

ELETROMAGNETISMO — IFSC/USP

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Equação de Laplace

A EQUAÇÃO DE POISSON relaciona o potencial elétrico $V(\vec{r})$ com a densidade de carga $\rho(\vec{r})$:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Em regiões de espaço onde inexistente carga, o lado direito é zero e a Eq. (1) se reduz à equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2)$$

As soluções $V(\vec{r})$ da equação de Laplace têm as seguintes propriedades:

- A. $V(\vec{r})$ no centro de uma superfície esférica é igual à média de $V(\vec{r})$ na superfície;
- B. Se uma região fechada ou infinita contiver apenas condutores e espaço vazio, e se o potencial $V(\vec{r})$ for conhecido em todas as superfícies, a solução $V(\vec{r})$ da equação de Laplace no espaço vazio será única. Conhecer o potencial nas superfícies é conhecer as *condições de contorno*;
- C. A propriedade anterior vale também se, além dos condutores, houver uma distribuição fixa de cargas no espaço vazio;
- D. A equação de Laplace é homogênea. Por isso, antes de se imporem as condições de contorno, se $V_1(\vec{r})$ e $V_2(\vec{r})$ forem soluções, qualquer combinação linear $\alpha V_1(\vec{r}) + \beta V_2(\vec{r})$ (onde α e β são constantes) também será solução.

Separação de variáveis

UMA VEZ QUE TENHAMOS AS CONDIÇÕES DE CONTORNO, a propriedade D sugere o seguinte procedimento para encontrar a solução desejada:

1. Procurar soluções da Eq. (2) sem preocupação com as condições de contorno;
2. Escrever a solução geral como combinação linear das soluções assim encontradas, com coeficientes lineares ainda desconhecidos;
3. Impor as condições de contorno para determinar os coeficientes lineares.

Veamos um exemplo. As duas placas horizontais na figura 1 são condutoras e estão aterradas. Elas são tão grandes que podem ser vistas como se estendendo até o infinito nas direções x e $\pm y$. A lâmina condutora vertical em $x = 0$, isolada eletricamente das duas outras, está ligada a uma bateria que a mantém no potencial V_0 . Queremos encontrar o potencial num ponto qualquer com coordenadas (x, y, z) entre as placas. Uma vez que as placas se estendem de $y = -\infty$ a $y = \infty$, o potencial não dependerá de y , e já vemos que $V(x, y, z) = V(x, z)$. As condições de contorno são

$$V(x, z = 0) = 0 \quad (x > 0), \quad (3)$$

$$V(x, z = a) = 0 \quad (x > 0), \quad (4)$$

$$V(x = 0, z) = V_0 \quad (a > z > 0) \quad (5)$$

e

$$V(x \rightarrow \infty, z) = 0. \quad (6)$$

A última condução provém de uma consideração física: na figura, somente a lâmina vermelha está em potencial diferente de zero. O potencial deve tender a zero muito longe dela.

Solução geral

Na região entre as placas não há cargas elétricas. Assim, para encontrar o potencial, precisamos resolver a equação de Laplace. Como o sistema tem geometria cartesiana, procuraremos soluções na forma

$$V(x, z) = X(x)Z(z), \quad (7)$$

onde X e Z são funções a determinar.

Seria otimismo demais esperar que uma função como a da Eq. (3) satisfizesse a equação de Laplace e as condições contorno. Entretanto, neste ponto estamos apenas interessados em resolver a equação, sem preocupação com as condições de contorno. Como a equação de Laplace em coordenadas cartesianas se separa em três termos, um somente com derivadas em relação a x , outro com derivadas em relação a y e um terceiro com derivadas em relação a z , a expressão (7) deve resolver esse primeiro problema.

Explicitamente, a equação tem a forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

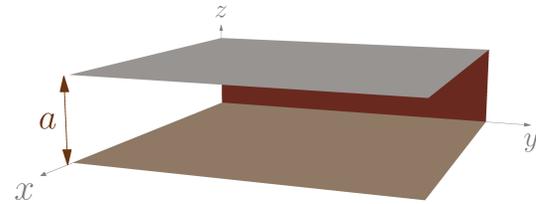


Figura 1: Região delimitada por dois condutores planos horizontais e um vertical. A lâmina vermelha, em $x = 0$, está no potencial V_0 . As duas placas horizontais se estendem até o infinito nas direções x e $\pm y$ e estão aterradas.

