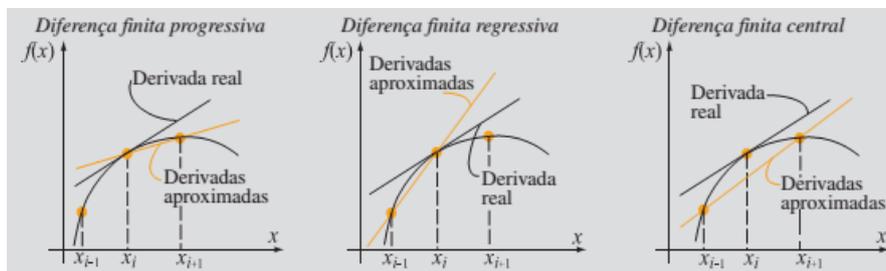


Exercícios de fixação - tópico 10: Problemas de valor inicial (PVC) diferenças finitas

1. A aproximação por diferenças finitas da derivada de 1ª ordem df/dx de uma função $f(x)$ em um ponto $x = x_i$ requer valores da função $f(x)$ em pontos na vizinhança do ponto x_i . As chamadas diferenças finitas progressivas, regressivas e centrais são as fórmulas mais simples, quais sejam:

Diferenças progressivas	Diferenças regressivas	Diferenças centrais
$\left. \frac{df}{dx} \right _{x=x_i} \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$	$\left. \frac{df}{dx} \right _{x=x_i} \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}}$	$\left. \frac{df}{dx} \right _{x=x_i} \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$

As figuras abaixo ilustram graficamente tais aproximações em relação ao valor exato (real).



Para $f(x) = x^3$, calcule numericamente df/dx no ponto $x_i = 3$ usando as fórmulas de diferenças finitas progressivas, regressivas e centrais, com base nos pontos: (a) $x_{i-1} = 2, x_i = 3$ e $x_{i+1} = 4$; (b) $x_{i-1} = 2.75, x_i = 3.00$ e $x_{i+1} = 3.25$. Compare os resultados numéricos com o valor exato ($= 27$).

2. Em um experimento de vibração, um bloco móvel é preso a uma mola e a um amortecedor para ensaiar um movimento harmônico amortecido. A tabela abaixo mostra a posição $x(t)$ do móvel (em relação à posição de equilíbrio $x = 0$) em diferentes instantes no intervalo $4 \text{ s} \leq t \leq 8 \text{ s}$:

t (s)	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
x (cm)	-5.87	-4.23	-2.55	-0.89	0.67	2.09	3.31	4.31	5.06	5.55	5.78
t (s)	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	
x (cm)	5.77	5.52	5.08	4.46	3.72	2.88	2.00	1.10	0.23	-0.59	

A partir destes dados, trace os gráficos da posição $x(t)$, da velocidade $v(t) = dx/dt$ e da aceleração $a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2$ do móvel no intervalo $4 \text{ s} \leq t \leq 8 \text{ s}$.

3. Obtenha o perfil de temperatura $T(x)$ no interior de um material plano cuja espessura é muito menor que as demais dimensões (ex: uma placa). Há geração interna de energia, a face em $x = 0$ é mantida à temperatura constante T_{const} (condição de contorno de Dirichlet) e a face em $x = L$ troca calor por convecção com ar que está a T_{∞} (condição de contorno de Robin). Dados: $L = 0.01 \text{ m}, h = 200 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}, k = 18 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}, \dot{e} = 7.2 \times 10^7 \text{ W/m}^3, T_{\infty} = 100 \text{ °C}, T_{\text{const}} = 50 \text{ °C}$.

Respostas de exercícios selecionados

1. (a) progressivas: 37, regressivas: 19, centrais: 28; (b) progressivas: 29.3125, regressivas: 24.8125, centrais: 27.0625

