# LISTA DE EXERCÍCIO PARA ENTREGAR

## 1. Problemas

**Problema 1.** *(Desigualdade de Poincaré-Wirtinger)* Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e limitado de classe $C^1$.

Definimos

$$\tilde{L}^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u(x)dx = 0\},$$
$$\tilde{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u(x)dx = 0\}.$$

O objetivo desse exercício é mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2(x)dx \leq C \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx, \quad \forall u \in \tilde{H}^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Observe que o resultado é semelhante à desigualdade de Poincaré vista em sala de aula, mas as hipóteses são diferentes. Em sala de aula, provamos a desigualdade para $u \in H_0^1(\Omega)$. Aqui, queremos provar para $u \in \tilde{H}(\Omega)$. A demonstração também é diferente e será baseada no Teorema 1 da Seção 5.8.1 do livro do Laurence C. Evans, Partial Differential Equations, segunda edição.

i. Mostre que $\tilde{L}^2(\Omega)$ e $\tilde{H}^1(\Omega)$ são subespaços fechados de $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, respectivamente. Portanto, são espaços de Hilbert.

Os itens ii, iii e iv, demonstram a Desigualdade (1.1) usando um argumento de contradição.

ii. Suponha que a constante $C > 0$ não exista. Neste caso, mostre que existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $H^1(\Omega)$ tal que $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\int_\Omega u_k dx = 0$ e

$$\int_\Omega \nabla u_k(x) \cdot \nabla u_k(x)dx < \frac{1}{k}.$$

(Dica: Como a Desigualdade (1.1) não vale para nenhum $C$, deve existir uma função $u_k \in \tilde{H}^1(\Omega)$ que a viole para $C = k$, para cada $k \in \mathbb{N}$).

iii. Usando Rellich-Kondrachov (Teorema 6 do formulário), mostre que existe uma subsequência $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ da sequência do item ii que converge para um elemento $u \in L^2(\Omega)$. Mostre que $u \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, usando a Equação (2.1) do formulário para $u_{k_l}$.

iv. Mostre que a função $u$ do item iii satisfaz $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\int_\Omega u dx = 0$. Obtenha uma contradição, usando a Proposição 7 do formulário.

**Problema 2.** *(Problema de Neumann)* Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e limitado de classe $C^1$, $\tilde{L}^2(\Omega)$ e $\tilde{H}^1(\Omega)$ definidos como no Problema 1. Vamos agora estudar o seguinte problema:

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Dizemos que $u$ é uma solução clássica se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $u$ satisfizer as equações acima. Dizemos que $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$ é uma solução fraca se $u$ satisfizer $a(u, v) = F(v)$ para todo $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$, em que $a : \tilde{H}^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : \tilde{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$
$$F(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

i. Seja $f \in \tilde{L}^2(\Omega)$. Mostre que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica e $\int_\Omega u(x)dx = 0$, então $u$ é uma solução fraca. (Dica: Use o teorema da divergência para $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e depois o Teorema 8).

ii. Mostre que existe uma solução fraca da equação e ela é única. Conclua que existe no máximo uma solução clássica tal que $\int_\Omega u(x)dx = 0$. (Dica: Verifique as condições do Teorema de Lax-Milgram, usando a Desigualdade (1.1) do Problema 1).

iii. Pode-se mostrar que o conjunto $\tilde{C}_c^\infty(\Omega) = \{u \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u(x)dx = 0\}$ é denso em $\tilde{L}^2(\Omega)$. Use este resultado (não precisa provar!) para mostrar que se $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$ for uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então $u$ é uma solução clássica e $\int_\Omega u(x)dx = 0$. (Para obter a condição de contorno, adapte o argumento feito em sala de aula ou use a Proposição 9 do formulário).

**Problema 3.** *(Problema de Sturm-Liouville)* Sejam $p \in C^1([0,1])$ e $q \in C([0,1])$. Suponha que exista $\alpha > 0$ tal que $p(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [0,1]$. Nosso objetivo é mostrar que existe um base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ do espaço de Hilbert $L^2(0,1)$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que

P1) As funções $e_j$ pertencem a $C^2([0,1])$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

P2) $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{de_j}{dx}(x)\right) + q(x)e_j(x) = \lambda_j e_j(x)$.

P3) $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$.

Para tanto, siga os passos abaixo:

i. Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $H^1(0,1)$. Suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que $\|u_j\|_{H^1(0,1)} \leq C$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Use a Proposição 10 e o Teorema 12 do formulário para provar que existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para um elemento $u \in L^2(0,1)$. (Isto demonstra o Teorema de Rellich-Kondrachov em uma dimensão).

ii. Dado $\varepsilon > 0$, definimos $\mu_\varepsilon = -\min_{x\in[0,1]} q(x)+\varepsilon$. Mostre que a função $a : H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) + (q(x) + \mu_\varepsilon)u(x)v(x)dx$$

é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

iii. Dado $u \in H_0^1(0,1)$. Suponha que exista $f \in L^2(0,1)$ tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}$, para todo $v \in H_0^1(0,1)$. Mostre que $u \in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ e $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}(x)\right)+(q(x)+\mu_\varepsilon)u(x) = f(x)$. Conclua que o operador $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1)$ associado a função $a$ definido no Teorema 13 do formulário é tal que $\mathcal{D}(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ e $Au = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}(x)\right) + (q(x) + \mu_\varepsilon)u(x)$, para todo $u \in \mathcal{D}(A)$.

iv. Aplique o Teorema 13 para provar P1, P2 e P3. Conclua, em particular, que $\lambda_j \geq \min_{x\in[0,1]} q(x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

## 2. Formulário

Os resultados abaixo podem ser usados sem demonstração.

