Quantização do Campo eletromagnético

Começando pela eq. de Maxwell:

No espaço livre de cargas ou correntes

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \; ; \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \; ; & \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \; ; & \nabla\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \partial E/\partial t \\ & \mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \end{array}}$$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) \rightsquigarrow$ Eq. de onda p/ $\vec{B}$ e $\vec{E}$

$\rightsquigarrow$ É conveniente expressar em termos dos potenciais $\phi(\vec{r},t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{array}\right\}$$

← potenciais são ⊕ importantes na Mec. quântica!

⇒ Porém $\vec{A}$ e ϕ não são únicos $\rightsquigarrow$ Invariância de calibre ("gauge invariance")

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{array}\right.$$

↳ Gauge de Coulomb: $\{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \; , \; \phi = 0\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{array}\right.$$

$\nabla\times\nabla\times\vec{E} \rightsquigarrow$ Eq onda p/ $\vec{E}$

↳ Reescrevendo eq. de Maxwell p/ $\vec{A}$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \; ; \qquad \boxed{\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}}$$

$$\nabla\cdot(-\partial\vec{A}/\partial t) = 0 \; ;$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}}$$

Eq. onda

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Fazendo a escolha ("ansatz")

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m A_m \cdot [a_m(t)\vec{u}_m(\vec{r}) + a_m^*(t)\vec{u}_m^*(\vec{r})]$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m\epsilon_0}} \cdot [a_m(t)\vec{u}_m(\vec{r}) + a_m^\dagger(t)\vec{u}_m^*(\vec{r})]$$

Subst. na eq. de onda

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla^2\vec{u}_m(\vec{r}) + \frac{\omega_m^2}{c^2}\vec{u}_m(\vec{r}) = 0 \\ \frac{\partial^2 a_m(t)}{\partial t^2} + \omega_m^2 a_m = 0 \end{array}\right\}$$

Como solução ao funções:

$$\begin{cases} a_m(t) = a_m\, e^{-i\omega_m t} \\ a_m^*(t) = a_m^\dagger(t) = a_m^\dagger\, e^{i\omega_m t} \end{cases}$$

$$\vec{u}_m(\vec{r}) = \hat{e}_m \cdot e^{i\vec{k}_m\cdot\vec{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}}$$ volume do modo

$$V = \frac{1}{L^3}$$

polarização do modo

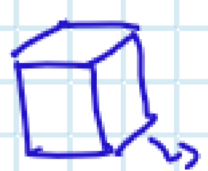
$$\int_V u_m^*(\vec{r})\, u_n(\vec{r})\, d\vec{r}^3 = \delta_{mn}$$

$$\boxed{k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} = \frac{\omega_m}{c}} \rightsquigarrow \quad \omega_m = c\,|\vec{k}_m| \qquad \lambda\cdot\nu = v$$

$\rightsquigarrow$ $\hat{e}_m$: polarização do modo m $\Rightarrow$ $\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n = \delta_{mn}$

↳ deve obedecer $\hat{e}_m \cdot \boxed{\hat{k}_m} = 0$

P/ cada freq. ω_m $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{2 polarizações ortogonais no plano } \hat{e}_m\cdot\hat{k}_m = 0 \\ \text{2 modos p/ cada } \omega_m \end{cases}$



L

$$\vec{A}(\vec{r}+L\hat{x}) = \vec{A}(\vec{r}+L\hat{y}) = \vec{A}(\vec{r}+L\hat{z}) = A(\vec{r})$$

$$\hookrightarrow \vec{k}_m = \frac{2\pi}{L}(m_x\hat{x},\, m_y\hat{y},\, m_z\hat{z}) \;; \qquad m_i = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$$

$$i = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$$

$$\omega_m = c\,|\vec{k}_m|$$

A forma final de $\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m \epsilon_0 V}} \cdot \hat{e}_m \left\{ a_m\, e^{i[\vec{k}_m\cdot\vec{r} - \omega_m t]} + a_m^\dagger\, e^{-i[\vec{k}_m\cdot\vec{r} - \omega_m t]} \right\}$$

alternativamente

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m \left(\frac{\hbar}{2\omega_m \epsilon_0}\right)^{1/2} \left\{ a_m\, \vec{u}_m(\vec{r})\, e^{-i\omega_m t} + \underbrace{a_m^\dagger\, \vec{u}_m^*(\vec{r})\, e^{i\omega_m t}}_{c.c} \right\}$$

$\vec{u}_m(\vec{r}) \equiv$ depende das condições de contorno $\Rightarrow$ $\begin{cases} \rightsquigarrow \text{senoidal (cavidades)} \\ \rightsquigarrow \text{exponencial (espaço livre)} \\ \quad \text{(ondas planas)} \end{cases}$

