}$$

em que os limite são tomados em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como tanto a sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ como suas primeiras e segundas derivadas convergem em $L^2(\mathbb{R}^n)$, concluímos que a sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a u em $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Seja agora $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $0 \le \eta \le 1$, que se anula fora de $B(0,2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 2\}$ e que é igual a 1 na bola $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$. Definimos $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $\eta_k(x) = \eta(x/k)$. Logo η_k se anula fora de $B(0,2k)$ e é igual a 1 em $B(0,k)$.

Como $|(1-\eta_k(x))\varphi_j(x)| \le |\varphi_j(x)|$ e $\lim_{k\to\infty} |(1-\eta_k(x))\varphi_j(x)| = 0$, então, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_j - \eta_k\varphi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |(1-\eta_k(x))\varphi_j(x)|^2 dx = 0. \tag{0.1}$$

Pelo mesmo argumento visto acima, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} - \eta_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 0, \\ \lim_{k\to\infty} \|\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_m} - \eta_k \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 0.\end{aligned} \tag{0.2}$$

Note também que, para qualquer $l \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_l}(\eta_k\varphi_j) &= \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\varphi_j + \eta_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m}(\eta_k\varphi_j) &= \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_l \partial x_m}\varphi_j + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_m}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} + \eta_k \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_m}.\end{aligned} \tag{0.3}$$

Por fim, vemos que $\frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} = \frac{1}{k}\frac{\partial \eta}{\partial x_l}(\frac{x}{k})$ e $\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_l \partial x_m} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_l \partial x_m}(\frac{x}{k})$. Note que[1]

$$\|\frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\frac{1}{k}\frac{\partial \eta}{\partial x_l}(\frac{x}{k})\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{k}\|\frac{\partial \eta}{\partial x_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

$$\|\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_l \partial x_m}\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_m \partial x_l}(\frac{x}{k})\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{k^2}\|\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_m \partial x_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e que

$$\|\frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\frac{1}{k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}(\frac{x}{k})\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{k}\|\frac{\partial \eta_k}{\partial x_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

[1]Lembre-se que se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for uma função contínua limitada, então

$$\|hf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)f(x)|^2 dx} \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |h(x)| \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx} = \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Como os termos acima vão a zero, concluímos que

$$\|\frac{\partial}{\partial x_l}(\eta_k\varphi_j) - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad k \to \infty$$

e

$$\|\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m}(\eta_k\varphi_j) - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_l \partial x_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_j - \eta_k\varphi_j\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Desta maneira, para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $k_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_j - \eta_{k_j}\varphi_j\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{j}.$$

Neste caso, definindo $u_j = \eta_{k_j}\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, vemos que

$$\|u_j - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_j - \varphi_j\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_j - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Como as normas do lado direito vão a zero, concluímos que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Exercício 6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função cuja derivada é limitada, ou seja, $|f'(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (Note que $f(0)$ não precisa ser igual a zero! Estamos assumindo Ω limitado). Mostre que se $u \in H^1(\Omega)$, então $f \circ u \in H^1(\Omega)$ e que $\frac{\partial}{\partial x_j}(f(u(x))) = f'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Solução:
Afirmação 1: As funções $f \circ u$ e $f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}$ pertencem a $L^2(\Omega)$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$.
Vamos denotar $|\Omega| = \int_\Omega 1dx < \infty$. É importante observar que $|\Omega| < \infty$, pois Ω é limitado.
Note que $|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(s)ds| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(s)|ds \leq |f(0)| + Mt$. Assim,

$$|f(t)|^2 \leq (|f(0)| + Mt)^2 \leq 2|f(0)|^2 + 2M^2t^2.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |f \circ u(x)|^2 dx \leq 2\int_\Omega |f(0)|^2 dx + 2M^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx = 2|f(0)|^2|\Omega| + 2M^2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo $f \circ u$ pertence a $L^2(\Omega)$.
Além disso, vemos que

$$\int_\Omega |f' \circ u(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 dx \leq M^2 \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)|^2 dx \leq M^2\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto, $f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}$ pertence a $L^2(\Omega)$.
Afirmação 2: A derivada fraca $\frac{\partial}{\partial x_k}(f \circ u)$ é igual a $f' \circ u\frac{\partial u}{\partial x_k}$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$.
Este resultado segue exatamente como no resultado da Seção 4.2.1.1 das notas de aula.

Exercício 7. Seja $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $\eta \in C_c^\infty(B(0,1))$ uma função tal que $\eta(x,y) = 1$ se $x^2 + y^2 < 1/2$.
Considere a função

$$u(x,y) = \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)^{1/4} \eta(x,y).$$

i. Mostre que $u \in H^1(B(0,1))$.
ii. Conclua que $H^1(B(0,1))$ contém funções que não são contínuas.

Exercício 8. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.

i. Mostre que $C^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega)$. (Lembre-se que em $C^m(\overline{\Omega})$, as funções e suas derivadas de ordem $\leq m$ têm extensões contínuas em $\overline{\Omega}$).

ii. Dê um exemplo simples de função $u \in C^1(\Omega)$ que não pertença a $H^1(\Omega)$. (Dica: Ache um contraexemplo em $\Omega =]0,1[$ lembrando que se $u \in C^1(]0,1[)$, então u ou u' pode ir ao infinito em 0 ou em 1)

iii. Ache um exemplo de um aberto Ω não limitado que contenha funções em $C^1(\overline{\Omega})$ que não pertençam a $H^1(\Omega)$.

Solução:

i. Seja $u \in C^m(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\alpha| \leq m$. Então, aplicando $|\alpha|$ vezes a primeira proposição da Seção 4.2 das notas de aula, temos

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha u \varphi dx.$$

Como $\partial^\alpha u \in C(\overline{\Omega})$ e $\overline{\Omega}$ é compacto, concluímos que $\partial^\alpha u$ é uma função limitada. Portanto, é uma função em $L^2(\Omega)$, pois Ω é limitado. Vemos, assim, que todas as derivadas fracas de u de ordem menor ou igual a m existem e a função u pertence a $H^m(\Omega)$.

ii. Seja $\Omega =]0,1[$ e $u(x) = \frac{1}{x}$. Logo $\int_0^1 u(x)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty$ e $u \notin L^2(\Omega)$. Logo $u \in C^\infty(]0,1[) \subset C^1(]0,1[)$, mas $u \notin H^1(0,1) \subset L^2(]0,1[)$.

iii. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$. Logo $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por $u(x) = 1$ é uma função que pertence a $C^1(\mathbb{R}^n)$, mas $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1^2 dx = \infty$ e, portanto, $u \notin H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Considere funções $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ e $r \in C(\overline{\Omega})$ com $r(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, para todo $x \in \Omega$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, e que exista $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2$ para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$. O nosso objetivo é estudar o seguinte problema de contorno:

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica se u satisfizer as equações do problema de contorno acima.

i. Mostre que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica, então u é uma solução fraca, ou seja, u pertence a $H_0^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + r(x)u(x)v(x)\right) dx,$$
$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

ii. Mostre que existe uma única solução fraca da equação.

iii. Mostre que se $u \in H_0^1(\Omega)$ for uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Solução:

i. Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ uma solução clássica e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\varphi dx &= -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi dx + \int_\Omega ru\varphi dx \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_\Omega ru\varphi dx.\end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos o resultado da seção 4.2 das notas de aula (integração por partes).

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Logo existe uma sequência $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega fvdx = (f,v) &= \lim_{m\to\infty}(f,\varphi_m) = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}) + \lim_{m\to\infty}(ru,\varphi_m) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}) + (ru,v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega ruvdx.\end{aligned}$$

ii. Basta usar Lax-Milgram. Vamos verificar as condições abaixo.

A função F é linear e contínua, pois

$$|F(v)| = |\int_\Omega fvdx| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1}.$$

A função a é bilinear, contínua e coerciva. É contínua, pois

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)| + |r(x)u(x)v(x)|\right)dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty}\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2}\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{L^2} + \|r\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.\end{aligned}$$

É coerciva, pois

$$\begin{aligned}|a(u,u)| &\geq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + r(x)u(x)u(x)\right)dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \frac{\alpha}{2C}\int_\Omega u^2 dx \geq \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2C}\}\|u\|_{H_0^1}^2,\end{aligned}$$

em que $C > 0$ é a constante da desigualdade de Poincaré.

iii. Sabemos que

$$\int_\Omega fvdx = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int_\Omega ruvdx$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, a igualdade acima é válida para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Assim, fazendo integração por partes, como na primeira proposição da Seção 4.2 das notas de aula, concluímos que

$$\int_\Omega \left(f + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - ru\right)vdx = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$f + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - ru = 0,$$

ou seja,

$$-\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + ru = f.$$

Por fim, como $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, pois Ω é de classe C^1.

Exercício 10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. O teorema da divergência nos diz que para todo $F = (F_1, ..., F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, em que $F_j \in C^1(\overline{\Omega})$, a igualdade abaixo vale

$$\int_\Omega \nabla \cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS(x),$$

em que $n(x) = (n_1(x), ..., n_n(x))$ é a normal que aponta para fora de $x \in \partial\Omega$.

i. Mostre que o teorema da divergência implica na seguinte fórmula de integração por partes:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) v(x) dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_j(x)dS(x),$$

para todo $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. (Dica: Aplique o teorema da divergência para $F = uve_j$, em que $e_j = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$, onde o 1 aparece somente na j-ésima casa.)

ii. Mostre que a fórmula de integração por partes implica no teorema da divergência. (Dica: Escolha $u = F_j$ e $v = 1$ na fórmula de integração por partes e some em j).