Substituir V pelo lado direito da Eq. (7) leva imediatamente à igualdade

$$Z \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (9)$$

ou, se dividirmos os dois lados por XZ ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (10)$$

Essa igualdade somente pode ser satisfeita se cada um dos termos à esquerda for igual a uma constante. Como a soma é zero, há duas possibilidades: (i) as duas constantes serem iguais a zero ou (ii) uma das constantes ser positiva e a outra, negativa. Se as duas forem iguais a zero, o potencial vai subir ou decair linearmente de um extremo ao outro. Uma vez que a região $x > 0$ se estende até o infinito, essa opção não serve. Na segunda opção, a primeira constante deve ser positiva. Caso contrário, a derivada segunda terá sinal oposto ao de X , e a função $X(x)$ oscilará, em lugar de decair a zero.

Assim, para lembrar que a primeira constante é positiva, vamos chamá-la de k^2 ; a segunda constante será $-k^2$. Com isso, a Eq. (10) nos diz que

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \quad (11)$$

e

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0. \quad (12)$$

Esta última igualdade tem a forma da equação do oscilador harmônico. Sua solução, portanto, é

$$Z(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz), \quad (13)$$

onde A e B são constantes.

Já a equação (11) tem exponenciais reais por solução:

$$X(x) = C \exp(kx) + D \exp(-kx). \quad (14)$$

Conseguimos, portanto, o que queríamos nesta etapa: encontramos soluções gerais $V = XZ$ da equação de Laplace. São infinitas soluções, visto que A , B , C , D e k podem variar livremente. Essas soluções não satisfazem as condições de contorno, mas poderemos procurar combinações lineares delas que satisfarão.

Imposição das condições de contorno

A separação do potencial, na forma $V(x, z) = X(x)Z(z)$, simplifica nossa próxima tarefa. Para começar, podemos facilmente garantir que

a condição (3) seja satisfeita: basta fazer $A = 0$ na Eq. (13), pois assim a função $Z(z)$ se reduzirá a um seno, que se anula em $z = 0$. Para satisfazer a Eq. (4), temos de escolher k de forma que o seno se anule quando $z = a$, ou seja, impor que

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Em seguida, para satisfazer a Eq. (6), precisamos apenas impor que $C = 0$: uma vez que k , na Eq. (15), é positivo, o exponencial multiplicado por D decairá a zero quando $x \rightarrow \infty$. Com isso, chegamos ao que queríamos: uma expressão simples para o potencial $V = XZ$ como combinação linear de soluções da equação de Laplace:

$$V(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \exp\left(-\frac{n\pi}{a} x\right), \quad (16)$$

onde reescrevemos o produto das constantes desconhecidas B e D como $E = BD$.

A Eq. (16), por construção, satisfaz as Eqs. (3), (4) e (6). Guardamos a condição de contorno (5) para o último passo, pois precisaremos dela para encontrar os coeficientes E_n . Combinada com a Eq. (16), a Eq. (5) assume a forma

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \quad (a > z > 0). \quad (17)$$

Produto escalar

Queremos agora resolver a Eq. (17). Esse problema é equivalente a uma questão simples de geometria analítica: suponha que você conheça um vetor \vec{v} e queira determinar suas componentes nos eixos \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} . Em outras palavras, o enunciado da questão é o seguinte: *dado um vetor*

$$\vec{v} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z}, \quad (18)$$

encontre os coeficientes α , β e γ .

Sabemos imediatamente resolver essa questão. Para achar α , basta multiplicar escalarmente o vetor \vec{v} por \hat{x} . Uma vez que $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = 0$, isto é, uma vez que os versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são ortogonais, resulta que

$$\alpha = \vec{v} \cdot \hat{x}. \quad (19)$$

Da mesma forma, encontraremos β e γ .

A Eq. (17) é semelhante à Eq. (18). Verdade que, na primeira, há infinitos coeficientes E_n , enquanto a terceira tem somente três (α , β e γ). Isso significa que a Eq. (17) terá de ser resolvida algebricamente. O procedimento, porém, é muito parecido.

Em lugar de três versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , temos infinitas funções

$$Z_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Na geometria analítica, \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são chamados de versores de base. De forma análoga, as funções Z_n são apelidadas *funções de base*.