Finalmente

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m \left(\frac{\hbar}{2\omega_m\epsilon_0}\right)^{1/2} \left\{ a_m \vec{u}_m(\vec{r})\, e^{-i\omega_m t} + a_m^{+} \vec{u}_m^{*}(\vec{r})\, e^{i\omega_m t} \right\}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i \sum_m \left(\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0 V}\right)^{1/2} \hat{e}_m \left\{ a_m e^{-i(\vec{k}_m\cdot\vec{r}-\omega_m t)} - a_m^{+} e^{i(\vec{k}_m\cdot\vec{r}-\omega_m t)} \right\}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\, \hat{k}_m \times \vec{E} = -\frac{i}{c} \sum \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0 V}}\, \hat{e}_m \times \vec{k}_m \left\{ a_m e^{i(\vec{k}_m\cdot\vec{r}-\omega_m t)} - a_m^{+} e^{i(\vec{k}_m\cdot\vec{r}-\omega_m t)} \right\}$$

$$\mathcal{H} = U_{EM} = \frac{1}{2} \int \underbrace{\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2}_{\text{dens. energia do campo}}\, \underbrace{d^3\vec{r}}_{dV \text{ (volume)}}$$

$\vec{E}^* \cdot \vec{E}$

$$= \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \vec{A}^2}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{A})^2\, d^3\vec{r}$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_m \hbar\omega_m \left(a_m a_m^{+} + a_m^{+} a_m \right)} = \sum_m \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_m = \hbar\omega_m \left(a_m^{+} a + a_m a_m^{+} \right)$$

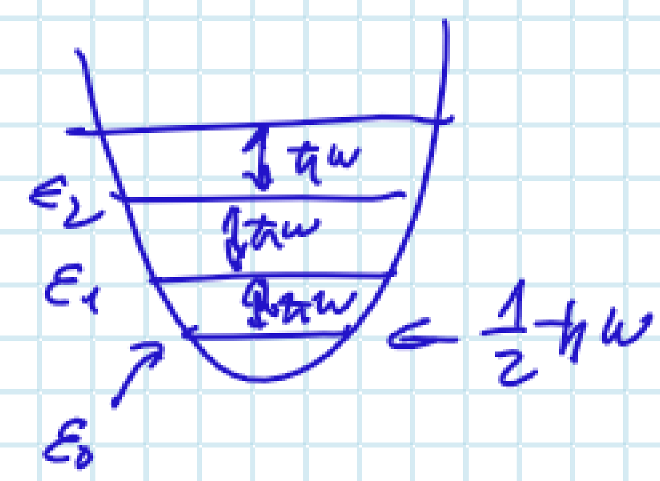
Quantização do Campo

Faz-se a associação:

$$\left.\begin{aligned} a_m &\rightarrow \hat{a}_m \\ a_m^* = a_m^{+} &\rightarrow \hat{a}_m^{+} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} [\hat{a}_m, \hat{a}_n^{+}] = \delta_{mn} \\ [a_m, a_n] = 0 \\ \boxed{[a_m^{+}, a_n^{+}] = 0} \end{cases}$$

Solução do osc. harmônico quântico

osc. harm. 1D



$$\boxed{\hat{\mathcal{H}}_{EM} = \sum_m^{\infty} \hbar\omega_m \left(a_m^{+} a_m + 1/2 \right)}$$

$$\sum_m \frac{1}{2}\hbar\omega_m \qquad \mathcal{E} = \hbar\omega = h\nu$$

$$\hookrightarrow \langle 0 | \hat{\mathcal{H}}_{EM} | 0 \rangle = \sum_m^{\infty} \hbar\omega_m$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi\nu$$

$$\begin{cases} \lambda\nu = v = c \\ \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\omega}\cdot 2\pi \rightarrow \omega = c\frac{2\pi}{\lambda} = ck \end{cases}$$

Estados quânticos do Campo Eletromagnético

Fazendo uma analogia com o osc. harmônico quântico,

* Veja Notas de aula osc. harmônico (online)

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + (\omega\hat{x})^2) = \hbar\omega\,(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$$

$$\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a} \rightsquigarrow \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$
$$\hat{n}|0\rangle = 0|0\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle \end{aligned}}$$

$\rightsquigarrow a|0\rangle = 0$

$|0\rangle \equiv$ Estado fundam.

P/ Campo EM ↳ estado de Vácuo $|Vac\rangle$

$$\langle 0|H|0\rangle$$

$$\langle H\rangle_0 = \langle 0|\hbar\omega(\underbrace{\hat{n}+1/2}_{})|0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\langle 0|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}$$

P/ o Caso geral do Campo EM

$$|n_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_m!}}(a_m^+)^n|0\rangle \rightsquigarrow |n_1, n_2, \cdots n_m, \cdots\rangle$$