Solução:

i. Dado $j \in \{1, ..., n\}$ seja e_j o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$, em que 1 só aparece na j-ésima casa e nas outras apenas temos zero. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx &= \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) dx = \int_\Omega \nabla \cdot (uve_j) dx - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{\partial\Omega} uve_j \cdot n dS(x) - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} uvn_j dS(x) - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j} dx.\end{aligned}$$

ii. Escolhendo $u = F_j$ e $v = 1$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial\Omega} F_j(x)n_j(x)dS(x).$$

Somando em j, temos

$$\int_\Omega \nabla \cdot F dS(x) = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} F_j(x)n_j(x)dS(x) = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x) dS(x).$$

Exercício 11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Considere funções $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ e $r \in C(\overline{\Omega})$ com $r(x) \geq c > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, para todo $x \in \Omega$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, e que exista $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$. O nosso objetivo é estudar o seguinte problema de contorno:

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)n_j(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Acima $n(x) = (n_1(x), ..., n_n(x))$ é o vetor unitário normal que aponta para fora de Ω em $x \in \partial\Omega$.

Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica se u satisfizer as equações acima.

i. Mostre que se $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ para todo $x \in \Omega$, obtemos $-\Delta u + ru = f$ com condições de contorno de Neumann. Aqui δ_{ij} denota o delta de Kronecker: é igual a 1, se $i = j$, e é igual a 0, se $i \neq j$.

ii. Mostre que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica, então u é uma solução fraca, ou seja, u pertence a $H^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, em que $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + r(x)u(x)v(x) \right) dx,$$
$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

iii. Mostre que existe uma única solução fraca da equação.

iv. Mostre que se $u \in H^1(\Omega)$ for uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Solução:

i. Se $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, então

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + ru = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + ru = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + ru$$

e

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i = \nabla u \cdot n.$$

ii. Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ uma solução clássica e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\int_\Omega f\varphi dx = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx + \int_\Omega ru\varphi dx$$
$$\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \varphi dS(x) + \int_\Omega ru\varphi dx$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_\Omega ru\varphi dx.$$

Em (1), usamos o exercício 10.

Seja $v \in H^1(\Omega)$. Logo existe uma sequência $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Assim,

$$\int_\Omega fvdx = (f,v) = \lim_{m\to\infty} (f,\varphi_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}) + \lim_{m\to\infty} (ru,\varphi_m)$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}) + (ru,v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_\Omega ruvdx.$$

Concluímos que u é solução fraca.

iii. Basta usar Lax-Milgram. Vamos verificar as condições abaixo.

A função F é linear e contínua, pois

$$|F(v)| = |\int_\Omega fvdx| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}.$$

A função a é bilinear, contínua e coerciva. É contínua, pois

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)| + |r(x)u(x)v(x)| \right) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2} \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{L^2} + \|r\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty} + \|r\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

É coerciva, pois

$$\begin{aligned}|a(u,u)| &\geq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + r(x)u(x)u(x) \right) dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + c\int_\Omega u^2 dx \geq \min\{\alpha, c\}\|u\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

iv. Sabemos que

$$\int_\Omega fv dx = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_\Omega ruv dx \tag{0.4}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Em particular, a igualdade acima é válida para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Assim, fazendo integração por partes em (0.4), como na primeira proposição da Seção 4.2 das notas de aula, concluímos que

$$\int_\Omega \left(f + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - ru \right) v dx = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$f + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - ru = 0,$$

ou seja,

$$-\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + ru = f.$$

Se $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então fazendo integração por partes em (0.4), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega fv dx &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_\Omega ruv dx \\ &= -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j v dS(x) + \int_\Omega ruv dx.\end{aligned}$$

Como $-\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + ru = f$, temos

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \right) v dS(x) = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Se $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)n_j(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$, então podemos escolher $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não negativa tal que $v(x_0) > 0$ e com suporte numa bola com centro em x_0 e raio suficientemente pequeno (ver detalhes nas notas de aula. Seção 4.3.2). Isto implica que

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j\right) vdS(x) > 0,$$

o que é um absurdo. Da mesma maneira se $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)n_j(x_0) < 0$, obtemos um absurdo. Concluímos que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)n_j(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Exercício 12. Seja $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, ou seja, $B^TB = I$, e $b \in \mathbb{R}^n$ (Estamos denotando por B^T a matriz transposta de B). Definimos a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $F(y) = By + b$. Seja $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\Omega_1 = F(\Omega_2)$. Mostre que a função

$$Tu(y) = u(F(y))$$

define um operadores unitários $T : H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ e $T : H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$.

Solução:
Afirmação 1: $T : H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ é unitário.
Observamos que $F^{-1}(x) = B^{-1}(x - b) = B^Tx - B^Tb$. Se $y = F^{-1}(x)$, então

$$dy = |\det(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial x_j}(x))|dx = |\det(B^T)|dx = dx.$$

Logo

$$\int_{\Omega_2} u(F(y))v(F(y))dy = \int_{\Omega_1} u(x)v(x)dx.$$

Da mesma forma, como $F_k(y) = \sum_{m=1}^n B_{km}y_m$, temos

$$\frac{\partial}{\partial y_j}v \circ F(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k}(F(y))\frac{\partial F_k}{\partial y_j}(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k}(F(y))B_{kj} = \sum_{k=1}^n B_{jk}^T\frac{\partial v}{\partial x_k}(F(y)).$$

Logo

$$\nabla(v \circ F) = B^T(\nabla v) \circ F.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} \nabla(v \circ F(y)) \cdot \nabla(v \circ F(y))dy &= \int_{\Omega_2} B^T(\nabla v) \circ F(y) \cdot B^T(\nabla v) \circ F(y)dy \\ &\overset{(1)}{=} \int_{\Omega_2} (\nabla v) \circ F(y) \cdot (\nabla v) \circ F(y)dy = \int_{\Omega_1} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x)dx.\end{aligned}$$

Em (1), usamos que B é ortogonal.
Concluímos que

$$(Tu, Tv)_{H^1(\Omega_2)} = (u, v)_{H^1(\Omega_1)}.$$

Por fim, se definirmos $T^{-1}u = u \circ F^{-1}$, então $T^{-1} : H^1(\Omega_2) \to H^1(\Omega_1)$ pelo mesmo argumento anterior. Além disso, $TT^{-1} = I_{H^1(\Omega_2)}$ e $T^{-1}T = I_{H^1(\Omega_1)}$, em que I denota a identidade. Logo T é bijetora.
Afirmação 2: $T : H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$ é unitário.
Seja $u \in H_0^1(\Omega_1)$. Logo existe $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega_1)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{H^1(\Omega_1)} = 0$. Assim,

$$\lim_{j\to\infty} \|T\varphi_j - Tu\|_{H^1(\Omega_2)} = \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{H^1(\Omega_1)} = 0.$$

Como $T\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_2)$, concluímos que $Tu \in H_0^1(\Omega_2)$. Logo T leva $H_0^1(\Omega_1)$ em $H_0^1(\Omega_2)$. Da mesma forma, T^{-1} leva $H_0^1(\Omega_2)$ em $H_0^1(\Omega_1)$. Como $T : H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ é bijetora, concluímos que $T : H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$ também é bijetora.

Por fim,

$$(Tu, Tv)_{H_0^1(\Omega_2)} = (Tu, Tv)_{H^1(\Omega_2)} = (u, v)_{H^1(\Omega_1)} = (u, v)_{H_0^1(\Omega_1)}.$$

Logo $T : H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$ é unitária.

Exercício 13. Seja $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, $b \in \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(y) = By + b$. Seja $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\Omega_1 = F(\Omega_2)$. Seja $f \in L^2(\Omega_1)$ e $u \in H_0^1(\Omega_1)$ uma solução fraca de $-\Delta u = f$. Mostre que $u \circ F \in H_0^1(\Omega_2)$ é uma solução fraca de $-\Delta(u \circ F) = f \circ F$.

Para tanto, lembre-se que a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega_1)$ satisfaz $\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega_1} f v dx$, para todo $v \in H_0^1(\Omega_1)$. Calcule $\nabla(u \circ F) = \nabla(u(By + b))$ e use mudança de coordenada na integral $\int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla(\varphi \circ F) dy$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1)$.

Solução:

Sabemos que

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega_1} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_1).$$

Sejam $u \circ F$ e $w \in H_0^1(\Omega_2)$. Logo $v = w \circ F^{-1} \circ F$, em que $v := w \circ F^{-1} \in H_0^1(\Omega_1)$. Assim,

$$\int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla w dy = \int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla(v \circ F) dy.$$

Sabemos que $F_i(y) = \sum_{j=1}^n B_{ij} y_j + b_i$. Logo $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y) = B_{ij}$. Seja $B_{ij}^T = B_{ji}$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(u \circ F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}(F(y)) \frac{\partial F_i}{\partial y_k}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}(F(y)) B_{ik} = \sum_{i=1}^n B_{ki}^T \frac{\partial u}{\partial y_i}(F(y)).$$

Portanto, $\nabla(u \circ F)(y) = B^T \nabla u(F(y))$. Concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla w dy \\
&\int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla(v \circ F) dy = \int_{\Omega_2} B^T (\nabla u)(F(y)) \cdot B^T (\nabla v)(F(y)) dy \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\Omega_2} BB^T (\nabla u)(F(y)) \cdot (\nabla v)(F(y)) dy \overset{(2)}{=} \int_{\Omega_2} (\nabla u)(F(y)) \cdot (\nabla v)(F(y)) dy \\
&= \int_{\Omega_1} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) |\det \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial x_j}(x)| dx = \int_{\Omega_1} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) |\det(B^{-1})| dx \\
&\overset{(3)}{=} \int_{\Omega_1} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega_1} v(x) f(x) dx = \int_{\Omega_2} v \circ F(y) f \circ F(y) |\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y)\right)| dy \\
&= \int_{\Omega_2} v \circ F(y) f \circ F(y) |\det(B)| dy \overset{(4)}{=} \int_{\Omega_2} w(y) f \circ F(y) dy.
\end{aligned}$$

Em (1), usamos que $B^{TT} = B$. Em (2), usamos que B é ortogonal e, portanto, $BB^T = I$. Em (3) e (4) usamos que o determinante de uma matriz ortogonal é igual a zero.