Em lugar do produto escalar da geometria, definimos o produto escalar entre funções como uma integral sobre toda a região em que elas são definidas. Por exemplo, se $f(z)$ for uma função qualquer, o seu produto escalar com uma das funções de base Z_n será

$$f \cdot Z_n = \int_0^a f(z)Z_n(z) dz. \quad (21)$$

Essa definição se mostra útil porque define ortogonalidade entre as funções de base. Isso pode ser facilmente verificado. Dados dois inteiros m e n quaisquer,

$$Z_m \cdot Z_n = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) dz. \quad (22)$$

A integral à direita dá zero sempre que $m \neq n$. Quando $m = n$, o produto dos senos é $\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}z\right)$ que, em média, vale $1/2$. Assim vemos que

$$Z_m \cdot Z_n = \begin{cases} \frac{a}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (23)$$

Da mesma forma que os versores da geometria analítica são ortogonais entre si, as funções de base $Z_n(z)$ são ortogonais entre si. Essa propriedade permite resolver a Eq. (17) facilmente. Basta fazer o produto escalar de cada um dos lados com uma das funções de base (que chamaremos Z_m para evitar confusão com índice n da soma no lado direito):

$$\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} E_n Z_m \cdot Z_n, \quad (24)$$

onde a integração aparece explicitamente à esquerda, mas aparece na forma de produto escalar à direita.

Como os Z_m e Z_n são ortogonais para $m \neq n$, somente o termo com $n = m$ sobrevive no lado direito, e nesse caso o produto escalar dá $a/2$ [ver Eq. (23)]. No lado esquerdo, a integral é facilmente calculada, visto que V_0 é constante. Resulta que

$$E_m = V_0 \frac{2}{m\pi} (1 - \cos(m\pi)). \quad (25)$$

O cosseno no lado direito da Eq. (25) é unitário para m par e igual a -1 para m ímpar. O lado direito se anula, portanto, para m par e

ficamos com o resultado

$$E_m = V_0 \begin{cases} \frac{4}{m\pi} & (m = 1, 3, \dots) \\ 0 & (m = 2, 4, \dots), \end{cases} \quad (26)$$

que determina, finalmente, o potencial entre as placas:

$$V(x, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{ímpar}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \exp\left(-\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (27)$$

A figura 2 mostra o potencial resultante da Eq. (27) com a soma restrita a $n = 1, 3, \dots, 99$. Os bicos na parte superior aparecem porque a soma representa imperfeitamente a descontinuidade no potencial, que vai de zero a V_0 , subitamente, nas emendas entre as placas horizontais e a placa vertical. Seria necessário levar a soma até infinito para se reproduzir corretamente essa descontinuidade. Para comparação, a figura 3 mostra como os bicos se acentuam quando a soma do lado direito da Eq. (27) é mais restrita: $m = 1, 3, \dots, 9$.

Coordenadas esféricas

O MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS serve, também, para outras geometrias. Problemas com simetria esférica são especialmente importantes. Estamos interessados, aqui, na simetria azimutal, isto é, em sistemas que permanecem invariantes quando são rodados em torno do eixo z .

A figura 4 mostra uma superfície esférica de raio a , centrada na origem do sistema de coordenadas. O potencial da superfície é função do ângulo polar θ :

$$V(r = a, \theta, \varphi) = V_0 \cos(\theta). \quad (28)$$

Queremos encontrar o potencial em pontos dentro ($r < a$) e fora ($r > a$) da superfície.

A Eq. (28) define uma das condições de contorno deste problema. A outra é o comportamento do potencial no infinito:

$$V(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = 0. \quad (29)$$

A simetria azimutal garante que o potencial seja independente de φ :

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r, \theta). \quad (30)$$

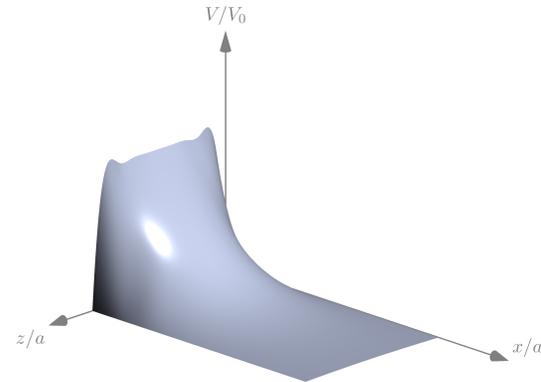


Figura 2: Potencial entre as placas da figura 1. A soma na Eq. (27) foi restrita a 50 termos: $n = 1, 3, \dots, 99$.