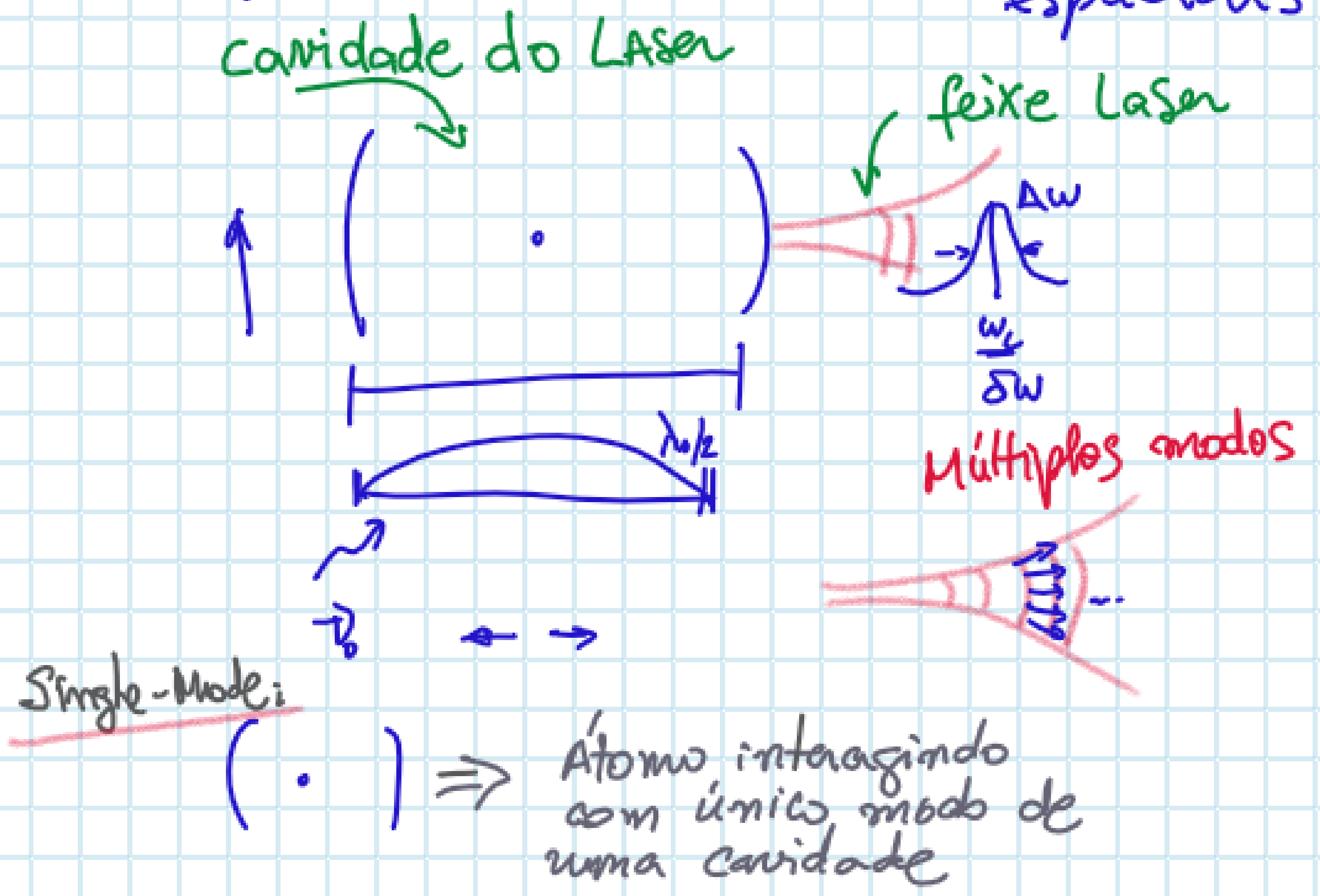
modo — modos

estado produto

$$|1_m\rangle = |0,0,0 \ldots 1, 0, \ldots\rangle$$

$$|n_m\rangle = |n_1\rangle\otimes|n_2\rangle\otimes\cdots|n_m\rangle\otimes\cdots$$

Exemplo de campos com Múltiplos modos espaciais.



$$\boxed{\text{Estados de Fock: estados de número de ocupação} \quad |n_1, n_2, \cdots n_\nu, \cdots n_\infty\rangle}$$

∘ Estados Coerentes:

Os chamados estados coerente da Luz (i.e., do Campo ElM) foram introduzidos por Glauber com autoestados (autovetores) do operador de aniquilação:

P/ um único modo do campo, temos:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \,; \quad \text{onde } \underset{=}{\alpha} \text{ é um número complexo } (\alpha \in \mathbb{C})$$

Esses estados não são estados ortogonais, mas podem ser escritos em termos da base dos estados de Fock

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

$$\hookrightarrow a|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \alpha\sum C_n|n\rangle$$

$$\rightsquigarrow C_n\sqrt{n} = \alpha C_{n-1} \Rightarrow C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0$$

P/ determinar C_0:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |C_0|^2\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$
$$= |C_0|^2 \cdot \exp(|\alpha|^2)$$

Portanto:

$$\boxed{|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle}$$

* Sugestão de leitura: Veja também "estados Comprimidos"... (squeezed states)

M. Orszag, Quantum Optics, 3rd ed. (2016)

Ex. de Aplic.: LIGO!! } Metrologia quântica p/ ondas gravitacionais