Logo $u \circ F$ é solução fraca de $-\Delta(u \circ F) = f \circ F$.

Exercício 14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Sejam $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $b_j, c \in C(\overline{\Omega})$. Consideremos o problema de contorno

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x) u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica se satisfizer a equação acima.

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema acima se satisfizer $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v(x) + c(x)u(x)v(x) \right) dx, \\ F(v) &= \int_\Omega f(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Vamos supor que exista $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$.

i. Mostre que a função a é bilinear e contínua.

ii. Suponha que $\sum_{j=1}^n b_j^2(x) \leq 2\alpha c(x)$, para todo $x \in \Omega$. Mostre que a função a é coerciva. Portanto existe uma única solução fraca. (Dica: prove inicialmente que $ub_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \leq \frac{\alpha}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}^2 + \frac{1}{2\alpha} b_j^2 u^2$).

iii. Suponha que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x) \leq 2c(x)$, para todo $x \in \Omega$. Mostre que a função a é coerciva. Portanto existe uma única solução fraca. (Dica: prove inicialmente que $\int_\Omega b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial b_j}{\partial x_j} u^2 dx$ para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$, usando integração por partes e $\frac{\partial u^2}{\partial x_j} = 2u \frac{\partial u}{\partial x_j}$).

iv. Mostre que se $u \in H_0^1(\Omega)$ for uma solução fraca e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Solução:

i. A função a é bilinear e ela é contínua, pois

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |\frac{\partial u}{\partial x_i}| |\frac{\partial v}{\partial x_j}| + \sum_{j=1}^n |b_j| |\frac{\partial u}{\partial x_j}| |v| + |c||u||v| \right) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{L^\infty(\Omega)} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

ii. Para provar que é coerciva, note que

$$ab = \left(\sqrt{\alpha}a\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}b\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha}a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}b\right)^2 = \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2.$$

Usando $b = |ub_j|$ e $a = |\frac{\partial u}{\partial x_j}|$, concluímos que

$$|ub_j \frac{\partial u}{\partial x_j}| \leq \frac{\alpha}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}^2 + \frac{1}{2\alpha} b_j^2 u^2.$$

Assim,

$$ub_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq -|ub_j \frac{\partial u}{\partial x_j}| \geq -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}^2 - \frac{1}{2\alpha} b_j^2 u^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u + cu^2 \right) dx \\
&\geq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_{j=1}^n \frac{\alpha}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}^2 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\alpha} b_j^2 u^2 + cu^2 \right) dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\alpha}{2C} \int_\Omega u^2 dx \geq \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2C}\} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

em que $C > 0$ é a constante da desigualdade de Poincaré.

A existência e unicidade de soluções fracas segue de Lax-Milgram.

iii. Vamos provar coercividade.

Inicialmente, usando integração por partes, observe que

$$\int_\Omega b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \varphi dx = \frac{1}{2} \int_\Omega b_j \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_j} dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \varphi^2 dx, \tag{0.5}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, vamos tomar uma sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Logo tomando φ_j na Equação (0.5) e o limite $j \to \infty$, concluímos que

$$\int_\Omega b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial b_j}{\partial x_j} u^2 dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u + cu^2 \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} u^2 + cu^2 \right) dx \\
&\geq \int_\Omega \left(\alpha |\nabla u|^2 + \left(c - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right) u^2 \right) dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\alpha}{2C} \int_\Omega u^2 dx \\
&\geq \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2C}\} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

em que $C > 0$ é a constante da desigualdade de Poincaré.

A existência e unicidade de soluções fracas segue de Lax-Milgram.

iv. Como $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e Ω é de classe C^1, concluímos que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Além disso, se $v \in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f v dx &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + cuv \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \right) v dx.
\end{aligned}$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=f.$$

Assim, a solução fraca é uma solução clássica.

Exercício 15. Seja $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$. Considere a função $a : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v)=\int_\Omega\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+(2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

i. Mostre que a é uma função bilinear, contínua e coerciva.

ii. Seja $f\in L^2(\Omega)$ e defina a função $F : H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ por $F(v)=\int_\Omega f(x)v(x)dx$. Mostre que existe um único $u\in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v)=F(v)$ para todo $v\in H_0^1(\Omega)$.

iii. Se a função u do item ii. pertencer a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é solução clássica de um problema de contorno. Que problema é esse?

Solução:

i. A função a é contínua, pois

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\int_\Omega\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+(2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy|\\
&\leq \int_\Omega |2+x||\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}|+|2+y||\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}|dxdy\\
&\leq 3\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}|+|\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}|dxdy\\
&\leq 3\left(\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_{L^2(\Omega)}+\|\frac{\partial u}{\partial y}\|_{L^2(\Omega)}\|\frac{\partial v}{\partial y}\|_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq 3\left(\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}+\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\right)=6\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

A função a é coerciva, pois

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &= \int_\Omega\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+(2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\\
&\geq \int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}^2+\frac{\partial u}{\partial y}^2\right)dxdy=\int_\Omega|\nabla u|^2dx\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx\geq\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2C}\int_\Omega u^2dx\\
&\geq \min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2C}\}\|u\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

em que $C>0$ é a constante da desigualdade de Poincaré.

ii. A função F é contínua, pois

$$|F(v)|=|\int_\Omega f(x)v(x)dx|\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, pelo item i, podemos aplicar Lax-Milgram.

iii. Se $u\in C^2(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$, então, como Ω é um aberto de classe C^1, temos $u(x,y)=0$ para todo $(x,y)\in\partial\Omega$. Além disso, se $v\in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fvdx &= \int_\Omega\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+(2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\\
&= -\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)vdxdy.
\end{aligned}$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left((2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f.$$

Assim, u é solução clássica do seguinte problema de contorno:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x}\left((2+x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left((2+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=f, \quad (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)&=0, \quad (x,y)\in\partial\Omega.\end{aligned}$$

Exercício 16. Seja $\mathbb{R}^3_+=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_3>0\}$. Considere a função sesquilinear $a : H^1(\mathbb{R}^3_+)\times H^1(\mathbb{R}^3_+)\to\mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v)=\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3}+uv\right)dx_1dx_2dx_3.$$

i. Mostre que a é uma função bilinear, contínua e coerciva. (Dica: Para lidar com o termo $\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3}$, lembre-se que $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$).

ii. Seja $f\in L^2(\mathbb{R}^3_+)$ e defina a função $F : H^1(\mathbb{R}^3_+)\to\mathbb{R}$ por $F(v)=\int_{\mathbb{R}^3_+}f(x)v(x)dx$. Mostre que existe um único $u\in H^1(\mathbb{R}^3_+)$ tal que $a(u,v)=F(v)$ para todo $v\in H^1(\mathbb{R}^3_+)$.

iii. Se a função u do item ii. pertencer a $C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, então u é solução clássica de um problema de contorno. Que problema é esse?

Solução:

i. A bilinearidade é simples.

A função é contínua, pois

$$\begin{aligned}|a(u,v)|&\leq\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(|\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}|+|\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}|+|\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3}|+|\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3}|+|uv|\right)dx_1dx_2dx_3\\ &\leq\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^2}\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\|_{L^2}+\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\|_{L^2}\|\frac{\partial v}{\partial x_2}\|_{L^2}+\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\|_{L^2}\|\frac{\partial v}{\partial x_3}\|_{L^2}\\ &\quad+\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\|_{L^2}\|\frac{\partial v}{\partial x_3}\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\\ &\leq 5\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3_+)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^3_+)}.\end{aligned}$$

A função é coerciva. Inicialmente observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\geq-|\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}|\geq-\frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial x_2}|^2-\frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial x_3}|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}a(u,u)&=\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}+u^2\right)dx_1dx_2dx_3\\ &=\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2+u^2\right)dx_1dx_2dx_3\\ &=\int_{\mathbb{R}^3_+}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2+u^2\right)dx_1dx_2dx_3\geq\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3_+)}.\end{aligned}$$

ii. A função F é linear e contínua, pois

$$|F(v)|=|\int_{\mathbb{R}^3_+}f(x)v(x)dx|\leq\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}\leq\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_+)}\|v\|_{H^1_0(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Assim, basta usar o resultado do item i e o Teorema de Lax-Milgram para provar existência e unicidade de uma solução fraca.

iii. Seja $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3_+)$. Usando integração por partes, vemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3_+} fv dx &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3} + uv\right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + u\right) v dx_1 dx_2 dx_3.\end{aligned}$$

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^3_+)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^3_+)$, concluímos que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + u = f.$$

Agora, considere $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3_+} fv dx &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3} + uv\right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3_+} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + u\right) v dx_1 dx_2 dx_3. \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) v dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) v dx_1 dx_2 = 0.$$

Se $\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, 0) \neq 0$ para algum $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$, podemos escolher $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) v > 0$ para todo (x_1, x_2, x_3) próximo a $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, 0)$ de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) v dx_1 dx_2 > 0.$$

Isto é um absurdo. Logo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

O problema de contorno, portanto, é dado por

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + u = f, &\quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+, \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, &\quad (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}.\end{aligned}$$

Exercício 17. Seja $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ e considere a função

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + u\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2.$$

i. Mostre que a função $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é bilinear, contínua e coerciva. (Veja a demonstração da desigualdade de Poincaré para uma estimativa da constante que nela aparece).

Seja $f \in L^2(\Omega)$ e defina $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ pela expressão $F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$.

ii. Mostre que existe uma única função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

iii. Se a função u estiver em $C^2(\overline{\Omega})$, então ela pode ser considerada uma solução clássica de um problema de contorno. Que problema de contorno é esse?