### 2.1. Formulário para Problema 1.

**Definição 4.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ se $u \in L^2(\Omega)$ e se, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, existir $v_j \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = -\int_\Omega v_j(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Neste caso, $v_j$ é chamado de derivada fraca de $u$ e denotada por $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Lembramos que os espaços $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ são espaços de Hilbert com produtos internos dados por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$
$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

**Definição 5.** Sejam $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ e $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ espaços de Hilbert tais que $V \subset H$. Dizemos que a inclusão $i : V \to H$ é contínua e compacta se as seguintes propriedades são válidas:
a) Existe $C > 0$ tal que $\|u\|_H \leq C\|u\|_V$ para todo $u \in V$.
b) Se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ for uma sequência limitada em $V$ ($\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_V < \infty$), então existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in H$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|u_{j_k} - u\|_H = 0$.

**Teorema 6.** *(Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$. Logo a inclusão $i$ : $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é contínua e compacta, ou seja, dado uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ limitada em $H^1(\Omega)$, existe uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|u_{j_k} - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.*

O próximo resultado foi provado em sala de aula em uma dimensão. A versão para dimensões maiores pode ser encontrada no Brézis.

**Proposição 7.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e limitado de classe $C^1$. Se $u \in H^1(\Omega)$ é tal que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, então $u$ é uma função constante.*

### 2.2. Formulário para Problema 2.

**Teorema 8.** *(Teorema de Aproximação) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$ e $u \in H^1(\Omega)$. Logo existe uma sequência de funções $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$.*

**Proposição 9.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$ e $u \in C(\partial\Omega)$. Se $\int_{\partial\Omega} uv dS(x) = 0$ para todo $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

### 2.3. Formulário para Problema 3.

**Proposição 10.** *As seguintes propriedades são válidas para o espaço $H^1(0, 1)$:*
*a) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\|u\|_{H^1(0,1)}$ para todo $u \in H^1(0, 1)$.*
*b) Se $u \in H^1(0, 1)$, então $u \in C([0, 1])$ e $|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}|x - y|^{1/2}$.*

*Observação* 11. Para quem é familiar com medida e integração, uma forma mais precisa de enunciar o item b) da proposição acima é afirmando que para cada $u \in H^1(0, 1)$, existe uma única função $v \in C([0, 1])$ tal que $u(x) = v(x)$ para quase todo ponto. O item a) foi provado em sala de aula. O item b) foi provado no exercício 41 da primeira lista.

**Teorema 12.** *(Arzelà-Ascoli num intervalo). Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C([0, 1])$. Suponha que*
*a) Exista uma constante $M > 0$ tal que $\|u_j\|_{L^\infty(0,1)} \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*
*b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$, então $|u_j(x) - u_j(y)| < \varepsilon$, para todo $j \in \mathbb{N}$.*
*Então existe uma função $u \in C([0, 1])$ e uma subsequência $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|u_{j_k} - u\|_{L^\infty(0,1)} = 0$.*

**Teorema 13.** *Sejam $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ e $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ espaços de Hilbert, em que $H$ é separável e de dimensão infinita, e $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função tais que*
*a) O espaço $V$ está contido em $H$ e é um subconjunto denso de $H$.*
*b) A inclusão $i : V \to H$ é contínua e compacta.*

*c) A função a é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.*

*Considere o operador* $A : \mathcal{D}(A) \to H$ *definido por*

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in V : \exists f \in H \ \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \forall v \in V\},$$
$$Au = f.$$

*Logo* $A$ *está bem definido e existe uma base* $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ *de* $H$ *contida em* $\mathcal{D}(A)$ *e uma sequência* $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de números reais positivos tais que as propriedades abaixo são válidas:*

*P1)* $Ae_j = \lambda_j e_j$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

*P2)* $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$.

**Proposição 14.** *Sejam* $a < b$ *números reais. As seguintes inclusões são válidas para todo* $k \in \mathbb{N}$: $C^k([a,b]) \subset H^k(a,b) \subset C^{k-1}([a,b])$. *Além disso, se* $u \in H^k(a,b)$, *então* $u \in C^k([a,b])$ *se, e somente se,* $u^{(k)} \in C([a,b])$, *em que* $u^{(k)}$ *é a* $k$*-ésima derivada fraca de* $u$.