MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral para Geociências

1º **Semestre de 2022 -** 3ª **Lista de Exercícios**

1. Determine os valores máximo e mínimo absoluto de f no intervalo dado

   (a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0,3]$
   (b) $f(x) = f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4, \quad [-2,1]$
   (c) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3,2]$
   (d) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}, \quad [1/2, 2]$
   (e) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad [-1,2]$
   (f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad [0,2]$
   (g) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, \pi/3]$
   (h) $f(x) = xe^{-x}, \quad [0,2]$
   (i) $f(x) = x - 3\ln x, \quad [1,4]$
   (j) $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}, \quad [0,1]$
   (k) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x, \quad [0, \pi]$
   (l) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}, -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
   (m) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x, \frac{1}{2} \leq x \leq 4$
   (n) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}, -1 \leq x \leq 2$
   (o)$f(x) = |x^4 - 2x^3|, 0 \leq x \leq 3.$

2. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

   (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \ \leq \ |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.
   (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.
   (d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.
   (e) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \geq x - y$, para todos x, y com $x \geq y \geq 0$.

3. Seja f uma função contínua no intervalo $]2,5[$ e $1 \leq f'(x) \leq 4$, para todo $x \in]2,5[$. Mostre que $0 < f(5) - f(2) \leq 12$.

4. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

5. Mostre que $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que
$$(1 + \pi)^e < (1 + e)^\pi.$$

6. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto de máximo local de g. Verifique que
$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$
   Verifique que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

7. Determine a constante a para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

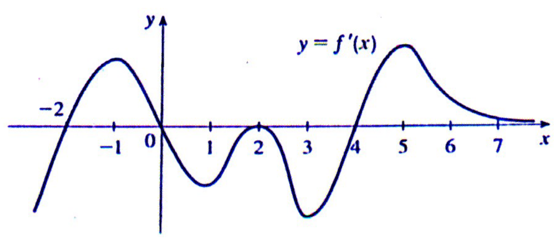
   (a) um mínimo local em $x = 2$.
   (b) um mínimo local em $x = -3$.
   (c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

8. Mostre que a equação $x^5 + 10x + 3 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

9. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

10. Determine c para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

11. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f.

(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

12. Encontre o limite, Use a Regra de L´Hospital ode for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-0. Se a Regra de L´Hospital não for aplicaável, explique por quê:

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^9-1}{x^5-1}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx}$ (f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^t-3^t}{t}$ (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ (k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$

(m) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \alpha x}{x}$ (n) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln(1+2e^x)}$ (o) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \operatorname{arcsen} x}{2x - \arccos x}$ (q) $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x$ (r) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}\ln x$

(s) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 e^{-x^2}$ (t) $\lim\limits_{x\to \pi} (x-\pi)\operatorname{cotg} x$ (u) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}\right)$

(v) $\lim\limits_{x\to -0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cossec} x\right)$ (x) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ (z) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

(aa) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ () $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$ (ab) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x}\right)^x$

(ac) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$ (ad) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ (ae) $\lim\limits_{x\to 0+} (-\ln x)^x$

13. Clacule, caso exista (exercícios adicionais)

(a) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{2x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p \ln x,\ p>0$ (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{p}{x}\right)$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$ (k) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} + \ln x\right]$ (o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$ (q) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ (t) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$ (u) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$ (w) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$

14. Esboce o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ (f) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ (h) $f(x) = e^x - e^{3x}$ (i) $f(x) = x - 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

(j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (k) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (l) $f(x) = x^x$

(m) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2+3)$ (n) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ (o) $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

(p) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$ (q) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ (r) $f(x) = \dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

(s) $f(x) = x^2 \ln x$ (t) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (u) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

15. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

16. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1).

17. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

18. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

19. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

    (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

20. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.