Solução:
i. É simples provar que a é bilinear. Para continuidade, basta observar que

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \int_\Omega \left(|\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}| + |\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}| + |u\frac{\partial v}{\partial x_1}| \right) dx_1 dx_2 \\
&\leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial v}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial v}{\partial x_2}\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial v}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 3\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para a coercividade, usamos que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ para concluir que

$$u\frac{\partial u}{\partial x_1} \geq -|u\frac{\partial u}{\partial x_1}| \geq -\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + u\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \\
&\geq \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \right) dx_1 dx_2 \\
&\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{u^2}{2} \right) dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Aqui usaremos a desigualdade de Poincaré, mas com bastante cuidado com a constante. Pela demonstração da desigualdade feita em aula (e nas notas de aula), temos

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |u(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)^2 dx_1 dx_2.$$

Logo

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{u^2}{2} \right) dx_1 dx_2 \\
&\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \right) dx_1 dx_2 \\
&\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \right) dx_1 dx_2 \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 \\
&\geq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx_1 dx_2 \geq \frac{1}{4}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

ii. A função F é linear, como já foi provado em diversas outras soluções de exercícios, e a é bilinear, contínua e coerciva. Logo a existência e unicidade de soluções fracas segue de Lax-Milgram.

iii. Sabemos que $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$. A fronteira, com exceção dos vértices do quadrado, é de classe C^1. Logo $u(x) = 0$ para todo ponto em $\partial\Omega\backslash\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, pelo teorema demonstrado em sala de aula (e contido nas notas de aula). Por continuidade, ela também será igual a zero nos vértices.

Por fim, se $v \in C_c^\infty(\Omega)$, então, integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} - f \right) v dx_1 dx_2 = 0.$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} = f.$$

Assim, o problema de contorno é

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} = f, \quad \forall x \in \Omega,$$
$$u = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Exercício 18. Sejam $T, S : H \to H$ operadores lineares limitados.
i. Mostre que se T e S forem compactos, então $T + S$ é compacto.
ii. Mostre que se T é compacto e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αT é compacto.
iii. Mostre que se T é compacto, então TS e ST são compactos.

Solução:
i. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de H.
Como T é compacto, existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
Como S é compacto, existe uma subsequência $(u_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ de $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Su_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ converge.
Concluímos que $(Tu_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ e $(Su_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ convergem. Logo $((T+S)u_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ também converge. Portanto, $T + S$ é compacto.
ii. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de H.
Como T é compacto, existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Portanto, $(\lambda Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também converge. Assim, λT é compacto.
iii. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de H.
Como S é limitado, então $\|Su_j\| \leq \|S\|\|u_j\|$. Portanto, $(Su_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada de H. Como T é compacto, existe uma subsequência $(Su_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(TSu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Logo TS é compacto.
Como T é compacto, então existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Como S é contínua, então $(STu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também converge. Concluímos que ST é compacto.

Exercício 19. Seja $P : H \to H$ uma projeção ortogonal. Dê uma condição necessária e suficiente para que P seja um operador compacto. (Dica: Analise a dimensão da imagem de P).

Solução:
A condição necessária e suficiente é que a imagem de P tenha dimensão finita.
Afirmação 1: Se P é compacto, então a dimensão da imagem é finita.
Seja $P : H \to H$ uma projeção ortogonal compacta e $F = P(H)$.
Se $u \in P(H)$, então $u = Pw$, com $w \in H$. Assim, $Pu = P^2w = Pw = u$. Portanto $P : F \to F$ é igual a identidade. Como $P : H \to H$ é compacta, então $P : F \to F$ é compacto. Logo a identidade em F é compacta. Portanto, F tem dimensão finita.
Afirmação 2: Se a dimensão da imagem é finita, então P é compacto.
Seja $F = P(H)$ e suponha que F tenha dimensão finita. Seja $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \{1, ..., N\}\}$ uma base de F.
Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Logo $(Pu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, pois $\|Pu_j\| \leq \|P\|\|u_j\|$, e contida em F. Logo

$$Pu_j = \sum_{l=1}^{N} \alpha_{jl} e_l.$$

Como $((\alpha_{j1}, ..., \alpha_{jN}))_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$, então existe uma subsequência $((\alpha_{j_k1}, ..., \alpha_{j_kN}))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$. Portanto, $u_{j_k} := \sum_{l=1}^N \alpha_{j_kl} e_l$ converge para $\sum_{l=1}^N \alpha_l e_l$. Assim, $(Pu_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge e P é compacto.

Exercício 20. Seja $T : H \to H$ um operador unitário. Dê uma condição necessária e suficiente para que T seja um operador compacto. (Dica: Analise a dimensão de H).

Solução: A condição necessária e suficiente é que H tenha dimensão finita.
Afirmação 1: Se T for unitário e H tiver dimensão finita, então T é compacto.
Como todo operador linear em um espaço de dimensão finita é contínuo e compacto, a afirmação segue imediatamente.

Afirmação 2: Se T for compacto, então a dimensão de H é finita.

Como T é unitário, então T é uma bijeção tal que $\|Tu\| = \|u\|$. Em particular, existe T^{-1} e $\|T^{-1}u\| = \|u\|$. Logo T^{-1} é contínua.

Note que $I = T^{-1}T$. Como T é compacto, então pelo exercício 18 iii, concluímos que $T^{-1}T$ também é compacto. Logo a identidade I é compacta e, portanto, H tem dimensão finita.

Exercício 21. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^2(\Omega)$. Suponha que as funções u_j sejam constantes, ou seja, para cada $j \in \mathbb{N}$ suponha que exista $c_j \in \mathbb{N}$ tal que $u_j(x) = c_j$, para todo $x \in \Omega$. Mostre que se existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$, então u também é constante. (Dica: Comece mostrando que a sequência $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy).

Solução:

Seja $|\Omega| = \int_\Omega 1dx$. Observamos que

$$|c_j - c_k| = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |c_j - c_k|^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u_j(x) - u_k(x)|^2 dx}$$
$$= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\|u_j - u_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j, k > N$, então

$$\|u_j - u_k\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Assim, se $j, k > N$, então $|c_j - c_k| < \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{1/2}}$. Concluímos que $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Portanto, é uma sequência convergente. Seja $c = \lim_{j\to\infty} c_j$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dado por $u(x) = c$, para todo $x \in \Omega$. Logo

$$\|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |u_j(x) - u(x)|^2 dx} = \sqrt{\int_\Omega |c_j - c|^2 dx} = |c_j - c|^2|\Omega|^{1/2}.$$

Concluímos que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ e, portanto, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para uma função constante. (Lembramos que o limite é único).

Exercício 22. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo e $u \in H^1(\Omega)$ uma função tal que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. O objetivo do exercício é mostrar que u é uma função constante.

i. Mostre que se para todo $x \in \Omega$, existe um aberto $U \subset \Omega$ tal que $u|_U$ é constante, então u é constante em todo Ω. (Dica: use conexidade de Ω. Escolha $x_0 \in \Omega$ e mostre que $\{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$ é um aberto e fechado de Ω).

ii. Defina $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{u}(x) = u(x)$ para $x \in \Omega$ e $\tilde{u}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$. Considere a sequência $u_j = \chi_j(\rho_j * \tilde{u})$, em que ρ_j são os Mollifiers definidos em sala de aula e $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $0 \leq \chi_j \leq 1$ e $\chi_j(x) = 1$ em

$$K_j = \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq 1/j, \|x\| \leq j\}.$$

Mostre que se $U \subset \Omega$ é um aberto tal que $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ é compacto, então $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(x) = \rho_j * \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(x)$, para todo $x \in U$ e j suficientemente grande, em que $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$, para $x \in \Omega$ e $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$.

iii. Vimos em aula que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Use o item i. e o Exercício 22 para mostrar que u é constante. (Use o fato que conhecemos de cálculo: Se $u_j \in C^1(U)$, U aberto e conexo, e $\nabla u_j = 0$, então u_j é constante).

Solução:

i. Fixemos $x_0 \in \Omega$. Seja $\mathcal{C} = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$.

O conjunto $\mathcal{C}$ é aberto. De fato, se $y \in \mathcal{C}$, então $u(y) = u(x_0)$. Pela hipótese, existe um aberto U_y que contém y tal que $u|_{U_y}$ é constante. Assim, $u(x) = u(y) = u(x_0)$ para todo $x \in U_y$. Em particular, $U_y \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é aberto.

O conjunto $\mathcal{C}$ é fechado em Ω. De fato, seja $y \in \Omega$ para a qual existe uma sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}$ que converge para y. Sabemos que existe um aberto U_y que contém y tal que $u|_{U_y}$ é constante. Como

$\lim_{j\to\infty} y_j = y$, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $j > N$, então $y_j \in U_y$. Logo $u(y) = u(y_j)$ para $j > N$. Como $u(y_j) = u(x_0)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, concluímos que $u(y) = u(x_0)$. Assim, $y \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechado.

Como $\mathcal{C}$ é aberto, fechado e diferente de vazio, concluímos, pela conexidade de Ω, que $\mathcal{C} = \Omega$. Logo $u(x) = u(x_0)$ para todo $x \in \Omega$ e u é uma função constante.

ii. Seja $U \subset \overline{U} \subset \Omega$, com U aberto e $\overline{U}$ compacto. Logo $d(\overline{U}, \Omega^c) \geq 1/J$ e $\sup_{x\in U} \|x\| \leq J$ para $J \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Assim, $\chi_j(x) = 1$ para $x \in U$ e $j > J$. Se $x \in U$, temos, para $j > J$ que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_j}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\chi_j(x)\rho_j * \widetilde{u}(x)\right) \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_j * \widetilde{u}(x)\right) \overset{(2)}{=} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_k} * \widetilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_k}(x-y)\widetilde{u}(y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\rho_j(x-y)\right)\widetilde{u}(y)dy \overset{(3)}{=} -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\rho_j(x-y)\right)u(y)dy \\
&\overset{(4)}{=} \int_{\Omega} \rho_j(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_k}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x-y)\widetilde{\frac{\partial u}{\partial y_k}}(y)dy = \rho_j * \widetilde{\frac{\partial u}{\partial y_k}}(x).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos que $\chi_j(x) = 1$ para todo $x \in U$. Em (2) usamos um resultado provado em aula para convoluções de funções C_c^1 e L^2. Em (3) usamos que $\tilde{u}$ se anula fora de Ω. Em (4), usamos que $y \mapsto \rho_j(x-y)$ tem suporte compacto em Ω se $j > J$ (pois o suporte está contido em $B(x, \frac{1}{j}) \subset B(x, \frac{1}{J})$ que pertencerá a Ω).

iii. Observamos que para $x \in U$ e $j > J$, temos

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \rho_j * \widetilde{\frac{\partial u}{\partial y_k}}(x) = 0,$$

pois $\frac{\partial u}{\partial y_k} = 0$. Como $u_j \in C^\infty(\Omega)$ e $\nabla u = 0$, concluímos que u_j são constantes. Sabemos que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Em particular, $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(U)} = 0$. Logo $u|_U$ é limite em $L^2(U)$ de funções constantes. Pelo exercício 21, a função $u|_U$ é constante. Como U era arbitrário, concluímos, pelo item i, que u é uma função constante.