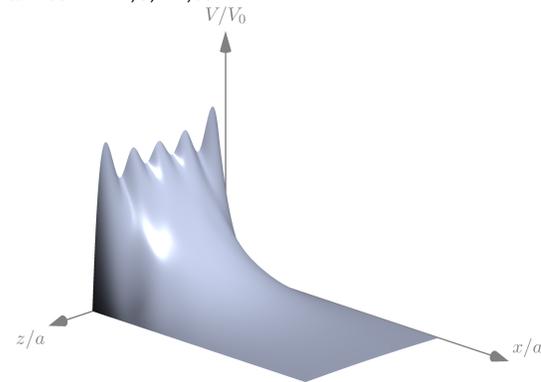


Figura 3: Potencial da Eq. (27) com a soma restrita a $n = 1, 3, \dots, 9$.

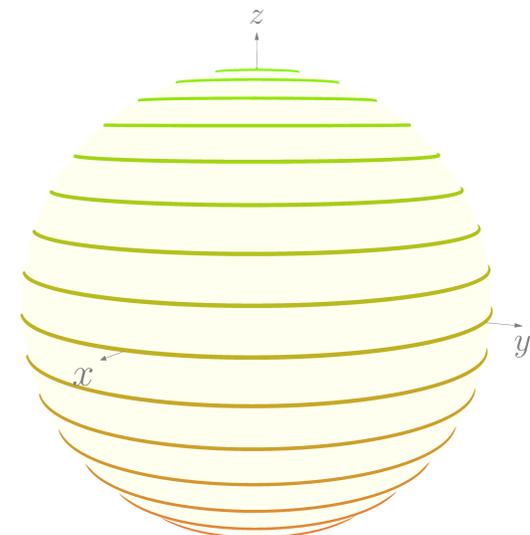


Figura 4: Superfície esférica com potencial que depende do ângulo polar. Os paralelos são linhas equipotenciais. Quanto mais verde é uma linha, mais positivo é o potencial; quanto mais vermelha, mais negativo.

Para seguir a receita do método da separação de variáveis, vamos procurar soluções gerais, que não precisam satisfazer as condições de contorno:

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (31)$$

Precisamos, agora, do laplaciano em coordenadas esféricas. O laplaciano contém derivadas em relação a r , θ e φ . Podemos deixar de lado estas últimas, já que V independe de φ . Assim, o laplaciano se reduz à forma

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial V}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta})}{\partial \theta}, \quad (32)$$

e, com o potencial dado pela Eq. (31), a equação de Laplace se transforma na igualdade

$$\frac{\Theta}{r^2} \frac{d(r^2 \frac{dR}{dr})}{dr} + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{d(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta})}{d\theta} = 0. \quad (33)$$

O divisor comum r^2 no lado esquerdo da Eq. (33) pode ser eliminado, e os dois lados podem ser divididos por $V = R\Theta$. Com isso, a igualdade assume a forma

$$\frac{1}{R} \frac{d(r^2 \frac{dR}{dr})}{dr} + \frac{1}{\sin(\theta)\Theta} \frac{d(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta})}{d\theta} = 0. \quad (34)$$

Reconhecemos aqui o padrão da Eq. (10). A Eq. (34) somente pode ser satisfeita se cada uma das parcelas no lado esquerdo for constante. Como a variável r pode crescer sem limites, enquanto $0 \leq \theta \leq \pi$, devemos associar o primeiro termo a uma constante positiva e o segundo ao negativo dela. É conveniente, como veremos abaixo, escrever essa constante como $\ell(\ell + 1)$. Por ora, ℓ é um número real positivo qualquer. Assim, não há perda de generalidade em escrever a constante positiva nessa forma.

A equação para a parte radial é, portanto,

$$\frac{d(r^2 \frac{dR}{dr})}{dr} = \ell(\ell + 1)R, \quad (35)$$

enquanto a equação para a parte angular é da forma

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta})}{d\theta} + \ell(\ell + 1)\Theta = 0. \quad (36)$$

Parte radial

Para resolver a Eq. (35), procuramos soluções na forma de potência: $R(r) = r^s$, onde s é uma constante a determinar. Substituída essa forma nos dois lados, a igualdade se reduz à expressão

$$s(s + 1)r^s = \ell(\ell + 1)r^s. \quad (37)$$

Isso mostra que r^s é, de fato, solução, desde que o expoente s satisfaça a Eq. (37). Esta última é uma equação do segundo grau para s , que tem duas soluções reais: $s = \ell$ e $s = -(\ell + 1)$. Para cada ℓ , encontramos, portanto, duas soluções, $R = r^\ell$ e $R = 1/r^{\ell+1}$, e a solução geral é

$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}. \quad (38)$$

Na região externa à esfera da figura 4, a constante A tem de ser nula, porque r^ℓ diverge quando $r \rightarrow \infty$. Na região interna, ao contrário, a constante B tem de ser nula, para evitar divergência em $r = 0$. Em resumo, encontramos que

$$R(r) = \begin{cases} Ar^\ell & (r \leq a) \\ \frac{B}{r^{\ell+1}} & (r \geq a) \end{cases}. \quad (39)$$

Ainda não conhecemos o número ℓ ; sabemos, apenas, que é positivo. Para encontrá-lo precisamos resolver a equação diferencial para $\Theta(\theta)$.

Parte angular

Nossa experiência com coordenadas esféricas nos diz que é mais prático trabalhar com a variável $u = \cos(\theta)$ do que trabalhar com θ . Quando se trabalha com a equação de Laplace, é tradicional chamar de x a variável com que trabalharemos, isto é, fazer a substituição $x = \cos \theta$. Não há perigo de confusão com a coordenada cartesiana x , porque aqui estaremos interessados, exclusivamente, em coordenadas esféricas.

Com essa substituição, $\frac{d}{d\theta}$ passa a ser equivalente a $-\sin(\theta) \frac{d}{dx}$, e a Eq. (36) se transforma na equação diferencial

$$\frac{d\left(\sin^2(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta}\right)}{d\theta} + \ell(\ell + 1)\Theta = 0 \quad (40)$$

ou, visto que $\sin^2(\theta) = 1 - x^2$,

$$\frac{d\left((1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx}\right)}{dx} + \ell(\ell + 1)\Theta = 0 \quad (1 \geq x \geq -1). \quad (41)$$

A Eq. (41) é uma equação diferencial de segunda ordem para a função angular $\Theta(x)$. Veremos mais abaixo que, para todo ℓ inteiro (não negativo), ela tem uma solução polinomial. Não há solução para ℓ fracionário ou irracional, como também veremos. Para $\ell = 0, 1, \dots$ há outra solução, que diverge para $x = 1$ ou $x = -1$ e não é física, portanto. As soluções físicas são conhecidas como *polinômios de Legendre*,

indexadas pelo número ℓ e denotadas $P_\ell(x)$. Nós ainda não demonstramos que ℓ tem de ser inteiro, ou que as soluções são polinômios, mas vamos usar essa notação. A Eq. (41) se escreve, então,

$$\frac{d\left((1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right)}{dx} = -\ell(\ell+1)P_\ell \quad (1 \geq x \geq -1). \quad (42)$$

As soluções da Eq. (42) têm duas propriedades importantes: (i) se $P_\ell(x)$ é solução, então $\lambda P_\ell(x)$ também é; e (ii) a equação admite soluções pares, isto é, tais que $P_\ell(x) = P_\ell(-x)$, ou ímpares [$P_\ell(x) = -P_\ell(-x)$].

Para comprovar a primeira propriedade, basta notar que o fator λ aparece dos dois lados da equação e pode, portanto, ser cancelado. Isso cria uma indefinição, porque de cada solução podemos gerar uma infinidade de outras, por multiplicação por constantes arbitrárias. Para eliminar essa incerteza, convencionou-se que

$$P_\ell(x=1) = 1. \quad (43)$$

Para verificar a segunda propriedade, é necessário lembrar que, se uma função é par, sua derivada é ímpar e que, se ela é ímpar, sua derivada é par. Por isso, se P_ℓ for par, o produto $(1-x^2) dP_\ell/dx$ no primeiro termo à esquerda será ímpar, e o primeiro termo será par. Como o lado direito é par, a equação pode ser satisfeita. Da mesma forma, se P_ℓ for ímpar, a equação pode ser satisfeita.

Solução para $\ell = 0$. Para aprender a resolver a equação diferencial, vamos começar com a versão mais simples, $\ell = 0$. Nesse caso, a solução que procuramos é $P_0(x)$, que obedece a equação diferencial

$$\frac{d\left((1-x^2)\frac{dP_0}{dx}\right)}{dx} = 0. \quad (44)$$

Como a derivada é igual a zero, concluímos que

$$\frac{dP_0}{dx} = \frac{c_0}{1-x^2}, \quad (45)$$

onde c_0 é uma constante a determinar.

A Eq. (45) é de primeira ordem. Pode, portanto, ser integrada diretamente:

$$P_0(x) = c_0 \int \frac{1}{1-x^2} dx + c_1, \quad (46)$$

onde a integral é indefinida e c_1 é a constante de integração.