Exercício 23. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo de classe C^1 e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\nabla u = 0$. Use o exercício 23 para provar que $u = 0$.

Solução: Como $\nabla u = 0$, concluímos pelo exercício anterior que u é uma função constante. Em particular, $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Porém, $u \in H_0^1(\Omega)$. Por um teorema visto em sala de aula, $u(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$, pois Ω é de classe C^1. Logo a constante deve ser igual a zero, ou seja, $u = 0$.

Exercício 24. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função tal que $\int_\Omega \chi dx = 1$ e $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u dx = 0$. Sabemos que existe uma sequência de funções $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Defina

$$v_j(x) = u_j(x) - \left(\int_\Omega u_j(y)dy\right)\chi(x).$$

Mostre que $v_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega v_j(x)dx = 0$ e que $\lim_{j\to\infty} \|v_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Isto mostra que $\tilde{C}_c^\infty(\Omega) = \{u \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\}$ é denso em $\tilde{L}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\}$.

Solução:

Afirmação 1: $\int_\Omega v_j(x)dx = 0$.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_j(x)dx &= \int_\Omega \left(u_j(x) - \left(\int_\Omega u_j(y)dy\right)\chi(x)\right)dx \\
&= \int_\Omega u_j(x)dx - \int_\Omega u_j(y)dy \int_\Omega \chi(x)dx \\
&= \int_\Omega u_j(x)dx - \int_\Omega u_j(y)dy = 0.
\end{aligned}$$

Afirmação 2: $v_j \in C_c^\infty(\Omega)$.

Sabemos que u_j se anula fora de uma compacto $K_1 \subset \Omega$ e χ se anula fora de um compacto $K_2 \subset \Omega$. Logo v_j se anula fora do compacto $K_1 \cup K_2 \subset \Omega$. Logo tem suporte compacto. Como é soma de funções de classe C^∞, então também é de classe C^∞.

Afirmação 3: $\lim_{j\to\infty} \|v_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Basta observar que $v_j = u_j - (1, u_j)\chi$. Logo

$$0 \leq \|v_j - u\|_{L^2(\Omega)} = \|u_j - (1,u_j)\chi - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} + |(1,u_j)|\|\chi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Note que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ e que

$$\lim_{j\to\infty}(1,u_j) = (1, \lim_{j\to\infty} u_j) = (1,u) = \int_\Omega u dx = 0.$$

Logo, pelo teorema do confronto, $\lim_{j\to\infty} \|v_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Exercício 25. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^∞. Vimos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de funções em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e uma sequência de números positivos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ tais que $-\Delta e_j = \lambda_j e_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx \geq \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Mostre que a constante λ_1 é a maior constante para a qual a igualdade acima é válida. (É a melhor constante para a qual a desigualdade de Poincaré é válida!)

(Dica: Considere primeiramente $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Use integração por partes e lembre-se que $u = \sum_{j=1}^\infty (u, e_j)e_j$ e $-\Delta u = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j (u,e_j)e_j$).

Solução:

Sejam $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Logo $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega)$. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, concluímos pelo exercício 4 que

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} u dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx.$$

Somando em j, vemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega \Delta u u dx.$$

Por outro lado,

$$-\int_\Omega \Delta u u dx = (-\Delta u, u)_{L^2(\Omega)} = (\sum_{j=1}^\infty \lambda_j (u,e_j)_{L^2(\Omega)} e_j, \sum_{j=1}^\infty (u,e_j)_{L^2(\Omega)} e_j)_{L^2(\Omega)}$$

$$= \sum_{j=1}^\infty \lambda_j (u,e_j)^2_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^\infty (u,e_j)^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx.$$

Portanto,

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx \leq -\int_\Omega \Delta u u dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx,$$

para todo $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo existe uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Portanto, observando que $C_c^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_1 \|\lim_{j\to\infty} \varphi_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_1 \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \lambda_1 \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi_j^2 dx \leq \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_j dx = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^n (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k})_{L^2(\Omega)}$$

$$= \sum_{k=1}^n (\lim_{j\to\infty} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}, \lim_{j\to\infty} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k})_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_k})_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx.$$

Por fim, não existe $\lambda > \lambda_1$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx \geq \lambda \int_\Omega u^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Basta observar que

$$\int_\Omega \nabla e_1 \cdot \nabla e_1 dx = -\int_\Omega \Delta e_1 e_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega e_1 e_1 dx.$$

Exercício 26. i. Mostre que a função $a : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

ii. Dado $u \in H^1(0,1)$. Suponha que exista $f \in L^2(0,1)$ tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(0,1)}$, para todo $v \in H^1(0,1)$. Mostre que $u \in H^2(0,1)$, $u(x) - \frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)$ e $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0$. Conclua que o operador $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1)$ associado a função a tem domínio $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^2(0,1) : \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0\}$ e $Au = u(x) - \frac{d^2u}{dx^2}(x)$, para todo $u \in \mathcal{D}(A)$.

iii. Use um dos teoremas dado em sala de aula para provar que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de funções em $\mathcal{D}(A)$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $-\frac{d^2e_j}{dx^2}(x) = \lambda_j e_j(x)$. Mostre que $e_j \in C^\infty([0,1])$.

iv. Mostre que $\mathcal{B}$ e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dados por $\{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(j\pi x) : j \geq 1\}$ e $\lambda_j = (j\pi)^2$, para $j \geq 0$, satisfazem as propriedades do item iii. (Note que $\lambda_0 = 0$. O problema de Neumann tem autovalor zero).

Solução:

i. Basta observar que

$$a(u,v) = (u,v)_{H^1(0,1)}.$$

Assim, o resultado segue do fato de que o produto interno é bilinear, simétrico, contínuo (pois $(u,v)_{H^1(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}$) e coercivo (pois $(u,u)_{H^1(0,1)} = \|u\|^2_{H^1(0,1)}$).

ii.

Afirmação 1: Se existe $f \in L^2(0,1)$ tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(0,1)}$, para todo $v \in H^1(0,1)$, então $u \in H^2(0,1)$, $u'(0) = u'(1) = 0$ e $u - u'' = f$.

Sabemos que

$$\int_0^1 u'v'dx = -\int_0^1 (u-f)v, \quad \forall v \in H^1(0,1).$$

Em particular, a igualdade acima vale para todo $v \in C_c^\infty(]0,1[) \subset H^1(0,1)$. Logo $u' \in H^1(0,1)$ e $u'' = u - f$. Como $u' \in H^1(0,1)$, vemos que $u \in H^2(0,1)$.

Para a condição de contorno, observamos que se $v \in H^1(0,1)$, então

$$-\int_0^1 (u-f)v = \int_0^1 u'v'dx = -\int_0^1 u''vdx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Como $u'' = u - f$, concluímos que

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(0,1).$$

Escolhendo $v(x) = x$, temos que $u'(1) = 0$. Escolhendo $v(x) = 1 - x$, temos $u'(0) = 0$. Assim, $u \in H^2(0,1)$, $u - u'' = f$ e $u'(0) = u'(1) = 0$.

Afirmação 2: Se $u \in H^2(0,1)$ e $u'(0) = u'(1) = 0$, então $f := u - u'' \in L^2(0,1)$ é tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(0,1)}$, para todo $v \in H^1(0,1)$.

Seja $u \in H^2(0,1)$ tal que $u'(0) = u'(1) = 0$. Definimos $f := u - u''$. Logo, para todo $v \in H^1(0,1)$, temos

$$\int_0^1 u'v'dx = -\int_0^1 u''vdx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = -\int_0^1 u''vdx = -\int_0^1 (u-f)v.$$

Portanto, $a(u,v) = (f,v)_{L^2(0,1)}$, para todo $v \in H^1(0,1)$.

Juntando as duas afirmações, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) &:= \{u \in H^1(0,1) : \exists f \in L^2(0,1) \text{ tal que } a(u,v) = (f,v), \forall v \in H^1(0,1)\} \\ &= \{u \in H^2(0,1) : u'(0) = u'(1) = 0\}\end{aligned}$$

e $Au = u(x) - u''(x)$.

iii. Usando o teorema dado em sala, sabemos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(0,1)$, contida em $\mathcal{D}(A)$ tal que $Ae_j = \mu_j e_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$. Logo

$$e_j - e_j'' = \mu_j e_j \implies -e_j'' = (\mu_j - 1)e_j.$$

Agora basta definir $\lambda_j = \mu_j - 1$.