Efetuada a integral, encontramos que

$$P_0(x) = \frac{c_0}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c_1. \quad (47)$$

Cada um dos termos à direita define uma solução. O primeiro, porém, é a solução não-física, já mencionada. De fato, o logaritmo diverge para $x = 1$ e $x = -1$. O coeficiente c_0 deve ser zero, portanto, para eliminar essa solução.

O que resta é a constante c_1 , e a Eq. (43) mostra que $c_1 = 1$. Isso reduz a Eq. (47) a uma expressão muito simples:

$$P_0(x) = 1. \quad (48)$$

Solução para $\ell > 0$: método de Frobenius. Para $\ell > 0$, a Eq. (42) é mais complexa. Para resolvê-la, vamos recorrer a um procedimento matemático conhecido como *método de Frobenius*. O método de Frobenius procura soluções P_ℓ na forma de série de potências:

$$P_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (49)$$

com coeficientes c_n que serão determinados com ajuda da equação diferencial.

Dada a expressão (49), as derivadas no primeiro termo à esquerda na Eq. (55) podem ser calculadas, e resulta a igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_n x^n + \ell(\ell+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \quad (50)$$

Na primeira soma à direita, a potência de x é $n-2$, enquanto a potência é n nos demais. Para equalizar as potências, mudamos o índice da soma de n para $m = n-2$. Com isso, chegamos à igualdade

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)c_{m+2} x^m - \sum_{n=0}^{\infty} (n(n+1) - \ell(\ell+1))c_n x^n = 0 \quad (51)$$

e, como os índices são mudos, podemos trocar m por n na primeira soma. Resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n+1) - \ell(\ell+1))c_n x^n. \quad (52)$$

Temos agora duas séries infinitas, uma no lado esquerdo, outra no direito. Potências iguais de x devem ter o mesmo coeficiente. Significa que

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)} c_n. \quad (53)$$

A Eq. (53) é uma relação de recorrência: dado c_0 , por exemplo, ela permite calcular c_2 . Na sequência, a partir de c_2 ela determina c_4 e assim, sucessivamente, todos os coeficientes com índices pares. E os ímpares? Bem, é aqui que entra a paridade das soluções: se

$P_\ell(x)$ for uma função par, só haverá coeficientes c_n com n par. Se for ímpar, somente haverá coeficientes com n ímpar, e nesse caso devemos começar com c_1 , e não com c_0 . Mas isso veremos melhor mais abaixo.

A preocupação que temos, neste momento, é a convergência da série (49). Quando x está perto de zero, não precisamos nos preocupar, porque x^n ficará rapidamente muito pequeno à medida que n cresce. Se x for igual à unidade, porém, teremos que

$$P_\ell(x=1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \quad (54)$$

Essa igualdade parece criar um problema. De acordo com a Eq. (53), os coeficientes c_n tendem a ficar iguais, isto é, $c_{n+2} \approx c_n$ quando n for muito maior do que ℓ . Nessas condições, a soma à direita na Eq. (54) divergirá.

Nem sempre isso acontecerá, porém. Suponhamos, por exemplo, que a solução que buscamos seja par. Nesse caso, todos os coeficientes c_n para $n = 1, 3, \dots$ serão nulos. Pelo menos alguns dos coeficientes c_n com n par serão diferentes de zero. Digamos, porém, que, para um certo N par, o coeficiente c_N seja zero. De acordo com a Eq. (53), os coeficientes subsequentes c_{N+2} , c_{N+4} etc., serão todos nulos. A soma no lado direito da Eq. (54) incluirá apenas as parcelas c_0, c_2, \dots, c_{N-2} e será finita. Da mesma forma, haverá convergência se P_ℓ for ímpar e um dos c_n for zero para n ímpar.

Vejam, por exemplo, o que acontece com $\ell = 3$. Se escolhermos $c_0 = 0$, todos os subsequentes, c_2, c_4 etc., também serão nulos. Para que P_3 não seja nulo, precisamos fazer $c_1 \neq 0$. De acordo com a Eq. (53), $c_3 = -(5/3)c_1$ e $c_5 = 0$. Significa que c_7, c_9, \dots , são todos nulos. Nossa solução é, portanto, o polinômio

$$P_3(x) = c_1(x - \frac{5}{3}x^3). \quad (55)$$

Para encontrar c_1 , lembramos que $P_3(x=1) = 1$. Para $x = 1$, Eq. (55) mostra que

$$1 = c_1(1 - \frac{5}{3}), \quad (56)$$

ou seja,

$$c_1 = -\frac{3}{2}. \quad (57)$$

Com isso, a Eq. (55) especifica a solução:

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x. \quad (58)$$

Tabela 1: Os primeiros cinco polinômios de Legendre

ℓ	$P_\ell(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{3x^2 - 1}{2}$
3	$\frac{5x^3 - 3x}{2}$
4	$\frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$

Precisamente da mesma forma, podemos encontrar as demais soluções $P_\ell(x)$. Para que o lado direito da Eq. (53) se anule, ℓ deve ser inteiro. Isso garante que $c_{\ell+2}, c_{\ell+4}, \dots$, sejam nulos. Se ℓ for ímpar, escolhemos $c_0 = 0$, para que todos os coeficientes pares sejam zero. Nesse caso, $P_\ell(x)$ será ímpar, e a Eq. (53) determinará todos os coeficientes a partir de c_1 . Para encontrar c_1 , finalmente, impomos $P_\ell(x = 1) = 1$. Se ℓ for par, escolhemos $c_1 = 0$ e procedemos da mesma forma. A tabela 1 lista os cinco primeiros polinômios, que aparecem em gráfico na figura 5. Para $x = 1$, todos são iguais à unidade, em acordo com a Eq. (43). Para ℓ par, os polinômios são pares; para ℓ ímpar, são ímpares. Para $x = -1$, os polinômios pares assumem o valor unitário, enquanto os ímpares são iguais a -1 .

Ortogonalidade. As funções radiais (39) não são ortogonais entre si, mas os P_ℓ são. Para verificar, começamos por calcular a integral

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 P_\ell(x) \frac{d\left((1-x^2)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\right)}{dx} dx. \quad (59)$$

De acordo com a Eq. (42), o fator vermelho no integrando à direita é igual a $\ell'(\ell' + 1)P_{\ell'}$. A Eq. (59) equivale, portanto, a

$$\mathcal{I} = -\ell'(\ell' + 1) \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx. \quad (60)$$

Por outro lado, podemos integrar por partes, duas vezes o lado direito da Eq. (60), para chegar ao resultado equivalente

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \frac{d\left((1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right)}{dx} P_{\ell'} x dx. \quad (61)$$

Desta vez, a Eq. (42) nos diz que o termo verde no integrando é igual a $-\ell(\ell + 1)P_\ell(x)$. Assim,

$$\mathcal{I} = -\ell(\ell + 1) \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx. \quad (62)$$

Subtraímos agora a Eq. (60) da Eq. (62), para ver que

$$\left(\ell(\ell + 1) - \ell'(\ell' + 1)\right) \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = 0, \quad (63)$$

e concluir que de duas uma: ou $\ell = \ell'$ ou a integral é zero.

Quando $\ell = \ell'$, a integral no lado esquerdo da Eq. (63) é trabalhosa demais para ser efetuada aqui, mas o resultado é

$$\int_{-1}^1 P_\ell^2(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1}. \quad (64)$$

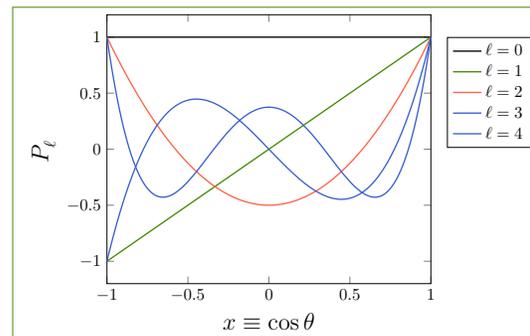


Figura 5: Primeiros cinco polinômios de Legendre.

Em coordenadas esféricas, dadas duas funções $f(x = \cos(\theta))$ e $g(x = \cos(\theta))$ definimos o seu produto escalar como

$$f \cdot g \equiv \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx. \quad (65)$$

Com essa definição, a Eq. (63) pode ser escrita na forma

$$P_\ell \cdot P_{\ell'} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq \ell') \\ \frac{2}{2\ell + 1} & (\ell = \ell') \end{cases}. \quad (66)$$

Condições de contorno

Estamos prontos, agora, para concluir a solução do problema da figura 4. Já sabemos que a solução geral tem a forma

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) & (r \geq a) \\ \sum_\ell \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) & (r \leq a). \end{cases} \quad (67)$$

Para encontrar os coeficientes A_ℓ e B_ℓ , temos de impor a última condição de contorno, isto é, a Eq. (28). Outra vez, encontramos um problema análogo ao da geometria analítica: temos um vetor e queremos encontrar suas componentes. No caso, as funções de base são os polinômios de Legendre. As funções radiais não servem, porque não são ortogonais, mas a ortogonalidade (66) é suficiente para determinar os coeficientes.