Por fim, observamos que, como $e_j \in H^2(0,1)$ e $e_j'' = (1-\mu_j)e_j \in H^2(0,1)$, então $e_j \in H^4(0,1)$. Repetindo o argumento, vemos que $e_j'' = (1-\mu_j)e_j \in H^4(0,1)$ e, portanto, $e_j \in H^6(0,1)$. Um simples argumento de indução nos mostra que $e_j \in H^{2k}(0,1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $e_j \in C^{2k-1}([0,1])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $e_j \in C^\infty([0,1])$.

iv. Provamos em aula que $\mathcal{B} = \{1\} \cup \left\{\sqrt{2}\cos(j\pi x) : j \geq 1\right\}$ é base de Hilbert de $L^2(0,1)$. Além disso,

$$-1'' = 0 = 0 \times 1$$
$$-(\sqrt{2}\cos(j\pi x))'' = (j\pi)^2\sqrt{2}\cos(j\pi x).$$

Exercício 27. Repita o exercício 27 com $a : H^1_{per}(-1,1) \times H^1_{per}(-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)dx + \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx,$$

em que $H^1_{per}(-1,1) = \{u \in H^1(-1,1) : u(-1) = u(1)\}$. Conclua que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de funções em $C^\infty([-1,1])$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $-\frac{d^2e_j}{dx^2}(x) = \lambda_j e_j(x)$, $e_j(-1) = e_j(1)$ e $\frac{de_j}{dx}(-1) = \frac{de_j}{dx}(1)$. Ache as funções e_j.

Solução:

Afirmação 1: A função $a : H^1_{per}(-1,1) \times H^1_{per}(-1,1) \to \mathbb{R}$ é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

Basta observar que

$$a(u,v) = (u,v)_{H^1_{per}(-1,1)}.$$

Assim, o resultado segue do fato de que o produto interno é bilinear, simétrico, contínuo (pois $(u,v)_{H^1_{per}(-1,1)} \leq \|u\|_{H^1_{per}(-1,1)}\|v\|_{H^1_{per}(-1,1)}$) e coercivo (pois $(u,u)_{H^1_{per}(-1,1)} = \|u\|^2_{H^1_{per}(-1,1)}$).

Afirmação 2: Se existe $f \in L^2(-1,1)$ tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(-1,1)}$, para todo $v \in H^1_{per}(-1,1)$, então $u \in H^2(-1,1)$, $u(-1) = u(1)$, $u'(-1) = u'(1)$ e $u - u'' = f$.

Sabemos que

$$\int_{-1}^{1} u'v'dx = -\int_{-1}^{1}(u-f)v, \quad \forall v \in H^1_{per}(-1,1).$$

Em particular, a igualdade acima vale para todo $v \in C_c^\infty(]-1,1[) \subset H^1_{per}(-1,1)$. Logo $u' \in H^1(-1,1)$ e $u'' = u - f$. Como $u' \in H^1_{per}(-1,1)$, concluímos que $u \in H^2(-1,1)$.

Para a condição de contorno, observamos que se $v \in H^1_{per}(-1,1)$, então

$$-\int_{-1}^{1}(u-f)v = \int_{-1}^{1} u'v'dx = -\int_{-1}^{1} u''vdx + u'(1)v(1) - u'(-1)v(-1).$$

Como $u'' = u - f$, concluímos que

$$u'(1)v(1) - u'(-1)v(-1) = 0, \quad \forall v \in H^1_{per}(-1,1).$$

Escolhendo $v(x) = 1$, temos que $u'(1) = u'(-1)$. Como $u \in H^1_{per}(-1,1)$, vemos que $u(-1) = u(1)$.

Afirmação 3: Se $u \in H^2(-1,1)$, $u(-1) = u(1)$ e $u'(-1) = u'(1)$, então $f := u - u'' \in L^2(-1,1)$ é tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(-1,1)}$, para todo $v \in H^1_{per}(-1,1)$.

Seja $u \in H^2(-1,1)$ tal que $u(-1) = u(1)$ e $u'(-1) = u'(1)$. Definimos $f := u - u''$. Logo, para todo $v \in H^1_{per}(-1,1)$, temos

$$\int_{-1}^{1} u'v'dx = -\int_{-1}^{1} u''vdx + u'(1)v(1) - u'(-1)v(-1) = -\int_{-1}^{1} u''vdx = -\int_{-1}^{1}(u-f)v.$$

Portanto, $a(u,v) = (f,v)_{L^2(-1,1)}$, para todo $v \in H^1_{per}(-1,1)$.

Afirmação 4: Existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(-1,1)$ contida em $\{u \in C^\infty([-1,1]) : u(-1) = u(1)\, e\, u'(-1) = u'(1)\}$ tal que $-e_j'' = \lambda_j e_j$.

Juntando as afirmações acima, concluímos que o operador A associado a a é tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) &:= \{u \in H^1_{per}(-1,1) : \exists f \in L^2(-1,1) \text{ tal que } a(u,v) = (f,v), \forall v \in H^1_{per}(-1,1)\} \\ &= \{u \in H^2(-1,1) : u(-1) = u(1),\, u'(-1) = u'(1)\}\end{aligned}$$

e $Au = f = u - u''$.

Usando o teorema dado em sala de aula, sabemos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(-1,1)$, contida em $\mathcal{D}(A)$ tal que $Ae_j = \mu_j e_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$. Logo

$$e_j - e_j'' = \mu_j e_j \implies -e_j'' = (\mu_j - 1)e_j.$$

Agora basta definir $\lambda_j = \mu_j - 1$.

Por fim, observamos que, como $e_j \in H^2(-1,1)$ e $e_j'' = (1-\mu_j)e_j \in H^2(-1,1)$, então $e_j \in H^4(-1,1)$. Repetindo o argumento, vemos que $e_j'' = (1-\mu_j)e_j \in H^4(-1,1)$ e, portanto, $e_j \in H^6(-1,1)$. Um simples argumento de indução nos mostra que $e_j \in H^{2k}(-1,1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $e_j \in C^{2k-1}([-1,1])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $e_j \in C^\infty([-1,1])$.

Provamos em aula que $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\} \cup \{\text{sen}(j\pi x) : j \geq 1\} \cup \{\cos(j\pi x) : j \geq 1\}$ é base de Hilbert de $L^2(-1,1)$. Além disso,

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)'' &= 0 = 0 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ -(\cos(j\pi x))'' &= (j\pi)^2 \cos(j\pi x). \\ -(\text{sen}(j\pi x))'' &= (j\pi)^2 \text{sen}(j\pi x).\end{aligned}$$

Exercício 28. Considere o problema abaixo com $u_0 \in L^2(0,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0, x \in [0,1], \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \quad t > 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in]0,1[.\end{aligned}$$

i. Mostre que a única solução $u \in C([0,\infty[; L^2(0,1)) \cap C^\infty(]0,\infty[\times[0,1])$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 |u(t,x)|^2 dx = 0.$$

(A temperatura de uma barra com temperatura zero nas extremidades converge para zero.)

ii. Prove que o mesmo resultado vale para abertos limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^∞.

iii. Mostre que se, ao invés das condições de Dirichlet $u(t,0) = u(t,1)$, tivermos as condições de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$, então

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 |u(t,x) - \int_0^1 u_0(y)dy|^2 dx = 0.$$

(A temperatura de uma barra sem fluxo de calor nas extremidades converge para a média da temperatura inicial.)

Dica para os dois itens acima: Lembre-se que $u(t) = \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)e_j$.

Solução: Para os itens i. e ii., basta lembrar que a equação pode ser associada ao problema abstrato

$$u'(t) + Au(t) = 0,$$
$$u(0) = u_0,$$

em que $A = -\Delta$ e $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Como o operador A está associado a forma bilinear, contínua e coerciva $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

então os autovalores λ_j são todos positivos. Assim, basta observar que

$$\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx = \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)e_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^\infty e^{-2\lambda_j t}(u_0,e_j)^2$$
$$\leq e^{-2\lambda_1 t}\sum_{j=1}^\infty (u_0,e_j)^2 = e^{-2\lambda_1 t}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando o limite $t \to \infty$, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx = 0.$$

Para o item iii., observamos a equação pode ser associada ao problema abstrato

$$u'(t) + Au(t) = 0,$$
$$u(0) = u_0,$$

em que $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ e $\mathcal{D}(A) = \left\{H^2(0,1) : \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0\right\}$. Pelo exercício 26, temos que $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ definido como $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_j = \sqrt{2}\cos((j-1)\pi x)$, $j \geq 2$, é uma base de $L^2(0,1)$ contida em $\mathcal{D}(A)$. Os autovalores de e_j são dados por $\lambda_j = ((j-1)\pi)^2$, para $j \geq 1$. Em particular, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_j > 0$ para $j \geq 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |u(t,x) - \int_0^1 u_0(y)dy|^2 dx \\
&= \|u(t) - \int_0^1 u_0(y)dy\|^2_{L^2(0,1)} = \|\sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)e_j - (u_0,e_1)e_1\|^2_{L^2(0,1)} \\
&= \|\sum_{j=2}^\infty e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)e_j\|^2_{L^2(0,1)} = \sum_{j=2}^\infty e^{-2\lambda_j t}(u_0,e_j)^2 \leq e^{-2\lambda_2 t}\sum_{j=2}^\infty (u_0,e_j)^2 \\
&= e^{-2\lambda_2 t}\|u_0\|^2.
\end{aligned}$$

Tomando o limite, concluímos que $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 |u(t,x) - \int_0^1 u_0(y)dy|^2 dx = 0$.

Exercício 29. Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ espaços de Hilbert. Suponha que H seja separável com dimensão infinita, $V \subset H$ seja denso em H e a inclusão $i : V \to H$ seja compacta.

Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função bilinear, simétrica, contínua e coerciva e $A : \mathcal{D}(A) \to H$ o operador associado a função a. Sabemos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de H e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números estritamente positivos, $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = \infty$, tais que $e_j \in \mathcal{D}(A)$ e $Ae_j = \lambda_j e_j$. O espaço $\mathcal{D}(A)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u,v)_{\mathcal{D}(A)} = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 (u,e_j)_H (v,e_j)_H.$$

i. Mostre que se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, então a função $u(t) = \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_H e_j$ satisfaz

$$\lim_{j\to 0} \|u(t) - u_0\|_{\mathcal{D}(A)} = 0.$$

ii. Prove que, se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, então $u'(t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)e_j$ está bem definido para $t = 0$ e

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{u(h)-u(0)}{h} - u'(0)\|_H = 0.$$

iii. Conclua que $u \in C([0,\infty[,\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty[,H)$. (Dica: Já vimos que $u \in C^\infty(]0,\infty[,\mathcal{D}(A^m))$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, o problema se reduz ao que ocorre em zero).