Como sempre, precisamos projetar a condição de contorno sobre uma das funções de base, que chamaremos de P_m . Resulta imediatamente que

$$V_0 \int_{-1}^1 x P_m(x) dx = A_m a^m, \quad (68)$$

da condição para $r \geq a$, e

$$V_0 \int_{-1}^1 x P_m(x) dx = \frac{B_m}{a^{m+1}}, \quad (69)$$

da condição para $r \leq a$.

Calcular a integral no lado esquerdo das Eqs. (68) e (69) é fácil, porque $P_1(x) = x$, conforme mostra a tabela 1. A integral é o produto escalar entre P_1 e P_m , que dá $2/3$ para $m = 1$ e zero caso contrário. Da Eq. (68), vemos então que

$$A_1 = V_0 \frac{2}{3a} \quad (70)$$

e que os demais coeficientes A_ℓ ($\ell = 0, 2, 3, \dots$) são nulos.

Da Eq. (69), vemos analogamente que

$$B_1 = V_0 \frac{2a^2}{3}. \quad (71)$$

O potencial é, portanto, dado pela igualdade

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{3} V_0 \frac{r}{a} \cos(\theta) & (r \leq a) \\ \frac{2}{3} V_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos(\theta) & (r \geq a) \end{cases}. \quad (72)$$

Momento de dipolo

Da Eq. (72) podemos calcular o campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ em todo o espaço. Estamos especialmente interessados na componente radial $E_r = -dV/dr$ do campo perto da superfície, dentro e fora da esfera:

$$E_r = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{V_0}{a} \cos(\theta) & (r = a + \eta) \\ -\frac{2}{3} V_0 \cos(\theta) & (r = a - \eta) \end{cases}, \quad (73)$$

onde η é uma distância infinitesimal.

Segundo a lei de Gauss, a densidade de carga na superfície é

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 (E_r(a + \eta) - E_r(a - \eta)), \quad (74)$$

ou, da Eq. (73),

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \frac{2}{a} V_0 \cos(\theta). \quad (75)$$

A densidade de carga é positiva no hemisfério superior ($\theta < \pi/2$) e negativa no hemisfério inferior ($\pi/2 < \theta < \pi$). A carga total é zero. A distribuição tem, porém, um *momento de dipolo*. Assim como a carga da distribuição é a integral $\int dq$, o momento de dipolo de uma distribuição de carga é um vetor, definido pela integral

$$\vec{p} = \int_V \vec{r} dq, \quad (76)$$

onde a integral cobre todo o volume da distribuição.

No problema que nos interessa, a distribuição é superficial. Assim, é mais fácil escrever o elemento de carga como σdA e integrar sobre a superfície da esfera:

$$\vec{p} = \int \vec{r} \sigma(\vec{r}) dA. \quad (77)$$

Por simetria, dado que a densidade de carga somente depende do ângulo polar θ , a integral na Eq. (77) resulta num vetor paralelo a \hat{z} .

Podemos substituir \vec{r} por $z\hat{z}$ ou $a \cos(\theta)\hat{z}$. O momento de dipolo passa a ser expresso por

$$\vec{\mathbf{p}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta) a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{z}. \quad (78)$$

A integral sobre o ângulo azimutal vale 2π , e, como conhecemos a densidade superficial $\sigma(\theta)$, podemos calcular a integral sobre o ângulo polar. Com a tradicional mudança de variáveis $u = \cos(\theta)$, nós a reduzimos o integrando a u^2 , e resulta que

$$\vec{\mathbf{p}} = \epsilon_0 \frac{8\pi}{3} a^2 V_0 \hat{\mathbf{p}}. \quad (79)$$

De posse dessa igualdade, podemos reescrever o potencial V . A Eq. (72) descreve o potencial em função coordenadas esféricas r e θ . O momento de dipolo permite expressá-lo de forma independente do sistema de coordenadas. Se notarmos que $\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = p \cos(\theta)$, poderemos escrever que, fora da esfera,

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (r \geq a). \quad (80)$$

Essa igualdade vai nos ajudar no tema Dielétricos. Ela mostra que, enquanto o potencial de uma carga decai com $1/r$, e sua dependência angular é dada por $P_0(\cos\theta) = 1$, o potencial do dipolo decai com $1/r^2$ e tem dependência angular dada por $P_1(\cos\theta) = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$.