Solução:

i. Basta observar que

$$\|u(h)-u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} = \|\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j h}-1)(u_0,e_j)_H e_j\|^2_{\mathcal{D}(A)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |e^{-\lambda_j h}-1|^2 (u_0,e_j)_H^2 \le |e^{-\lambda_1 h}-1|^2 \|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} \to 0, \quad h \to 0.$$

ii. Observamos que

$$u'(0) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u_0,e_j)_H e_j = -Au(0).$$

Portanto, está bem definido. Além disso,

$$\|\frac{u(h)-u(0)}{h} - u'(0)\|^2_H = \|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda_j h}-1}{h} + \lambda_j\right)(u_0,e_j)_H e_j\|^2_H$$

$$\overset{(1)}{=} \|\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1 (1-e^{-\lambda_j \theta h})d\theta \lambda_j (u_0,e_j)_H e_j\|^2_H$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |1-e^{-\lambda_j h}|^2 \lambda_j^2 (u_0,e_j)_H^2 \le \|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)}|1-e^{-\lambda_1 h}| \to 0, \quad h \to 0.$$

Em (1), usamos

$$\frac{e^{-\lambda_j h}-1}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(e^{-\lambda_j \theta h})d\theta = -\lambda_j \int_0^1 e^{-\lambda_j \theta h} d\theta$$

e $\lambda_j = \int_0^1 1 d\theta \lambda_j$.

iii. Sabemos que $u \in C(]0,\infty), \mathcal{D}(A)) \cap C^1(]0,\infty), H)$. No item i, vimos que $u \in C([0,\infty[,\mathcal{D}(A))$. No item ii, provamos que $u'(0) \in C([0,\infty[,H)$ existe. Agora basta provar a continuidade de u' em 0. Isto segue de

$$\|u'(h)-u'(0)\|^2_H = \|-\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j h}-1)\lambda_j(u_0,e_j)_H e_j\|^2_H$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |e^{-\lambda_j h}-1|^2 (u_0,e_j)_H^2 \le |e^{-\lambda_1 h}-1|^2 \|u_0\|^2_{\mathcal{D}(A)} \to 0, \quad h \to 0.$$

Exercício 30. Sejam $(H,(.,.)_H)$ e $(V,(.,.)_V)$ espaços de Hilbert tais que $V \subset H$ é denso em H. Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função bilinear, simétrica e coerciva.

i. Mostre que se $\dim(H) < \infty$, então $V = H$, a inclusão $i : V \to H$ é compacta e $a : V \times V \to \mathbb{R}$ é contínua.

ii. Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ o operador associado a função a. Mostre que $\mathcal{D}(A) = H$ e que A é um operador autoadjunto positivo. Conclua, usando resultados de álgebra linear, que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \{1,...,N\}\}$ ortonormal de H tal que $Ae_j = \lambda_j e_j$ para todo $j \in \{1,...,N\}$.

Solução:

i.

Afirmação 1: $V = H$.

Como $V \subset H$ e $\dim(H) < \infty$, então V também tem dimensão finita e $H = V \oplus V^\perp$ (resultado de álgebra linear, afinal estamos em dimensão finita). Seja $u \in V^\perp$. Como V é denso em H, existe uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em V tal que $\lim_{j\to\infty} \|v_j - u\|_H = 0$. Desta forma, temos

$$\|u\|_H^2 = (u,u)_H = (u, \lim_{j\to\infty} v_j)_H = \lim_{j\to\infty}(u, v_j)_H = 0,$$

pois $u \perp v_j$. Logo $u = 0$ e $V^\perp = \{0\}$, ou seja, $V = H$.

Afirmação 2: $i : V \to H$ é compacto.

Seja $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \{1, ..., N\}\}$ uma base ortonormal de V. Assim, se $u \in V$, então

$$\begin{aligned}
\|u\|_H &= \|\sum_{l=1}^N (u, v_l)_V v_l\|_H \le \sum_{l=1}^N |(u,v_l)_V| \|v_l\|_H \le \max_{l\in\{1,\dots,N\}} \|v_l\|_H \sum_{l=1}^N |(u,v_l)_V| \\
&\le N \max_{l\in\{1,\dots,N\}} \|v_l\|_H \max_{l\in\{1,\dots,N\}} |(u,v_l)_V| \le N \max_{l\in\{1,\dots,N\}} \|v_l\|_H \sqrt{\sum_{l=1}^N |(u,v_l)_V|^2} \\
&= N \max_{l\in\{1,\dots,N\}} \|v_l\|_H \|u\|_V.
\end{aligned}$$

Logo a função $i : V \to H$ é contínua.

Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em V. Logo $u_j = \sum_{l=1}^N (u_j, v_l)_V v_l$ e $|(u_j, v_l)_V| \le \|u_j\|_V \|v_l\|_V = \|u_j\|_V$. Assim, $(((u_j, v_1), ..., (u_j, v_N)))_{j\in\mathbb{N}}$ é limitado em $\mathbb{R}^N$. Portanto, existe uma subsequência $(((u_{j_k}, v_1), ..., (u_{j_k}, v_N)))_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Seja

$$(\alpha_1, ..., \alpha_N) = \lim_{k\to\infty} ((u_{j_k}, v_1), ..., (u_{j_k}, v_N)).$$

Logo $u = \sum_{l=1}^N \alpha_l v_l$ é tal que

$$\|u - u_{j_k}\|_H = \|\sum_{l=1}^N (\alpha_l - (u_{j_k}, v_l)_V)\, v_l\|_H \le \sum_{l=1}^N |\alpha_l - (u_{j_k}, v_l)_V|\, \|v_l\|_H.$$

Assim, a subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge em H e, portanto, a inclusão $i : V \to H$ é compacta.

Afirmação 3: A função $a : V \times V \to H$ é contínua.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |a(\sum_{j=1}^N (u,v_j)_V v_j, \sum_{k=1}^N (v,v_k)_V v_k)| = |\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (u,v_j)_V (v,v_k)_V a(v_j,v_k)| \\
&\le N^2 \max_{i,j} |a(v_j,v_k)| \max_j |(u,v_j)_V| \max_k |(v,v_k)_V| \\
&\le N^2 \max_{i,j} |a(v_j,v_k)| \sqrt{\sum_{j=1}^N |(u,v_j)_V|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N |(v,v_k)_V|^2} \\
&\le N^2 \max_{i,j} |a(v_j,v_k)| \|u\|_V \|v\|_V.
\end{aligned}$$

ii. Como $V = H$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é bilinear e $\dim(H) < \infty$, então existe uma transformação linear $A : H \to H$ tal que $a(u,v) = (Au, v)_H$ (resultado de álgebra linear para espaços de dimensão finita). Assim, é claro que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A) &= \{u \in V : \exists f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \forall v \in V\} \\
&= \{u \in H : \exists f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \forall v \in H\} = H
\end{aligned}$$

Por fim,

$$(Au, v)_H = a(u,v) = a(v,u) = (Av, u)_H = (u, Av)_H$$

e

$$(Au, u)_H = a(u,u) \ge C\|u\|_V^2 > 0.$$

Logo A é autoadjunto e positivo. A existência de uma base ortonormal formada apenas de autovetores segue do teorema espectral para operadores autoadjuntos em dimensão finita.

Exercício 31. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^∞. Considere o seguinte problema

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)+c(x)u(x)=\lambda u(x),$$

em que a_{ij} e c são funções de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Suponha que exista $a>0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a\|\xi\|^2$. Mostre que se $c(x)\geq 0$ para todo $x\in\Omega$ e $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ é uma solução não nula do problema acima, então $\lambda>0$.

Solução:

Afirmação 1: Se $u\in H^1(\Omega)$ e $a\in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $au\in H^1(\Omega)$.

Observamos que a e $\frac{\partial a}{\partial x_j}$ são limitadas em Ω, pois a e suas derivadas têm extensões contínuas no compacto $\overline{\Omega}$. Assim, au e $\frac{\partial u}{\partial x_j}a+u\frac{\partial a}{\partial x_j}$ são funções em $L^2(\Omega)$. Por fim, se $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega au\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx &= \int_\Omega u\frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_j}dx-\int_\Omega u\frac{\partial a}{\partial x_j}\varphi dx\\ &\overset{(1)}{=} -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}a\varphi dx-\int_\Omega u\frac{\partial a}{\partial x_j}\varphi dx\\ &= -\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}a+u\frac{\partial a}{\partial x_j}\right)\varphi dx.\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição de derivada fraca e o fato de que $a\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$. Assim, concluímos que au tem derivada fraca e

$$\frac{\partial(au)}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}a+u\frac{\partial a}{\partial x_j}\right).$$

Logo $au\in H^1(\Omega)$.

Afirmação 2: $\lambda>0$.

Observamos que

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega u^2dx &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)udx+\int_\Omega cu^2dx\\ &\overset{(1)}{=}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\int_\Omega cu^2dx\\ &\overset{(2)}{\geq} a\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\overset{(3)}{\geq}\frac{a}{C}\int_\Omega u^2dx.\end{aligned}$$

Em (1), usamos que $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H^1(\Omega)$, pela afirmação 1, que $u\in H_0^1(\Omega)$, por hipótese, e o resultado do exercício 4. Em (2) usamos $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq a\|\xi\|^2$ e $c(x)\geq 0$. Em (3), usamos $\int_\Omega u^2dx\leq C\int_\Omega|\nabla u|^2dx$, pela desigualdade de Poincaré.

Portanto, $\lambda\geq\frac{a}{C}>0$.

Exercício 32. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B}=\{e_j : j\in\mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números estritamente positivos tais que $\lim_{j\to\infty}\lambda_j=\infty$. Seja $A:\mathcal{D}(A)\to H$ o operador definido como

$$\mathcal{D}(A)=\left\{u\in H:\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(u,e_j)^2<\infty\right\},$$

$$Au=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u,e_j)e_j.$$

Vamos definir o espaço de Hilbert $V = \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2 < \infty \right\}$ com produto interno

$$(u, v)_V = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)(v, e_j).$$

i. Mostre que $V \subset H$ é denso e que a inclusão $i : V \to H$ é contínua. (Pode-se provar que ela é compacta também. Fica o desafio para os interessados).

ii. Mostre que $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = (u, v)_V$$

é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

iii. Seja $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ o operador associado a a, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\tilde{A}) &= \{u \in V : \exists f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H, \forall v \in V\}, \\ \tilde{A}u &= f. \end{aligned}$$

Mostre que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\tilde{A})$ e $A = \tilde{A}$.

Solução:

i. Como $\mathcal{B} \subset V \subset H$ e $\mathcal{B}$ é denso em H, então V é denso em H.

Vamos agora ordenar λ_j de tal forma que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$$

Assim, $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \geq 1$. Para mostrar que a inclusão é contínua, basta observar que, se $u \in V$, então

$$\|u\|_H = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j)_H^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_1} (u, e_j)_H^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)_H^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\|_V.$$

ii. A função $a(u, v) = (u, v)_V$ é bilinear e simétrica, pois é um produto interno. É contínua, pois

$$|a(u, v)| = |(u, v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V.$$

É coerciva, pois $|a(u, u)| = \|u\|_V^2$.

iii.

Afirmação 1: $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(A)$.

Se $a(u, v) = (f, v)_H$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)_H (v, e_j)_H = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)_H (v, e_j)_H$$

para todo $v \in V$. Colocando $v = e_k$ na expressão acima, vemos que $\lambda_k (u, e_k)_H = (f, e_k)_H$. Logo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u, e_k)_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)_H^2 = \|f\|_H^2 < \infty$$

e

$$\tilde{A}u = f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)_H e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, e_k)_H e_k = Au.$$

Afirmação 2: $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\tilde{A})$.

Por outro lado, se $u \in H$ é tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u, e_k)_H^2 < \infty$, então $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, e_k)_H^2 < \infty$ e $u \in V$, pois $\lambda_k \leq \lambda_k^2$ quando $\lambda_k \geq 1$ e $\lambda_k \to \infty$. Além disso, $f := Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, e_k)_H e_k$ está bem definido e

$$a(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)_H (v, e_j)_H = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)_H (v, e_j)_H = (f, v)_H.$$

Em particular, $\tilde{A}u = Au$ novamente.

Exercício 33. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números tais que $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$ e $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq ...$ (Note que $\lambda_1 = 0$). Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador definido como

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)^2 < \infty \right\},$$
$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j.$$

Considere a seguinte equação

$$u''(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$u(0) = u_0,$$
$$u'(0) = u_1,$$

em que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2 < \infty \right\}$.

i) Mostre que existe no máximo uma função $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e u é solução do problema acima. Para tanto, mostre que, se existir solução, então a solução é da forma

$$u(t) = (u_0, e_1)e_1 + (u_1, e_1)t + \sum_{j=2}^{\infty} \left[(u_0, e_j) \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j) \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j.$$

Observação: Repetindo o argumento feito em sala de aula, pode-se provar que a expressão acima de fato é solução.

ii) Usando os resultados do exercício 26, ache uma expressão para a solução do problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0,1],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1].$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad x \in [0,1].$$

Solução:

i. Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e u seja solução da equação. Assim, $(u(t), e_j) \in C^2(\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(u(t), e_j)_H &= (u''(t), e_j)_H = -(Au(t), e_j)_H = -(Au(t), A^{-1}Ae_j)_H \\ &= -(A^{-1}Au(t), Ae_j)_H = -(u(t), Ae_j)_H = -\lambda_j (u(t), e_j)_H. \end{aligned}$$

Se $j = 1$, então $\lambda_1 = 0$. Logo $\frac{d^2}{dt^2}(u(t), e_1)_H = 0$, $(u(0), e_1)_H = (u_0, e_1)_H$ e $(u'(0), e_1)_H = (u_1, e_1)_H$. Portanto,

$$(u(t), e_1)_H = (u_0, e_1)_H + (u_1, e_1)_H t.$$

Se $j > 1$, então $\lambda_j > 0$. Logo $\frac{d^2}{dt^2}(u(t), e_j)_H = -\lambda_j (u(t), e_j)_H$, $(u(0), e_j)_H = (u_0, e_j)_H$ e $(u'(0), e_j)_H = (u_1, e_j)_H$. Portanto,

$$(u(t), e_j)_H = (u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{(u_1, e_j)_H}{\sqrt{\lambda_j}} \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j} t).$$

Concluímos que se u é solução, então

$$
\begin{aligned}
u(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(u(t), e_j)e_j &= (u_0, e_1)_H + (u_1, e_1)_H t \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty}\left((u_0, e_j)_H \cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \frac{(u_1, e_j)_H}{\sqrt{\lambda_j}}\text{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)\right)e_j.
\end{aligned}
$$

ii. Basta substituir os valores para encontrar

$$
\begin{aligned}
u(t) &= (u_0, e_1) + (u_1, e_1)t + \sum_{j=2}^{\infty}\left[(u_0, e_j)\cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(u_1, e_j)\text{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)\right]e_j \\
&= \int_0^1 u_0(y)dy + \left(\int_0^1 u_1(y)dy\right)t + 2\sum_{j=2}^{\infty}\left(\int_0^1 u_0(y)\cos(j\pi y)dy\right)\cos(j\pi t)\cos(j\pi x) \\
&+ 2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j\pi}\left(\int_0^1 u_1(y)\cos(j\pi y)dy\right)\text{sen}(j\pi t)\cos(j\pi x).
\end{aligned}
$$

Exercício 34. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números estritamente positivos tais que $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = \infty$. Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador definido como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(A) &= \left\{u \in H : \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(u, e_j)^2 < \infty\right\}, \\
Au &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u, e_j)e_j.
\end{aligned}
$$

Considere a seguinte equação

$$
\begin{aligned}
u''(t) + Au(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\
u(0) &= 0, \\
u'(0) &= u_1,
\end{aligned}
$$

em que $u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \left\{u \in H : \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u, e_j)^2 < \infty\right\}$.

i) Mostre que existe no máximo uma função $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e u é solução do problema acima. Para tanto, mostre que, se existir solução, então a solução é da forma

$$
u(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(u_1, e_j)\text{sen}(\sqrt{\lambda_j}t)\right]e_j.
$$

ii) Mostre que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e calcule $Au(t)$.

iii) Defina $v(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(u_1, e_j)\cos(\sqrt{\lambda_j}t)e_j$. Mostre que

$$
\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t)\right\|_H = 0
$$

e conclua que $u'(t) = v(t)$.

Solução:

i. Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e u seja solução da equação. Assim, $(u(t), e_j) \in C^2(\mathbb{R})$ e

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}(u(t), e_j)_H &= (u''(t), e_j)_H = -(Au(t), e_j)_H = -(Au(t), A^{-1}Ae_j)_H \\
&= -(A^{-1}Au(t), Ae_j)_H = -(u(t), Ae_j)_H = -\lambda_j(u(t), e_j)_H.
\end{aligned}
$$

Logo $\frac{d^2}{dt^2}(u(t), e_j)_H = -\lambda_j (u(t), e_j)_H$, $(u(0), e_j)_H = 0$ e $(u'(0), e_j)_H = (u_1, e_j)_H$. Portanto,

$$(u(t), e_j)_H = \frac{(u_1, e_j)_H}{\sqrt{\lambda_j}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t).$$

Concluímos que se u é solução, então u tem que ser da forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (u(t), e_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(u_1, e_j)_H}{\sqrt{\lambda_j}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) e_j.$$

ii. Basta observar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \frac{(u_1, e_j)_H^2}{\lambda_j} \operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_j} t) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u_1, e_j)_H^2 = \|u_1\|_{\mathcal{D}(A^{1/2})} < \infty.$$

Logo $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ e

$$Au(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} (u_1, e_j)_H \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) e_j.$$

iii. Para tanto, observamos que

$$\begin{aligned}
&\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \|_H^2 \\
&= \| \sum_{j=1}^{\infty} (u_0, e_j) \left(\frac{\lambda_j^{-1/2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \lambda_j^{-1/2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t)}{h} - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right) e_j \|_H^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 \left(\frac{\lambda_j^{-1/2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \lambda_j^{-1/2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t)}{h} - \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 \left(\int_0^1 (\cos(\sqrt{\lambda_j} t + \theta \sqrt{\lambda_j} h) - \cos(\sqrt{\lambda_j} t)) d\theta \right)^2.
\end{aligned}$$

Acima usamos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j}(t+h)) - \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} t + \theta \sqrt{\lambda_j} h) \right) d\theta \\
&= \sqrt{\lambda_j} h \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_j} t + \theta \sqrt{\lambda_j} h) d\theta.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 = \|u_0\|_H^2 < \infty$. Logo $\lim_{N \to \infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N > 0$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} (u_0, e_j)^2 < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\left(\int_0^1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2\\
&=\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\left(\int_0^1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2\\
&\quad+\sum_{j=N+1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\left(\int_0^1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2\\
&\le\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\left(\int_0^1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2+4\sum_{j=N+1}^{\infty}(u_0,e_j)^2\\
&\le\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\left(\int_0^1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2+\frac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}$$

Pela continuidade do cosseno, existe $\delta>0$ tal que se $|h|<\delta$, temos

$$\sum_{j=1}^{N}(u_0,e_j)^2\left(\int_0^1(\cos(\sqrt{\lambda_j}t+\theta\sqrt{\lambda_j}h)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t))d\theta\right)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Concluímos que

$$\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-v(t)\|_H^2<\varepsilon^2,\quad \forall|h|<\delta.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-v(t)\|_H=0.$$